Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный университет»

Математический факультет
Кафедра теории функций и геометрии

На правах рукописи

Авдеев Николай Николаевич

Инвариантные банаховы пределы

Диссертация на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор
Семенов Евгений Михайлович

Москва — 2025

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Один из основателей функционального анализа как области современной математики С. Банах в 1932 году ввёл в рассмотрение множество непрерывных линейных функционалов на пространстве ограниченных последовательностей, которые совпадают с обычным пределом на всех сходящихся последовательностях. Эти функционалы в дальнейшем и были названы банаховыми пределами; их изучением занимались Г.Г. Лоренц, Л. Сачестон, Г. Дас, У.Ф. Эберлейн и другие математики.

В 1948 году Г.Г. Лоренц, используя банаховы пределы, ввёл понятие почти сходящейся последовательности — последовательности, на которой значение банахова предела не зависит от выбора этого банахова предела. В 1967 году Л. Сачестон построил аналоги верхнего и нижнего пределов для банаховых пределов — (нелинейные) функционалы Сачестона. Изучению и обобщению понятия почти сходимости посвящены работы Р.А. Раими, М. Мурсалена, Г. Беннета, Н.Дж. Калтона, Д. Хаджуковича, Е.А. Алехно, Д. Занина и др. Отдельный интерес представляет вопрос о банаховых пределах, инвариантных относительно некоторых линейных операторов.

Банаховы пределы тесно связаны с другими областями математики. Так, в исследованиях С. Лорда, Дж. Филлипса, А.Л. Кери, П.Г. Доддса, Е.М. Семёнова, Б. де Пагтера, А.А. Седаева, А.С. Усачёва, Ф.А. Сукочева банаховы пределы применяются к изучению следов Диксмье; следы же Диксмье, в свою очередь, широко применяются в некоммутативной геометрии А. Конна. Связи банаховых пределов с эргодической теорией посвящены работы Л. Сачестона и др.

В настоящей диссертации исследуются пространство почти сходящихся последовательностей (и его подпространство последовательностей, почти сходящихся к нулю), функционалы Сачестона и инвариантные банаховы пределы.

Цели и задачи работы. Целью работы является изучение банаховых пределов и их свойств инвариантности.

Задачи работы:

- исследование структуры множества банаховых пределов;

- исследование подпространств пространства ограниченных последовательностей, определяемых с помощью банаховых пределов;
- исследование свойств композиции линейных операторов и банаховых пределов.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Получены новые критерии почти сходимости ограниченной последовательности. Изучена полунорма на пространстве ограниченных последовательностей, которая в работах других учёных возникала естественным образом (при изучении банаховых пределов, инвариантных относительно оператора Чезаро), но лишь во вспомогательной роли, и самостоятельным объектом исследования ранее не становилась. Выявлены новые свойства непрерывных линейных операторов на пространстве ограниченных последовательностей, определяемые с помощью банаховых пределов. Построены новые примеры множеств, разделяющих банаховы пределы и обладающих специальными свойствами. Выявлена связь функционалов Сачестона с множествами кратных.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе, спецкурсах и научных исследованиях, проводимых в Воронежском, Ростовском, Самарском, Ярославском государственных университетах и др. В работе сформулированы гипотезы, которые могут быть использованы в составе заданий для выполнения студентами и выпускниками бакалавриата, специалитета или магистратуры курсовых или выпускных квалификационных работ.

Методология и методы исследования. Для исследования банаховых пределов и связанных с ними математических объектов применяются понятия, методы и подходы современного функционального анализа, а также отдельные элементы и факты топологии и теории чисел.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. сформулированы и доказаны специальные критерии почти сходимости ограниченной последовательности;
2. исследована новая асимптотическая характеристика ограниченной последовательности, позволяющая выявлять дополнительные (по сравнению с банаховыми пределами) свойства таких последовательностей;
3. построена иерархическая система классов ограниченных линейных операторов на пространстве ℓ_∞ в зависимости от свойств их суперпозиции с банаховыми пределами;

4. построен пример множества последовательностей из нулей и единиц, разделяющего банаховы пределы и имеющего нулевую меру, индуцированную мерой Лебега на отрезке $[0;1]$;

5. исследована связь мультипликативной структуры носителя последовательности из нулей и единиц и значений, которые на такой последовательности могут принимать верхний и нижний функционалы Сачестона.

Степень достоверности и апробация результатов. Все включенные в диссертацию результаты доказаны в соответствии с современными стандартами достоверности математических доказательств.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- на Международной конференции «Воронежская Зимняя Математическая школа С.Г. Крейна» в 2018, 2022, 2025 гг.;
- на Международной конференции «Понтрягинские чтения — XXIX», посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина (Воронеж, 2018 г.);
- на Международной молодёжной научной школе «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» (Воронеж, 2018 г.);
- на конкурсе научно-исследовательских работ студентов и аспирантов российских вузов «Наука будущего — наука молодых» в секции «Информационные технологии и математика» (присуждено II место среди аспирантов) в ноябре 2021 г.;
- на Международной (53-й Всероссийской) молодёжной школе-конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (Екатеринбург, 2022 г.);
- на научной сессии ВГУ в 2020, 2021, 2022, 2024, 2025 гг.;
- 16.10.2024 г. на семинаре в МИАН под рук. чл.-корр. РАН О.В. Бесова;
- 15.10.2024 г. на семинаре в МГУ под рук. проф. РАН П.А. Бородина;
- 13.11.2024 г. на семинаре под рук. проф. С.В. Асташкина (Самара);
- 19.11.2024 г. на семинаре под рук. проф. А.Л. Скубачевского (Москва);
- 29.01.2025 г. на семинаре под рук. проф. А.Г. Кусраева и М.А. Плиева (Владикавказ);
- на международной (56-й Всероссийской) молодёжной школе-конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (Екатеринбург, февраль 2025 г.);
- на Всероссийской молодёжной научной конференции «Путь в науку. Математика» (Ярославль, май 2025 г.; доклад признан одним из лучших и награждён дипломом).

Научно-исследовательская работа соискателя по теме диссертации была поддержана грантами:

- Российского научного фонда (грант № 19-11-00197);
- Российского научного фонда (грант № 24-21-00220);
- Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект № 22-7-2-27-3).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1—15]. Из совместных работ [2; 4; 7; 8; 10] в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично диссертанту.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на 43 параграфа, и списка литературы, включающего 111 источников. Общий объём диссертации 121 страница.

Основные математические объекты и их обозначения

Приведём список основных математических объектов и понятий, а также обозначений, которые в тексте диссертации могут быть использованы без дополнительного пояснения.

Числовые множества. Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; ...\}$. Через $\mathbb{N}_k$ — множество целых чисел, не меньших k (чтобы избежать громоздкой записи вида: пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, ...). Так,

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}, \quad \mathbb{N}_3 = \{3; 4; 5; 6; 7; ...\}.$$

Через $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ будем обозначать множества рациональных и вещественных чисел соответственно; через $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$ — множества положительных рациональных, отрицательных рациональных, положительных вещественных и отрицательных вещественных чисел соответственно.

Пространства последовательностей и их подмножества. Основным используемым пространством будет пространство ℓ_∞ ограниченных последовательностей со стандартной нормой

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Эта же норма будет использоваться и в остальных пространствах и множествах, среди которых:

- c — пространство сходящихся последовательностей;
- c_λ — множество последовательностей, сходящихся к $\lambda \in \mathbb{R}$, в частности,

- c_0 — пространство последовательностей, сходящихся к нулю;
- c_{00} — пространство последовательностей с конечным носителем [16, теорема 4];
- ac — пространство почти сходящихся последовательностей;
- ac_λ — множество последовательностей, почти сходящихся к $\lambda \in \mathbb{R}$, в частности,
- ac_0 — пространство последовательностей, почти сходящихся к нулю;
- $\mathcal{I}(ac_0)$ — максимальный (по включению) идеал по умножению в пространстве ac_0 (см. теорему 1.0.8);
- $A_0 = \{x \in \ell_\infty : \alpha(x) = 0\}$ (см. ниже; о свойствах этого пространства см., напр., теорему 2.10.1 и далее);
- $\Omega = \{0; 1\}^{\mathbb{N}}$ — множество последовательностей, состоящих из нулей и единиц.

Нормы. Запись $\|\cdot\|$ без уточнений будет обозначать норму в пространстве ℓ_∞, ℓ_∞^* или в пространстве ограниченных линейных операторов, действующих из ℓ_∞ в ℓ_∞ (обозначаемом $\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)$) в зависимости от природы аргумента. В случае, если нужно ввести другую норму (например, фактор-норму ℓ_∞/c_0, как в теореме 2.8.1), это будет оговорено явно.

Последовательности. Для любого $x \in \ell_\infty$ будем по умолчанию полагать, что

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, ...).$$

Кроме того, нам будет часто требоваться константная единица $\mathbb{1} = (1, 1, 1, 1, ...)$.

Будем писать, что $x \geqslant 0$, если $x_n \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и $x \leqslant 0$, если $x_n \leqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Вслед за [17] будем обозначать через $\mathscr{M}A$ множество всех чисел, кратных элементам множества $A \subset \mathbb{N}$, т.е.

$$\mathscr{M}A = \{ka : k \in \mathbb{N}, a \in A\},$$

через χF — характеристическую функцию множества F.

Так, например,

$$\chi\mathscr{M}A(\{2\}) = \chi\mathscr{M}A(\{2,4\}) = \chi\mathscr{M}A(\{2,4,8,16,...\}) = (0,1,0,1,0,1,0,1,0,...),$$
$$\chi\mathscr{M}A(\{3\}) = \chi\mathscr{M}A(\{3,9,27,...\}) = (0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ ...),$$
$$\chi\mathscr{M}A(\{2,3\}) = \chi\mathscr{M}A(\{2,3,6\}) = (0,1,1,1,0,1,\ 0,1,1,1,0,1,\ 0,1,1,1,0,1,...).$$

Операторы. Следующие обозначения операторов будут широко использоваться в тексте диссертации.

- Тождественный оператор:

$$I(x_1, x_2, x_3, x_4, ...) = (x_1, x_2, x_3, x_4, ...).$$

- Оператор сдвига влево:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

- Оператор сдвига вправо:

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...).$$

- Оператор растяжения ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sigma_n(x_1, x_2, x_3, ...) = (\underbrace{x_1, ..., x_1}_{n\ \text{раз}}, \underbrace{x_2, ..., x_2}_{n\ \text{раз}}, \underbrace{x_3, ..., x_3}_{n\ \text{раз}}, ...).$$

- Оператор усредняющего сжатия ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sigma_{1/n}x = n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=n+1}^{2n} x_i, \sum_{i=2n+1}^{3n} x_i, ...\right).$$

- Оператор Чезаро (иногда называемый оператором Харди):

$$(Cx)_n = n^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

  т.е.

$$C(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, ..., \frac{x_1 + ... + x_n}{n}, ...\right).$$

- Оператор суперпозиции (покоординатного умножения):

$$x \cdot y = (x_1 \cdot y_1;\quad x_2 \cdot y_2;\quad x_3 \cdot y_3;\ ...)$$

Специальные функции и множества. Через $\mathfrak{B}$ будем обозначать множество всех банаховых пределов; через $\mathfrak{B}(H)$ — множество всех банаховых пределов, инвариантных относительно оператора H.

Через $\operatorname{ext} A$ будем обозначать множество крайних точек множества A.

Нижний и верхний функционалы Сачестона соответственно [18]:

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \quad \text{и} \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Кроме того, мы будем часто пользоваться функцией [10]:

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j|.$$

Краткое содержание работы

Сходящиеся последовательности, т.е. последовательности, имеющие предел в смысле классического математического анализа, изучены достаточно хорошо. В частности, любая сходящаяся последовательность является ограниченной. Пространство ограниченных последовательностей будем, вслед за классиками [19; 20], обозначать через ℓ_∞ и снабжать его нормой

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Однако в приложениях часто возникают ограниченные последовательности, которые не являются сходящимися. В таком случае возникает закономерный вопрос: как измерить «недостаток сходимости»? «насколько не сходится» последовательность?

Наиболее очевидным кажется вычисление расстояния $\rho(x, c)$ от заданного элемента $x \in \ell_\infty$ до пространства сходящихся последовательностей c (которое равно половине разности верхнего и нижнего пределов последовательности). Однако выясняется, что имеют место быть и другие подходы.

Нетрудно заметить, что операция взятия классического предела на пространстве сходящихся последовательностей является непрерывным (в норме ℓ_∞) линейным функционалом. В 1929 г. С. Мазур анонсировал [21], что этот функционал может быть непрерывно продолжен на всё пространство ℓ_∞ (доказательство приведено в книге С. Банаха [22]). На основе этой идеи были определены банаховы пределы (иногда также называемые пределами Банаха–Мазура [23; 24]) следующим образом.

Банаховым пределом называется функционал $B \in \ell_\infty^*$ такой, что:

1. $B \geqslant 0$
2. $B\mathbb{1} = 1$
3. $B = BT$

Простейшие свойства:

- $\|B\|_{\ell_\infty^*} = 1$
- $Bx = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ для любого $x = (x_1, x_2, ...) \in c$.

  Таким образом, банахов предел — действительно естественное обобщение понятия предела сходящейся последовательности на все ограниченные последовательности.

Множество банаховых пределов обычно обозначают через $\mathfrak{B}$ (реже через BM — см., например [23; 24]).

Лоренц [25] установил, что существует подпространство ℓ_∞, на котором все банаховы пределы принимают одинаковое значение. Это пространство названо пространством почти сходящихся последовательностей и обычно обозначается через ac (от англ. «almost convergent»).

Включение $c \subset ac$ собственное, т.е. $ac \setminus c \neq \varnothing$. Более того, Лоренц доказал, что для заданных $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \ell_\infty$ равенство $Bx = t$ выполнено для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = t \tag{1}$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Это утверждение называют критерием Лоренца.

Обобщая критерий Лоренца, Сачестон [18] доказал, что для любого $x \in \ell_\infty$ и любого $B \in \mathfrak{B}$

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \leqslant Bx \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = p(x)$$

и, более того,

$$\mathfrak{B}x = [q(x), p(x)].$$

За более подробным обзором ранних исследований банаховых пределов отсылаем читателя к [26—28]. Вскоре после работ Сачестона Дж. Куртц распространил понятие банаховых пределов на векторные последовательности [29], а затем и на последовательности в произвольных банаховых пространствах [30]. За обсуждением банаховых пределов в векторных пространствах отсылаем читателя к [31—35]. В недавней работе [36] Ч. Чен и М. Куо изучают обобщения банаховых пределов на произвольные гильбертовы пространства и на пространства суммируемых функций L_p. Другим обобщениям банаховых пределов посвящены работы [37; 38].

Ещё одним достаточно плодотворным обобщением банаховых пределов оказались их аналоги на двойных последовательностях [39], введённые Дж. Д. Хиллом в [40]. За дальнейшими результатами в этом направлении отсылаем читателя к [41—45]. Из недавних работ стоит отдельно отметить статью М. Мурсалена и С.А. Мухиддина [46], в которой с помощью понятия почти сходимости в пространстве ограниченных двойных последовательностей вводится ряд новых интересных подпространств.

Наконец, если исключить из определения банахова предела требование трансляционной инвариантности, то мы получим объект, называемый обобщённым пределом, подробно изучавшийся М. Джерисоном в [47] и многих других работах.

Таким образом, на вопрос: «Насколько не сходится последовательность?» можно дать ответ в терминах почти сходимости, т.е. принадлежности пространству ac, а на вопрос: «Насколько почти не сходится последовательность?» — назвать длину отрезка $[q(x), p(x)]$. В дальнейшем пространство почти сходящихся последовательностей неоднократно становилось предметом различных исследований [48; 49]. В частности, в работе [50] доказано, что последовательность из нулей и единиц почти наверное не принадлежит пространству ac. Этот факт демонстрирует, что почти сходящиеся последовательности «достаточно редки».

Банаховы пределы также нашли своё применение в приложениях [51—53].

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы асимптотических характеристик ограниченных последовательностей, в том числе банаховых пределов. Нумерация приводимых ниже теорем, лемм, определений и следствий совпадает с их нумерацией в диссертации.

В главе 1 обсуждается пространство ac и его подпространство ac_0, даётся критерий почти сходимости к нулю (т.е. принадлежности пространству ac_0) знакопостоянной последовательности.

Теорема 1.4.8 Пусть n_i — строго возрастающая последовательность натуральных чисел,

$$M(j) = \liminf_{i\to\infty} n_{i+j} - n_i, \tag{2}$$

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n_i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:
(i) $x \in ac_0$;

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{M(j)}{j} = +\infty$;

(iii) $\inf\limits_{j\in\mathbb{N}} \dfrac{M(j)}{j} = +\infty$.

Теорема 1.5.2 Пусть $x \in \ell_\infty$, $x \geqslant 0$, $\lambda > 0$. Обозначим через $n_i^{(\lambda)}$ возрастающую последовательность индексов таких элементов x, что $x_k \geqslant \lambda$ тогда и только тогда, когда $k = n_i^{(\lambda)}$ для некоторого i. Обозначим

$$M^{(\lambda)}(j) = \liminf_{i\to\infty} n_{i+j}^{(\lambda)} - n_i^{(\lambda)}.$$

Тогда для того, чтобы $x \in ac_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda > 0$ было выполнено

$$\lim_{j\to\infty} \frac{M^{(\lambda)}(j)}{j} = +\infty.$$

Теорема 1.7.4 Для любого $x \in ac$

$$\frac{1}{2}\alpha(x) \leqslant \rho(x, c) \leqslant \lim_{s\to\infty} \alpha(T^s x).$$

Следствие 1.7.5 Для любого $x \in ac_0$

$$\frac{1}{2}\alpha(x) \leqslant \rho(x, c_0) \leqslant \lim_{s\to\infty} \alpha(T^s x).$$

Теорема 1.8.1 Мера множества $F = \{x \in \Omega : q(x) = 0 \wedge p(x) = 1\}$, где $p(x)$ и $q(x)$ — верхний и нижний функционалы Сачестона соответственно, равна 1.

В главе 2 изучается α–функция, введённая в [10]:

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j|.$$

Поскольку $\alpha(c) = 0$, то α–функцию также можно считать «мерой несходимости» последовательности; равенство $\alpha(x) = 0$, однако, вовсе не гарантирует сходимость.

Устанавливается, что α–функция не инвариантна относительно оператора сдвига T, и даётся оценка на $\alpha(T^n x)$. С другой стороны, α–функция, в отличие от некоторых банаховых пределов [54; 55], инвариантна относительно операторов растяжения σ_n. Затем выявляется связь между α–функцией, расстоянием от заданнной последовательности до пространства c и почти сходимостью. Рассмотрены и другие свойства α–функции. Приведём основные результаты.

Следствие 2.2.4 Для любых $x \in \ell_\infty$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\alpha(x) \leqslant \alpha(T^n x) \leqslant \alpha(x). \tag{3}$$

Теорема 2.3.1 Пусть β_k — монотонная невозрастающая последовательность, $\beta_k \to \beta$, $\beta \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $\beta_1 \leqslant 1$. Тогда существует такой $x \in \ell_\infty$, что для любого натурального n

$$\frac{\alpha(T^n x)}{\alpha(x)} = \beta_n.$$

Теорема 2.5.1 Для любого $x \in \ell_\infty$ и для любого натурального n верно равенство

$$\alpha(\sigma_n x) = \alpha(x).$$

Теорема 2.6.2 Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \ell_\infty$ выполнено

$$\alpha(\sigma_{1/n} x) \leqslant \left(2 - \frac{1}{n}\right) \alpha(x).$$

Теорема 2.7.8 Имеет место равенство

$$\sup_{x \in \ell_\infty, \alpha(x) \neq 0} \frac{\alpha(Cx)}{\alpha(x)} = 1.$$

Теорема 2.8.1 Пусть $(x \cdot y)_k = x_k \cdot y_k$. Тогда $\alpha(x \cdot y) \leqslant \alpha(x) \cdot \|y\|_* + \alpha(y) \cdot \|x\|_*$, где

$$\|x\|_* = \limsup_{k \to \infty} |x_k|$$

есть фактор-норма по c_0 на пространстве ℓ_∞.

В параграфе 2.10 исследуется пространство $A_0 = \{x : \alpha(x) = 0\}$. Это пространство несепарабельно, замкнуто относительно покоординатного умножения, операторов левого и правого сдвигов, оператора Чезаро, операторов растяжения σ_n и усредняющего сжатия $\sigma_{1/n}$.

В параграфе 2.11 устанавливается, что в цепочке вложений

$$c_0 \subset A_0 \subset \ell_\infty$$

оба подпространства недополняемы.

