

Оглавление

1	Введение в анализ	3
1.1	Элементарные сведения из логики и теории множеств	3
1.1.1	Высказывания, предикаты связки	3
1.1.2	Кванторы	3
1.1.3	Множества, равенство двух множеств, подмножества	3
1.1.4	Простейшие операции над множествами	3
1.1.5	Принцип двойственности	3
1.1.6	Понятие счетного множества	3
1.2	Теория вещественных чисел	3
1.2.1	Множество рациональных чисел и его свойства	3
1.2.2	Вещественные числа, основные свойства вещественных чисел	3
1.2.3	Промежутки и их виды	3
1.2.4	Основные леммы теории вещественных чисел	3
1.3	Ограниченное множество, границы	4
1.3.1	Границы множества	4
1.3.2	Существование точной верхней границы у ограниченного сверху множества	4
1.3.3	Сечения в множестве рациональных чисел	4
1.3.4	Свойства \sup и \inf	4
1.3.5	Отделимость множеств, лемма о системе вложенных отрезков	4
1.3.6	Лемма о последовательности стягивающихся отрезков	4
1.4	Отображения, функции	4
1.4.1	Отображения, виды отображений и т. д.	4
1.4.2	Вещественные функции	4
1.5	Предел последовательности	4
1.5.1	Последовательность элементов множества, числовая последовательность, определения предела числовой последовательности и бесконечно малой последовательности	4
1.5.2	Единственность предела последовательности	4
1.5.3	Подпоследовательности, связь пределов последовательности и подпоследовательности	4
1.5.4	Лемма о двух милиционерах	4
1.5.5	Основные теоремы о пределах последовательности	4
1.5.6	Понятие бесконечно большой последовательности	4
1.5.7	Монотонные последовательности, критерий существования предела монотонной послед	4
1.5.8	Существование предела последовательности $(1 + 1/n)^n$, число e	4
1.6	Понятие предельной точки числового множества, теорема Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши	5
1.6.1	Предельная точка множества	5
1.6.2	Теорема о последовательности, сходящейся к предельной точке	5
1.6.3	Теорема Больцано-Вейерштрасса	5
1.6.4	Критерий Коши	5
1.7	Верхний и нижний пределы последовательности	5
1.7.1	Понятие расширенной числовой прямой, понятие бесконечных пределов	5
1.7.2	Понятие частичных верхних и нижних пределов последовательности. Теорема о существовании у каждой последовательности ее верхнего и нижнего предела	5
1.7.3	Характеристические свойства верхнего и нижнего предела последовательности	5
1.7.4	Критерий существования предела последовательности	6
2	Вещественная функция вещественного аргумента	7
2.1	Предел вещественной функции вещественного аргумента	7
2.1.1	Определение предела функции по Коши, примеры	7
2.1.2	Определение предела функции по Гейне, примеры, эквивалентность определений	7
2.1.3	Обобщение понятия предела функции на расширенную числовую ось	7
2.2	Свойства пределов функции и функций, имеющих предел	7

