Определение 0.0.1. Множество точек M называется системой целочисленно удалённых точек (СЦТ), если

$$\forall(M_1 \in M, M_2 \in M)[|M_1M_2| \in \mathbb{Z}],$$

и при этом M не содержится целиком ни в какой прямой.

Замечание 0.0.1. Мы рассматриваем случай точек на плоскости, т. е. в $\mathbb{R}^2$.

Замечание 0.0.2. Прямую, разбитую точками на целочисленные отрезки, мы, как видно из определения, не рассматриваем. Аналогично не представляют для нас интереса множества, состоящие из одной или двух точек.

Определение 0.0.2. Количество точек в СЦТ S называется её мощностью $P(S)$.

Утверждение о конечности любой СЦТ доказано в [2], однако Ньюман не даёт количественных оценок на мощность СЦТ. Тем не менее, мы воспользуемся указанным им методом.

Для того, чтобы ответить на вопрос о расположении точек во всей СЦТ, сначала зафиксируем две точки A и B, входящие в СЦТ S, находящиеся на расстоянии n друг от друга. Пусть M — некоторая другая точка данной СЦТ. Тогда величина $d = |AM| - |BM|$, будучи разностью целых чисел, может принимать только целочисленные значения. Если $d = 0$, то это означает, что M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Если $d = \pm n$, то точка M лежит на самой прямой AB. Каждое из оставшихся $2(n-1)$ значений d соответствует ветви некоторой гиперболы, всего $n-1$ гипербол. Пересечение прямой AB с серединным перпендикуляром к отрезку AB тоже будем считать вырожденной гиперболой.

Лемма 0.0.1 (доказана в теме «Применение фокального свойства гиперболы» [1])**.** Если в СЦТ S три точки M_1, M_2 и M_3 не лежат на одной прямой и $a = |M_1M_2| \in \mathbb{N}$, $b = |M_1M_3| \in \mathbb{N}$, $c = |M_2M_3| \in \mathbb{N}$, то $P(S) \leqslant 4 \cdot \min\{ab, ac, bc\}$.

Доказательство. Не теряя общности, положим $a \leqslant b \leqslant c$. Для пар точек (M_1, M_2) и (M_1, M_3) построим семейства из a и b гипербол соответственно. Любая точка M, включая M_1, M_2 и M_3, лежит на пересечении некоторых двух гипербол из разных семейства. Любая пара несовпадающих гипербол может иметь не более 4 общих точек, следовательно, существует не более $4ab$ вариантов расположения точки M.

Лемма доказана

Следствие 0.0.1.1. Любая СЦТ конечна.

Определение 0.0.3. Пусть даны точки M_1 и M_2 такие, что $|M_1M_2| \in \mathbb{Z}$. Семейством целоразностных линий (СЦРЛ) для точек M_1 и M_2 назовём объединение семейства софокуных гипербол, имеющих фокусы в M_1 и M_2 и являющихся геометрическими местами точек, разность расстояний от которых до M_1 и M_2 есть число целое, а также вырожденной гиперболы, образованной объединением серединного перпендикуляра к отрезку M_1M_2 и прямой M_1M_2. Гиперболу Q будем называть вырожденной частью данного СЦРЛ, объединение остальных гипербол — собственной частью СЦРЛ, прямую M_1M_2 — несобственной частью.

Утверждение 0.0.2. Пусть $|M_1M_2| = n \in \mathbb{Z}$. Тогда СЦРЛ R для M_1 и M_2 есть объединение не более $\frac{n+1}{2}$ гипербол (возможно, вырожденных).

Доказательство. Собственная часть R состоит из гипербол, являющихся геометрическими местами точек, разность расстояний от которых до M_1 и M_2 есть число целое. Таких гипербол не более $\frac{n-1}{2}$. Кроме того, есть ещё вырожденная часть R, являющаяся вырожденной гиперболой.
Утверждение доказано.

Теперь сформулируем лемму, аналогичную лемме 0.0.1.

Лемма 0.0.3. Пусть в СЦТ S три точки M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой l и $a = |M_1M_3| \in \mathbb{N}$, $b = |M_1M_2| \in \mathbb{N}$, $c = |M_2M_3| \in \mathbb{N}$, при этом $a = b+c$, т. е. точка M_2 лежит между M_1 и M_3. Обозначим через S^* СЦТ, получаемую из S исключением всех точек, лежащих на l:

$$S^* = S \setminus l$$

Тогда $P(S^*) \leqslant (b-1)(c-1)$.