Как сказано выше, банаховы пределы по определению (как и обычный предел на пространстве c) инвариантны относительно оператора сдвига. Возникает закономерный вопрос: можно ли потребовать от банахова предела сохранять своё значение при суперпозиции с некоторыми другими операторами на ℓ_∞? Эту проблему исследовал У. Эберлейн в 1950 г. [56], т.е. через два года после классической работы Г. Г. Лоренца [25]. Эберлейн установил, что существуют такие линейные операторы $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$, для которых $BAx = Bx$ независимо от выбора x и для банаховых пределов специального вида.

Будем говорить, что $B \in \mathfrak{B}(A)$, $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$, если для любого $x \in \ell_\infty$ выполнено равенство $BAx = Bx$. Такой банахов предел B называют инвариантным относительно оператора A.

Можно ли выделить какие-то особые свойства оператора сдвига, которые необходимы или достаточны оператору, чтобы относительно него были инвариантны все или некоторые банаховы пределы? Понятно, что если оператор A таков, что для любого $x \in \ell_\infty$ между Ax и x существует (конечное) расстояние Дамерау–Левенштейна [57] (т.е. минимальное количество операций вставки, удаления, замены и перестановки двух соседних элементов последовательности, необходимых для перевода x в Ax, причём для разных $x \in \ell_\infty$ эти операции, вообще говоря, не обязаны быть одинаковыми), то относительно данного оператора инвариантен любой банахов предел. Аналогичное утверждение справедливо и в случае, если $Ax - x \in c_0$ для любого $x \in \ell_\infty$.

Следующим по естественности (после сдвига и замены конечного числа элементов) действием, сохраняющем сходимость последовательности, является повторение элементов последовательности, например, оператор

$$\sigma_2(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_1,\ x_2, x_2,\ x_3, x_3,\ ...).$$

Однако относительно такого оператора инвариантны не все, а только некоторые банаховы пределы. Так, в [16, теорема 14] показано, что

$$\mathfrak{B}(\sigma_n) \cap \operatorname{ext} \mathfrak{B} = \varnothing \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbb{N}_2.$$

Заметим, что если мы рассмотрим оператор неравномерного растяжения

$$\sigma_{1,2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...) = (x_1,\ x_2, x_2,\ x_3,\ x_4, x_4,\ x_5, ...),$$

то увидим, что периодическую последовательность $y_n = (-1)^n$, $y \in ac_0$ оператор $\sigma_{1,2}$ переводит в периодическую последовательность

$$(-1, 1, 1,\ -1, 1, 1,\ ...) \in ac_{1/3},$$

поскольку на периодической последовательности любой банахов предел принимает значение, равное среднему по периоду. Таким образом, не существует банаховых пределов, инвариантных относительно оператора $\sigma_{1,2}$.

В главе 3 изложены некоторые примеры операторов и найдены множества банаховых пределов, инвариантных относительно этих операторов. Затем рассматриваются следующие классы линейных операторов $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$:

– полуэберлейновы: такие, что $B_1H \in \mathfrak{B}$ для некоторого $B_1 \in \mathfrak{B}$;

– эберлейновы: такие, что $B_1H = B_1$ для некоторого $B_1 \in \mathfrak{B}$;

– B-регулярные: такие, что $B_1H \in \mathfrak{B}$ для любого $B_1 \in \mathfrak{B}$;

– существенно эберлейновы: такие, что $B_1H \in \mathfrak{B}$ для любого $B_1 \in \mathfrak{B}$ и $B_2H \neq B_2$ для некоторого $B_2 \in \mathfrak{B}$.

Устанавливается (см. теоремы 3.9.1 и 3.11.1), что каждый следующий из этих классов вложен в предыдущий и не совпадает с ним. Кроме того, доказывается ещё ряд смежных результатов, в частности, решается обратная задача об инвариантности.

Теорема 3.12.1 Для каждого $B \in \mathfrak{B}$ существует такой оператор $G_B : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $\mathfrak{B}(G_B) = \{B\}$.

Главы 4 и 5 посвящены верхнему и нижнему функционалам Сачестона $p(x)$ и $q(x)$— аналогам верхнего и нижнего пределов последовательности. В главе 4 изучаются разделяющие множества.

Обозначим через Ω множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц.

Теорема 4.2.1 Пусть $1 \geqslant a > b \geqslant 0$ и $\Omega_b^a = \{x \in \Omega : p(x) = a, q(x) = b\}$, где $p(x)$ и $q(x)$ — верхний и нижний функционалы Сачестона [18] соответственно. Тогда $\Omega \subset \operatorname{Lin} \Omega_b^a$.

Следствие 4.2.2 Множество Ω_b^a является разделяющим. Т.к. при $a \neq 1$ или $b \neq 0$ множество Ω_b^a имеет меру нуль [50; 58], то оно является разделяющим множеством нулевой меры.

Пусть $X_b^a = \{x \in \ell_\infty : p(x) = a,\ q(x) = b\}$, $Y_b^a = \{x \in A_0 : p(x) = a, q(x) = b\}$, где $a > b$.

Теорема 4.3.4 Пусть $a \neq -b$. Тогда справедливо равенство $\operatorname{Lin} Y_b^a = A_0$.

Теорема 4.3.6 Справедливо равенство $\operatorname{Lin} X_b^a = \ell_\infty$.

Через $\dim_H E$ будем обозначать хаусдорфову размерность множества E.

Теорема 4.5.2 Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует разделяющее множество $E \subset \Omega$ такое, что $\dim_H E = 1/n$.

Глава 5 посвящена связи мультипликативных свойств носителя последовательности из нулей и единиц и значений, которые могут принимать функционалы Сачестона на такой последовательности.

Следствие 5.1.2 Пусть $\{p_1, ..., p_k\} \subset \mathbb{N}$,

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{j_k} \text{ для некоторых } j_1, ..., j_k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $x \in ac_0$.

Определение 5.2.4 Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{N}$ обладает P-свойством, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся набор попарно взаимно простых чисел

$$\{a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,n}\} \subset A.$$

Теорема 5.2.7 Пусть $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) A обладает P-свойством

(ii) В A существует бесконечное подмножество попарно взаимно простых чисел

(iii) $p(\chi \mathscr{M} A) = 1$.

Следствие 5.3.2 Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ — бесконечное множество попарно взаимно простых чисел и $a_{n+1} > a_1 \cdot ... \cdot a_n$. Тогда

$$q(\chi \mathscr{M} A) = 1 - \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_j}\right).$$

Лемма 5.3.4 Пусть $\varepsilon \in (0; 1]$. Существует бесконечное множество попарно непересекающихся подмножеств простых чисел A_i такое, что $q(\chi \mathscr{M} A_i) \geqslant \varepsilon$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Глава 1

Последовательности, почти сходящиеся к нулю

Почти сходимость является естественным обобщением понятия сходимости. История исследования почти сходимости начинается с работы Г.Г. Лоренца [25]. Напомним определение банахова предела.

Определение 1.0.1. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geqslant 0$, т. е. $Bx \geqslant 0$ для $x \geqslant 0$,
2. $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots)$,
3. $B(Tx) = B(x)$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Множество всех банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром [21] и позднее доказано в книге С. Банаха [22].

Лоренц установил, что существуют такие последовательности $x \in \ell_\infty$, что значение выражения Bx не зависит от выбора $B \in \mathfrak{B}$. Такие последовательности называются почти сходящимися (англ. *almost convergent*). Пишут: $x \in ac$.

Лоренц доказал следующий критерий почти сходимости, который оказывается исключительно удобен при проверке последовательности на принадлежность пространству ac.

Теорема 1.0.2 (Критерий Лоренца)**.** Для заданных $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \ell_\infty$ равенство $Bx = t$ выполнено для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = t \tag{1.1}$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Если некоторый $x \in \ell_\infty$ удовлетворяет (1.2), то мы будем говорить, что x почти сходится к t, и писать: $x \in ac_t$. Таким образом, очевидно, $ac = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} ac_t$.

Равномерный предел в критерии Лоренца можно заменить на двойной [59, Теорема 1]:

Теорема 1.0.3. Для заданного $t \in \mathbb{R}$ равенство $Bx = t$ выполнено для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = t. \tag{1.2}$$

(Заметим, что в общем случае равномерный предел и двойной предел — это разные объекты; за подробными комментариями отсылаем к классическим трудам по математическому анализу, например, [60, с. 154].) В настоящей главе в целях удобства доказывается модифицированный критерий Лоренца — теорема 1.3.1.

Приведём важнейшее следствие из критерия Лоренца, позволяющее в ряде случаев без особых усилий показывать почти сходимость последовательности, которое также содержится в [25].

Следствие 1.0.4. Всякая периодическая последовательность почти сходится к среднему по периоду. Иначе говоря, для любого $B \in \mathfrak{B}$

$$B(x_1, x_2, ..., x_n,\ x_1, x_2, ..., x_n,\ x_1, x_2, ..., x_n,\ x_1, ...) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Сачестон [18] установил, что для любых $x \in \ell_\infty$ и $B \in \mathfrak{B}$

$$q(x) \leqslant Bx \leqslant p(x), \tag{1.3}$$

где

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \quad \text{и} \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

называют нижним и верхним функционалом Сачестона соотвественно. Заметим, что $p(x) = -q(-x)$. Неравенства (1.3) точны: для данного x для любого $r \in [q(x); p(x)]$ найдётся банахов предел $B \in \mathfrak{B}$ такой, что $Bx = r$.

Множество таких $x \in \ell_\infty$, что $p(x) = q(x)$, и образует подпространство почти сходящихся последовательностей ac. Таким образом, функционалы Сачестона являются удобным инструментом для доказательства того, что некоторая последовательность x не является почти сходящейся: для этого достаточно показать, что $p(x) \neq q(x)$.

В [61, теорема 5] показано, что нижний и верхний функционалы Сачестона могут быть переписаны в эквивалентном виде:

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \quad \text{и} \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Пространство ac имеет интересную структуру. За глобальным обзором его свойств отсылаем читателя к [48]; ряд интересных фактов можно почерпнуть в [49], а также в диссертации А.С. Усачёва [62]. Стоит также отметить недавнюю работу [63], в которой исследуется почти сходимость последовательностей, определённых с помощью тригонометрических функций.

Часто мы будем иметь дело не с пространством всех почти сходящихся последовательностей ac, а с его подпространством ac_0 последовательностей, почти сходящихся к нулю. Пространство ac_0 имеет ряд особенностей, существенно отличающих его от пространства c_0 последовательностей, сходящихся к нулю. То, что $ac_0 \neq c_0$, показывает следующий классический

Пример 1.0.5. Пусть
$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 2^n,\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
Тогда $x \in ac_0 \setminus c_0$.

Более того, в отличие от пространства c_0, пространство ac_0 не замкнуто относительно оператора взятия подпоследовательности, относительно покоординатного умножения и относительно возведения в степень. Три этих свойства показывает

Пример 1.0.6. Пусть $x_n = (-1)^{n+1}$, т.е. $x = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$. Тогда $x \in ac_0$ в силу периодичности (см. следствие 1.0.4), но, очевидно, $x \cdot x = x^2 \in ac_1$. Если же мы рассмотрим оператор перехода к подпоследовательности с чётными индексами
$$E(y_1, y_2, ...) = (y_2, y_4, y_6, ...),$$
то обнаружим, что $Ex = (-1, -1, -1, -1, ...) \in ac_{-1}$.

Можно привести и пример, когда взятие подпоследовательности выводит из всего пространства ac.

Пример 1.0.7. Пусть $x_n = (-1)^{n+1}$, т.е. $x = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$. Рассмотрим подпоследовательность
$$y = (1, -1,\ 1, 1, -1, -1,\ 1, 1, 1, -1, -1, -1,\ 1, 1, 1, 1, ...).$$
Легко видеть, что верхний и нижний функционалы Сачестона принимают на последовательности y различные значения: $p(y) = 1$, $q(y) = -1$. Следовательно, $y \notin ac$.

Е.А. Алехно доказал [23], что в ac_0 существует максимальный идеал по умножению, обозначаемый $\mathcal{I}(ac_0)$ и, более того, этот идеал может быть ёмко описан следующим критерием:

Теорема 1.0.8. Пусть $x \in ac_0$. Последовательность $x \in \mathcal{I}(ac_0)$ тогда и только тогда, $x = x^+ + x^-$, $x^+ \geqslant 0$, $x^- \leqslant 0$ и $x^+ \in ac_0$ (последнее включение эквивалентно условию $x^- \in ac_0$).

Более того, $\mathcal{I}(ac_0)$ является подпространством в ac_0.

Е.А. Алехно также исследовал [16; 23; 24] *стабилизатор* пространства ac_0:
$$\mathcal{D}(ac_0) = \{x \in \ell_\infty : x \cdot y \in ac_0 \text{ для любого } y \in ac_0\}$$
(встречается [64] также обозначение $\mathrm{St}(ac_0)$).

$\mathcal{D}(ac_0)$ также является подпространством (уже в ℓ_∞), однако в настоящей работе в дальнейшем не используется, и потому мы не будем останавливаться на его свойствах; отсылаем читателя к [64].

Результаты, излагаемые в данной главе, опубликованы в [1; 2; 4].

1.1 О декомпозиции ограниченной последовательности

Очень часто при изучении банаховых пределов и смежных вопросов рассматриваются последовательности, элементы которых могут принимать только два значения (см., например, [1; 5; 6; 50]).

Мы начнём с того, что конструктивно докажем лаконичный результат, в некотором смысле обосновывающий такой подход.

Лемма 1.1.1. Пусть $x \in \ell_\infty$, $\|x\| \leqslant 1$. Тогда существует такая $h \in ac_0$, что $(x+h)_n = \pm 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Построим последовательность h согласно следующим соотношениям. Положим $h_1 = 1 - x_1$. Обозначим $s_n = \sum_{k=1}^n h_k$. Для всех $k \geqslant 2$ будем полагать

$$h_k = \begin{cases} 1 - x_k, & \text{если} \quad s_{k-1} < 0, \\ -1 - x_k, & \text{если} \quad s_{k-1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $|h_k| \leqslant 2$ и, более того, по индукции нетрудно показать, что $|s_k| \leqslant 2$. Осталось применить критерий Лоренца к последовательности h_k:

$$\left| \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} h_k \right| \leqslant \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=m+1}^{m+n} h_k \right| \leqslant \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{m+n} h_k - \sum_{k=1}^{m} h_k \right| =$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} |s_{m+n} - s_m| \leqslant \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} (|s_{m+n}| + |s_m|) \leqslant \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n}(2+2) = 0$$

□

Следствие 1.1.2. Пусть $x \in \ell_\infty$. Тогда существует такая $h \in ac_0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$(x+h)_n \in \{\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\}.$$

Следствие 1.1.3. Пусть $x \in \ell_\infty$. Тогда существует такая $h \in ac_0$, что $(x+h)_n = \pm\|x\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Полученный результат интересен в первую очередь тем, что для банаховых пределов и связанных с ними понятий очень редки теоремы о приближении или о декомпозиции. Более того, из полученного результата непосредственно следует, например, доказанное в [58] утверждение о том, что множество всех последовательностей из 0 и 1 является разделяющим. (Приведённое в [58] доказательство достаточно длинное.)

Предложенная выше процедура, однако, в общем случае не сохраняет последовательность из ac_0, а превращает её в сумму двух последовательностей совсем другой структуры.

1.2 Эквивалентность Дамерау–Левенштейна

Этот параграф носит вспомогательный характер. Основная его цель — ввести полезное отношение эквивалентности, в некоторых случаях упрощающее запись.

В математической лингвистике широко известно расстояние Дамерау–Левенштейна — мера разницы двух строк символов, определяемая как минимальное количество операций вставки, удаления, замены и транспозиции (перестановки двух соседних символов), необходимых для перевода одной строки в другую [57; 65; 66]. Расстояние Дамерау–Левенштейна является модификацией расстояния Левенштейна (и не превосходит его): к операциям вставки, удаления и замены символов, определённых в расстоянии Левенштейна [67], добавлена операция транспозиции (перестановки) двух соседних символов.

Эти расстояния действительно являются метриками на множестве всех конечных слов из букв заданного алфавита; основное их современное приложение — это, например, определение опечаток при наборе текста и выявление помех при передаче алфавитных сигналов [68—71].

Нам, однако, расстояние Дамерау–Левенштейна интересно в другом контексте. Совершенно очевидно, что его определение можно обобщить на бесконечные последовательности чисел, при этом метрикой полученный объект быть перестаёт, так как может принимать значение, равное бесконечности.

Определение 1.2.1. Для $x, y \in \ell_\infty$ будем говорить, что расстояние Дамерау–Левенштейна между x и y конечно, и писать $x \approx y$, если последовательность x можно получить из последовательности y конечным числом вставок элементов и конечным числом удалений элементов.

Замечание 1.2.2. Здесь мы опускаем упоминание операций замены элемента и транспозиции элементов, поскольку каждая из этих операций представима в виде комбинации операции вставки и операции удаления. Это обусловлено тем, что численное значение самого расстояния нам безразлично — важен лишь факт его конечности.

Лемма 1.2.3. Пусть $B \in \mathfrak{B}$, $x \approx y$. Тогда $Bx = By$.

Доказательство. Предположим сначала, что последовательность x получена из последовательности y удалением одного элемента y_k:

$$(x_1, x_2, x_3, ...) = (y_1, y_2, ..., y_{k-1}, y_{k+1}, ...).$$

Тогда, очевидно,

$$T^{k-1}x = T^k y = (y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, ...),$$

поэтому

$$Bx = BT^{k-1}x = BT^k y = By.$$

Если же последовательность x получена из последовательности y вставкой одного элемента x_k, то в вышеприведённых рассуждениях последовательности x и y меняются местами.

Наконец, по индукции приведённые рассуждения можно повторить для любого числа удалений и вставок, то есть для любых последовательностей, расстояние Дамерау–Левенштейна между которыми конечно. $\square$

Более того, очевидна следующая

Лемма 1.2.4. Соотношение $x \approx y$ выполнено тогда и только тогда, когда для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$ верно равенство $T^m x = T^n y$.

Непосредственной проверкой аксиом (рефлексивности, симметричности и транзитивности) легко убедиться, что отношение $\approx$ является отношением эквивалентности (будем называть его *эквивалентностью Дамерау–Левенштейна*) и разбивает ℓ_∞ на классы эквивалентности.

Замечание 1.2.5. Эти классы оказываются достаточно узкими. Так, например, в разные классы попадут последовательности x и y, связанные соотношением $x_n = y_n + \frac{1}{n}$, хотя $x - y \in c_0$ и для любого $B \in \mathfrak{B}$ выполнено $Bx = By$.

Мы будем пользоваться эквивалентностью Дамерау–Левенштейна, чтобы упростить запись равенств, в ряде случаев избегая оператора сдвига и пренебрегая конечным количеством элементов последовательности.

1.3 Переформулировка критерия Лоренца почти сходимости последовательности к нулю

Дадим переформулировку критерия Лоренца [25; 72] почти сходимости последовательности, которая иногда позволяет упростить доказательство: брать предел равномерно не по всем $m \in \mathbb{N}$, а только по достаточно большим значениям.

Теорема 1.3.1 (Модифицированный критерий Лоренца)**.** Пусть $x \in \ell_\infty$.

$x \in ac_0$ тогда и только тогда, когда

$$\forall (A_2 \in \mathbb{N}) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \exists (m_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geqslant n_0) \forall (m \geqslant m_0) \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \right| < \frac{1}{A_2} \right]. \tag{1.4}$$

Доказательство. По теореме Лоренца $x \in ac_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = 0$$

равномерно по m.

Или, переводя на язык кванторов,

$$\forall (A_1 \in \mathbb{N}) \exists (n_1 \in \mathbb{N}) \forall (n \geqslant n_0) \forall (m \in \mathbb{N}) \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \right| < \frac{1}{A_1} \right]. \tag{1.5}$$

Очевидно, что из (1.5) следует (1.4) (например, положив $m_0 = 1$), тем самым необходимость (1.4) доказана.

Достаточность. Пусть выполнено (1.4). Покажем, что выполнено (1.5). Зафиксируем A_1. Положим $A_2 = 2A_1$ и отыщем n_0 и m_0 в соотвествии с (1.4). Положим $n_1 = 2A_2(n_0+m_0)\|x\|$. Покажем, что (1.5) верно для любых $n \geqslant n_1$, $m \in \mathbb{N}$. Зафиксируем n и рассмотрим m.

Пусть сначала $m \geqslant m_0$. Тогда в силу того, что $n \geqslant n_1 = 2A_2(n_0+m_0)\|x\| > n_0$ имеем $n > n_0$. Применим (1.4):

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k\right| < \frac{1}{A_2} = \frac{1}{2A_1} < \frac{1}{A_1},$$

т.е. (1.5) выполнено.

