

Определение 0.0.1. Множество точек M называется системой целочисленно удалённых точек (СЦТ), если

$$\forall (M_1 \in M, M_2 \in M)[|M_1 M_2| \in \mathbb{Z}],$$

и при этом M не содержится целиком ни в какой прямой.

Замечание 0.0.1. Мы рассматриваем случай точек на плоскости, т. е. в \mathbb{R}^2 .

Замечание 0.0.2. Прямую, разбитую точками на целочисленные отрезки, мы, как видно из определения, не рассматриваем. Аналогично не представляют для нас интереса множества, состоящие из одной или двух точек.

Определение 0.0.2. Количество точек в СЦТ S называется её мощностью $P(S)$.

Лемма 0.0.1 (доказана в теме «Применение фокального свойства гиперболы» [1]). Если в СЦТ S три точки M_1 , M_2 и M_3 не лежат на одной прямой и $a = |M_1 M_2| \in \mathbb{N}$, $b = |M_1 M_3| \in \mathbb{N}$, $c = |M_2 M_3| \in \mathbb{N}$, то $P(S) \leq 4 \cdot \min\{ab, ac, bc\}$.

Следствие 0.0.1.1. Любая СЦТ конечна.

Определение 0.0.3. Пусть даны точки M_1 и M_2 такие, что $|M_1 M_2| \in \mathbb{Z}$. Семейством целоразностных линий (СЦРЛ) для точек M_1 и M_2 назовём объединение семейства софокуных гипербол, имеющих фокусы в M_1 и M_2 и являющихся геометрическими местами точек, разность расстояний от которых до M_1 и M_2 есть число целое, а также вырожденной гиперболы, образованной объединением серединного перпендикуляра к отрезку $M_1 M_2$ и прямой $M_1 M_2$. Гиперболу Q будем называть вырожденной частью данного СЦРЛ, объединение остальных гипербол — собственной частью СЦРЛ, прямую $M_1 M_2$ — несобственной частью.

Утверждение 0.0.2. Пусть $|M_1 M_2| = n \in \mathbb{Z}$. Тогда СЦРЛ R для M_1 и M_2 есть объединение не более $\frac{n+1}{2}$ гипербол (возможно, вырожденных).

Доказательство. Собственная часть R состоит из гипербол, являющихся геометрическими местами точек, разность расстояний от которых до M_1 и M_2 есть число целое. Таких гипербол не более $\frac{n-1}{2}$. Кроме того, есть ещё вырожденная часть R , являющаяся вырожденной гиперболой.

Утверждение доказано.

Теперь сформулируем лемму, аналогичную лемме 0.0.1.

Лемма 0.0.3. Пусть в СЦТ S три точки M_1 , M_2 и M_3 лежат на одной прямой l и $a = |M_1 M_3| \in \mathbb{N}$, $b = |M_1 M_2| \in \mathbb{N}$, $c = |M_2 M_3| \in \mathbb{N}$, при этом $a = b + c$, т. е. точка M_2 лежит между M_1 и M_3 . Обозначим через S^* СЦТ, получаемую из S исключением всех точек, лежащих на l :

$$S^* = S \setminus l$$

Тогда $P(S^*) \leq (b-1)(c-1)$.

Доказательство. Пусть точка $M \in S^*$. Построим СЦРЛ P для M_1 и M_2 и СЦРЛ R для M_2 и M_3 . Так как $\{|MM_1|, |MM_2|, |MM_3|\} \subset \mathbb{Z}$, то $M \in A = (P \cup R) \setminus l$. Выясним теперь мощность множества A . Невырожденные части СЦРЛ P и Q имеют не более $4 \cdot \frac{b-1}{2} \cdot \frac{c-1}{2} = (b-1)(c-1)$ точек пересечения; Вырожденные же части пересекаются только по прямой l , на которой, по условию, нет точек из S^* . Лемма доказана.

