Определение.

Множество точек M называется системой целочисленно удалённых точек (СЦТ), если

$$\forall(M_1 \in M, M_2 \in M)[|M_1M_2| \in \mathbb{Z}],$$

и при этом M не содержится целиком ни в какой прямой.

Замечание.

Мы рассматриваем случай точек на плоскости, т. е. в $\mathbb{R}^2$.

Замечание.

Прямую, разбитую точками на целочисленные отрезки, мы, как видно из определения, не рассматриваем. Аналогично не представляют для нас интереса множества, состоящие из одной или двух точек.

Определение.

Количество точек в СЦТ S называется её мощностью $P(S)$.

Лемма 1 (доказана в теме «Применение фокального свойства гиперболы» [1])

Если в СЦТ S три точки M_1, M_2 и M_3 не лежат на одной прямой и $a = |M_1M_2| \in \mathbb{N}$, $b = |M_1M_3| \in \mathbb{N}$, $c = |M_2M_3| \in \mathbb{N}$, то $P(S) \leq 4 \cdot \min\{ab, ac, bc\}$.

Следствие.

Любая СЦТ конечна.

Лемма 2.

Если в СЦТ S найдётся $\beta = 2m^2 + 1$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и S лежит в пределах квадрата со стороной n, то $n > \frac{\beta-1}{4}$ (иначе говоря, $\beta < 4n + 1$).

Доказательство

СЦТ лежит в пределах квадрата со стороной n. Разобьём этот квадрат на m^2 меньших равных между собой квадратов со стороной $\frac{n}{m}$. Тогда по принципу Дирихле найдётся хотя бы один квадрат со стороной $\frac{n}{m}$, внутри которого (возможно, включая границы) найдутся три точки, принадлежащие рассматриваемой СЦТ. Обозначим их через M_1, M_2 и M_3. Ни одно из расстояний $|M_1M_2|$, $|M_1M_3|$ и $|M_2M_3|$, очевидно, не превышает диагонали квадрата со стороной $\frac{n}{m}$, т. е. $\frac{n}{m}\sqrt{2}$. Тогда по лемме 1 количество точек в СЦТ $\beta \leq \frac{8n^2}{m^2}$. Имеем:

$$2m^2 + 1 \leq \frac{8n^2}{m^2}$$

$$2m^2 < 2m^2 + 1 \leq \frac{8n^2}{m^2}$$

$$2m^2 < \frac{8n^2}{m^2}$$

$$m^2 < \frac{4n^2}{m^2}$$

$$m^4 < 4n^2$$

Т. к. n положительно, извлекаем корень:

$$m^2 < 2n$$

$$2m^2 + 1 < 4n + 1$$

$$\beta < 4n + 1$$

$$n > \frac{\beta - 1}{4}$$

Лемма доказана.

Утверждение 1 (вспомогательное)

$\forall\,(\beta \in \mathbb{N})\ \left[2\sqrt{\beta - 1} \leq \beta\right]$

Доказательство

Т. к. $\beta > 0$, возводим обе части неравенства в квадрат:

$$4(\beta - 1) \leq \beta^2$$

$$(\beta - 2)^2 \geq 0$$

Утверждение доказано.

Определение.

Назовём СЦТ S бестриадной, если никакие три точки из S не лежат на одной прямой.

Определение.

Большим диаметром $D(S)$ СЦТ S называется диаметр наименьшего круга, целиком покрывающего СЦТ S.

Определение.

Малым диаметром $d(S)$ СЦТ S называется максимум из попарных расстояний между её точками.

Заметим, что оба диаметра, во-первых, определены корректно, во-вторых, конечны, в третьих, связаны соотношением $d(S) \leq D(s) \leq 2d(s)$ (последнее неравенство вытекает из того, что, выбрав точку A из произвольной пары максимально удалённых точек, можно построить круг радиуса $d(S)$ с центром в точке A, который, очевидно, покроет всю СЦТ).

Лемма 3.

Пусть СЦТ S — бестриадна и S лежит внутри квадрата со стороной n, $P(S) = \gamma$. Тогда $\gamma < 4(1 + \sqrt{2})n + 2 + \sqrt{2}$.

Доказательство.

Возьмём $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2m^2+1 \leq \gamma \leq 2(m+1)^2$ (это можно сделать единственным образом). Обозначим $2m^2+1 = \beta$, откуда $m = \sqrt{\frac{\beta-1}{2}}$. Тогда по лемме 2 имеем $\beta < 4n+1$. Оценим γ:

$$\gamma \leq 2(m+1)^2 = 2m^2+4m+2 \leq \beta+1+2\cdot 2\sqrt{\frac{\beta-1}{2}} = \beta+1+2\sqrt{2}\sqrt{\beta-1} \leq$$
$$\leq (1+\sqrt{2})\beta+1 < (4n+1)(1+\sqrt{2})+1 = 4(1+\sqrt{2})n+2+\sqrt{2} \tag{1}$$

Лемма доказана.

Следствие.

Если СЦТ S бестриадна, то $P(S) < 10D(S)+4$. Заметим, что это очень грубое ограничение, указывающее, однако, на не более чем линейный характер зависимости максимальной возможной мощности бестриадной СЦТ от её диаметра.

В [1] Е.М. Семёнов даёт способ построения СЦТ произвольной наперёд заданной мощности, не приводя, однако, зависимость диаметра СЦТ, получаемой при таком построении, от её мощности. Приведём здесь оригинальный способ построения СЦТ, конструктивно доказав следующую лемму:

Лемма 4.

Для любого натурального k найдётся СЦТ S такая, что $P(S) = 2k+3$, $D(S) \leq 2^{4k+1}$.

Доказательство.

Известно, что $(2mn)^2 + (m^2-n^2)^2 = (m^2+n^2)^2$. Заметим, что $2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k-p} \cdot 2^p$, где p — целое число от 0 до $k-1$. Таким образом, мы получили представление числа 2^{2k+1} в виде $2mn$ k способами. Рассмотрим теперь множество точек $S = \{O = (0;0), B_\pm = (0; \pm 2^{2k+1}), A_{\pm p}(\pm 2^{2(2k-p)} - 2^{2p}; 0)\}$. Покажем, что S - СЦТ. Понятно, что $|O - B_\pm| \in \mathbb{Z}$, $|O - A_{\pm p}| \in \mathbb{Z}$. Убедимся, что $|B_\pm - A_{\pm p}| \in \mathbb{Z}$. Действительно, $|B_\pm - A_{\pm p}| = |(0; \pm 2^{2k+1}) - (\pm 2^{2(2k-p)} - 2^{2p}; 0)| = \sqrt{(2^{2k+1})^2 + (2^{2(2k-p)} - 2^{2p})^2} = \sqrt{2^{4k+2} + 2^{4(2k-p)} - 2 \cdot 2^{4k} + 2^4 p} = \sqrt{2^{4(2k-p)} + 2 \cdot 2^{4k} + 2^4 p} = 2^{2(2k-p)} + 2^{2p} \in \mathbb{Z}$ Мощность СЦТ S равна в точности $2k+3$. Построим круг с центром в O радиуса 2^{4k}. Заметим, что $|O - B_\pm| = 2^{2k+1} < 2^{4k}$, $|O - A_{\pm p}| = 2^{2(2k-p)} - 2^{2p} < 2^{4k}$. Значит, построенный круг диаметра 2^{4k+1} покрывает СЦТ S.

Лемма доказана.

References

[1] Аналитическая геометрия на плоскости / Е.М. Семенов, С.Н. Уксусов. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2013. – 100с.