Пусть теперь $m < m_0$. Заметим, что

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k - \sum_{k=m_0+1}^{m_0+n} x_k\right| \leqslant 2(m_0-m)\|x\|,$$

откуда

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k\right| \leqslant 2(m_0-m)\|x\| + \left|\sum_{k=m_0+1}^{m_0+n} x_k\right| \leqslant 2m_0\|x\| + \left|\sum_{k=m_0+1}^{m_0+n} x_k\right|.$$

Тогда

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k\right| \leqslant \frac{2m_0\|x\|}{n} + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=m_0+1}^{m_0+n} x_k\right| \overset{\text{в силу (1.4)}}{\leqslant} \frac{2m_0\|x\|}{n} + \frac{1}{A_2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2m_0\|x\|}{n_1} + \frac{1}{A_2} \leqslant \frac{2m_0\|x\|}{2A_2(n_0+m_0)\|x\|} + \frac{1}{A_2} =$$
$$= \frac{m_0}{A_2(n_0+m_0)} + \frac{1}{A_2} < \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_2} = \frac{1}{A_1},$$

т.е. (1.5) тоже выполнено. □

Удобство критерия (1.4) в том, что можно выбирать m_0 в зависимости от A_2.

1.4 О почти сходимости к нулю последовательности из нулей и единиц

Задача о пасьянсе из нулей и единиц. Эта задача основана на идеях, изложенных в [73, §5].

Пусть n_i — строго возрастающая последовательность натуральных чисел,

$$M(j) = \liminf_{i\to\infty} n_{i+j} - n_i, \tag{1.6}$$

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n_i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Так как $M(j)$ есть нижний предел последовательности натуральных чисел, то он всегда достигается, т.е. $M(j) \in \mathbb{N}$.

Более того, для любого j существует лишь конечное количество отрезков длины $M(j)$, содержащих более j единиц, и бесконечное количество отрезков длины $M(j)$, содержащих ровно j единиц.

Через E_j будем обозначать конец последнего отрезка длины $M(j)$, содержащего более j единиц.

Лемма 1.4.1. Если $x \in ac_0$, то

$$\lim_{j\to\infty} \frac{M(j)}{j} = +\infty. \tag{1.7}$$

Доказательство. Очевидно, если

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{M(j)}{j} = +\infty,$$

то выполнено (1.7). Предположим противное:

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{M(j)}{j} = s < +\infty.$$

Очевидно, что в таком случае $s > 0$.

По определению нижнего предела найдётся счётное множество $J \subset \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall (j \in J) \left[s \leqslant \frac{M(j)}{j} \leqslant s+1 \right],$$

т.е. для любого $j \in J$ существует бесконечно много отрезков длины $j \cdot (s+1)$, на каждом из которых не менее j единиц.

Т.к. $x \in ac_0$, то

$$\forall (\varepsilon > 0) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geqslant n_0) \forall (m \in \mathbb{N}) \left[\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k < \varepsilon \right]. \tag{1.8}$$

Положим $\varepsilon = 1/(s+2)$ и отыщем n_0. Положим $n \in J$, $n \geqslant n_0$. (Такое n всегда найдётся, т.к. J счётно и $J \subset \mathbb{N}$.) Выберем m так, чтобы отрезок длины $n \cdot (s+1)$, содержащий не менее n единиц, начинался с $m+1$. Тогда

$$\frac{1}{n \cdot (c+1)} \sum_{k=m+1}^{m+n\cdot(s+1)} x_k \geqslant \frac{1}{n \cdot (s+1)} \cdot n = \frac{1}{s+1} > \frac{1}{s+2} = \varepsilon,$$

что противоречит (1.8).

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма 1.4.2. Если

$$\lim_{j\to\infty} \frac{M(j)}{j} = +\infty, \tag{1.9}$$

то $x \in ac_0$.

Доказательство. По определению предела (1.9) означает, что

$$\forall(S \in \mathbb{N})\exists(j_0 \in \mathbb{N})\forall(j \geqslant j_0)\left[\frac{M(j)}{j} > S\right]. \tag{1.10}$$

Покажем, что выполнен модифицированный критерий Лоренца почти сходимости последовательности к нулю (1.4), т.е.

$$\forall(b \in \mathbb{N})\exists(n_0 \in \mathbb{N})\exists(m_0 \in \mathbb{N})\forall(n \geqslant n_0)\forall(m \geqslant m_0)\left[\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k < \frac{1}{b}\right].$$

Действительно, зафиксируем b. Используя (1.10) и положив $S = 2b$, отыщем j_0 такое, что для любого $j \geqslant j_0$ выполнено $M(j) > 2bj$. Положим $n_0 = 2bj_0$. Выберем

$$m_0 = 2 + \max_{1 \leqslant j \leqslant j_0} E_j.$$

Тогда для любых $m \geqslant m_0$ и $n \geqslant n_0$ имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k < \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{M(j_0)} + 1\right) j_0 = \frac{j_0}{M(j_0)} + \frac{j_0}{n} \leqslant \frac{1}{2b} + \frac{j_0}{n} \leqslant \frac{1}{2b} + \frac{j_0}{n_0} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{b},$$

т.е. условие критерия выполнено и $x \in ac_0$, что и требовалось доказать. □

Последовательность $\{M(j)\}$, как легко выяснить, удовлетворяет некоторым условиям.

Лемма 1.4.3. Пусть n_i — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда последовательность

$$S_j = \liminf_{i \to \infty}(n_{i+j} - n_i)$$

является вогнутой, т.е. для любых i, j имеет место неравенство

$$S_{i+j} \geqslant S_i + S_j. \tag{1.11}$$

Доказательство. По определению нижнего предела существует лишь конечное число номеров k таких, что $n_{k+i} - n_k < S_i$ или $n_{k+j} - n_k < S_j$. Зафиксируем p, большее всех таких k.

По определению нижнего предела и с учётом того, что выражение под знаком предела принимает лишь натуральные значения, существует бесконечное количество номеров q таких, что $n_{q+i+j} - n_q = S_{i+j}$.

Обозначим через s некоторый такой номер, больший p. Тогда

$$S_{i+j} = n_{s+i+j} - n_s = n_{s+i+j} - n_{s+i} + n_{s+i} - n_s \geqslant S_j + n_{s+i} - n_s \geqslant S_j + S_i,$$

так как из $s > p$ следует, что $n_{s+i+j} - n_{s+i} \geqslant S_j$ и $n_{s+i} - n_s \geqslant S_i$. □

Пример 1.4.4. Последовательность $S_j = j + 1$ не удовлетворяет условию (1.11): действительно, $3 = S_2 < S_1 + S_1 = 2 + 2 = 4$.

Замечание 1.4.5. Условие (1.11) является необходимым, но неизвестно, является ли оно достаточным для того, чтобы последовательность натуральных чисел n_i была строго возрастающей.

Замечание 1.4.6. Предел в формулировке лемм 1.4.1 и 1.4.2 существует для любой строго возрастающей последовательности натуральных чисел n_i. Легко видеть, что последовательность $\{M(j)\}_{j=1}^{\infty}$ вогнута. Однако, используя результат из работы [74] (см. также [75, I, Задача 98]) получаем, что в таком случае предел выражения $M(j)/j$ существует и справедливо равенство

$$\lim_{j\to\infty}\frac{M(j)}{j}=\inf_{j\in\mathbb{N}}\frac{M(j)}{j}.$$

Гипотеза 1.4.7. Пусть $M(j)$ — последовательность натуральных чисел, такая, что существует предел

$$\lim_{j\to\infty}\frac{M(j)}{j}\leqslant+\infty$$

и для любых $i,j\in\mathbb{N}$ выполнено

$$M(i)+M(j)\leqslant M(i+j).$$

Тогда существует последовательность $\{x_k\}$, удовлетворяющая условию (1.12).

В качестве итога параграфа может быть сформулирована следующая

Теорема 1.4.8. Пусть n_i — строго возрастающая последовательность натуральных чисел,

$$M(j)=\liminf_{i\to\infty} n_{i+j}-n_i, \tag{1.12}$$

$$x_k=\begin{cases}1, & \text{если } k=n_i\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) $x\in ac_0$;

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{M(j)}{j}=+\infty$;

(iii) $\inf\limits_{j\in\mathbb{N}}\dfrac{M(j)}{j}=+\infty$.

1.5 Пороговый критерий почти сходимости к нулю неотрицательной последовательности

Определим (нелинейный) оператор λ–порога A_λ на пространстве ℓ_∞. Для $x=(x_1,x_2,...)\in\ell_\infty$ положим

$$(A_\lambda x)_k=\begin{cases}1, & \text{если } x_k\geqslant\lambda\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Теорема 1.5.1 (Пороговый критерий почти сходимости к нулю неотрицательной последовательности)**.** Пусть $x \in \ell_\infty$, $x \geqslant 0$. Тогда

$$x \in ac_0 \Leftrightarrow \forall(\lambda > 0)[A_\lambda x \in ac_0].$$

Необходимость. Пусть $x \in ac_0$. Зафиксируем $\lambda > 0$. Пусть $y = A_\lambda x$, тогда

$$(\lambda y)_k = \begin{cases} \lambda, & \text{если } x_k \geqslant \lambda \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Таким образом, $0 \leqslant \lambda y \leqslant x$. Следовательно, если $x \in ac_0$, то $\lambda y \in ac_0$ и $y \in ac_0$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Очевидно, что при $\|x\| = 0$, т.е. $x = (0, 0, 0, 0, ...)$, утверждение теоремы верно. Пусть $\|x\| \neq 0$. В силу того, что ac_0 является линейным пространством,

$$x \in ac_0 \Leftrightarrow \frac{x}{\|x\|} \in ac_0.$$

Поэтому, не теряя общности, будем полагать $\|x\| \leqslant 1$. Более того,

$$A_\lambda x \in ac_0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)A_\lambda x \in ac_0.$$

Предположим противное, т.е. $x \notin ac_0$, но $\forall(\lambda > 0)[(1 - \lambda)A_\lambda x \in ac_0]$. Запишем покванторное отрицание критерия Лоренца:

$$\exists(\varepsilon_0 > 0)\forall(n_0 \in \mathbb{N})\exists(n > n_0)\exists(m \in \mathbb{N}) \left[\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \geqslant \varepsilon_0\right]. \tag{1.13}$$

Найдём такое ε_0 и положим

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Легко видеть, что

$$\forall(n_0 \in \mathbb{N})\exists(n > n_0)\exists(m \in \mathbb{N}) \left[\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k > \varepsilon\right]. \tag{1.14}$$

(знак неравенства сменился на строгий, это будет играть ключевую роль в дальнейших выкладках).

Построим последовательность

$$y = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) A_{\varepsilon/2} x.$$

Заметим, что $y \in ac_0$, т.е. по критерию Лоренца

$$\forall(\varepsilon_1 > 0)\exists(n_1 \in \mathbb{N})\forall(n' > n_1)\forall(m' \in \mathbb{N}) \left[\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} y_k < \varepsilon_1\right]. \tag{1.15}$$

Положим в (1.15) $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ и отыщем n_1 в соответствии с квантором существования. Положим далее в (1.14) $n_0 = n_1$ и отыщем n и m. Положим в (1.15) $n' = n$, $m' = m$. Тогда получим, что по (1.14)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k > \varepsilon.$$

С другой стороны, по (1.15)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} y_k < \varepsilon/2.$$

Вычитая, получим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} (x_k - y_k) > \varepsilon/2.$$

Если среднее арифметическое чисел вида $x_k - y_k$ больше $\varepsilon/2$, то существует хотя бы один индекс k такой, что $x_k - y_k > \varepsilon/2$.

Предположим, что k таково, что $x_k < \varepsilon/2$. Тогда $y_k = 0$ и $x_k - y_k < \varepsilon/2$. Значит, предположение неверно и $x_k \geqslant \varepsilon/2$. Тогда $y_k = 1 - \varepsilon/2$ и с учётом $\|x\| \leqslant 1$ имеем

$$x_k - y_k \leqslant 1 - y_k = 1 - (1 - \varepsilon/2) = \varepsilon/2.$$

Следовательно, требуемого индекса k не существует, и (1.13) не выполнено.

Полученное противоречие завершает доказательство.

Сформулируем теперь этот критерий в терминах функций $M^{(\lambda)}(j)$.

Теорема 1.5.2. Пусть $x \in \ell_\infty$, $x \geqslant 0$, $\lambda > 0$. Обозначим через $n_i^{(\lambda)}$ возрастающую последовательность индексов таких элементов x, что $x_k \geqslant \lambda$ тогда и только тогда, когда $k = n_i^{(\lambda)}$ для некоторого i. Обозначим

$$M^{(\lambda)}(j) = \liminf_{i\to\infty} n_{i+j}^{(\lambda)} - n_i^{(\lambda)}.$$

Тогда для того, чтобы $x \in ac_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda > 0$ было выполнено

$$\lim_{j\to\infty} \frac{M^{(\lambda)}(j)}{j} = +\infty.$$

1.6 Пространство ac_0 и α–функция

Докажем теперь ещё одну теорему, раскрывающую связь между сходимостью, почти сходимостью и α–функцией

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j|,$$

которая будет более подробно изучаться в дальнейшем.

Теорема 1.6.1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in ac_0$ и $\alpha(x) = 0$. Тогда $x \in c_0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $x \notin c_0$. Тогда

$$\limsup_{k\to\infty} x_k \neq 0 \quad \text{или} \quad \liminf_{k\to\infty} x_k \neq 0.$$

Не теряя общности, положим

$$\varepsilon = \limsup_{k\to\infty} x_k > 0$$

(иначе домножим всю последовательность на -1, что, очевидно, не повлияет на сходимость к нулю).

Тогда существует бесконечно много таких n, что

$$x_n > \limsup_{k\to\infty} x_k - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}. \tag{1.16}$$

Так как

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_i - x_j| = 0,$$

то

$$\exists (N_1 \in \mathbb{N}) \forall (n > N_1) \left[\max_{n\leqslant j\leqslant 2n} |x_n - x_j| < \frac{\varepsilon}{4} \right],$$

или, что то же самое,

$$\exists (N_1 \in \mathbb{N}) \forall (n > N_1) \forall (j : n \leqslant j \leqslant 2n) \left[|x_n - x_j| < \frac{\varepsilon}{4} \right]. \tag{1.17}$$

Поскольку $x \in ac_0$, то по критерию Лоренца

$$\exists (N_2 \in \mathbb{N}) \forall (n > N_2) \forall (m \in \mathbb{N}) \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \right| < \frac{\varepsilon}{4} \right],$$

в частности,

$$\exists (N_2 \in \mathbb{N}) \forall (n > N_2) \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} x_k \right| < \frac{\varepsilon}{4} \right], \tag{1.18}$$

Выберем n так, чтобы оно удовлетворяло (1.16) и (1.17). Тогда

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} x_k \right| =$$

$$= (\text{по (1.17) имеем } x_k \geqslant 3\varepsilon/4 > 0) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} x_k \geqslant \frac{3\varepsilon}{4} > \frac{\varepsilon}{4},$$

что противоречит (1.18).

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следствие 1.6.2. Пусть $x \in ac$ и $\alpha(x) = 0$. Тогда $x \in c$.

Однако, как выясняется, справедлив и более общий результат. Мы опишем его в следующем параграфе.

1.7 α–функция на пространстве ac и расстояние до пространства c

Пусть $\rho(x,c)$ и $\rho(x,c_0)$ — расстояния от x до пространства сходящихся последовательностей c и пространства сходящихся к нулю последовательностей c_0 соответственно.

Из условия Липшица на α–функцию (2.1) и того, что на пространстве c всех сходящихся последовательностей α–функция обращается в нуль следует

Лемма 1.7.1. Для любого $x \in \ell_\infty$

$$\alpha(x) \leqslant 2\rho(x,c).$$

Эта оценка точна.

Пример 1.7.2.

$$x_k = \begin{cases} (-1)^n, & \text{если } k = 2^n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\alpha(x) = 2$, $\alpha(T^s x) = 1$ для любого $s \in \mathbb{N}$, $\rho(x,c) = \rho(x,c_0) = 1$.

Как выясняется, верна и оценка с другой стороны.

Лемма 1.7.3. Для любого $x \in ac$ и для любого натурального s

$$\rho(x,c) \leqslant \alpha(T^s x).$$

Доказательство. Зафиксируем s. Пусть $x \in ac$, $\alpha(T^s x) = \varepsilon$. Так как $x \in ac$, то по критерию Лоренца существует такое число t, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = t$$

равномерно по m. Иначе говоря,

$$\forall (p \in \mathbb{N}) \exists (n_p \in \mathbb{N}) \forall (n > n_p) \forall (m \in \mathbb{N}) \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k - t \right| < \frac{\varepsilon}{p} \right].$$

Так как

$$\alpha(T^s x) = \limsup_{k\to\infty} \max_{k<j\leqslant 2k-s} |x_k - x_j| = \varepsilon,$$

то

$$\forall (p \in \mathbb{N}) \exists (k_p \in \mathbb{N}) \forall (k > k_p) \forall (j : k < j \leqslant 2k - s) \left[|x_k - x_j| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{p} \right].$$

Положив $q_p = \max\{n_p, k_p\}$, имеем

$$\forall (p \in \mathbb{N}) \exists (q_p \in \mathbb{N}) \forall (q > q_p) \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k - t \right| < \frac{\varepsilon}{p} \right.$$

$$\left. \text{и } \forall (k : q < k \leqslant 2q - s) \left[|x_q - x_k| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{p} \right] \right].$$

Т.е. среднее арифметическое чисел x_q, x_{q+1}, ... , x_{2q-s} отличается от t не более, чем на ε/p, причём разница любых двух из этих чисел меньше $\varepsilon + \varepsilon/p$. Следовательно, любое из чисел x_q, x_{q+1}, ... , x_{2q-s} отличается от t менее, чем на $\varepsilon + 2\varepsilon/p$. В частности,

$$|x_q - t| < \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p}.$$

Таким образом,

$$\forall (p \in \mathbb{N}) \exists (q_p \in \mathbb{N}) \forall (q > q_p) \left[|x_q - t| < \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p} \right],$$

откуда немедленно следует, что $\rho(x, c) \leqslant \varepsilon$, что и требовалось доказать. □

Из лемм 1.7.1 и 1.7.3 незамедлительно следует

Теорема 1.7.4. Для любого $x \in ac$

$$\frac{1}{2}\alpha(x) \leqslant \rho(x, c) \leqslant \lim_{s\to\infty} \alpha(T^s x).$$

Следствие 1.7.5. Для любого $x \in ac_0$

$$\frac{1}{2}\alpha(x) \leqslant \rho(x, c_0) \leqslant \lim_{s\to\infty} \alpha(T^s x).$$

Точность оценок показывают пример 1.7.2 и следующие примеры.

Пример 1.7.6.

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 2^n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\alpha(T^s x) = 1$ для любого $s \in \mathbb{N}$, $\rho(x, c) = 1/2$, $\rho(x, c_0) = 1$.

Пример 1.7.7.

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 2^n, \\ -1, & \text{если } k = 2^n + 1 > 2 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\alpha(T^s x) = 2$ для любого $s \in \mathbb{N}$, $\rho(x, c) = \rho(x, c_0) = 1$.

Гипотеза 1.7.8. Для любого $x \in ac$

$$\frac{1}{2} \lim_{s\to\infty} \alpha(U^s x) \leqslant \rho(x, c),$$

где U — оператор сдвига вправо:

$$U(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...).$$

1.8 Усиленная теорема Коннора

Пусть на множестве $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, задана вероятностная мера «честной монетки» μ. Тогда, согласно [50], $\mu(\Omega \cap ac) = 0$.

Обобщим этот результат.

Теорема 1.8.1. Мера множества $F = \{x \in \Omega : q(x) = 0 \wedge p(x) = 1\}$, где $p(x)$ и $q(x)$ — верхний и нижний функционалы Сачестона соответственно, равна 1.

Доказательство. Пусть $F_1 = \{x \in \Omega : p(x) \neq 1\}$, $F_0 = \{x \in \Omega : q(x) \neq 0\}$. Заметим, что

$$\mu F = \mu(\Omega \setminus (F_1 \cup F_0)) = 1 - \mu(F_1 \cup F_0). \tag{1.19}$$

Докажем, что $\mu F_1 = 0$ (для μF_0 доказательство полностью аналогично).