Лемма 0.0.4. Если в СЦТ S найдётся $\beta = 2m^2 + 1$ точек и S лежит в пределах квадрата со стороной n , то $n > \frac{\beta-1}{4}$ (иначе говоря, $\beta < 4n + 1$).

Доказательство. СЦТ лежит в пределах квадрата со стороной n . Разобьём этот квадрат на m^2 меньших равных между собой квадратов со стороной $\frac{n}{m}$. Тогда по принципу Дирихле найдётся хотя бы один квадрат со стороной $\frac{n}{m}$, внутри которого (возможно, включая границы) найдутся три точки, принадлежащие рассматриваемой СЦТ. Обозначим их через M_1, M_2 и M_3 . Ни одно из расстояний $|M_1M_2|, |M_1M_3|$ и $|M_2M_3|$, очевидно, не превышает диагонали квадрата со стороной $\frac{n}{m}$, т. е. $\frac{n}{m}\sqrt{2}$. Три точки M_1, M_2 и M_3 либо лежат на одной прямой, либо нет.

Пусть они не лежат на одной прямой. Тогда по лемме 0.0.1 количество точек в СЦТ $\beta \leq \frac{8n^2}{m^2}$. Имеем:

$$\begin{aligned} 2m^2 + 1 &\leq \frac{8n^2}{m^2} \\ 2m^2 < 2m^2 + 1 &\leq \frac{8n^2}{m^2} \\ 2m^2 &< \frac{8n^2}{m^2} \\ m^2 &< \frac{4n^2}{m^2} \\ m^4 &< 4n^2 \end{aligned}$$

Т. к. n положительно, извлекаем корень:

$$\begin{aligned} m^2 &< 2n \\ 2m^2 + 1 &< 4n + 1 \\ \beta &< 4n + 1 \\ n &> \frac{\beta - 1}{4} \end{aligned}$$

Пусть теперь точки M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой l . По лемме ?? мощность СЦТ $S^* = S \setminus l$ ограничена: $P(S^*) \leq \left(\frac{n}{m}\sqrt{2} - 1\right) \left(\frac{n}{m}\sqrt{2} - 1\right) < 2\frac{n^2}{m^2}$. Так как S по условию лежит внутри квадрата со стороной n , то на l лежит не более $n\sqrt{2} + 1$ точек. Значит, $\beta = P(S) \leq 2\frac{n^2}{m^2} + n\sqrt{2} + 1 \leq 2\frac{n^2}{m^2} + n\sqrt{2} + 1 \leq 2\max 2\frac{n^2}{m^2}, n\sqrt{2} + 1$. Если $2\frac{n^2}{m^2} \leq n\sqrt{2}$, то $\beta \leq 2n\sqrt{2} + 1 < 4n + 1$, и лемма доказано. Иначе $\beta \leq 4\frac{n^2}{m^2} \leq 8\frac{n^2}{m^2}$. Повторив вышеприведённые рассуждения, получим требуемое.

Лемма доказана.

Утверждение 0.0.5 (вспомогательное). $\forall (\beta \in \mathbb{N}) [2\sqrt{\beta - 1} \leq \beta]$

Доказательство. Т. к. $\beta > 0$, возводим обе части неравенства в квадрат:

$$\begin{aligned} 4(\beta - 1) &\leq \beta^2 \\ (\beta - 2)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Определение 0.0.4. Назовём СЦТ S бестриадной, если никакие три точки из S не лежат на одной прямой.

Определение 0.0.5. Большим диаметром $D(S)$ СЦТ S называется диаметр наименьшего круга, целиком покрывающего СЦТ S .

Определение 0.0.6. Малым диаметром $d(S)$ СЦТ S называется максимум из попарных расстояний между её точками.

Заметим, что оба диаметра, во-первых, определены корректно, во-вторых, конечны, в-третьих, связаны соотношением $d(S) \leq D(S) \leq 2d(S)$ (последнее неравенство вытекает из того, что, выбрав точку A из произвольной пары максимально удалённых точек, можно построить круг радиуса $d(S)$ с центром в точке A , который, очевидно, покрывает всю СЦТ).