Доказательство. Пусть точка $M \in S^*$. Построим СЦРЛ P для M_1 и M_2 и СЦРЛ R для M_2 и M_3. Так как $\{|MM_1|, |MM_2|, |MM_3|\} \subset \mathbb{Z}$, то $M \in A = (P \cup R) \setminus l$. Выясним теперь мощность множества A. Невырожденные части СЦРЛ P и Q имеют не более $4 \cdot \frac{b-1}{2} \cdot \frac{c-1}{2} = (b-1)(c-1)$ точек пересечения; Вырожденные же части пересекаются только по прямой l, на которой, по условию, нет точек из S^*.
Лемма доказана.

Лемма 0.0.4. Если в СЦТ S найдётся $\beta = 2m^2+1$ точек и S лежит в пределах квадрата со стороной n, то $n > \frac{\beta-1}{4}$ (иначе говоря, $\beta < 4n+1$).

Доказательство. СЦТ лежит в пределах квадрата со стороной n. Разобьём этот квадрат на m^2 меньших равных между собой квадратов со стороной $\frac{n}{m}$. Тогда по принципу Дирихле найдётся хотя бы один квадрат со стороной $\frac{n}{m}$, внутри которого (возможно, включая границы) найдутся три точки, принадлежащие рассматриваемой СЦТ. Обозначим их через M_1, M_2 и M_3. Ни одно из расстояний $|M_1M_2|$, $|M_1M_3|$ и $|M_2M_3|$, очевидно, не превышает диагонали квадрата со стороной $\frac{n}{m}$, т. е. $\frac{n}{m}\sqrt{2}$. Три точки M_1, M_2 и M_3 либо лежат на одной прямой, либо нет.

Пусть они не лежат на одной прямой. Тогда по лемме 0.0.1 количество точек в СЦТ $\beta \leqslant \frac{8n^2}{m^2}$. Имеем:

$$2m^2 + 1 \leq \frac{8n^2}{m^2}$$

$$2m^2 < 2m^2 + 1 \leq \frac{8n^2}{m^2}$$

$$2m^2 < \frac{8n^2}{m^2}$$

$$m^2 < \frac{4n^2}{m^2}$$

$$m^4 < 4n^2$$

Т. к. n положительно, извлекаем корень:

$$m^2 < 2n$$

$$2m^2 + 1 < 4n + 1$$

$$\beta < 4n + 1$$

$$n > \frac{\beta - 1}{4}$$

Пусть теперь точки M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой l. По лемме 0.0.3 мощность СЦТ $S^* = S \backslash l$ ограничена: $P(S^*) \leqslant \left(\frac{n}{m}\sqrt{2} - 1\right)\left(\frac{n}{m}\sqrt{2} - 1\right) < 2\frac{n^2}{m^2}$. Так как S по условию лежит внутри квадрата со стороной n, то на l лежит не более $n\sqrt{2} + 1$ точек. Значит, $\beta = P(S) \leqslant 2\frac{n^2}{m^2} + n\sqrt{2} + 1 \leqslant 2\frac{n^2}{m^2} + n\sqrt{2} + 1 \leqslant 2 \max 2\frac{n^2}{m^2}, n\sqrt{2} + 1$. Если $2\frac{n^2}{m^2} \leqslant n\sqrt{2}$, то $\beta \leqslant 2n\sqrt{2} + 1 < 4n + 1$, и лемма доказано. Иначе $\beta \leqslant 4\frac{n^2}{m^2} \leqslant 8\frac{n^2}{m^2}$. Повторив вышеприведённые рассуждения, получим требуемое.
Лемма доказана.

Утверждение 0.0.5 (вспомогательное)**.** $\forall\,(\beta \in \mathbb{N})\ \left[2\sqrt{\beta - 1} \leqslant \beta\right]$

Доказательство. Т. к. $\beta > 0$, возводим обе части неравенства в квадрат:

$$4(\beta - 1) \leqslant \beta^2$$

$$(\beta - 2)^2 \geqslant 0$$

Утверждение доказано.

Определение 0.0.4. Назовём СЦТ S бестриадной, если никакие три точки из S не лежат на одной прямой.

Определение 0.0.5. Большим диаметром $D(S)$ СЦТ S называется диаметр наименьшего круга, целиком покрывающего СЦТ S.