Согласно критерию Сачестона,

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{k=m+n} x_k,$$

откуда следует, что для $x \in \Omega$ равенство $p(x) = 1$ выполнено тогда и только тогда, когда для любого n последовательность x содержит отрезок из n единиц подряд. Следовательно, если $x \in F_1$, то существует такое n, что x не содержит n единиц подряд. Обозначим

$$A_n^k = \{x \in \Omega : x_{kn+1} = ... = x_{kn+n} = 1\}, \quad B_n^k = \Omega \setminus A_n^k.$$

Тогда

$$\forall (x \in F_1) \exists (n_x \in \mathbb{N}) \forall (k \in \mathbb{N}) [x \in B_{n_x}^k],$$

т.е.

$$F_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_n^k.$$

Учитывая, что при $i \neq j$ события $x \in B_n^i$ и $x \in B_n^j$ независимы и $\mu B_n^j = 1 - \frac{1}{2^n}$, получаем

$$\mu F_1 \leqslant \mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_n^k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_n^k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\in\mathbb{N}} \mu B_n^k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

Тем самым получаем из (1.19), что $\mu F = 1$. □

Замечание 1.8.2. Примечательно, что в случае тройных последовательностей дело обстоит иначе. Так, в работе [76] доказывается, что почти все тройные последовательности из нулей и единиц почти сходятся.

1.9 О мере одного множества

Пусть на множестве $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, задана вероятностная мера «честной монетки» μ. Тогда, согласно [50], $\mu(\Omega \cap ac) = 0$. Применим этот результат к нахождению меры множества W, введённого в [73, §5].

Пусть W — множество всех последовательностей χe, где $e = \bigcup_{k=1}^{\infty}[n_{2k-1}, n_{2k})$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{j\to\infty} \frac{n_{k+j} - n_k}{j} = \infty \tag{1.20}$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$.

Множество W возникает естественным образом при изучении крайних точек множества банаховых пределов. Так, известна следующая

Лемма 1.9.1 ([73, Лемма 30])**.** Для любого $e \in \mathbb{N}$ такого, что $\chi e \in W$, любого $x \in \ell_\infty$. и любого $B \in \operatorname{ext}\mathfrak{B}$ справедливо равенство

$$B(x\chi e) = (Bx)\cdot(B\chi e).$$

Вероятностная мера «честной монетки» означает, что каждая последовательность из нулей и единиц соответствует бесконечной серии бросков честной монетки, причём выпадение орла означает нуль, а выпадение решки — единицу. Тогда мера подмножества $\Omega^* \subset \Omega$ равна вероятности события «выпала одна из серий монетки, закодированных в Ω^*». Например, $\mu(\Omega) = 1$, $\mu(\{x \in \Omega : x_1 = 1, x_2 = 0\}) = 1/4$.

Введём теперь нелинейную биекцию $Q : \Omega \leftrightarrow \Omega$ по следующему правилу:

$$(Qx)_k = \begin{cases} x_k, & \text{если } k = 1,\\ |x_k - x_{k-1}| & \text{иначе.}\end{cases}$$

Замечание 1.9.2. Может показаться, что оператор Q очень сходен с оператором границы последовательности bd [77], однако это не так.

Определение 1.9.3 ([77, определение 2.1 (i)])**.** Представим $x \in \Omega$ в виде

$$x = \chi \bigcup_{k\in N}[m_k; n_k),$$

где $N \subseteq \mathbb{N}$, $m_k, n_k \in \mathbb{N}$, $m_k < n_k < m_{k+1}$. Тогда

$$\mathrm{bd}(x) = \chi \bigcup_{k\in N}\{m_k; n_k - 1\}.$$

Пример 1.9.4.

$$\begin{aligned} x &= (0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0,...)\\ \mathrm{bd}(x) &= (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,...)\\ Qx &= (0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,...)\end{aligned}$$

Пример 1.9.5. Но всё меняется, когда в последовательности достаточно часто встречаются блоки $(..., 0, 1, 0, ...)$ (а по закону больших чисел они будут встречаться с большой вероятностью).

$$\begin{aligned} x &= (0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,...) \\ \mathrm{bd}(x) &= (0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,...) \\ Qx &= (0,0,1,0,1,1,1,1,1,0,0,...) \end{aligned}$$

Лемма 1.9.6. Биекция Q сохраняет меру множества.

Доказательство. Схема доказательства: пусть последовательность x соответствует серии бросков монетки так, как описано выше. Будем теперь интерпретировать ту же самую серию бросков иначе. Первый бросок интерпретируем так же, а начиная со второго сопоставим нулю событие «выпала та же сторона монетки, что и в прошлый раз», а единице — противоположное событие. События «выпала решка» и «выпала та же сторона монетки, что и в прошлый раз» независимы и вероятность каждого из них равна $1/2$. Осталось заметить, что новая интерпретация той же серии бросков дала нам последовательность Qx.

В рамках данного доказательства будем соотносить последовательности из нулей и единиц с точками полуинтервала $[0; 1)$, представленными в виде двоичных дробей. Назовём двоичным отрезком множество последовательностей из Ω, в котором первые k координат зафиксированы, а остальные выбираются произвольно. Двоичный отрезок действительно соответствует отрезку длины $1/2^k$, состоящему из двоичных дробей, в которых первые k цифр после запятой зафиксированы, а остальные выбираются произвольно.

Заметим, что Q отображает двоичный отрезок длины $1/2^k$ в двоичный отрезок длины $1/2^k$. Так как любой отрезок может быть представлен в виде объединения не более чем счётного числа двоичных отрезков, то Q сохраняет меру любого отрезка. В силу биективности Q отсюда следует, что Q сохраняет меру любого борелевского множества (так как сигма-алгебра борелевских множеств порождается отрезками).

Остаётся заметить, что любое подмножество множества, имеющего борелевскую меру 0, биекция Q переводит в подмножество множества, снова имеющего борелевскую меру 0, и потому сохраняет меру Лебега. $\square$

Замечание 1.9.7. На самом деле соответствие точек отрезка и последовательностей из нулей и единиц не однозначно, а почти однозначно: например, точка $1/2$ может быть с равным успехом представлена как $x_1 = 0.01111...$ и как $x_2 = 0.10000....$ Однако $Qx_1 = 0.010000...$, а $Qx_2 = 0.100000.$

Представляется целесообразным отказаться не от записи x_1 (как это обычно принимается), а от записи x_2, поскольку все последовательности, стабилизирующиеся на нуле, биекция Q переводит в последовательности, стабилизирующиеся на нуле. Более того, мера множества всех последовательностей, стабилизирующихся на нуле, равна нулю, поэтому их исключение из рассмотрения не мешает доказательству.

Несмотря на это, дадим здесь ещё одно

Доказательство. Доказательство из [50] использует наименьшую σ–алгебру $\mathcal{S}$, содержащую множества

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : x_i = 1\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{S}$ — это также и наименьшая σ–алгебра, содержащая множества $\Omega^*_{i,j}$, $j = 1, ..., 2^i$ последовательностей, в которых зафиксированы первые i координат. Как мы уже знаем, $\mu(\Omega^*_{i,j}) = \mu(Q\Omega^*_{i,j})$. Так как Q — биекция, то функция $\mu^*(A) = \mu(QA)$ является мерой. Действительно, неотрицательность $\mu^*(A)$ очевидна. Покажем выполнение аксиомы счётной аддитивности. Пусть $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, тогда в силу биективности Q имеем $QA_i \cap QA_j = \varnothing$ и

$$\mu^* \left(\bigcup_i A_i \right) = \mu \left(Q \bigcup_i A_i \right) = \mu \left(\bigcup_i QA_i \right) = \sum_i \mu(QA_i) = \sum_i \mu^*(A_i).$$

Согласно теореме Каратеодори, если две меры совпадают на некоторой системе подмножеств $\mathcal{S}^*$, то они совпадают и на минимальной σ–алгебре, содержащей $\mathcal{S}^*$. Следовательно, биекция Q действительно сохраняет меру. □

Существование предела (1.20) равномерно по $k \in \mathbb{N}$ буквально означает, что

$$\forall (A > 0) \exists (j_A \in \mathbb{N}) \forall (j > j_A) \forall (k \in \mathbb{N}) \left[\frac{n_{k+j} - n_k}{j} > A \right].$$

Так как последнее неравенство выполнено для любого k, то оно верно и для нижнего предела по k:

$$\forall (A > 0) \exists (j_A \in \mathbb{N}) \forall (j > j_A) \left[\liminf_{k \to \infty} \frac{n_{k+j} - n_k}{j} > A \right].$$

«Свернув» определение предела по j из кванторной записи, получаем:

$$\lim_{j \to \infty} \liminf_{k \to \infty} \frac{n_{k+j} - n_k}{j} = \infty,$$

откуда по лемме 1.4.2 немедленно имеем $QW \subset \Omega \cap ac_0$. Тогда

$$0 \leqslant \mu(W) = \mu(QW) \leqslant \mu(\Omega \cap ac_0) \leqslant \mu(\Omega \cap ac) = 0,$$

откуда $\mu(W) = 0$.

Лемма 1.9.8. Включение $QW \subset \Omega \cap ac_0$ собственное.

Доказательство. Пусть

$$x = (1, 1, 0, 0, ..., 0, 0, ...) \in \Omega \cap ac_0,$$

тогда

$$Q^{-1}x = (1, 0, 0, ..., 0, 0, ...) \notin W.$$

□

Гипотеза 1.9.9. Включение $QW \subset (\Omega \cap ac_0) \setminus c_{00}$, где через c_{00} обозначается множество последовательностей, стабилизирующихся на нуле, собственное.

Лемма 1.9.10. $Q^{-2}ac_0 \not\subset ac_0$.

Доказательство. Пусть $x = (1, 0, 1, 0, ...)$. Тогда $Qx = \mathbb{1}$ и $Q^2x = (1, 0, 0, 0, ...) \in c_{00} \subset ac_0$, хотя $x \notin ac_0$. □

Гипотеза 1.9.11. $Q^{-2}ac_0 \subset ac$.

1.10 Пространство ac_0 и возведение в степень

Вопрос о покоординатном возведении в степень почти сходящейся к нулю последовательности сколь-либо системно впервые поднят в [59]. Возведение в отрицательную степень может выводить из пространства ограниченных последовательностей ℓ_∞ вовсе; например, очевидна следующая

Лемма 1.10.1. Пусть $x \in c_0$, $\lambda < 0$ и $x_k \neq 0$ для любого k. Тогда

$$x^\lambda = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, x_3^\lambda, ...) \notin \ell_\infty.$$

(Здесь и далее мы полагаем, что возведение в соответствующую степень определено однозначно и в действительных числах; то есть, если мы пишем x_k^λ, то мы неявно предполагаем, что значение этого выражения корректно определено.)

Для $x \in ac_0 \setminus c_0$ ситуация, вообще говоря, не столь однозначна.

Пример 1.10.2. Рассмотрим классическую почти сходящуюся к нулю последовательность

$$x = (1; -1; 1; -1; 1; -1; ...) \in ac_0.$$

Очевидно, что для любой целой нечётной отрицательной степени λ имеем $x^\lambda = x \in ac_0$, однако для любой целой чётной отрицательной степени λ мы получаем

$$x^\lambda = (1; 1; 1; 1; 1; 1; ...) = \mathbb{1} \in ac_1 \subset ac \setminus ac_0$$

Пример 1.10.3. Рассмотрим почти сходящуюся к нулю последовательность

$$y = \left(1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 1; -1; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 1; -1; ...\right) \in ac_0.$$

Очевидно, что

$$y^{-1} = (1; -1; 2; -2; 1; -1; 3; -3; 1; -1; 4; -4; 1; -1; ...) \notin \ell_\infty.$$

Возведение в отрицательную степень мы более обсуждать не будем.

Итак, в недавней статье Р.Е. Зволинского [59] доказаны два следующих факта (теорема 3 и следствие 2 соответственно):

Теорема 1.10.4. Пусть $x \geqslant 0, x \in ac_0$ и $\lambda > 0$, тогда $x^\lambda \in ac_0$.

Теорема 1.10.5. Пусть $x \in \mathcal{I}(ac_0)$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ или $n = \frac{1}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $x^n \in ac_0$.

Напомним, что $x \in \mathcal{I}(ac_0)$ тогда и только тогда, когда $x = x^+ + x^-$, $x^+ \geqslant 0$, $x^- \leqslant 0$ и $x^+ \in ac_0$ (последнее включение эквивалентно условию $x^- \in ac_0$).

Возникает закономерный вопрос о том, что происходит при возведении в степень почти сходящейся к нулю последовательности, которую нельзя разложить в сумму знакопостоянных почти сходящихся к нулю последовательностей. Следующая теорема показывает, что условия теоремы 1.10.5 существенны.

Теорема 1.10.6. Пусть $x \in ac_0 \setminus \mathcal{I}(ac_0)$, т.е. $x = x^+ + x^-$, $x^+ \geqslant 0$, $x^- \leqslant 0$ и $x^+ \notin ac_0$ (последнее условие эквивалентно условию $x^- \notin ac_0$). Пусть $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $x^n \notin ac_0$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $y = (x^+)^n \geqslant 0$.

Предположим, что $y \in ac_0$. Тогда $x^+ = y^{1/n}$ и по теореме 1.10.4 выполнено $x^+ \in ac_0$, что противоречит условию доказываемой теоремы. Значит, $y = (x^+)^n \notin ac_0$ и выполнено неравенство $p\left((x^+)^n\right) > 0$.

Заметим теперь, что в силу чётности n выполнено $(x^-)^n \geqslant 0$, откуда $p\left((x^-)^n\right) \geqslant 0$. (Строго говоря, можно по аналогии с $(x^+)^n$ показать, что $(x^-)^n \notin ac_0$ и, следовательно, $p\left((x^-)^n\right) > 0$.) В силу построения x^+ и x^- мы имеем $\operatorname{supp} x^+ \cap \operatorname{supp} x^- = \varnothing$, откуда

$$x^n = (x^+ + x^-)^n = (x^+)^n + (x^-)^n.$$

Очевидно, что для любых ограниченных последовательностей $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ выполнено неравенство для верхнего функционала Сачестона $p(a+b) \geqslant p(a)$. Отсюда получаем

$$p(x^n) = p\left((x^+)^n + (x^-)^n\right) \geqslant p\left((x^+)^n\right) > 0,$$

что по теореме Сачестона означает, что $x^n \notin ac_0$. □

Для нечётной степени условие разложения в сумму двух знакопостоянных почти сходящихся последовательностей в теореме 1.10.5 тоже существенно.

Пример 1.10.7. Напомним, что любая периодическая последовательность почти сходится к своему среднему по периоду (см. следствие 1.0.4). Пусть

$$x = (1; 1; -2;\ 1; 1; -2;\ 1; 1; -2;\ \ldots) \in ac_0$$

и пусть $\lambda = 3$. Тогда

$$x^+ = (1; 1; 0;\ 1; 1; 0;\ 1; 1; 0;\ \ldots) \notin ac_0, \quad x^+ \in ac_{2/3},$$

$$x^- = (0; 0; -2;\ 0; 0; -2;\ 0; 0; -2;\ \ldots) \notin ac_0, \quad x^- \in ac_{-2/3},$$

$$x^\lambda = (1; 1; -8;\ 1; 1; -8;\ 1; 1; -8;\ \ldots) \notin ac_0, \quad x^\lambda \in ac_{-2}.$$

Однако для нечётной степени доказать аналог теоремы 1.10.6 не удастся — это показывает пример 1.10.2, в котором $x^+ \in ac_1$, $x^- \in ac_{-1}$.

В заключение приведём пример, в котором возведение в нечётную степень выводит не только из пространства ac_0, но и из более широкого пространства ac.

Пример 1.10.8. Пусть

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \geqslant 2^{10}, 2^k \leqslant n < 2^k + 3k \text{ и } n \neq 2^k + 3m, m \in \mathbb{N}, \\ -2, & \text{если } n \geqslant 2^{10}, 2^k \leqslant n < 2^k + 3k \text{ и } n = 2^k + 3m, m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$x = (0, 0, ..., 0, 0,\ -2, 1, 1,\ -2, 1, 1,\ -2, 1, 1, ..., -2, 1, 1,\ 0, 0, 0,$$
$$..., 0, 0, 0, ..., -2, 1, 1,\ -2, 1, 1, ...).$$

Легко заметить, что в силу критерия Лоренца $x \in ac_0$. С другой стороны,

$$(x^3)_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \geqslant 2^{10}, 2^k \leqslant n < 2^k + 3k \text{ и } n \neq 2^k + 3m, m \in \mathbb{N}, \\ -8, & \text{если } n \geqslant 2^{10}, 2^k \leqslant n < 2^k + 3k \text{ и } n = 2^k + 3m, m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Получаем $p(x^3) = 0$, $q(x^3) = -2$, откуда $x^3 \notin ac$.

Аналогично строится и пример, когда последовательность, не принадлежащая ac_0, при возведении в нечётную степень даёт последовательность, принадлежащую ac_0.

Пример 1.10.9. Пусть

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \geqslant 2^{10}, 2^k \leqslant n < 2^k + 3k \text{ и } n \neq 2^k + 3m, m \in \mathbb{N}, \\ -\sqrt[3]{2}, & \text{если } n \geqslant 2^{10}, 2^k \leqslant n < 2^k + 3k \text{ и } n = 2^k + 3m, m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $p(y) = \frac{2-\sqrt[3]{2}}{3}$, $q(y) = 0$, и потому $y \notin ac_0$. Однако легко заметить, что $y^3 = x$ из примера 1.10.8 и потому $y^3 \in ac_0$.

Рассуждения данного параграфа подталкивают нас к изучению следующего объекта.

Пусть

$$ac_0^{(2n+1)} = \{x \in ac_0 : x^{2n+1} \in ac_0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Множества $ac_0^{(2n)}$ мы в рассмотрение не вводим, поскольку каждое из них совпадает с $\mathcal{I}(ac_0)$ в силу теоремы 1.10.6.)

Очевидна следующая

Лемма 1.10.10. Пусть $x \approx y$. В этом случае $x \in ac_0^{(2n+1)}$ тогда и только тогда, когда $y \in ac_0^{(2n+1)}$.

Лемма 1.10.11. Пусть $x - y \in \mathcal{I}(ac_0)$. В этом случае $x \in ac_0^{(2n+1)}$ тогда и только тогда, когда $y \in ac_0^{(2n+1)}$.

Доказательство. Заметим, что

$$x^{2n+1} = (y + (x-y))^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k y^{2n+1-k}(x-y)^k =$$
$$= y^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n+1} C_{2n+1}^k y^{2n+1-k}(x-y)^k = y^{2n+1} + (x-y)\cdot \sum_{k=1}^{2n+1} C_{2n+1}^k y^{2n+1-k}(x-y)^{k-1},$$

где $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ — биномиальные коэффициенты. Если $y^{2n+1} \in ac_0$, то $By^{2n+1} = 0$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.

Зафиксируем произвольный $B \in \mathfrak{B}$. Заметим, что

$$(x-y)\cdot \sum_{k=1}^{2n+1} C_{2n+1}^k y^{2n+1-k}(x-y)^{k-1} \in \mathcal{I}(ac_0)$$

в силу включения $x - y \in \mathcal{I}(ac_0)$ и определения $\mathcal{I}(ac_0)$ как идеала по умножению. Тогда

$$B\left((x-y)\cdot \sum_{k=1}^{2n+1} C_{2n+1}^k y^{2n+1-k}(x-y)^{k-1}\right) = 0$$

и $Bx^{2n+1} = By^{2n+1} = 0$. В силу произвольности выбора $B \in \mathfrak{B}$ получаем, что $x^{2n+1} \in ac_0$. $\square$

Замечание 1.10.12. Для последовательностей $x, y \in \ell_\infty$ ни одно из условий $x \approx y$ и $x - y \in \mathcal{I}(ac_0)$ не влечёт другое. Например, пусть $x_n = (-1)^{n+1}$, тогда $x \approx Tx$, $(Tx)_n = (-1)^n$. Но $x - Tx = 2\cdot x \notin \mathcal{I}(ac_0)$.

В обратную сторону — см. замечание 1.2.5.

Гипотеза 1.10.13. $ac_0^{(2n+1)}$ замкнуто (топологически).

Гипотеза 1.10.14. $ac_0^{(2n+1)} = ac_0^{(2n+3)}$ для любого n (или же, наоборот, имеет место собственное включение).

Гипотеза 1.10.15. Если предыдущая гипотеза неверна, то встаёт вопрос об исследовании множеств $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ac_0^{(2n+1)}$ и $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ac_0^{(2n+1)}$.

Гипотеза 1.10.16. Пусть $x \in ac_0^{(2n+1)}$. Тогда $x^{2n+1} \in ac_0^{(2n+1)}$.

Глава 2

α–функция как асимптотическая характеристика ограниченной последовательности

2.1 Определение и элементарные свойства α–функции

На пространстве ℓ_∞ определяется α–функция следующим равенством:

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j|.$$

Легко видеть, что α–функция неотрицательна. Более того, эта функция является полунормой на ℓ_∞ и естественным образом возникла в работе [78, §2] при исследовании свойств суперпозиции оператора Чезаро C и банаховых пределов. Как выяснилось, эта полунорма обладает достаточно интересными свойствами сама по себе.

