Лемма 1 (доказана в теме "Применение фокального свойства гиперболы")

Если в системе целочисленно удалённых точек (далее СЦТ) найдутся три точки $M_1$, $M_2$ и $M_3$, не лежащие на одной прямой, и $a = |M_1M_2| \in \mathbb{N}$, $b = |M_1M_3| \in \mathbb{N}$, $c = |M_2M_3| \in \mathbb{N}$, то максимальное количество точек в такой СЦТ равно $\min\{ab, ac, bc\}$.

Лемма 2

Если в СЦТ найдётся $\beta = 2m^2 + 1$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и эта СЦТ лежит в пределах квадрата со стороной $n$, то $n > \frac{\beta-1}{4}$ (иначе говоря, $\beta < 4n + 1$).

Доказательство

СЦТ лежит в пределах квадрата со стороной $n$. Разобьём этот квадрат на $m^2$ меньших равных между собой квадратов со стороной $\frac{n}{m}$. Тогда по принципу Дирихле найдётся хотя бы один квадрат со стороной $\frac{n}{m}$, внутри которого (возможно, включая границы) найдутся три точки, принадлежащие рассматриваемой СЦТ. Обозначим их через $M_1$, $M_2$ и $M_3$. Ни одно из расстояний $|M_1M_2|$, $|M_1M_3|$ и $|M_2M_3|$, очевидно, не превышает диагонали квадрата со стороной $\frac{n}{m}$, т. е. $\frac{n}{m}\sqrt{2}$. Тогда по лемме 1 количество точек в СЦТ $\beta \leq \frac{8n^2}{m^2}$. Имеем:

$$2m^2 + 1 \leq \frac{8n^2}{m^2}$$

$$2m^2 < 2m^2 + 1 \leq \frac{8n^2}{m^2}$$

$$2m^2 < \frac{8n^2}{m^2}$$

$$m^2 < \frac{4n^2}{m^2}$$

$$m^4 < 4n^2$$

Т. к. $n$ положительно, извлекаем корень:

$$m^2 < 2n$$

$$2m^2 + 1 < 4n + 1$$

$$\beta < 4n + 1$$

$$n > \frac{\beta - 1}{4}$$

Лемма доказана.

Утверждение 1 (вспомогательное)

$\forall\,(\beta \in \mathbb{N}) \left[2\sqrt{\frac{\beta-1}{2}} < \beta\right]$

Доказательство

Т. к. $\beta > 0$, возводим обе части неравенства в квадрат:

$$4\frac{\beta-1}{2} < \beta^2$$
$$\beta^2 - 2\beta + 2 > 0$$
$$\beta^2 - 2\beta + 1 > -1$$
$$(\beta-1)^2 > -1$$

Утверждение доказано.

Лемма 3.

Пусть СЦТ состоит из $\gamma$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и лежит внутри квадрата со стороной $n$. Тогда $\gamma < 12n + 4$.

Доказательство

Возьмём $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2m^2+1 \le \gamma \le 2(m+1)^2$ (это можно сделать единственным образом). Обозначим $2m^2+1 = \beta$, откуда $m = \sqrt{\frac{\beta-1}{2}}$. Тогда по лемме 2 имеем $\beta < 4n + 1$. Оценим $\gamma$:

$$\gamma \le 2(m+1)^2 = 2m^2+4m+2 < \beta+1+2\cdot 2\sqrt{\frac{\beta-1}{2}} < \beta+1+2\beta = 3\beta+1 < 12n+4$$

Лемма доказана.