2.2.1	Свойства, связанные с неравенствами	7
2.2.2	Свойства, связанные с арифметическими операциями	7
2.3	Односторонние пределы функции	7
2.3.1	Определение односторонних пределов, связь между существованием предела и односторонних пределов функции	7
2.3.2	Теорема о существовании односторонних пределов у монотонной функции и её следствия	7
2.4	Критерий Коши, замечательные пределы, бесконечно малые функции	8
2.4.1	Критерий Коши существования предела функции	8
2.4.2	Первый замечательный предел	8
2.4.3	Второй замечательный предел	8
2.4.4	Бесконечно малые функции и их классификация	8
2.5	Непрерывные функции. Общие свойства	8
2.5.1	Понятие непрерывности функции в точке	8
2.5.2	Непрерывность функции на множестве	10
2.5.3	Понятие колебания функции на множестве и в точке. Необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке	10
2.5.4	Односторонняя непрерывность	11
2.5.5	Классификация точек разрыва	11
2.5.6	Локальные свойства непрерывных функций	11
2.6	Функции, непрерывные на отрезке	11
2.6.1	Теорема Больцано-Коши и следствия из неё	11
2.6.2	Первая теорема Вейерштрасса	12
2.6.3	Вторая теорема Вейерштрасса	13
2.6.4	Понятие равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора, следствия из неё	13
2.6.5	Свойства монотонных функций. Теорема об обратной функции	14
2.6.6	Непрерывность элементарных функций	16
3	Основы дифференциального исчисления	17
3.1	Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной	17
3.1.1	Определение производной и дифференциала, связь между этими понятиями	17
3.1.2	Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функций	17
3.1.3	Дифференцирование и арифметические операции	17
3.1.4	Теорема о производной сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала	17
3.1.5	Теорема о производной обратной функции	17
3.1.6	Производные основных элементарных функций. Доказательство	17
3.1.7	Касательная к кривой. Геометрический смысл производной и дифференциала	17
3.1.8	Физический смысл производной и дифференциала	17
3.1.9	Односторонние и бесконечные производные	17
3.1.10	Производные и дифференциалы высших порядков	17
3.2	Основные теоремы дифференциального исчисления	17
3.2.1	Понятие о локальном экстремуме функции	17
3.2.2	Теорема Ферма	19
3.2.3	Теорема Ролля	19
3.2.4	Теорема Лагранжа и следствия из неё	20
3.2.5	Теорема Коши	21
3.3	Формула Тейлора	22
3.3.1	Формула Тейлора для многочлена	22
3.3.2	Формула Тейлора для произвольной функции. Различные формы остаточного члена формулы Тейлора	22
3.3.3	Локальная формула Тейлора	22
3.3.4	Формула Маклорена. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций	22
3.3.5	Применение формулы Тейлора	22
3.4	Правило Лопиталья	22
3.4.1	Неопределённость. Виды неопределённостей	22
3.4.2	Теорема Лопиталья	23
3.4.3	Применение правила Лопиталья	24

Глава 1

Введение в анализ

1.1 Элементарные сведения из логики и теории множеств

1.1.1 Высказывания, предикаты связки

1.1.2 Кванторы

1.1.3 Множества, равенство двух множеств, подмножества

1.1.4 Простейшие операции над множествами

1.1.5 Принцип двойственности

1.1.6 Понятие счетного множества

...

1.2 Теория вещественных чисел

1.2.1 Множество рациональных чисел и его свойства

1.2.2 Вещественные числа, основные свойства вещественных чисел

1.2.3 Промежутки и их виды

1.2.4 Основные леммы теории вещественных чисел

...

1.3 Ограниченное множество, границы

1.3.1 Границы множества

1.3.2 Существование точной верхней границы у ограниченного сверху множества

1.3.3 Сечения в множестве рациональных чисел

1.3.4 Свойства \sup и \inf

1.3.5 Отделимость множеств, лемма о системе вложенных отрезков

1.3.6 Лемма о последовательности стягивающихся отрезков

...

1.4 Отображения, функции

1.4.1 Отображения, виды отображений и т. д.

1.4.2 Вещественные функции

...

1.5 Предел последовательности

1.5.1 Последовательность элементов множества, числовая последовательность, определения предела числовой последовательности и бесконечно малой последовательности

1.5.2 Единственность предела последовательности

1.5.3 Подпоследовательности, связь пределов последовательности и подпоследовательности

1.5.4 Лемма о двух милиционерах

1.5.5 Основные теоремы о пределах последовательности

1.5.6 Понятие бесконечно большой последовательности

1.5.7 Монотонные последовательности, критерий существования предела монотонной послед

1.5.8 Существование предела последовательности $(1 + 1/n)^n$, число e

...

1.6 Понятие предельной точки числового множества, теорема Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши

1.6.1 Предельная точка множества

1.6.2 Теорема о последовательности, сходящейся к предельной точке

1.6.3 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема.

Любое бесконечное ограниченное множество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.

Мнемоника. Название теоремы удобно запоминать по первым буквам прилагательных:

«**Б**есконечное **о**граниченное множество **в**ещественных чисел»

«**Б**ольцано-**В**ейерштрасса»

1.6.4 Критерий Коши

...

1.7 Верхний и нижний пределы последовательности

1.7.1 Понятие расширенной числовой прямой, понятие бесконечных пределов

1.7.2 Понятие частичных верхних и нижних пределов последовательности. Теорема о существовании у каждой последовательности ее верхнего и нижнего предела

1.7.3 Характеристические свойства верхнего и нижнего предела последовательности

Теорема.