Свойство 2.1.1. α–функция является однородным выпуклым функционалом:

$$\alpha(\lambda x + \mu y) \leqslant \alpha(\lambda x) + \alpha(\mu y) = \lambda\alpha(x) + \mu\alpha(y).$$

Свойство 2.1.2. На пространстве ℓ_∞ α–функция удовлетворяет условию Липшица:

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leqslant 2\|x - y\|. \tag{2.1}$$

(и эта оценка точна).

Свойство 2.1.3. Если $y \in c$, то $\alpha(y) = 0$ и $\alpha(x + y) = \alpha(x)$ для любого $x \in \ell_\infty$.

Кроме того, иногда полезно помнить про следующее очевидное

Свойство 2.1.4.

$$\alpha(x) \leqslant \limsup_{k\to\infty} x_k - \liminf_{k\to\infty} x_k.$$

Отдельный интерес представляет множество

$$A_0 = \{x \in \ell_\infty : \alpha(x) = 0\}.$$

Ниже в этой главе мы покажем, что оно является подпространством ℓ_∞ и обладает рядом интересных свойств. Одно из этих свойств доказывается уже не в настоящей главе, в а теореме 4.3.4.

Результаты, излагаемые в данной главе, опубликованы в [1; 3; 5; 10; 12].

2.2 α–функция и оператор сдвига T

Как выясняется, α–функция не инвариантна относительно оператора сдвига

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Пример 2.2.1. Пусть

$$x_k = \begin{cases} (-1)^n, & \text{если } k = 2^n \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Вычислим $\alpha(x)$. Заметим сначала, что из принадлежности $x_k \in \{-1, 0, 1\}$ немедленно следует, что $\alpha(x) \leqslant 2$. Оценим теперь $\alpha(x)$ снизу:

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j| \geqslant$$
$$\geqslant \text{(переход к частичному верхнему пределу}$$
$$\text{по индексам специального вида } i = 2^n) \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{n\to\infty} \max_{2^n<j\leqslant 2^{n+1}} |x_{2^n} - x_j| = \limsup_{n\to\infty} \max_{2^n<j\leqslant 2^{n+1}} |(-1)^n - x_j| \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{n\to\infty} |(-1)^n - x_{2^{n+1}}| = \limsup_{n\to\infty} |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2.$$

Итак, $\alpha(x) = 2$. Вычислим теперь $\alpha(Tx)$:

$$\alpha(Tx) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |(Tx)_i - (Tx)_j| = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |x_{i+1} - x_{j+1}| =$$
$$= \text{(замена } k := i+1, m := j+1) =$$
$$= \limsup_{k\to\infty} \max_{k-1<m-1\leqslant 2k-2} |x_k - x_m| = \limsup_{k\to\infty} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |x_k - x_m| =$$
$$= \max\left\{ \limsup_{k\to\infty, k=2^n} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |x_k - x_m|, \limsup_{k\to\infty, k\neq 2^n} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |x_k - x_m| \right\} =$$
$$= \max\left\{ \limsup_{n\to\infty} \max_{2^n<m\leqslant 2^{n+1}-1} |x_{2^n} - x_m|, \limsup_{k\to\infty, k\neq 2^n} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |x_k - x_m| \right\} =$$
$$= \max\left\{ \limsup_{n\to\infty} \max_{2^n<m\leqslant 2^{n+1}-1} |(-1)^n - x_m|, \limsup_{k\to\infty, k\neq 2^n} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |x_k - x_m| \right\} =$$
$$= \max\left\{ \limsup_{n\to\infty} \max_{2^n<m\leqslant 2^{n+1}-1} |(-1)^n - 0|, \limsup_{k\to\infty, k\neq 2^n} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |x_k - x_m| \right\} =$$
$$= \max\left\{ 1, \limsup_{k\to\infty, k\neq 2^n} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |x_k - x_m| \right\} =$$
$$= \text{(если } k \neq 2^n, \text{ то } x_k = 0) =$$
$$= \max\left\{ 1, \limsup_{k\to\infty, k\neq 2^n} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |0 - x_m| \right\} = 1.$$

Таким образом, $\alpha(Tx) = 1 \neq 2 = \alpha(x)$, что и требовалось показать.

Верна следующая

Теорема 2.2.2. Для любого $x \in \ell_\infty$ выполнено неравенство $\alpha(Tx) \leqslant \alpha(x)$.

Доказательство.

$$\alpha(Tx) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |(Tx)_i - (Tx)_j| = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |x_{i+1} - x_{j+1}| =$$
$$= (\text{замена } k := i+1, m := j+1) =$$
$$= \limsup_{k\to\infty} \max_{k-1<m-1\leqslant 2k-2} |x_k - x_m| = \limsup_{k\to\infty} \max_{k<m\leqslant 2k-1} |x_k - x_m| \leqslant$$
$$\leqslant (\text{переход к максимуму по большему множеству}) \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{k\to\infty} \max_{k<m\leqslant 2k} |x_k - x_m| = \alpha(x).$$

□

Более интересна, однако, следующая оценка.

Теорема 2.2.3. Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(T^n x) \geqslant \frac{1}{2}\alpha(x).$$

Доказательство. Зафиксируем n. Заметим, что

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \alpha_i(x),$$

где

$$\alpha_i(x) = \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j|.$$

Рассмотрим $\alpha_i(x)$ при некотором фиксированном i, $i > 2n$ (меньшие i не влияют на верхний предел). Если

$$\max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j| = \max_{i<j\leqslant 2i-n} |x_i - x_j|,$$

то

$$\alpha_i(x) = \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j| = \max_{i<j\leqslant 2i-n} |x_i - x_j| =$$
$$= (\text{замена } k = i-n,\ m = j-n) =$$
$$= \max_{k+n<m+n\leqslant 2k+n} |x_{k+n} - x_{m+n}| = \max_{k<m\leqslant 2k} |(T^n x)_k - (T^n x)_m| = \alpha_{i-n}(T^n x). \quad (2.2)$$

Иначе

$$\max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j| = \max_{2i-n<j\leqslant 2i} |x_i - x_j|$$

и можно записать, что

$$\begin{aligned}
\alpha_i(x) = \max_{2i-n<j\leqslant 2i} |x_i - x_j| = \max_{2i-n<j\leqslant 2i} |x_i - x_{2i-n} + x_{2i-n} - x_j| \leqslant \\
\leqslant \max_{2i-n<j\leqslant 2i} (|x_i - x_{2i-n}| + |x_{2i-n} - x_j|) = \\
= |x_i - x_{2i-n}| + \max_{2i-n<j\leqslant 2i} |x_{2i-n} - x_j| = \\
= |x_{i-n+n} - x_{2(i-n)+n}| + \max_{2i-n<j\leqslant 2i} |x_{2i-n} - x_j| = \\
= |(T^n x)_{i-n} - (T^n x)_{2(i-n)}| + \max_{2i-n<j\leqslant 2i} |x_{2i-n} - x_j| \leqslant \\
\leqslant \alpha_{i-n}(T^n x) + \max_{2i-n<j\leqslant 2i} |x_{2i-n} - x_j| \leqslant \\
\leqslant \alpha_{i-n}(T^n x) + \max_{2i-n<j\leqslant 2i} |(T^n x)_{2i-2n} - (T^n x)_{j-n}| = \\
= (\text{замена } m := j - n\ ) = \\
= \alpha_{i-n}(T^n x) + \max_{2i-2n<m\leqslant 2i-n} |(T^n x)_{2i-2n} - (T^n x)_m| \leqslant \\
\leqslant (\text{т.к. } i > 2n, \text{ то } 4i - 4n > 2i + 4n - 4n = 2i > 2i - n) \leqslant \\
\leqslant \alpha_{i-n}(T^n x) + \max_{2i-2n<m\leqslant 4i-4n} |(T^n x)_{2i-2n} - (T^n x)_m| = \alpha_{i-n}(T^n x) + \alpha_{2i-2n}(T^n x).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Сравнивая (2.2) и (2.3), делаем вывод, что

$$\alpha_i(x) \leqslant \alpha_{i-n}(T^n x) + \alpha_{2i-2n}(T^n x).$$

Переходя к верхнему пределу, имеем

$$\begin{aligned}
\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \alpha_i(x) \leqslant \limsup_{i\to\infty} (\alpha_{i-n}(T^n x) + \alpha_{2i-2n}(T^n x)) \leqslant \\
\leqslant \limsup_{i\to\infty} \alpha_{i-n}(T^n x) + \limsup_{i\to\infty} \alpha_{2i-2n}(T^n x) = \\
= \limsup_{j=i-n, j\to\infty} \alpha_j(T^n x) + \limsup_{i\to\infty} \alpha_{2i-2n}(T^n x) = \\
= \alpha(T^n x) + \limsup_{i\to\infty} \alpha_{2i-2n}(T^n x) \leqslant \\
\leqslant (\text{верхний предел по индексам специального вида} \\
\text{заменим на верхний предел по всем индексам}) \leqslant \\
\leqslant \alpha(T^n x) + \limsup_{k\to\infty} \alpha_k(T^n x) = \alpha(T^n x) + \alpha(T^n x) = 2\alpha(T^n x).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha(T^n x) \geqslant \frac{1}{2}\alpha(x)$, что и требовалось доказать. □

Две предыдущие теоремы немедленно влекут

Следствие 2.2.4. Для любых $x \in \ell_\infty$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\alpha(x) \leqslant \alpha(T^n x) \leqslant \alpha(x). \tag{2.4}$$

Замечание 2.2.5. Оценки (2.4) точны: нижняя достигается, например, в примере выше, верхняя же — на любой периодической последовательности.

2.3 О характере сходимости последовательности $\alpha(T^n x)/\alpha(x)$

В зависимости от выбора x последовательность $\left\{\frac{\alpha(T^n x)}{\alpha(x)}\right\}$ может монотонно сходиться к любому числу из отрезка $\left[\frac{1}{2};1\right]$ с любой скоростью (в том числе и сколь угодно медленно). Говоря строже, верна следующая

Теорема 2.3.1. Пусть β_k — монотонная невозрастающая последовательность, $\beta_k \to \beta$, $\beta \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $\beta_1 \leqslant 1$. Тогда существует такой $x \in \ell_\infty$, что для любого натурального n

$$\frac{\alpha(T^n x)}{\alpha(x)} = \beta_n.$$

Доказательство. Для удобства обозначим $\beta_0 = 1$. Это логично, так как

$$\frac{\alpha(T^0 x)}{\alpha(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Пусть $m \geqslant 3$, $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$x_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 2^{2m} \\ \beta_l, & \text{если } 2^{2m} < k = 2^{2m+1} - l, l \in \mathbb{N}_0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\alpha(x) = 1$. Действительно, $|x_{2^{2m}} - x_{2^{2m+1}}| = 1$, а по свойству 2.1.4 $\alpha(x) \leqslant 1$.

Пусть

$$\alpha_{i,n}(x) = \max_{i<j\leqslant 2i-n} |x_i - x_j|, \quad i > n,$$

тогда

$$\alpha(T^n x) = \limsup_{i\to\infty} \alpha_{i,n}(x).$$

Вычислим теперь все $\alpha_{i,n}(x)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \alpha_{2^{2m},n}(x) &= \max_{2^{2m}<j\leqslant 2^{2m+1}-n} |0 - x_j| = \max_{2^{2m}<j\leqslant 2^{2m+1}-n} x_j = \\ &= (\text{замена: } q = 2^{2m+1} - j, \text{ тогда } j = 2^{2m+1} - q) = \\ &= \max_{2^{2m}<2^{2m+1}-q\leqslant 2^{2m+1}-n} x_{2^{2m+1}-q} = \max_{0<2^{2m}-q\leqslant 2^{2m}-n} x_{2^{2m+1}-q} = \max_{n\leqslant q<2^{2m}} x_{2^{2m+1}-q} = \\ &= \max_{n\leqslant q<2^{2m}} \beta_q = (\text{в силу невозрастания } \beta_q) = \beta_n \geqslant \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пусть теперь i таково, что $2^{2m+1} < i < 2^{2m+2}$, тогда $x_i = \dfrac{1}{2}$. Так как $\forall(j)\,[x_j \in [0;1]]$, то $|x_i - x_j| \leqslant \dfrac{1}{2}$ и, следовательно, $\alpha_{i,n}(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Пусть, наконец, i таково, что $2^{2m} < i \leqslant 2^{2m+2}$, тогда

$$x_i = \beta_k \in \left[\frac{1}{2};1\right].$$

Для таких j, что $i < j \leqslant 2i - n$ и, более того, для любых таких j, что $2^{2m} < j < 2^{2m+2}$ выполнено $x_j \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и, значит, снова $|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{2}$.

Таким образом, получаем, что

$$\alpha(T^n x) = \limsup_{i\to\infty} \alpha_{i,n}(x) = \beta_n.$$

□

2.4 О множествах $\{x : \alpha(T^n x) = \alpha(x)\}$

В данном параграфе обсуждаются некоторые свойства множеств

$$\{x \in \ell_\infty : \alpha(T^n x) = \alpha(x)\},\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \ell_\infty : \alpha(T^n x) = \alpha(x)\}, \tag{2.6}$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \ell_\infty : \alpha(T^n x) = \alpha(x)\}. \tag{2.7}$$

2.4.1 Аддитивные свойства

Теорема 2.4.1. Ни одно из множеств (2.5), (2.6), (2.7) не замкнуто по сложению и, следовательно, не является пространством.

Доказательство. Построим два таких элемента, принадлежащих множеству (2.5) при любых $n \in \mathbb{N}$, сумма которых не принадлежит множеству (2.5) ни при каких $n \in \mathbb{N}$. Пусть $m \in \mathbb{N}_3$. Положим

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^m, & \text{если } k = 2^m \\ 1, & \text{если } k = 2^m + 1 \\ -1, & \text{если } k = 2^m + 2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^m, & \text{если } k = 2^m \\ -1, & \text{если } k = 2^m + 1 \\ 1, & \text{если } k = 2^m + 2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Так как

$$(T^n x)_{2^m-n+1} - (T^n x)_{2^m-n+2} = 2$$

и

$$(T^n y)_{2^m-n+1} - (T^n y)_{2^m-n+2} = -2,$$

то

$$\alpha(x) = \alpha(T^n x) = \alpha(y) = \alpha(T^n y) = 2.$$

С другой стороны,

$$(x+y)_k = \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } k = 2^m \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$\alpha(x+y) = 2,$$

но в то же время

$$\alpha(T^n(x+y)) = 1$$

(см. пример 2.2.1), следовательно, $x+y$ не принадлежит ни одному из множеств (2.5), (2.6), (2.7). □

2.4.2 Мультипликативные свойства

Теорема 2.4.2. Ни одно из множеств (2.5), (2.6), (2.7) не замкнуто по умножению.

Доказательство. Снова построим два таких элемента, принадлежащих множеству (2.5) при любых $n \in \mathbb{N}$, произведение которых не принадлежит множеству (2.5) ни при каких $n \in \mathbb{N}$. Пусть $m \in \mathbb{N}_3$. Положим

$$x_k = \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } k = 2^m \\ 1, & \text{если } k = 2^m + 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$y_k = \begin{cases} (-1)^{m+1}, & \text{если } k = 2^m \\ 1, & \text{если } k = 2^m + 2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Так как

$$(T^n x)_{2^{2m+1}-n} - (T^n x)_{2^{2m+1}-n+1} = -2$$

и

$$(T^n y)_{2^{2m}-n} - (T^n y)_{2^{2m}-n+2} = -2,$$

то

$$\alpha(x) = \alpha(T^n x) = \alpha(y) = \alpha(T^n y) = 2.$$

С другой стороны,

$$(x \cdot y)_k = \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } k = 2^m \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$\alpha(x+y) = 2,$$

но в то же время

$$\alpha(T^n(x \cdot y)) = 1$$

(см. пример 2.2.1), следовательно, $x \cdot y$ не принадлежит ни одному из множеств (2.5), (2.6), (2.7).

□

2.5 α–функция и семейство операторов σ_n

Теорема 2.5.1. Для любого $x \in \ell_\infty$ и для любого натурального n верно равенство

$$\alpha(\sigma_n x) = \alpha(x).$$

Доказательство. По определению

$$\alpha(x) = \limsup_{i \to \infty} \max_{i < j \leqslant 2i} |x_i - x_j|$$

Положим

$$\alpha_i(x) = \max_{i < j \leqslant 2i} |x_i - x_j| = \max_{i \leqslant j \leqslant 2i} |x_i - x_j|$$

Тогда

$$\alpha(x) = \limsup_{i \to \infty} \alpha_i(x)$$

Пусть $y = \sigma_n x$. Тогда для $k = 1, ..., n-1$, $a \in \mathbb{N}$ имеем

$$\alpha_{an-k}(y) = \max_{an-k \leqslant j \leqslant 2an-2k} |y_{an-k} - y_j| =$$
$$= (\text{т.к. } y_{an-(n-1)} = y_{an-(n-2)} = ... = y_{an-k} = ... = y_{an-1} = y_{an}) =$$
$$= \max_{an \leqslant j \leqslant 2an-2k} |y_{an} - y_j| \leqslant$$
$$\leqslant (\text{переходим к максимуму по большему множеству}) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{an \leqslant j \leqslant 2an} |y_{an} - y_j| = \alpha_{an}(y)$$

С другой стороны,

$$\alpha_{an}(y) = \max_{an \leqslant j \leqslant 2an} |y_{an} - y_j| =$$
$$= (\text{т.к. } y = \sigma_n x, \text{ можем рассматривать только } j = kn) =$$
$$= \max_{an \leqslant kn \leqslant 2an} |y_{an} - y_{kn}| = \max_{a \leqslant k \leqslant 2a} |y_{an} - y_{kn}| = \max_{a \leqslant k \leqslant 2a} |x_a - x_k| = \alpha_a(x)$$

Таким образом, для $k = 1, ..., n-1$, $a \in \mathbb{N}$ имеем соотношения:

$$\alpha_{an}(y) = \alpha_a(x),$$
$$\alpha_{an-k}(y) \leqslant \alpha_a(x),$$

откуда немедленно следует, что

$$\limsup_{i\to\infty} \alpha_i(y) = \limsup_{i\to\infty} \alpha_i(x),$$

т.е.

$$\alpha(\sigma_n x) = \alpha(x),$$

что и требовалось доказать. □

В статье [79, лемма 15] доказывается, что

$$\sigma_n C - C\sigma_n : \ell_\infty \to c_0,$$

где C — оператор Чезаро:

$$(Cx)_n = n^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

(Частный случай для $n = 2$ доказан ранее в [54, lemma 16].)

Следствие 2.5.2.

$$\alpha(C\sigma_n x) = \alpha(\sigma_n Cx) = \alpha(Cx)$$

2.6 α–функция и семейство операторов $\sigma_{1/n}$

Введём, следуя [80, p. 131, prop. 2.b.2], на ℓ_∞ оператор

$$\sigma_{1/n} x = n^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=n+1}^{2n} x_i, \sum_{i=2n+1}^{3n} x_i, ... \right).$$

Понятно, если последовательность x — периодическая с периодом n, то $\alpha(\sigma_{1/n}x) = 0$. Значит, оценить $\alpha(\sigma_{1/n}x)$ снизу через $\alpha(x)$ не удастся.

Для построения верхней оценки нам потребуется следующая

Лемма 2.6.1. Пусть

$$a = \frac{a_1 + ... + a_n}{n}, \quad a_1 \leqslant ... \leqslant a_n.$$

Тогда

$$a_n - a \leqslant \frac{n-1}{n}(a_n - a_1).$$

Доказательство.

$$a_n - a = a_n - \frac{a_1 + ... + a_n}{n} = \frac{n-1}{n}a_n - \frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n-1}{n}a_n - \frac{(n-1)a_1}{n} = \frac{n-1}{n}(a_n - a_1).$$

□

Теорема 2.6.2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \ell_\infty$ выполнено

$$\alpha(\sigma_{1/n}x) \leqslant \left(2 - \frac{1}{n}\right)\alpha(x).$$

Доказательство. Положим

$$\alpha_i(x) = \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j| = \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_i - x_j|.$$

Тогда

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \alpha_i(x).$$

Пусть $y = \sigma_n\sigma_{1/n}x$. Из теоремы 2.5.1 следует, что $\alpha(\sigma_{1/n}x) = \alpha(y)$. Сосредоточим наши усилия на оценке $\alpha(y)$.