Лемма 0.0.6. Пусть СЦТ S лежит внутри квадрата со стороной n , $P(S) = \gamma$. Тогда $\gamma < 4(1 + \sqrt{2})n + 2 + \sqrt{2}$.

Доказательство. Возьмём $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2m^2 + 1 \leq \gamma \leq 2(m + 1)^2$ (это можно сделать единственным образом). Обозначим $2m^2 + 1 = \beta$, откуда $m = \sqrt{\frac{\beta-1}{2}}$. Тогда по лемме ?? имеем $\beta < 4n + 1$. Оценим γ :

$$\begin{aligned} \gamma &\leq 2(m + 1)^2 = 2m^2 + 4m + 2 \leq \beta + 1 + 2 \cdot 2\sqrt{\frac{\beta-1}{2}} = \beta + 1 + 2\sqrt{2}\sqrt{\beta-1} \leq \\ &\leq (1 + \sqrt{2})\beta + 1 < (4n + 1)(1 + \sqrt{2}) + 1 = 4(1 + \sqrt{2})n + 2 + \sqrt{2} \quad (1) \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 0.0.6.1. Для любой СЦТ S $P(S) < 10D(S) + 4$. Заметим, что это очень грубое ограничение, указывающее, однако, на не более чем линейный характер зависимости максимальной возможной мощности СЦТ от её диаметра.

В [1] Е.М. Семёнов даёт способ построения СЦТ произвольной наперёд заданной мощности, не приводя, однако, зависимость диаметра СЦТ, получаемой при таком построении, от её мощности. Приведём здесь оригинальный способ построения СЦТ, конструктивно доказав следующую лемму:

Лемма 0.0.7. Для любого натурального k найдётся СЦТ S такая, что $P(S) = 2k + 3$, $D(S) \leq 2^{4k+1}$.

Доказательство. Известно, что $(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2$. Заметим, что $2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k-p} \cdot 2^p$, где p — целое число от 0 до $k-1$. Таким образом, мы получили представление числа 2^{2k+1} в виде $2mn$ k способами. Рассмотрим теперь множество точек

$$S = \{O = (0; 0), B_{\pm} = (0; \pm 2^{2k+1}), A_{\pm p}(\pm 2^{2(2k-p)} - 2^{2p}; 0)\}$$

Покажем, что S — СЦТ. Понятно, что $|O - B_{\pm}| \in \mathbb{Z}$, $|O - A_{\pm p}| \in \mathbb{Z}$. Убедимся, что $|B_{\pm} - A_{\pm p}| \in \mathbb{Z}$. Действительно, $|B_{\pm} - A_{\pm p}| = |(0; \pm 2^{2k+1}) - (\pm 2^{2(2k-p)} - 2^{2p}; 0)| = \sqrt{(2^{2k+1})^2 + (2^{2(2k-p)} - 2^{2p})^2} = \sqrt{2^{4k+2} + 2^{4(2k-p)} - 2 \cdot 2^{4k} + 2^{4p}} = \sqrt{2^{4(2k-p)} + 2 \cdot 2^{4k} + 2^{4p}} = 2^{2(2k-p)} + 2^{2p} \in \mathbb{Z}$. Мощность СЦТ S равна в точности $2k+3$. Построим круг с центром в O радиуса 2^{4k} . Заметим, что $|O - B_{\pm}| = 2^{2k+1} < 2^{4k}$, $|O - A_{\pm p}| = 2^{2(2k-p)} - 2^{2p} < 2^{4k}$. Значит, построенный круг диаметра 2^{4k+1} покрывает СЦТ S .

Лемма доказана.

Литература

1. Аналитическая геометрия на плоскости / Е.М. Семенов, С.Н. Уксусов. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2013. – 100с.