Для того, чтобы число $a \in \mathbb{R}$ было верхним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

$$1) \forall (\varepsilon > 0) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) [x_n < a + \varepsilon]$$

$$2) \forall (\varepsilon > 0) \forall (m \in \mathbb{N}) \exists (n \geq m) [x_n > a - \varepsilon]$$

Замечание.

Условие (1) означает, что количество членов последовательности, больших $a + \varepsilon$, конечно.

Условие (2) означает, что количество членов подпоследовательности, больших $a - \varepsilon$, бесконечно.

Аналогично формулируется характеристическое свойство нижнего предела:

Теорема.

Для того, чтобы число $a \in \mathbb{R}$ было нижним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

- 1) $\forall(\varepsilon > 0) \exists(n_0 \in \mathbb{N}) \forall(n \geq n_0) [x_n > a - \varepsilon]$
- 2) $\forall(\varepsilon > 0) \forall(m \in \mathbb{N}) \exists(n \geq m) [x_n < a + \varepsilon]$

Замечание.

Условие (1) означает, что количество членов последовательности, меньших $a - \varepsilon$, конечно.

Условие (2) означает, что количество членов подпоследовательности, меньших $a + \varepsilon$, бесконечно.

1.7.4 Критерий существования предела последовательности

Теорема.

Предел последовательности существует тогда и только тогда, когда верхний и нижний пределы этой последовательности равны между собой.

В таком случае предел последовательности равен верхнему и нижнему её пределу.

Т. е.

$$\exists (\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}) \Leftrightarrow (\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n)$$

$$\exists (\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \lim x_n$$

Глава 2

Вещественная функция вещественного аргумента

2.1 Предел вещественной функции вещественного аргумента

2.1.1 Определение предела функции по Коши, примеры

2.1.2 Определение предела функции по Гейне, примеры, эквивалентность определений

2.1.3 Обобщение понятия предела функции на расширенную числовую ось

...

2.2 Свойства пределов функции и функций, имеющих предел

2.2.1 Свойства, связанные с неравенствами

2.2.2 Свойства, связанные с арифметическими операциями

...

2.3 Односторонние пределы функции

2.3.1 Определение односторонних пределов, связь между существованием предела и односторонних пределов функции

2.3.2 Теорема о существовании односторонних пределов у монотонной функции и её следствия

...

2.4 Критерий Коши, замечательные пределы, бесконечно малые функции

2.4.1 Критерий Коши существования предела функции

2.4.2 Первый замечательный предел

2.4.3 Второй замечательный предел

2.4.4 Бесконечно малые функции и их классификация

...

2.5 Непрерывные функции. Общие свойства

2.5.1 Понятие непрерывности функции в точке

Определение непрерывности функции в точке по Коши.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Функция f непрерывна в точке x_0 , если

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Или, что то же самое, но с применением окрестностей:

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)[f(U_\delta(x_0) \cap X) \subset U_\varepsilon(f(x_0))]$$

Или, что то же самое:

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)[f(U_{\delta,X}(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))]$$

И, наконец, полностью перейдя в термины окрестностей:

$$\forall(U \in O(f(x_0)))\exists(V \in O_X(x_0))[f(V) \subset U]$$

Замечание 1.

Вдумчивый читатель легко заметит, что это определение похоже на определение предела в точке, в котором проколотые окрестности заменены на непроколотые. Несколько строками ниже мы рассмотрим вопрос о связи непрерывности функции, её предела и её значения в данной точке.

Замечание 2.

Если x_0 - изолированная точка множества X , то

$$\exists(U \in O(x_0))[U \cap X = \{x_0\}] \Rightarrow f(U) = \{f(x_0)\},$$

т. е. найдётся окрестность точки x_0 , образом которой является единственная точка, и функция f в точке x_0 непрерывно. Однако никаких содержательных результатов этот случай не даёт, и потому в дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать непрерывность функции, заданной на множестве точек, лишь в предельных точках этого множества.