Пусть $1 \leqslant j \leqslant n$. Заметим, что

$$\alpha_{kn+j}(y) = \max_{kn+j\leqslant i\leqslant 2kn+2j} |y_{kn+j} - y_i| =$$
$$= (\text{т.к. } y_{kn+j} = y_{kn+1} = y_{kn+n} = (\sigma_{1/n}x)_k) =$$
$$= \max_{kn+n\leqslant i\leqslant 2kn+2j} |y_{kn+n} - y_i| \leqslant$$
$$\leqslant (\text{переходим к максимуму по не меньшему множеству}) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{kn+n\leqslant i\leqslant 2kn+2n} |y_{kn+n} - y_i| = \alpha_{kn+n}(y).$$

Итак, $\alpha_{kn+j}(y) \leqslant \alpha_{kn+n}(y)$, значит,

$$\alpha(\sigma_{1/n}x) = \alpha(y) = \limsup_{i\to\infty} \alpha_i(y) = \limsup_{k\to\infty} \alpha_{kn+n}(y). \tag{2.8}$$

По лемме 2.6.1 имеем

$$|x_{kn+n} - y_{kn+n}| \leqslant \frac{n-1}{n} \max_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_{kn+i} - x_{kn+j}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n-1}{n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \alpha_{kn+i}(x) = \frac{n-1}{n}\alpha_{kn+i_k}(x). \tag{2.9}$$

Из того, что $y_j = \frac{1}{n}(x_{kn+1} + ... + x_{kn+n})$, следует, что

$$\max_{kn+n\leqslant i\leqslant 2kn+2n} |x_{kn+n} - y_i| \leqslant \max_{kn+n\leqslant i\leqslant 2kn+2n} |x_{kn+n} - x_i| = \alpha_{kn+n}(x). \tag{2.10}$$

Оценим:

$$\alpha_{kn+n}(y) = \max_{kn+n\leqslant i\leqslant 2kn+2n} |y_{kn+n} - y_i| =$$
$$= \max_{kn+n\leqslant i\leqslant 2kn+2n} |y_{kn+n} - x_{kn+n} + x_{kn+n} - y_i| \leqslant$$
$$\leqslant |y_{kn+n} - x_{kn+n}| + \max_{kn+n\leqslant i\leqslant 2kn+2n} |x_{kn+n} - y_i| \overset{(2.9)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \frac{n-1}{n}\alpha_{kn+i_k}(x) + \max_{kn+n\leqslant i\leqslant 2kn+2n} |x_{kn+n} - y_i| \overset{(2.10)}{\leqslant} \frac{n-1}{n}\alpha_{kn+i_k}(x) + \alpha_{kn+n}(x).$$

С учётом (2.8) имеем

$$\alpha(\sigma_{1/n}x) = \limsup_{k\to\infty} \alpha_{kn+n}(y) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\alpha_{kn+i_k}(x) + \alpha_{kn+n}(x)\right) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\alpha(x).$$

□

Точность теоремы 2.6.2 для $n = 1$ очевидна. Для $n = 2$ её показывает

Пример 2.6.3. Положим для всех $p \in \mathbb{N}$:

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leqslant 2^3, \\ 0, & k = 2^{3p} + 1, \\ 1, & k = 2^{3p} + 2, \\ 1, & 2^{3p} + 3 \leqslant k \leqslant 2^{3p+1} + 2, \\ 2, & 2^{3p+1} + 3 \leqslant k \leqslant 2^{3p+1} + 4, \\ 1, & 2^{3p+1} + 5 \leqslant k \leqslant 2^{3(p+1)}, \end{cases}$$

тогда

$$(\sigma_{1/2}x)_k = \begin{cases} 0, & k \leqslant 2^3, \\ 1/2, & k = 2^{3p} + 1, \\ 1/2, & k = 2^{3p} + 2, \\ 1, & 2^{3p} + 3 \leqslant k \leqslant 2^{3p+1} + 2, \\ 2, & 2^{3p+1} + 3 \leqslant k \leqslant 2^{3p+1} + 4, \\ 1, & 2^{3p+1} + 5 \leqslant k \leqslant 2^{3(p+1)}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\alpha(x) = 1$, но $\alpha(\sigma_{1/2}x) = 3/2$ (достигается на $i = 2^{3p} + 2$, $j = 2^{3p+1} + 4$).

Гипотеза 2.6.4. Оценка теоремы 2.6.2 точна для любого $n \in \mathbb{N}$.

2.7 α–функция и оператор Чезаро C

На пространстве ограниченных последовательностей ℓ_∞ определяется оператор Чезаро C равенством

$$(Cx)_n = 1/n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Из [78, Proposition 4] непосредственно следует

Теорема 2.7.1. $\alpha(Cx) \leqslant \alpha(x)$.

Выясняется, что эта оценка достаточно точна.

2.7.1 Вспомогательная сумма специального вида

Лемма 2.7.2. Если $p \geqslant 2$, то
$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{i \cdot 2^i}{p} = \frac{2^p(p-2)+2}{p}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Равенство (2.11) равносильно равенству
$$\sum_{i=0}^{p-1} i \cdot 2^i = 2^p(p-2)+2. \tag{2.12}$$

Докажем это равенство методом математической индукции.

База индукции. Для $p = 2$ имеем
$$\sum_{i=0}^{2-1} i \cdot 2^i = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 2$$
и
$$2^2(2-2)+2 = 2.$$
Видим, что для $p = 2$ соотношение (2.12) выполняется.

Шаг индукции. Пусть соотношение (2.12) выполняется для $p = m$, $m \geqslant 2$, т.е.
$$\sum_{i=0}^{m-1} i \cdot 2^i = 2^m(m-2)+2. \tag{2.13}$$

Покажем, что тогда соотношение (2.12) выполняется и для $p = m+1$. Действительно,
$$\sum_{i=0}^{(m+1)-1} i \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{m} i \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{m-1} i \cdot 2^i + m \cdot 2^m \overset{(2.13)}{=} 2^m(m-2)+2+m \cdot 2^m =$$
$$= m \cdot 2^m - 2 \cdot 2^m + 2 + m \cdot 2^m = m \cdot 2^{m+1} - 2^{m+1} + 2 =$$
$$= 2^{m+1}(m-1)+2 = 2^{m+1}((m+1)-1)+2,$$
т.е. соотношение (2.12) выполняется и для $p = m+1$, что и требовалось доказать. □

2.7.2 Вспомогательный оператор S

Пусть $y = (y_1, y_2, ...) \in \ell_\infty$. Определим оператор $S : \ell_\infty \to \ell_\infty$ следующим образом:
$$(Sy)_k = y_{i+2}, \text{ где } 2^i < k \leqslant 2^i + 1.$$

Этот оператор вводится исключительно для упрощения изложения конструкции.

Пример 2.7.3.
$$S(1,2,3,4,5,6,...) = (1,2,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,6...).$$

Теперь нам потребуются некоторые свойства оператора S.

Лемма 2.7.4. Для любого $x \in \ell_\infty$ выполнено равенство

$$\alpha(Sx) = \limsup_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k|.$$

Доказательство.

$$\alpha(Sx) = \limsup_{i\to\infty} \sup_{i<j\leqslant 2i} |(Sx)_i - (Sx)_j| = \ldots$$

Положим для каждого i число m_i так, что $m_i = 2^{k_i}$, $i \leqslant m_i < 2i$ (очевидно, это всегда можно сделать).

$$\ldots = \limsup_{i\to\infty} \max\left\{ \max_{i<j\leqslant m_i} |(Sx)_i - (Sx)_j|, \max_{m_i<j\leqslant 2i} |(Sx)_i - (Sx)_j| \right\} = \ldots$$

Но при $2^{k_i-1} < i < j \leqslant m_i = 2^{k_i}$ имеем $(Sx)_i = (Sx)_j$, и первый модуль обращается в нуль.

$$\ldots = \limsup_{i\to\infty} \max_{m_i<j\leqslant 2i} |(Sx)_i - (Sx)_j| = \ldots$$

Но при $2^{k_i-1} < i \leqslant m_i = 2^{k_i} < j \leqslant 2^{k_i+1}$ имеем $(Sx)_i = x_{k_i+1}$, $(Sx)_j = x_{k_i+2}$, откуда

$$\ldots = \limsup_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k|.$$

□

Лемма 2.7.5.

$$\sum_{k=2}^{2^p} (Sy)_k = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i y_{i+2}.$$

Доказательство.

$$\sum_{k=2}^{2^p} (Sy)_k = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} (Sy)_k = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} y_{i+2} = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i y_{i+2}.$$

□

Лемма 2.7.6.

$$\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+j+1}} (Sx)_k = 2^i \sum_{k=2}^{2^{j+1}} (ST^i x)_k.$$

Здесь и далее $(Tx)_n = x_{n+1}$.

Доказательство.

$$\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+j+1}} (Sx)_k = \sum_{m=i}^{i+j} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} (Sx)_k = \sum_{m=i}^{i+j} 2^m \cdot x_{m+2} =$$

$$= 2^i \cdot \sum_{n=0}^{j} 2^n \cdot x_{n+2+i} = 2^i \cdot \sum_{n=0}^{j} 2^n (T^i x)_{n+2} = 2^i \cdot \sum_{k=2}^{2^{j+1}} (ST^i x)_k.$$

□

2.7.3 Вспомогательная функция k_b

Введём функцию

$$k_b(x) = \frac{1}{2b}\left|\sum_{k=1}^{b} x_k - \sum_{k=b+1}^{2b} x_k\right|$$

Лемма 2.7.7. Для любого $x \in \ell_\infty$ выполнено

$$\alpha(Cx) \geqslant \limsup_{i\to\infty} k_i(x).$$

Доказательство.

$$\alpha(Cx) \overset{def}{=} \limsup_{i\to\infty} \sup_{i<j\leqslant 2i} |(Cx)_i - (Cx)_j| \geqslant \limsup_{i\to\infty} |(Cx)_i - (Cx)_{2i}| =$$

$$= \limsup_{i\to\infty}\left|\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} - \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2i}\right| = \limsup_{i\to\infty}\left|\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} - \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{i} - \frac{1}{2i}\sum_{k=i+1}^{2i}\right| =$$

$$= \limsup_{i\to\infty}\left|\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{i} - \frac{1}{2i}\sum_{k=i+1}^{2i}\right| = \limsup_{i\to\infty} k_i(x).$$

□

Введение функции $k_b(x)$ позволит нам в дальнейшем перейти от работы с оператором Чезаро к несложным преобразованиям сумм.

2.7.4 Основные построения

Построим вектор $y \in \ell_\infty$ следующим образом:

$$y = \left(0, 0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, ..., \frac{p-1}{p}, 1, \frac{p-1}{p}, ..., \frac{1}{p}, \underbrace{0, 0, 0, ..., 0,}_{3p+1 \text{ раз}} \frac{1}{p}, ...\right).$$

так, что

$$T^{5p} y = y.$$

Положим $x = Sy$. Тогда с учётом (4.3)

$$\alpha(x) = \alpha(Sy) = \frac{1}{p}.$$

Оценим $\alpha(Cx)$:

$$\alpha(Cx) \overset{(2.7.7)}{\geqslant} \limsup_{b\to\infty} k_b(x) = \limsup_{b\to\infty} \frac{1}{2b}\left|\sum_{k=1}^{b} x_k - \sum_{k=b+1}^{2b} x_k\right| \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{i\to\infty,\ b=2^i} \frac{1}{2^{i+1}}\left|\sum_{k=1}^{2^i}(Sy)_k - \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}(Sy)_k\right| =$$

$$= \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\left|\sum_{k=1}^{2^i}(Sy)_k - 2^i y_{i+2}\right| = \limsup_{i\to\infty}\left|\frac{1}{2^{i+1}}\sum_{k=1}^{2^i}(Sy)_k - \frac{y_{i+2}}{2}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{m\to\infty,\ i=5pm+p}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm+p}}(Sy)_k - \frac{y_{5pm+p+2}}{2}\right| =$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm+p}}(Sy)_k - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k + \frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=2^{5pm}+1}^{2^{5pm+p}}(Sy)_k - \frac{1}{2}\right| \overset{(2.7.6)}{=}$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k + \frac{1}{2^{5pm+p+1}}\cdot 2^{5pm}\cdot\sum_{k=2}^{2^p}(ST^{5pm}y)_k - \frac{1}{2}\right| \overset{(2.7.4)}{=}$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k + \frac{1}{2^{5pm+p+1}}\cdot 2^{5pm}\cdot\sum_{k=2}^{2^p}(Sy)_k - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k + \frac{1}{2^{p+1}}\sum_{k=2}^{2^p}(Sy)_k - \frac{1}{2}\right| \overset{(2.7.5)}{=}$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k + \frac{1}{2^{p+1}}\sum_{i=0}^{p-1}2^i y_{i+2} - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k + \frac{1}{2^{p+1}}\sum_{i=0}^{p-1}2^i\cdot\frac{i}{p} - \frac{1}{2}\right| \overset{(2.11)}{=}$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k + \frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{2^p(p-2)+2}{p} - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k + \frac{1}{2}\cdot\frac{p-2}{p} + \frac{1}{p2^p} - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm}}(Sy)_k - \frac{1}{p} + \frac{1}{p2^p}\right| =$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=1}^{2^{5pm-2p}}(Sy)_k + \frac{1}{2^{5pm+p+1}}\sum_{k=2^{5pm-2p}+1}^{2^{5pm}}(Sy)_k - \frac{1}{p} + \frac{1}{p2^p}\right| =$$

но во второй сумме все $(Sy)_k$ — нули по построению

$$= \limsup_{m\to\infty} \left| \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=1}^{2^{5pm-2p}} (Sy)_k - \frac{1}{p} + \frac{1}{p2^p} \right| = h.$$

Но $0 \leqslant (Sy)_k \leqslant 1$, значит,

$$\frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=1}^{2^{5pm-2p}} (Sy)_k \leqslant \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \cdot 2^{5pm-2p} = \frac{1}{2^{3p+1}}.$$

Модуль раскрываем со знаком "-" :

$$h = \limsup_{m\to\infty} \left(\frac{1}{p}(1-2^{-p}) - \frac{1}{2^{3p+1}} \right) = \frac{1}{p}(1-2^{-p}) - \frac{1}{2^{3p+1}} =$$
$$= \frac{1}{p}(1-2^{-p}) - \frac{1}{2^{2p+1}} \cdot 2^{-p} > \frac{1}{p}(1-2^{-p}) - \frac{1}{p} \cdot 2^{-p} = \frac{1}{p}(1-2^{-p+1}).$$

Таким образом,

$$\frac{\alpha(Cx)}{\alpha(x)} \geqslant \frac{\frac{1}{p}(1-2^{-p+1})}{\frac{1}{p}} = 1 - 2^{-p+1}.$$

Рассматривая x как функцию от p, имеем:

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{\alpha(Cx(p))}{\alpha(x(p))} \geqslant \sup_{p\in\mathbb{N}} (1-2^{-p+1}) = 1.$$

Таким образом, может быть сформулирована следующая

Теорема 2.7.8. Имеет место равенство

$$\sup_{x\in\ell_\infty, \alpha(x)\neq 0} \frac{\alpha(Cx)}{\alpha(x)} = 1.$$

2.7.5 Некоторые гипотезы

Гипотеза 2.7.9. Пусть $x \in \ell_\infty$ и $0 \leqslant x_k \leqslant 1$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(C^n x) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Гипотеза 2.7.10. Для любых $x \in \ell_\infty$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(C^n x) - \alpha(C^{n+1} x) \leqslant \alpha(C^{n-1} x) - \alpha(C^n x).$$

Гипотеза 2.7.11. Для любого $0 < a < 1$ существует такой $x \in \ell_\infty$, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha(C^m x)}{a^m} = \infty.$$

2.8 α–функция и оператор суперпозиции

Введём на пространстве ℓ_∞ фактор-норму по c_0:

$$\|x\|_* = \limsup_{k\to\infty} |x_k|.$$

Теорема 2.8.1. Пусть $(x\cdot y)_k = x_k \cdot y_k$. Тогда $\alpha(x\cdot y) \leqslant \alpha(x)\cdot\|y\|_* + \alpha(y)\cdot\|x\|_*$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\alpha(x\cdot y) &= \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_i y_i - x_j y_j| = \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_i y_i - x_j y_i + x_j y_i - x_j y_j| \leqslant \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} (|x_i y_i - x_j y_i| + |x_j y_i - x_j y_j|) = \\
&= \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} (|y_i|\cdot|x_i - x_j| + |x_j|\cdot|y_i - y_j|) \leqslant \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |y_i|\cdot|x_i - x_j| + \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_j|\cdot|y_i - y_j| = \\
&= \limsup_{i\to\infty} |y_i| \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} \cdot|x_i - x_j| + \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_j|\cdot|y_i - y_j| \leqslant \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} |y_i| \cdot \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} \cdot|x_i - x_j| + \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_j|\cdot|y_i - y_j| = \\
&= \|y\|_* \cdot \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} \cdot|x_i - x_j| + \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_j|\cdot|y_i - y_j| = \\
&= \|y\|_* \cdot \alpha(x) + \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_j|\cdot|y_i - y_j| \leqslant \\
&\leqslant \|y\|_* \cdot \alpha(x) + \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_j| \cdot \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |y_i - y_j| = \\
&= \|y\|_* \cdot \alpha(x) + \limsup_{i\to\infty} \max_{i\leqslant j\leqslant 2i} |x_j| \cdot \alpha(y) \leqslant \\
&\leqslant \|y\|_* \cdot \alpha(x) + \limsup_{j\to\infty} |x_j| \cdot \alpha(y) = \|y\|_* \cdot \alpha(x) + \|x\|_* \cdot \alpha(y).
\end{aligned}$$

□

Пример 2.8.2. Покажем, что нетривиальная нижняя оценка на $\alpha(x\cdot y)$ не существует. В самом деле, пусть $x_k = (-1)^k$. Тогда $\alpha(x) = 2$, $\|x\|_* = 1$, но $\alpha(x\cdot x) = 0$.

Пример 2.8.3. Покажем, что оценка теоремы 2.8.1 точна в том смысле, что равенство достижимо. В самом деле, пусть $x_k = (-1)^k$, $y_k = 1$. Тогда $\alpha(x) = 2$, $\alpha(y) = 0$, но $\alpha(x\cdot y) = 2$.

Пример 2.8.4. Пусть

$$y = \left(0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, ..., \frac{p-1}{p}, 1, \frac{p-1}{p}, ..., \frac{1}{p}, 0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, ...\right).$$

Тогда $\alpha(Sy) = \frac{1}{p}$, $\|Sy\|_* = 1$,

$$\alpha((Sy)\cdot(Sy)) = \left|\frac{(p-1)^2}{p^2} - 1\right| = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Пример 2.8.5. Для того же y и любого $k > 0$ имеем $\alpha(kSy) = \dfrac{k}{p}$, $\|kSy\|_* = k$,

$$\alpha((kSy)\cdot(kSy)) = \left|\frac{k^2(p-1)^2}{p^2} - k^2\right| = \frac{2k^2}{p} - \frac{k^2}{p^2}.$$

Оценка теоремы 2.8.1 даёт

$$\alpha((kSy)\cdot(kSy)) \leqslant \frac{2k^2}{p}.$$

Пример 2.8.6. Пусть $x_k = (-1)^k$. Тогда $\alpha(x) = \alpha(\sigma_2 x) = 2$, $\|x\|_* = \|\sigma_2 x\|_* = 1$, но $\alpha(x\cdot\sigma_2 x) = 2 < 4$.

Исходя из построенных примеров может быть выдвинута

Гипотеза 2.8.7. Если $\alpha(x\cdot y) = \alpha(x)\cdot\|y\|_* + \alpha(y)\cdot\|x\|_*$, то $\alpha(x) = 0$ или $\alpha(y) = 0$.

2.9 Функционалы α^* и α_*

Как мы выяснили, α–функция не инвариантна относительно сдвига. Чтобы избавиться от этого недостатка, введём функционалы

$$\alpha^* = \lim_{n\to\infty} U^n x$$

и

$$\alpha_* = \lim_{n\to\infty} T^n x$$

(оба пределы существуют как пределы монотонных ограниченных последовательностей). Тогда верны следующие соотношения.

Лемма 2.9.1.

$$\alpha^*(x) = \alpha^*(\sigma_n x) = \alpha^*(Tx) = \alpha^*(Ux),$$

$$\alpha_*(x) = \alpha_*(\sigma_n x) = \alpha_*(Tx) = \alpha_*(Ux).$$

Лемма 2.9.2.

$$\frac{1}{2}\alpha(x) \leqslant \alpha_*(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant \alpha^*(x) \leqslant 2\alpha(x).$$

Кроме того, для учёта обоих функционалов и сохранения однородности предлагается ввести функционал

$$\alpha_*^*(x) = \sqrt{\alpha_*(x)\alpha^*(x)}.$$

Гипотеза 2.9.3. Функционал $\alpha_*^*(x)$ удовлетворяет неравенству треугольника.

