Определение.

Множество точек M называется системой целочисленно удалённых точек (СЦТ), если

$$\forall(M_1 \in M, M_2 \in M)[|M_1M_2| \in \mathbb{Z}],$$

и при этом M не содержится целиком ни в какой прямой.

Замечание.

Мы рассматриваем случай точек на плоскости, т. е. в $\mathbb{R}^2$.

Замечание.

Прямую, разбитую точками на целочисленные отрезки, мы, как видно из определения, не рассматриваем. Аналогично не представляют для нас интереса множества, состоящие из одной или двух точек.

Определение.

Количество точек в СЦТ S называется её мощностью $P(S)$.

Лемма 1 (доказана в теме «Применение фокального свойства гиперболы» [1])

Если в СЦТ S три точки M_1, M_2 и M_3 не лежат на одной прямой и $a = |M_1M_2| \in \mathbb{N}$, $b = |M_1M_3| \in \mathbb{N}$, $c = |M_2M_3| \in \mathbb{N}$, то $P(S) \leq 4 \cdot \min\{ab, ac, bc\}$.

Следствие.

Любая СЦТ конечна.

Лемма 2.

Если в СЦТ S найдётся $\beta = 2m^2 + 1$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и S лежит в пределах квадрата со стороной n, то $n > \frac{\beta-1}{4}$ (иначе говоря, $\beta < 4n + 1$).

Доказательство

СЦТ лежит в пределах квадрата со стороной n. Разобьём этот квадрат на m^2 меньших равных между собой квадратов со стороной $\frac{n}{m}$. Тогда по принципу Дирихле найдётся хотя бы один квадрат со стороной $\frac{n}{m}$, внутри которого (возможно, включая границы) найдутся три точки, принадлежащие рассматриваемой СЦТ. Обозначим их через M_1, M_2 и M_3. Ни одно из расстояний $|M_1M_2|$, $|M_1M_3|$ и $|M_2M_3|$, очевидно, не превышает диагонали квадрата со стороной $\frac{n}{m}$, т. е. $\frac{n}{m}\sqrt{2}$. Тогда по лемме 1 количество точек в СЦТ $\beta \leq \frac{8n^2}{m^2}$. Имеем:

$$2m^2 + 1 \leq \frac{8n^2}{m^2}$$

$$2m^2 < 2m^2 + 1 \leq \frac{8n^2}{m^2}$$

$$2m^2 < \frac{8n^2}{m^2}$$
$$m^2 < \frac{4n^2}{m^2}$$
$$m^4 < 4n^2$$

Т. к. n положительно, извлекаем корень:

$$m^2 < 2n$$
$$2m^2 + 1 < 4n + 1$$
$$\beta < 4n + 1$$
$$n > \frac{\beta - 1}{4}$$

Лемма доказана.

Утверждение 1 (вспомогательное)

$\forall\,(\beta \in \mathbb{N})\,\left[2\sqrt{\beta - 1} \leq \beta\right]$

Доказательство

Т. к. $\beta > 0$, возводим обе части неравенства в квадрат:

$$4(\beta - 1) \leq \beta^2$$
$$(\beta - 2)^2 \geq 0$$

Утверждение доказано.

Определение.

Назовём СЦТ S бестриадной, если никакие три точки из S не лежат на одной прямой.

Определение.

Большим диаметром $D(S)$ СЦТ S называется диаметр наименьшего круга, целиком покрывающего СЦТ S.

Определение.

Малым диаметром $d(S)$ СЦТ S называется максимум из попарных расстояний между её точками.

Заметим, что оба диаметра, во-первых, определены корректно, во-вторых, конечны, в третьих, связаны соотношением $d(S) \leq D(s) \leq 2d(s)$ (последнее неравенство вытекает из того, что, выбрав точку A из произвольной пары максимально удалённых точек, можно построить круг радиуса $d(S)$ с центром в точке A, который, очевидно, покроет всю СЦТ).

Лемма 3.

Пусть СЦТ S — бестриадна и S лежит внутри квадрата со стороной n, $P(S) = \gamma$. Тогда $\gamma < 4(1 + \sqrt{2})n + 2 + \sqrt{2}$.

Доказательство.

Возьмём $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2m^2+1 \le \gamma \le 2(m+1)^2$ (это можно сделать единственным образом). Обозначим $2m^2+1 = \beta$, откуда $m = \sqrt{\frac{\beta-1}{2}}$. Тогда по лемме 2 имеем $\beta < 4n+1$. Оценим γ:

$$\gamma \le 2(m+1)^2 = 2m^2+4m+2 \le \beta+1+2\cdot 2\sqrt{\frac{\beta-1}{2}} = \beta+1+2\sqrt{2}\sqrt{\beta-1} \le$$
$$\le (1+\sqrt{2})\beta+1 < (4n+1)(1+\sqrt{2})+1 = 4(1+\sqrt{2})n+2+\sqrt{2} \tag{1}$$

Лемма доказана.

Следствие.

Если СЦТ S бестриадна, то $P(S) < 10D(S)+4$. Заметим, что это очень грубое ограничение, указывающее, однако, на не более чем линейный характер зависимости максимальной возможной мощности бестриадной СЦТ от её диаметра.

В [1] Е.М. Семёнов даёт способ построения СЦТ с произвольной наперёд заданной мощности, не приводя, однако, зависимость диаметра СЦТ, получаемой при таком построении, от её мощности. Приведём здесь оригинальный способ построения СЦТ, конструктивно доказав следующую лемму:

Лемма 4.

Для любого натурального k найдётся СЦТ S такая, что $P(S) = 2k+3$, $D(S) \le 2^{4k+1}$.

Доказательство.

Известно, что $(2mn)^2 + (m^2-n^2)^2 = (m^2+n^2)^2$. Заметим, что $2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k-p} \cdot 2^p$, где p — целое число от 0 до $k-1$. Таким образом, мы получили представление числа 2^{2k+1} в виде $2mn$ k способами. Рассмотрим теперь множество точек $S = \{O = (0;0), B_\pm = (0;\pm 2^{2k+1}), A_{\pm p}(\pm 2^{2(2k-p)} - 2^{2p}; 0)\}$. Покажем, что S - СЦТ. Понятно, что $|O - B_\pm| \in \mathbb{Z}$, $|O - A_{\pm p}| \in \mathbb{Z}$. Убедимся, что $|B_\pm - A_{\pm p}| \in \mathbb{Z}$. Действительно, $|B_\pm - A_{\pm p}| = |(0; \pm 2^{2k+1}) - (\pm 2^{2(2k-p)} - 2^{2p}; 0)| = \sqrt{(2^{2k+1})^2 + (2^{2(2k-p)} - 2^{2p})^2} = \sqrt{2^{4k+2} + 2^{4(2k-p)} - 2 \cdot 2^{4k} + 2^4 p} = \sqrt{2^{4(2k-p)} + 2 \cdot 2^{4k} + 2^4 p} = 2^{2(2k-p)} + 2^{2p} \in \mathbb{Z}$ Мощность СЦТ S равна в точности $2k+3$. Построим круг с центром в O радиуса 2^{4k}. Заметим, что $|O - B_\pm| = 2^{2k+1} < 2^{4k}$, $|O - A_{\pm p}| = 2^{2(2k-p)} - 2^{2p} < 2^{4k}$. Значит, построенный круг диаметра 2^{4k+1} покрывает СЦТ S.

Лемма доказана.

References

[1] Аналитическая геометрия на плоскости / Е.М. Семенов, С.Н. Уксусов. – Воро-неж : Воронежский государственный университет, 2013. – 100с.