Критерий непрерывности функции в точке.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X . f непрерывна в x_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Следствие 1.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X . f непрерывна в x_0 тогда и только тогда, когда знак предела и знак функции коммутируют, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

Следствие 2.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X , f непрерывна в x_0 , $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. $\Delta x \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta y \rightarrow 0$

Определение непрерывности в точке по Гейне.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X . f непрерывна в x_0 , если

$$\forall(\{x_n\} : x_n \in X \cap x_n \rightarrow x_0)[f(x_n) \rightarrow f(x_0)]$$

Обозначив $\Delta x = x_n - x_0$, $\Delta y = f(x_n) - f(x_0)$, можем сформулировать:

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$$

2.5.2 Непрерывность функции на множестве

Определение. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной на X , если она непрерывна во всех точках $x \in X$.

Определение. Если функция $f : x \rightarrow \mathbb{R}$ не является непрерывной в точке $x_0 \in X$, то x_0 называется точкой разрыва функции f .

Замечание 1.

Так как все точки множества \mathbb{N} изолированы, то любая функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

2.5.3 Понятие колебания функции на множестве и в точке. Необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset X$, $\alpha_E = \inf_E f(x)$, $\beta_E = \sup_E f(x)$. Тогда разность $\alpha_E - \beta_E$ называется колебанием функции f на множестве E :

$$\omega(f, E) = \alpha_E - \beta_E = \sup_E f(x) - \inf_E f(x)$$

Или, что то же самое,

$$\omega(f, E) = \sup_{a, b \in E} (f(a) - f(b))$$

Примеры.

$$\omega(x^2, [-2; 4]) = 16$$

$$\omega(\operatorname{sgn} x, [0; 4]) = 1$$

$$\omega(\operatorname{sgn} x, (0; 4]) = 0$$

$$\omega(\operatorname{sgn} x, [-1; 4]) = 2$$

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X . Величина $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, U_\delta(x_0))$ называется колебанием функции f в точке x_0 :

$$\omega(f, x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, U_\delta(x_0))$$

Теорема.

Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда $\omega(f, x_0) = 0$.

2.5.4 Односторонняя непрерывность

2.5.5 Классификация точек разрыва

2.5.6 Локальные свойства непрерывных функций

...

2.6 Функции, непрерывные на отрезке

2.6.1 Теорема Больцано-Коши и следствия из неё

Теорема.

Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ и f непрерывна на $[a; b]$, при этом $f(a) \cdot f(b) < 0$, т. е. на концах отрезка $[a; b]$ непрерывная на нём функция f принимает значения разного знака. Тогда $\exists(c \in (a; b))[f(c) = 0]$, т. е. хотя бы в одной точке интервала $(a; b)$ функция обращается в нуль.

Замечание.

Теорема Больцано-Коши не только утверждает существование точки, в которой функция обращается в нуль, но и фактически даёт способ её найти - методом половинного деления отрезка. Этот факт может быть применён при нахождении корня уравнения численными методами.

Следствие 1 (теорема о промежуточном значении).

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, при этом f непрерывна на некотором промежутке $Y \subset X$, $\{a; b\} \subset Y$, $a < b$. Тогда $\forall(\gamma \text{ между } f(a) \text{ и } f(b))\exists(c : c \in [a; b])[f(c) = \gamma]$.

Следствие 2.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, X - промежуток и f непрерывна на нём. Тогда $f(X)$ - тоже промежуток.

2.6.2 Первая теорема Вейерштрасса

Теорема.

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нём.

Определение. Компактом (компактным множеством) называется такое множество X , что

$$\forall(\{x_n\} : x_n \in X) \exists(\{x_{n_k}\}) [\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0 \in X],$$

т. е. в любой последовательности точек этого множества можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке этого множества.

Замечание.

Конечный или бесконечный интервал $(a; b)$, где $\{a; b\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, не является компактом, т. к. любая подпоследовательность любой последовательности его точек, сходящейся к a или b , сходится к не принадлежащей интервалу точке a или b соответственно.

Полуинтервал также не является компактом. Предоставляем читателю доказать это самостоятельно.

Обобщение первой теоремы Вейерштрасса.

Функция, непрерывная на компакте, ограничена на нём.

Замечание.

Функция, определённая на некомпактном множестве, может быть на нём неограничена. Пример - тождественная функция $f(x) = x$ на некомпактном множестве $(-\infty; +\infty)$.

2.6.3 Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема.

Функция, непрерывная на компакте, достигает на нём точных верхней и нижней границ множества своих значений.

Следствие.

Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ и f непрерывна, $\alpha = \inf(f[a; b])$, $\beta = \sup(f[a; b])$. Тогда $f([a; b]) = [\alpha; \beta]$.

2.6.4 Понятие равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора, следствия из неё

Согласно определению непрерывности, $f : X \rightarrow R$ непрерывна, если $\forall(x_0 \in X) \forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0) [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$

В общем случае δ зависит от ε и x_0 , т. е. $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Однако иногда δ зависит только от ε и не зависит от x_0 , т. е. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Определение. $f(x)$ равномерно непрерывна на X , если

$$\forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0) \forall(x_0 \in X) [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Замечание 1.

Если $f(x)$ равномерно непрерывна на X , то $f(x)$ непрерывна на X . (Т. к. квантор общности \forall можно переносить вправо.)

Замечание 2.

Не всякая функция f , непрерывная на X , равномерно непрерывна на X . (Например: $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.)

Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, X - компакт и f непрерывна на X . Тогда f равномерно непрерывна на X .

Следствие 1.

Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Следствие 2.

Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\exists(a_1, b_1 : a < a_1 < b_1 < b, b_1 - a_1 < \delta)[\omega(f, [a_1, b_1]) < \varepsilon],$$

или, что то же самое,

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\Delta \subset [a; b])[\omega(f, \Delta) < \varepsilon]$$

т. е. найдётся подотрезок, на котором колебание функции меньше любого наперёд заданного.

Замечание.

2.6.5 Свойства монотонных функций. Теорема об обратной функции

Лемма 1.

Непрерывная функция, заданная на отрезке, инъективна в том и только том случае, когда она строго монотонна.

Лемма 2.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Любая строго монотонная функция $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ обладает обратной функцией $f^{-1} : Y \rightarrow X$, причём обратная функция f^{-1} имеет тот же характер монотонности на Y , что и функция f на X .

Лемма 3.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Монотонная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ может иметь разрывы только первого рода.

Следствие 1.

Если a - точка разрыва монотонной функции f , то по крайней мере один из пределов функции f слева или справа от a определён.

Доказательство. Если a - точка разрыва, то она является предельной точкой множества X и, по лемме 3, точкой разрыва первого рода. Таким образом, точка a является по крайней мере правосторонней или левосторонней предельной для множества X , т. е. выполнено хотя бы одно из

следующих условий:

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Если a - двусторонняя предельная точка, то существуют и конечны оба односторонних предела.

Следствие 2.

Если a - точка разрыва монотонной функции f , то по крайней мере в одном из неравенств $f(a-0) \leq f(a) \leq f(a+0)$ - для неубывающей f или $f(a-0) \geq f(a) \geq f(a+0)$ - для невозрастающей f , имеет место знак строгого неравенства, т. е. $f(a-0) < f(a+0)$ - для неубывающей f или $f(a-0) > f(a+0)$ - для невозрастающей f , и в интервале, определённым этим строгим неравенством, нет ни одного значения функции. (Также говорят: интервал свободен от значений функции.)

Следствие 3.

Интервалы, свободные от значений монотонной функции, соответствующие разным точкам разрыва этой функции, не пересекаются.

Лемма 4. Критерий непрерывности монотонной функции.

Пусть даны отрезок $X = [a; b] \subset \mathbb{R}$ и монотонная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. f непрерывна в том и только том случае, когда $f(X)$ - отрезок Y с концами $f(a)$ и $f(b)$. ($f(a) \leq f(b)$ для неубывающей f , $f(a) \geq f(b)$ для невозрастающей f).

Доказательство.

Необходимость. Т. к. f монотонна, то все её значения лежат между $f(a)$ и $f(b)$. Т. к. f непрерывна, то она принимает и все промежуточные значения. Следовательно, $f(X)$ - отрезок.

Достаточность. Предположим противное, т. е. что $\exists (c \in [a; b])$ - точка разрыва f . Тогда по следствию 2 леммы 3 один из интервалов: $(f(c-0); f(c))$ или $(f(c); f(c+0))$ - определён и не содержит значений f . С другой стороны, этот интервал содержится в Y , т. е. f принимает не все значения из Y , $f(X) \neq Y$. Получили противоречие.