Гипотеза 2.9.4. Аналог теоремы 2.7.8 верен для функционалов $\alpha^*(x)$, $\alpha_*(x)$ и $\alpha_*^*(x)$

2.10 Пространство $\{x : \alpha(x) = 0\}$

Из свойства 2.1.1 и однородности α–функции немедленно вытекает

Теорема 2.10.1. Множество $A_0 = \{x : \alpha(x) = 0\}$ является пространством.

Изучим свойства этого пространства.

Свойство 2.10.2. Пространство A_0 замкнуто.

Доказательство. Прообраз замкнутого множества $\{0\}$ при непрерывном отображении $\alpha : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ замкнут. $\square$

Теорема 2.10.3. Включение $c \subset A_0$ собственное.

Доказательство. Рассмотрим

$$x = \left(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, ...\right).$$

Тогда по лемме 2.7.4 (при определённом тем же образом операторе S) имеем

$$\alpha(Sx) = \limsup_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k| = 0,$$

однако, очевидно, $Sx \notin c$. $\square$

Очевидно следующее

Свойство 2.10.4. Если периодическая последовательность принадлежит A_0, то эта последовательность — константа.

Из результатов предыдущих параграфов вытекает

Теорема 2.10.5. Пространство A_0 замкнуто относительно операторов T, U, C, σ_n, $\sigma_{1/n}$, S.

Из теоремы 2.8.1 следует

Теорема 2.10.6. Пространство A_0 замкнуто относительно умножения, т.е. если $x, y \in A_0$, то $x \cdot y \in A_0$.

Пример 2.8.3 показывает, что A_0 не является идеалом по умножению.

Из теоремы 1.7.4 следует

Теорема 2.10.7. $ac \cap A_0 = c$.

Некоторый интерес представляет следующая теорема, основанная на идеях [62].

Теорема 2.10.8. Пространство A_0 несепарабельно.

Доказательство. Напомним, что через $\Omega = \{0;1\}^{\mathbb{N}}$ обозначается множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц. Для каждого $\omega \in \Omega$ положим

$$x(\omega) = \Big(0, 1\omega_1, 0, \frac{1}{2}\omega_2, 1\omega_2, \frac{1}{2}\omega_2, 0, \frac{1}{3}\omega_3, \frac{2}{3}\omega_3, 1\omega_3, \frac{2}{3}\omega_3, \frac{1}{3}\omega_3, 0, ...,$$
$$0, \frac{1}{p}\omega_p, \frac{2}{p}\omega_p, ..., \frac{p-1}{p}\omega_p, 1\omega_p, \frac{p-1}{p}\omega_p, ..., \frac{2}{p}\omega_p, \frac{1}{p}\omega_p, 0, \frac{1}{p+1}\omega_{p+1}, ...\Big).$$

Тогда по лемме 2.7.4 (при определённом тем же образом операторе S) имеем $\alpha(Sx(\omega)) = 0$. Заметим, что при $\omega, \omega^* \in \Omega$ и $\omega \neq \omega^*$ выполнено $\|Sx(\omega) - Sx(\omega^*)\| = 1$ и $|Sx(\Omega)| = \mathfrak{c}$. Следовательно, A_0 несепарабельно. $\square$

2.11 О недополняемости некоторых подпространств

В работе [81] Филлипс привёл исторически первый пример недополняемого подпространства. Говоря формально, справедлива следующая

Теорема 2.11.1 (Филлипса)**.** Не существует непрерывного линейного оператора $P : \ell_\infty \to c_0$ такого, что для любого $x \in c_0$ выполнено равенство $Px = x$.

Подобные операторы называются *проекторами.*

Теорема 2.11.1 дала первый пример недополняемого подпространства. Позже были найдены и другие примеры; отсылаем читателя, например, к [80].

Е.А. Алехно привёл в [82, теорема 8] элегантное доказательство того, что ac_0 недополняемо в ℓ_∞. Это доказательство основано на изначальном доказательстве Филлипса теоремы 2.11.1 и использует некоторые леммы из [81].

Подпространство c_0 также недополняемо в ac_0. Непосредственное явное упоминание этого факта найти не удалось, однако он достаточно легко следует из [16, теорема 4], доказательство которой опирается на идеи [83] и [84, теорема 6.9]. Приведём эту теорему (в несколько ослабленной форме, для которой достаточно уже введённой терминологии) и соответствующее следствие, предварив одной вспомогательной леммой, доказательство коей является столь же классическим, сколь и кратким, и приводится здесь исключительно ради полноты изложения.

Определение 2.11.2. Семейство множеств $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ называется почти дизъюнктным, если для $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$, пересечение $A_\lambda \cap A_\mu$ конечно.

Лемма 2.11.3. Существует почти дизъюнктное несчётное семейство подмножеств $\{S_i\}_{i\in I}$, $S_i \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим биекцию $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$. Пусть $I = \mathbb{R}$. Для каждого $i \in I$ положим $S_i = \{q_n\}$, где $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ — некоторая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к i. $\square$

Теорема 2.11.4 ([16, теорема 4]). Пусть X и Y — такие линейные подпространства в ℓ_∞, что $c_{00} \subseteq Y \subsetneq X \subseteq \ell_\infty$. Пусть существует такое несчётное почти дизъюнктное семейство множеств натуральных чисел $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $A_\lambda \subseteq \mathbb{N}$, что для любого $\lambda \in \Lambda$ имеет место включение $\chi A\lambda \in X \setminus Y$. Тогда подпространство Y недополняемо в X .

Следствие 2.11.5. Подпространство c_0 недополняемо в ac_0. Подпространство c_0 недополняемо в $\mathcal{I}(ac_0)$.

Доказательство. Возьмём почти дизъюнктное семейство $\{S_i\}_{i\in I}$, $S_i \subset \mathbb{N}$ из леммы 2.11.3 и построим новое семейство $\{A_i\}_{i\in I}$, $A_i \subset \mathbb{N}$ по правилу

$$A_i = \{2^n : n \in S_i\}. \tag{2.14}$$

Легко видеть, что семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ снова является почти дизъюнктным. Более того, $\chi A_i \in ac_0 \setminus c_0$ и $\chi A_i \in \mathcal{I}(ac_0) \setminus c_0$ для любого $i \in I$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.11.4 для цепочки вложений $c_{00} \subseteq c_0 \subsetneq ac_0 \subseteq \ell_\infty$ и для цепочки вложений $c_{00} \subseteq c_0 \subsetneq \mathcal{I}(ac_0) \subseteq \ell_\infty$. □

Итак, все три следующих подпространства недополняемы:

$$c_0 \subset \ell_\infty, \quad ac_0 \subset \ell_\infty, \quad \text{и} \quad c_0 \subset ac_0.$$

Перейдём теперь к изучению пространства A_0.

Лемма 2.11.6. Подпространство A_0 недополняемо в ℓ_∞.

Доказательство. В теореме 2.11.4 положим $Y = A_0$, $X = \ell_\infty$. Тогда для семейства множеств (2.14) выполнены все условия теоремы 2.11.4. □

Однако для вложения $c_0 \subset A_0$ применить теорему 2.11.4 непосредственно не удастся. Основная проблема заключается в том, что для любого бесконечного множества $E \subset \mathbb{N}$ такого, что дополнение $\mathbb{N} \setminus E$ также бесконечно, последовательность $\chi E \notin A_0$, поскольку $\alpha(\chi E) = 1$.

Поэтому мы проведём доказательство недополняемости полностью, во многом опираясь на идеи [83] и дискуссию [85]. Для этого нам потребуется напомнить некоторые вспомогательные конструкции, с которыми читатель уже встречался в этой главе.

Определим линейный оператор $F : \ell_\infty \to \ell_\infty$ соотношением

$$(Fy)_k = y_{i+2} \ \text{ для } \ 2^i < k \leqslant 2^{i+1},$$

т.е.

$$F(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ...\}) = \{x_1, x_2, \ x_3, x_3, \ x_4, x_4, x_4, x_4, \ x_5, x_5, x_5, x_5, x_5, x_5, x_5, x_5, \ x_6...\}.$$

Напомним, что в силу леммы 2.7.4 выполнено равенство

$$\alpha(Fx) = \limsup_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k|. \tag{2.15}$$

Определим линейный оператор $M : \ell_\infty \to \ell_\infty$ следующим образом:

$$M(\omega_1, \omega_2, ...) = \Big(0, 1\omega_1, 0, \frac{1}{2}\omega_2, 1\omega_2, \frac{1}{2}\omega_2, 0, \frac{1}{3}\omega_3, \frac{2}{3}\omega_3, 1\omega_3, \frac{2}{3}\omega_3, \frac{1}{3}\omega_3, 0, ...,$$
$$0, \frac{1}{p}\omega_p, \frac{2}{p}\omega_p, ..., \frac{p-1}{p}\omega_p, 1\omega_p, \frac{p-1}{p}\omega_p, ..., \frac{2}{p}\omega_p, \frac{1}{p}\omega_p, 0, \frac{1}{p+1}\omega_{p+1}, ...\Big).$$

Заметим, что в силу (2.15) мы имеем $FM : \ell_\infty \to A_0$.

Лемма 2.11.7. Пусть линейный оператор $Q : A_0 \to A_0$ таков, что $c_0 \subseteq \ker Q$. Тогда существует счётное подмножество $S \subset \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall (x \in A_0 : \operatorname{supp} x \subset S)[Qx = 0]$$

и $x \in A_0 \setminus c_0$ такой, что $\operatorname{supp} x \subseteq S$.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ есть несчётное почти дизъюнктное семейство подмножеств $\mathbb{N}$. Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ есть семейство подмножеств $\mathbb{N}$, определённое соотношением $S_i = \operatorname{supp} FM\chi U_i$. Очевидно, что семейство множеств $\{S_i\}_{i\in I}$ также несчётно и почти дизъюнктно. Более того, для любого $i \in I$ мы имеем $x = FM\chi U_i \in A_0 \setminus c_0$.

Предположим противное:

$$\forall (\text{бесконечного } S \subset \mathbb{N}) \exists (x \in A_0 : \operatorname{supp} x \subset S)[Qx \neq 0].$$

В частности,

$$\forall (i \in I) \exists (x_i \in A_0 : \operatorname{supp} x_i \subset S_i)[Q(x_i) \neq 0].$$

Заметим, что $x_i \notin c_0$, поскольку $c_0 \subseteq \ker Q$. Не теряя общности, будем полагать $\|x_i\| = 1$ для всех $i \in I$.

Положим $I_n = \{i \in I \ :\ (Qx_i)_n \neq 0\}$, тогда $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Таким образом, найдётся n такое, что I_n также несчётно (иначе I было бы счётным как объединение счётного количества счётных множеств).

Рассмотрим теперь $I_{n,k} = \{i \in I_n \ :\ |(Qx_i)_n| \geqslant 1/k\}$, тогда $I_n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_{n,k}$. Аналогичные рассуждения показывают, что для некоторого k множество $I_{n,k}$ несчётно. Зафиксируем такое $I_{n,k}$ и в дальнейшем будем работать с ним.

Итак, у нас есть несчётное множество $I_{n,k}$ и

$$\forall (i \in I_{n,k}) \exists (x_i \in A_0 : \operatorname{supp} x_i \subset S_i)\Big[\|x_i\| = 1 \ \text{ и } \ |(Qx_i)_n| \geqslant 1/k\Big].$$

Рассмотрим конечное множество $J \subset I_{n,k}$, $\#J > 1$ (здесь $\#J$ означает мощность множества J). Возьмём

$$y = \sum_{j\in J} \operatorname{sign}(Qx_j)_n \cdot x_j.$$

Поскольку пересечение $S_i \cap S_j$ конечно для любых $i \neq j$ и $\operatorname{supp} x_j \subset S_j$, пересечение $\bigcap\limits_{j\in J} \operatorname{supp} x_j$ также конечно. Таким образом, $y = f + z$, причём $\operatorname{supp} f$ конечен и $\|z\| \leqslant 1$.

С другой стороны,

$$(Qy)_n = \sum_{j\in J} (\operatorname{sign}(Qx_j)_n) \cdot (Qx_j)_n \geqslant \frac{\#J}{k}.$$

Заметив, что $f \in c_0$, мы получаем $Qf = 0$, поскольку $c_0 \subseteq \ker Q$. Значит, $Qy = Q(f + z) = Qf + Qz = Qz$ и

$$\frac{\#J}{k} \leqslant (Qy)_n \leqslant \|Qy\| = \|Qz\| \leqslant \|Q\| \cdot \|z\| \leqslant \|Q\|. \tag{2.16}$$

С учётом (2.16) получаем $\#J \leqslant \|Q\|k$ для любого $J \subset I_{n,k}$. Таким образом мы получаем противоречие с тем фактом, что $I_{n,k}$ несчётно. $\square$

Теорема 2.11.8. Подпространство c_0 недополняемо в A_0.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует непрерывный проектор $P : A_0 \to c_0$. Применим лемму 2.11.7 к оператору $I - P$ и найдём бесконечное подмножество $S \subset \mathbb{N}$ такое, что $\forall(x \in A_0 : \operatorname{supp} x \subset S)[(I - P)x = 0]$, и $x \in A_0 \setminus c_0$ такой, что $\operatorname{supp} x \subseteq S$. Но тогда $Px = x \notin c_0$, что противоречит предположению, что P есть проектор на c_0. $\square$

Глава 3

Банаховы пределы, инвариантные относительно некоторых операторов

По определению, каждый банахов предел инвариантен относительно оператора сдвига: $B = BT$. Возникает закономерный вопрос: относительно каких ещё операторов инвариантны банаховы пределы?

Мы не будем рассматривать здесь операторы обобщённого сдвига [86; 87]; достаточно естественным обобщением обычного сдвига являются «движения» — инъективные отображения $\mathbb{N}$ в себя без периодических точек; за их обсуждением в свете банаховых пределов отсылаем читателя к работе Р. Нильсена [88].

Уже для совершенно естественного — если бы мы говорили об обычной сходимости последовательностей — оператора растяжения σ_k (напомним, что этот оператор просто повторяет каждый элемент последовательности k раз) выясняется, что относительно этого оператора инварианты не все банаховы пределы! Более того, инвариантность конкретного банахова предела зависит от выбора $k \in \mathbb{N}_2$.

Для оператора Чезаро

$$C(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, ..., \frac{x_1 + ... + x_n}{n}, ...\right).$$

ситуация с инвариантностью банаховых пределов обстоит ещё «хуже». Напомним, что через $\mathfrak{B}(H)$ мы обозначаем множество банаховых пределов, инвариантных относительно оператора H, т.е. таких $B \in \mathfrak{B}$, что $B = BH$. Так, в [89, §2, теорема 4] показано, что

$$\mathfrak{B}(C) \subsetneq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}(\sigma_n). \tag{3.1}$$

(это утверждение обобщает [78, теорема 3] и [90, теорема 4.8]).

Важной вехой в изучении инвариантных банаховых пределов явилась следующая теорема, доказанная в [54, §2]. Мы ещё не раз будем возвращаться к её обсуждению.

Теорема 3.0.1. Пусть линейный оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ таков, что:
(i) $H \geqslant 0, H\mathbb{1} = \mathbb{1}$;
(ii) $Hc_0 \subset c_0$;

(iii) $\limsup_{j\to\infty}(A(I-T)x)_j \geqslant 0$ для всех $x \in \ell_\infty, A \in R$,
где

$$R = R(H) := \operatorname{conv}\{H^n, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Тогда $\mathfrak{B}(H) \neq \varnothing$.

В настоящей главе в теореме 3.11.1 строится пример такого оператора E, что $\mathfrak{B}(E) \neq \varnothing$, но $E\mathbb{1} \neq \mathbb{1}$, что показывает существенную избыточность условий теоремы 3.0.1.

Достаточно «плохими» в смысле инвариантности оказываются крайние точки множества банаховых пределов $\operatorname{ext}\mathfrak{B}$. Это множество не является слабо* замкнутым [88; 91], и его мощность совпадает [92] с мощностью всего пространства ℓ_∞^* и составляет $2^{\mathfrak{c}}$. Из [89, следствие 6] непосредственно следует, что для любых $n \in \mathbb{N}_2$, $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_n)$, $B_2 \in \operatorname{ext}\mathfrak{B}$ выполнено равенство $\rho(B_1, B_2) = 2$, т.е. расстояние является максимально возможным.

Тем не менее, в настоящей главе удалось использовать элементы $\operatorname{ext}\mathfrak{B}$ для исследования инвариантных банаховых пределов — в теореме 3.9.1.

При взгляде на включение (3.1) возникает закономерный вопрос: а можно ли найти такой «самый лучший» банахов предел (или класс банаховых пределов), который был бы инвариантен относительно всех линейных операторов, относительно которых инвариантен хотя бы один банахов предел? Отрицательный ответ на этот вопрос даёт теорема 3.12.1, в которой для произвольного $B \in \mathfrak{B}$ строится такой оператор $G_B : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $\mathfrak{B}(G_B) = \{B\}$.

Инвариантные банаховы пределы находят приложения в некоммутативной геометрии и теории сингулярных следов, где используются в качестве элемента конструкции различных подклассов следов Диксмье [93—96]. В недавних работах [97; 98] инвариантные банаховы пределы были применены для исследования асимптотики констант Лебега для системы Уолша.

Результаты, излагаемые в данной главе, опубликованы в [7—9; 11; 15].

3.1 Оператор с конечномерным ядром, для которого не существует инвариантного банахова предела

В работе [54] изучаются условия, при которых для оператора $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ существует банаховы пределы, инвариантные относительно данного оператора, то есть такие $B \in \mathfrak{B}$, что $B(Hx) = Bx$ для любого $x \in \ell_\infty$, а также приводятся примеры операторов, для которых инвариантные банаховы пределы существуют: операторы σ_n и оператор Чезаро C.

Заметим, что операторы σ_n и C имеют вырожденное ядро, однако не для любого оператора с вырожденным ядром существует инвариантный банахов предел.

Пример 3.1.1. Пусть для $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell_\infty$

$$Ax = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, x_4, 0, ...).$$

Очевидно, что $\ker A = \{0\}$.

Пусть $B \in \mathfrak{B}$, $BA = B$. Очевидно, что

$$\frac{n-1}{2} \leqslant \sum_{k=m+1}^{m+n} (A\mathbb{1})_k \leqslant \frac{n+1}{2},$$

где $\mathbb{1} = (1,1,1,1,1,1,...)$. Тогда по теореме Лоренца

$$BA\mathbb{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} (A\mathbb{1})_k = \frac{1}{2}$$

Однако по определению банахова предела

$$B\mathbb{1} = 1 \neq \frac{1}{2} = BA\mathbb{1}.$$

Пришли к противоречию, следовательно, банаховых пределов, инвариантных относительно A, не существует.

3.2 Оператор с бесконечномерным ядром, относительно которого инвариантен любой банахов предел

Конечномерность ядра оператора не является необходимым условием существования банахова предела, инвариантного относительно данного оператора.

Приведём сначала несложную лемму, а потом соответствующий пример.

Лемма 3.2.1. Пусть $Q : \ell_\infty \to \ell_\infty$. Тогда для того, чтобы равенство $B = BQ$ было выполнено для любого $B \in \mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$I - Q : \ell_\infty \to ac_0, \tag{3.2}$$

где I — тождественный оператор на ℓ_∞.

Необходимость. Справедливы равенства

$$B((I-Q)x) = B(Ix) - B(Qx) = Bx - B(Qx) = Bx - Bx = 0,$$

откуда в силу произвольности выбора B и x вкупе с тем, что $B((I-Q)x) = 0$, имеем $(I-Q)x \in ac_0$ и, следовательно, $I - Q : \ell_\infty \to ac_0$.

Достаточность.

$$B(Qx) = B((I-(I-Q))x) = B(Ix) - B((I-Q)x) = Bx - 0 = Bx.$$

Пример 3.2.2.

$$(Qx)_k = \begin{cases} 0, \text{ если } k = 2^n, n \in \mathbb{N}, \\ x_k \text{ иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\dim\ker Q = \infty$.

Покажем, что Q удовлетворяет условию (3.2).

$$\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k - \sum_{k=m+1}^{m+n} (Qx)_k \leqslant (2+\log_2 n)\|x\|,$$

откуда немедленно

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} (Qx)_k \leqslant \frac{(2+\log_2 n)\|x\|}{n} \to 0.$$

По предыдущему утверждению отсюда следует, что относительно Q инвариантен любой банахов предел.