Определение 0.0.6. Малым диаметром $d(S)$ СЦТ S называется максимум из попарных расстояний между её точками.

Заметим, что оба диаметра, во-первых, определены корректно, во-вторых, конечны, в-третьих, связаны соотношением $d(S) \leqslant D(s) \leqslant 2d(s)$ (последнее неравенство вытекает из того, что, выбрав точку A из произвольной пары максимально удалённых точек, можно построить круг радиуса $d(S)$ с центром в точке A, который, очевидно, покроет всю СЦТ).

Лемма 0.0.6. Пусть СЦТ S лежит внутри квадрата со стороной n, $P(S) = \gamma$. Тогда $\gamma < 4(1+\sqrt{2})n + 2 + \sqrt{2}$.

Доказательство. Возьмём $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2m^2+1 \leq \gamma \leq 2(m+1)^2$ (это можно сделать единственным образом). Обозначим $2m^2+1=\beta$, откуда $m=\sqrt{\frac{\beta-1}{2}}$. Тогда по лемме **??** имеем $\beta < 4n+1$. Оценим γ:

$$\gamma \leqslant 2(m+1)^2 = 2m^2+4m+2 \leqslant \beta+1+2\cdot 2\sqrt{\frac{\beta-1}{2}} = \beta+1+2\sqrt{2}\sqrt{\beta-1} \leqslant \\ \leqslant (1+\sqrt{2})\beta+1 < (4n+1)(1+\sqrt{2})+1 = 4(1+\sqrt{2})n+2+\sqrt{2} \quad (1)$$

Лемма доказана.

Следствие 0.0.6.1. Для любой СЦТ S $P(S) < 10D(S)+4$. Заметим, что это очень грубое ограничение, указывающее, однако, на не более чем линейный характер зависимости максимальной возможной мощности СЦТ от её диаметра.

В [1] Е.М. Семёнов даёт способ построения СЦТ произвольной наперёд заданной мощности, не приводя, однако, зависимость диаметра СЦТ, получаемой при таком построении, от её мощности. Приведём здесь оригинальный способ построения СЦТ, конструктивно доказав следующую лемму:

Лемма 0.0.7. Для любого натурального k найдётся СЦТ S такая, что $P(S)=2k+3$, $D(S) \leqslant 2^{4k+1}$.

Доказательство. Известно, что $(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$. Заметим, что $2^{2k+1}=2\cdot 2^{2k-p}\cdot 2^p$, где p — целое число от 0 до $k-1$. Таким образом, мы получили представление числа 2^{2k+1} в виде $2mn$ k способами. Рассмотрим теперь множество точек

$$S=\{O=(0;0), B_\pm=(0;\pm 2^{2k+1}), A_{\pm p}(\pm 2^{2(2k-p)}-2^{2p};0)\}$$

Покажем, что S — СЦТ. Понятно, что $|O-B_\pm| \in \mathbb{Z}$, $|O-A_{\pm p}| \in \mathbb{Z}$. Убедимся, что $|B_\pm - A_{\pm p}| \in \mathbb{Z}$. Действительно, $|B_\pm - A_{\pm p}| = |(0;\pm 2^{2k+1})-(\pm 2^{2(2k-p)}-2^{2p};0)| = \sqrt{(2^{2k+1})^2+(2^{2(2k-p)}-2^{2p})^2} = \sqrt{2^{4k+2}+2^{4(2k-p)}-2\cdot 2^{4k}+2^{4p}} = \sqrt{2^{4(2k-p)}+2\cdot 2^{4k}+2^{4p}} = 2^{2(2k-p)}+2^{2p} \in \mathbb{Z}$ Мощность СЦТ S равна в точности $2k+3$. Построим круг с центром в O радиуса 2^{4k}. Заметим, что $|O-B_\pm| = 2^{2k+1} < 2^{4k}$, $|O-A_{\pm p}| = 2^{2(2k-p)}-2^{2p} < 2^{4k}$. Значит, построенный круг диаметра 2^{4k+1} покрывает СЦТ S.
Лемма доказана.

Таким образом, в круг диаметра n всегда можно поместить СЦТ мощности, не меньшей $frac5+\log_2 p2$.

Литература

1. Аналитическая геометрия на плоскости / Е.М. Семенов, С.Н. Уксусов. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2013. – 100с.

2. Donald J. Newman. A Problem Seminar. Springer - Verlag.1982.