Теорема.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и f строго монотонна. Тогда существует обратная функция $f^{-1} : Y \rightarrow X$, где $Y = f(X)$, притом f^{-1} строго монотонна на Y и имеет тот же характер монотонности, что и f на X . Если, кроме того, $X = [a; b]$ и f непрерывна на отрезке X , то $f([a; b])$ есть отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$ и f^{-1} непрерывна на нём.

2.6.6 Непрерывность элементарных функций

...

Глава 3

Основы дифференциального исчисления

3.1 Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной

- 3.1.1 Определение производной и дифференциала, связь между этими понятиями
- 3.1.2 Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функций
- 3.1.3 Дифференцирование и арифметические операции
- 3.1.4 Теорема о производной сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала
- 3.1.5 Теорема о производной обратной функции
- 3.1.6 Производные основных элементарных функций. Доказательство
- 3.1.7 Касательная к кривой. Геометрический смысл производной и дифференциала
- 3.1.8 Физический смысл производной и дифференциала
- 3.1.9 Односторонние и бесконечные производные
- 3.1.10 Производные и дифференциалы высших порядков

...

3.2 Основные теоремы дифференциального исчисления

3.2.1 Понятие о локальном экстремуме функции

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X . Точка x_0 называется точкой локального минимума, а значение в ней - локальным минимумом функции f , если

$$\exists(U(x_0))\forall(x \in U(x_0) \cap X)[f(x) \geq f(x_0)]$$

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X . Точка x_0 называется точкой локального максимума, а значение в ней - локальным максимумом функции f , если

$$\exists(U(x_0))\forall(x \in U(x_0) \cap X)[f(x) \leq f(x_0)]$$

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X . Точка x_0 называется точкой строгого локального минимума, а значение в ней - строгим локальным минимумом функции f , если

$$\exists(\overset{\circ}{U}(x_0))\forall(x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X)[f(x) > f(x_0)]$$

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка X . Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума, а значение в ней - строгим локальным максимумом функции f , если

$$\exists(\overset{\circ}{U}(x_0))\forall(x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X)[f(x) < f(x_0)]$$

Определение. Точками локального экстремума называются вместе точки локального минимума или максимума.

Определение. Локальными экстремумами называются вместе локальные минимумы или максимумы.

Определение. Точками строгого локального экстремума называются вместе точки строгого локального минимума или максимума.

Определение. Строгими локальными экстремумами называются вместе строгие локальные минимумы или максимумы.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - двусторонняя предельная точка X . Если x_0 - точка локального экстремума, то она называется точкой внутреннего локального экстремума.

3.2.2 Теорема Ферма

Теорема Ферма о производной в точке локального экстремума.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке внутреннего локального экстремума x_0 . Тогда $f'(x_0) = 0$.

Мнемоника. Чтобы запомнить содержание теоремы по её названию, нужно представить себе первую букву в нём (но не заглавную) - латинскую букву f . Тогда верхний и нижний "завитки" будут символизировать локальные экстремумы, а горизонтальная черта - горизонтальную касательную в точке, где производная равна нулю.

Замечание 1.

В невнутренней точке локального экстремума производная может, вообще говоря, быть не равной нулю. Пример: $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, невнутренний локальный максимум $x_0 = 1$, $f'(x_0) = 2$.

Замечание 2.

Теорема Ферма необратима. Пример: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, но f не имеет локальных экстремумов.

3.2.3 Теорема Ролля

Теорема.

Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

- 1) f непрерывна на $[a; b]$;
- 2) f дифференцируема на $(a; b)$;
- 3) $f(a) = f(b)$,

то $\exists(c \in (a; b))[f'(c) = 0]$.

Замечание 1.

Геометрическая интерпретация теоремы: пусть кривая задана функцией $y = f(x)$. Тогда между любыми двумя точками с равными ординатами, лежащими на данной кривой, найдётся такая точка, в которой касательная к данной кривой параллельна оси абсцисс.

Замечание 2.

Условие (1) избыточно: т. к. уже требуется, чтобы f была дифференцируема на $(a; b)$, достаточно потребовать непрерывности f в a и b . Остальные условия существенны.

Следствие. Теорема о корнях производной.

Между любыми двумя корнями дифференцируемой функции лежит корень её производной.

Доказательство. Применим теорему Ролля к случаю, когда $f(a) = f(b) = 0$.

3.2.4 Теорема Лагранжа и следствия из нее

Теорема Лагранжа о промежуточном значении (о конечных приращениях).

Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

1) f непрерывна на $[a; b]$;

2) f дифференцируема на $(a; b)$;

то $\exists (c \in (a; b)) [f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)]$.

Замечание 1.

Равенство $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

Замечание 2.

Формулу Лагранжа можно записать и в другом виде, если положить $\theta = \frac{c-a}{b-a}$.

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$$

Полагая $x = a$, $h = b - a$, имеем

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h)h$$

Следствие 1.

Функция, имеющая на промежутке равную нулю производную, постоянная на нём.

Следствие 2.

Пусть на промежутке X определены и дифференцируемы две функции f и g , притом на концах промежутка, если они в него входят, f и g непрерывны. Если $\forall(x \in X)[f'(x) = g'(x)]$, то $\forall(x \in X)[f(x) - g(x) = \text{const}]$.

Следствие 3.

Функция, имеющая на промежутке ограниченную производную, равномерно непрерывна на нём.

Следствие 4.

Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на $(x_0; x_0 + h) \subset [a; b]$. Тогда правая производная f в x_0 непрерывна.

3.2.5 Теорема Коши

Теорема Коши.

Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, причём:

- 1) f и g непрерывны на $[a; b]$;
- 2) f и g дифференцируемы на $(a; b)$;
- 3) $\nexists(x \in (a; b))[g(x) = 0]$

Тогда

$$\exists(c \in (a; b)) \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \right].$$

Замечание 1.

Теорема Коши не является следствием из теоремы Лагранжа; наоборот, теорема Лагранжа - частный случай теоремы Коши для $g(x) = x$.

Замечание 2.

Равенство $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ называют формулой конечных приращений Коши.

3.3 Формула Тейлора

3.3.1 Формула Тейлора для многочлена

3.3.2 Формула Тейлора для произвольной функции. Различные формы остаточного члена формулы Тейлора

3.3.3 Локальная формула Тейлора

3.3.4 Формула Маклорена. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

3.3.5 Применение формулы Тейлора

...

3.4 Правило Лопиталья

3.4.1 Неопределённость. Виды неопределённостей

Пусть даны две непрерывные на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$ и $g(x)$, где $\{a; b\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Неопределённостью типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ в точке a называется предел

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

в случае, когда

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

Аналогично определяют неопределённости вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и в точке b .

Другие виды неопределённостей сводятся к этим двум. Вообще говоря, неопределённость типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ может быть сведена к типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Действительно, пусть

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$$

тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}}}$$

Однако при раскрытии неопределённостей возникает необходимость рассматривать их отдельно.

Неопределённость-произведение сводится к неопределённостям-частным двумя способами:

$$\begin{aligned}[0 \cdot \infty] &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right] \\[0 \cdot \infty] &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]\end{aligned}$$

Неопределённости-степени сводятся с неопределённостям-произведениям (а затем - к неопределённостям-частным) через равенство

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Заметим, что это равенство, как и сам предел, имеет смысл лишь при $f(x) > 0$. Покажем, как раскрываются неопределённости-степени:

$$[\infty^0] = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln f(x))} = e^{[\infty \cdot 0]}$$

$$[0^0] = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln f(x))} = e^{-[0 \cdot \infty]}$$

$$[1^\infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln f(x))} = e^{[0 \cdot \infty]}$$

Наконец, рассмотри раскрытие неопределённости-разности:

$$[\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right) \right) = [\infty \cdot 0]$$

Таким образом, раскрытие неопределённостей сведено к раскрытию неопределённостей-частных.

3.4.2 Теорема Лопиталя

Докажем теперь правило Лопиталя для неопределённостей вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Лемма об обратном пределе.

Пусть даны функции f и g , такие, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ и существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, тогда существует и предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$.

Доказательство. По определению бесконечно большой в точке x_0 функции $\exists(V = \mathring{U}_\delta(x_0)) \forall(x \in V$

Замечание.

Очевидно, вынос знака "минус" из-под знака предела не составляет сложности и не влияет на применимость правила.

Теорема.

Пусть даны функции f и g , такие, что: 1) f и g определены на полуинтервале $(a; b]$ 2) f и g дифференцируемы на полуинтервале $(a; b]$

3.4.3 Применение правила Лопиталья