3.3 О классах линейных операторов, для которых множества инвариантных банаховых пределов совпадают

Лемма 3.3.1. Пусть $P, Q : \ell_\infty \to \ell_\infty$ — линейные операторы и

$$P - Q : \ell_\infty \to ac_0. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}(Q).$$

Доказательство. Пусть $B \in \mathfrak{B}(P)$. Тогда

$$B(Qx) = B((Q-P+P)x) = B((Q-P)x) + B(Px) = 0 + B(Px) = Bx.$$

Значит, $\mathfrak{B}(P) \subset \mathfrak{B}(Q)$. В силу симметричности утверждения леммы получаем $\mathfrak{B}(Q) \subset \mathfrak{B}(P)$, откуда и следует требуемое утверждение. □

Только что доказанная лемма означает, что множество всех линейных операторов, действующих из ℓ_∞ в ℓ_∞, можно разбить на классы по отношению эквивалентности, задаваемому условием (3.3), и тогда для операторов из одного класса множества инвариантных банаховых пределов будут совпадать.

Обратное, однако, неверно.

Пример 3.3.2. Пусть

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, ...)$$

и

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (0, -x_2, 0, -x_4, 0, -x_6, 0, ...).$$

Легко видеть, что для любого банахова предела $B \in \mathfrak{B}$ выполнено

$$B(P\mathbb{1}) = \frac{1}{2}$$

и

$$B(Q\mathbb{1}) = -\frac{1}{2},$$

откуда

$$\mathfrak{B}(Q) = \mathfrak{B}(P) = \varnothing.$$

Однако разность $P - Q$ есть не что иное, как тождественный оператор I, который переводит пространство ℓ_∞ само в себя, а не в пространсво ac_0.

Гипотеза 3.3.3. Существуют два таких линейных оператора $P, Q : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $\mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}(Q) \neq \varnothing$, но $(P - Q)(\ell_\infty) \setminus ac \neq \varnothing$.

3.4 Мощность множества линейных операторов, относительно которых инвариантен банахов предел

Очевидна следующая

Лемма 3.4.1. Пусть $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$,

$$(Ax)_k = \begin{cases} x_n, & \text{если } k = 2^n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $A : \ell_\infty \to ac_0$.

Следствие 3.4.2. $|\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)| = |\mathcal{L}(\ell_\infty, ac_0)|$.

Доказательство. Пусть $Q \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)$. Тогда $AQ \in \mathcal{L}(\ell_\infty, ac_0)$. Из того, что отображение $Q \mapsto AQ$ — инъекция, следует, что $|\mathcal{L}(\ell_\infty, ac_0)| \geqslant |\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)|$. Из того, что $\mathcal{L}(\ell_\infty, ac_0) \subsetneq \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)$, следует, что $|\mathcal{L}(\ell_\infty, ac_0)| \leqslant |\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)|$. Значит, $|\mathcal{L}(\ell_\infty, ac_0)| = |\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)|$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 3.4.3. Пусть $P : \ell_\infty \to \ell_\infty$ и $\mathfrak{B}(P) \neq \varnothing$. Пусть $G = \{Q : \mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}(Q)\}$. Тогда $|G| = |\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)|$.

Доказательство. Действительно, $P + \mathcal{L}(\ell_\infty, ac_0) \subset G$ по лемме 3.3.1. Значит,

$$|G| \geqslant |\mathcal{L}(\ell_\infty, ac_0)| = |\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)|.$$

Из того, что $G \subsetneq |\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)|$, следует, что $|G| \leqslant |\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)|$. Значит, $|G| = |\mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)|$, что и требовалось доказать. $\square$

3.5 Банаховы пределы, инвариантные относительно операторов $\sigma_{1/n}$

Введём, вслед за [80, с. 131, утверждение 2.b.2], на ℓ_∞ оператор

$$\sigma_{1/n}x = n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=n+1}^{2n} x_i, \sum_{i=2n+1}^{3n} x_i, ...\right).$$

Следующая лемма была впервые сформулирована в [16], однако для полноты изложения мы приводим здесь более подробное доказательство.

Лемма 3.5.1 ([16, Лемма 4])**.** Для любого $k \in \mathbb{N}_2$ выполнено

$$\sigma_k \sigma_{1/k} - I : \ell_\infty \to ac_0.$$

Доказательство. Покажем, что для любого $x \in \ell_\infty$ выполнен критерий Лоренца (1.2), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} ((\sigma_k \sigma_{1/k} - I)x)_i = 0 \tag{3.4}$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем сначала m и выберем $a, b \in \mathbb{N}$ таким образом, что

$$k(a-1) < m+1 \leqslant ka, \quad kb \leqslant m+n < k(b+1).$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant &\left| \sum_{i=m+1}^{m+n} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| \leqslant \\
&\leqslant \left| \sum_{i=m+1}^{ka} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| + \left| \sum_{i=ka+1}^{kb} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| + \left| \sum_{i=kb+1}^{m+n} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| \leqslant \\
&\leqslant \left| \sum_{i=m+1}^{ka} \big\|(\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big\| \right| + \left| \sum_{i=ka+1}^{kb} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| + \left| \sum_{i=kb+1}^{m+n} \big\|(\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big\| \right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=k(a-1)+1}^{ka} \big\|(\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big\| + \left| \sum_{i=ka+1}^{kb} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| + \sum_{i=kb+1}^{k(b+1)} \big\|(\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big\| = \\
&= 2k\,\big\|(\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big\| + \left| \sum_{i=ka+1}^{kb} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| \leqslant \\
&\leqslant 2k\,\Big(\big\|(\sigma_k\sigma_{1/k}-I)\big\| \cdot \|x\|\Big) + \left| \sum_{i=ka+1}^{kb} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| \leqslant \\
&\leqslant 2k\,\Big(\big(\big\|\sigma_k\big\| \cdot \|\sigma_{1/k}\| + \|I\|\big) \cdot \|x\|\Big) + \left| \sum_{i=ka+1}^{kb} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| \leqslant \\
&\leqslant 4k\|x\| + \left| \sum_{i=ka+1}^{kb} \big((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x\big)_i \right| = 4k\|x\| + \left| \sum_{i=ka+1}^{kb} (\sigma_k\sigma_{1/k}x)_i - \sum_{i=ka+1}^{kb} x_i \right| = \\
&= 4k\|x\| + \Bigg| \underbrace{\frac{x_{ka+1}+x_{ka+2}+\ldots+x_{ka+k}}{k} + \ldots + \frac{x_{ka+1}+x_{ka+2}+\ldots+x_{ka+k}}{k}}_{k \text{ раз}} + \ldots + \\
&+ \underbrace{\frac{x_{k(b-1)+1}+\ldots+x_{k(b-1)+k}}{k} + \ldots + \frac{x_{k(b-1)+1}+\ldots+x_{k(b-1)+k}}{k}}_{k \text{ раз}} - \sum_{i=ka+1}^{kb} x_i \Bigg| = 4k\|x\|.
\end{aligned}
$$

Заметим, что полученное выражение не зависит от m. Следовательно,

$$\left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} ((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x)_i \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=m+1}^{m+n} ((\sigma_k\sigma_{1/k}-I)x)_i \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot 4k\|x\| \right) = 0$$

равномерно по m, откуда и вытекает (3.4).

$\square$

Теорема 3.5.2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathfrak{B}(\sigma_n) = \mathfrak{B}(\sigma_{1/n})$.

Доказательство. Пусть сначала $B \in \mathfrak{B}(\sigma_{1/n})$. Тогда

$$B(x) = B(Ix) = B(\sigma_{1/n}\sigma_n x) = B(\sigma_n x).$$

Пусть теперь $B \in \mathfrak{B}(\sigma_n)$. Тогда

$$B(x) = B(Ix) = B((I + (\sigma_n\sigma_{1/n} - I))x) = B(\sigma_n\sigma_{1/n}x) = B(\sigma_{1/n}x).$$

$\square$

Замечание 3.5.3. Мы видим, что множество банаховых пределов, инвариантных относительно суперпозиции операторов, может быть шире, чем объединение множеств банаховых пределов, инвариантных относительно каждого из операторов:

$$\mathfrak{B}(\sigma_n) \cup \mathfrak{B}(\sigma_{1/n}) = \mathfrak{B}(\sigma_n) \subsetneq \mathfrak{B}(\sigma_{1/n}\sigma_n) = \mathfrak{B}(I).$$

3.6 Операторы $\tilde{\sigma}_k$

Введём в рассмотрение семейство операторов $\tilde{\sigma}_k : \ell_\infty \to \ell_\infty$, $k > 0$, определяемых следующим образом:

$$(\tilde{\sigma}_k x)_n = x_{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil}.$$

Пример 3.6.1.

$$\tilde{\sigma}_{3/2} x = (x_1, x_2, x_2,\ x_3, x_4, x_4,\ x_5, ...).$$

Пример 3.6.2.

$$\tilde{\sigma}_{2/3} x = (x_2, x_3,\ x_5, x_6,\ x_8, ...).$$

Заметим, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\sigma_k = \tilde{\sigma}_k$ (однако использовать обозначение без тильды мы не можем, чтобы избежать путаницы с операторами усреднения $\sigma_{1/k}$). Однако соотношение $\tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_m = \tilde{\sigma}_{km}$ для нецелых k, вообще говоря, не выполняется. Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть суперпозиции $\tilde{\sigma}_{3/2}\tilde{\sigma}_{2/3}$ и $\tilde{\sigma}_{2/3}\tilde{\sigma}_{3/2}$ (см. примеры 3.6.1 и 3.6.2 выше).

Таким образом, операторы $\tilde{\sigma}_k$ обобщают операторы σ_k, и возникает закономерный вопрос о соответствующих инвариантных банаховых пределах.

Теорема 3.6.3. Пусть $k > 0$, $k \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. Тогда $\mathfrak{B}(\tilde{\sigma}_k) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть k представимо в виде несократимой дроби $k = p/q$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_2$. Рассмотрим последовательность $x \in \ell_\infty$, заданную соотношением

$$x_k = \begin{cases} 1, \text{ если } m = qn+1, n \in \mathbb{N}, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Последовательность x периодична, и её период равен q.

Пусть $B \in \mathfrak{B}$, тогда $Bx = \dfrac{1}{q}$, поскольку любой банахов предел на периодической последовательности принимает значение, равное среднему арифметическому по периоду (см. следствие 1.0.4). Заметим, что $\tilde{\sigma}_{p/q} x \in \Omega$. Более того, последовательность $\tilde{\sigma}_{p/q} x \in \Omega$ также периодична и имеет период, равный p.

Действительно,

$$(\tilde{\sigma}_{p/q} x)_{m+p} = x_{\left\lceil \frac{m+p}{p/q} \right\rceil} = x_{\left\lceil \frac{qm+qp}{p} \right\rceil} = x_{\left\lceil \frac{qm}{p} + q \right\rceil} =$$

$$= x_{q + \left\lceil \frac{qm}{p} \right\rceil} = x_{\left\lceil \frac{qm}{p} \right\rceil} = x_{\left\lceil \frac{m}{p/q} \right\rceil} = (\tilde{\sigma}_{p/q} x)_m.$$

□

Гипотеза 3.6.4. Для любого $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$) существует такой $x \in ac_0$, что $\tilde{\sigma}_k x \notin ac$.

В пользу гипотезы 3.6.4 говорит следующий

Пример 3.6.5. Определим последовательность $x \in \ell_\infty$ следующим соотношением:

$$x_k = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } 2^{2n} < k \leqslant 2^{2n+1},\ n \in \mathbb{N}_0 \\ (-1)^{k+1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $x \in ac_0$, но

$$(\tilde{\sigma}_{1/2} x)_k = \begin{cases} -1, & \text{если } 2^{2n} < k \leqslant 2^{2n+1},\ n \in \mathbb{N}_0 \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Имеем $p(\tilde{\sigma}_{1/2} x) = 1$, $q(\tilde{\sigma}_{1/2} x) = -1$, откуда $\tilde{\sigma}_{1/2} x \notin ac$.

Гипотеза 3.6.6. Для любых натуральных $k > m$ существуют такие $r, s \in \mathbb{N}$, что $\tilde{\sigma}_{m/k} T^r \tilde{\sigma}_{k/m} = T^s$.

Гипотеза 3.6.7. Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $(\tilde{\sigma}_{\sqrt{k}})^2 - \sigma_k : \ell_\infty \to ac_0$.

Гипотеза 3.6.8. Пусть $x \in ac_0$. Для того, чтобы $x \in \mathcal{I}(ac_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{\sigma}_k x \in ac_0$ для любого $k \in \mathbb{Q}^+$.

Гипотеза 3.6.9. Пусть $x \in ac_0$. Для того, чтобы $x \in \mathcal{I}(ac_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{\sigma}_k x \in ac_0$ для любого $k \in \mathbb{R}^+$.

3.7 Мера прообраза числа при инвариантности банахова предела относительно оператора Чезаро

При изучении банаховых пределов и меры на множестве Ω возникает закономерный вопрос о мере множества

$$\{x \in \Omega : Bx = \beta\}$$

для заданного банахова предела B и числа $\beta \in [0; 1]$. (Хаусдорфова размерность этого множества равна 1 в силу леммы 4.4.2.)

Теорема 3.7.1. Пусть $B \in \mathfrak{B}(C)$. Тогда

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega : Bx = 1/2\} = 1.$$

Доказательство. Так как $B \in \mathfrak{B}(C)$, то

$$\{x \in \Omega : Bx = 1/2\} = \{x \in \Omega : BCx = 1/2\} \supset \{x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} (Cx)_n = 1/2\}.$$

Вместе с тем,

$$\operatorname{mes}\left\{x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} (Cx)_n = 1/2\right\} = 1$$

(это следует из закона больших чисел [50]). $\square$

Следствие 3.7.2. Пусть $B \in \mathfrak{B}(C)$ и $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Тогда

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega : Bx = \lambda\} = 0.$$

3.8 Классы линейных операторов по инвариантности относительно банаховых пределов

При изучении инвариантности банаховых пределов относительно различных непрерывных линейных операторов возникает закономерный вопрос о выделении некоторых классов этих операторов.

Определение 3.8.1. Будем говорить, что оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ *эберлейнов*, если $\mathfrak{B}(H) \neq \varnothing$.

Выбор именования этого класса операторов обусловлен тем, что именно Эберлейн в работе [56] впервые сколь-либо системно изучил инвариантные банаховы пределы (хотя отдельные шаги в этом направлении были сделаны ещё Эгнью и Морсом [99; 100]).

В работе [90] вводится следующее

Определение 3.8.2. Оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ называется *B-регулярным*, если $H^*\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$. (Или, что то же самое, $BH \in \mathfrak{B}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.)

В той же работе с помощью теоремы Брауэра–Шаудера–Тихонова о неподвижной точке [101, Corollary 17.56] доказывается следующая

Теорема 3.8.3. Любой B-регулярный оператор — эберлейнов.

Там же приводится следующее необходимое и достаточное условие B-регулярности.

Теорема 3.8.4. Оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ является B-регулярным тогда и только тогда, когда:
(i) $H\mathbb{1} \in ac_1$;
(ii) $q(Hx) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$;
(iii) $Hac_0 \subseteq ac_0$.

Легко заметить, что эти условия являются в целом более слабыми, чем достаточные условия эберлейновости (теорема 3.0.1).

Следствие 3.8.5. Пусть $x \in ac_\lambda$ и оператор H является B-регулярным. Тогда $Hx \in ac_\lambda$.

Кроме того, в той же работе [90] с помощью теоремы Крейна–Мильмана [102, теорема 9.14] доказывается следующая

Лемма 3.8.6. Пусть оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ является B-регулярным. Тогда множество $\operatorname{ext} \mathfrak{B}(H)$ непусто.

Возникает закономерный вопрос: существует ли эберлейнов оператор, не являющийся B-регулярным? Интуитивно кажется, что существует, однако в вопросах, связанных с банаховыми пределами, многие факты оказываются контринтуитивными. Пример эберлейнова не B-регулярного оператора строится ниже в теореме 3.11.1.

Подобные рассуждения можно продолжить в обе стороны, а именно — следующими двумя определениями:

Определение 3.8.7. Будем называть оператор $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$ *полуэберлейновым*, если $BA \in \mathfrak{B}$ для некоторого $B \in \mathfrak{B}$.

Определение 3.8.8. Будем называть оператор $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$ *существенно эберлейновым*, если $BA \in \mathfrak{B}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$ и $BA \neq B$ для некоторого $B \in \mathfrak{B}$.

Эти четыре класса операторов (существенно эберлейновы, B-регулярные, эберлейновы, полуэберлейновы — в порядке включения) получены последовательным ослаблением условий, естественных для «достаточно хороших» операторов: σ_k, C и образуют иерархию по включению. Возникает закономерный вопрос о совпадении классов. Ясно, что оператор сдвига T является B-регулярным, но не является существенно эберлейновым, поскольку относительно него любой банахов предел инвариантен по определению. Более того, ясно, что операторы растяжения σ_k, $k \in \mathbb{N}_2$, и оператор Чезаро C являются существенно эберлейновыми, поскольку для каждого из них существуют как инвариантные, так и неинвариантные банаховы пределы.

Существует ли полуэберлейнов оператор, не являющийся эберлейновым? Положительный (и конструктивный) ответ на этот вопрос даёт теорема 3.9.1 ниже.

Далее возникает вопрос о свойствах классов операторов. Из определения B-регулярности незамедлительно следует

Лемма 3.8.9. Множество B-регулярных операторов замкнуто относительно суперпозиции и выпуклой комбинации.

3.9 Пример полуэберлейнового, но не эберлейнового оператора

Теорема 3.9.1. Существует полуэберлейнов оператор, не являющийся эберлейновым.

Доказательство. Пусть $B_1, B_2 \in \operatorname{ext}\mathfrak{B}$, $B_1 \neq B_2$. Положим

$$B_3 = B_1 + 2(B_2 - B_1) = 2B_2 - B_1, \tag{3.5}$$

тогда $B_3 \notin \mathfrak{B}$. Действительно, если $B_3 \in \mathfrak{B}$, то из (3.5) следует, что

$$B_2 = \frac{B_1 + B_3}{2} \in \mathfrak{B} \setminus \operatorname{ext}\mathfrak{B}.$$

Введём в рассмотрение оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$, определённый равенством

$$2Hx = (x_1 + B_3x, x_2 + B_3x, ...) = x + (B_3x) \cdot \mathbb{1}.$$

Убедимся, что оператор H полуэберлейнов. Действительно, для произвольного $x \in \ell_\infty$ имеем

$$2B_1Hx = B_1x + B_1((B_3x) \cdot \mathbb{1}) = B_1x + B_3x = B_1x + 2B_2x - B_1x = 2B_2x,$$

откуда $B_1H = B_2$.

Убедимся теперь, что оператор H не эберлейнов. Пусть $B = BH$ для некоторого $B \in \mathfrak{B}$. Тогда для всех $x \in \ell_\infty$ имеем

$$2Bx = B(x + (B_3x) \cdot \mathbb{1}),$$

т.е.

$$Bx = B((B_3x) \cdot \mathbb{1}),$$

откуда незамедлительно следует, что $Bx = B_3x$ и в силу произвольности выбора x имеем $B = B_3$. Но ранее мы уже показали, что $B_3 \notin \mathfrak{B}$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Замечание 3.9.2. Интересно, что $B_2H \notin \mathfrak{B}$. Действительно,

$$2B_2Hx = B_2x+B_2((B_3x)\cdot\mathbb{1}) = B_2x+B_3x = (B_2+B_3)x = (B_2+2B_2-B_1)x = (3B_2-B_1)x. \quad (3.6)$$

Так как равенство (3.6) верно для любого $x \in \ell_\infty$, то мы можем сделать вывод, что

$$2B_2H = 3B_2 - B_1,$$

откуда

$$3B_2 = 2B_2H + B_1,$$

т.е. если $B_2H \in \mathfrak{B}$, то

$$B_2 = \frac{2}{3}B_2H + \frac{1}{3}B_1 \notin \operatorname{ext}\mathfrak{B},$$

что противоречит нашему построению.

Гипотеза 3.9.3. Существуют такие полуэберлейнов оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ и банахов предел $B \in \mathfrak{B}$, что $BH \in \mathfrak{B}$, но $B_1H \notin \mathfrak{B}$ для любого $B_1 \in \mathfrak{B} \setminus \{B\}$. Также интересно наложение дополнительных свойств на B и BH, например, принадлежности к $\operatorname{ext}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}(C)$ и т.д.

3.10 О некоторых B-регулярных операторах

Изучим сначала оператор $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$, определённый равенством:

$$\begin{aligned} Ax = (x_1, x_2, \cancel{x_3}, \cancel{x_4}, x_5, x_6, x_7, x_8, \cancel{x_9}, \ldots, \cancel{x_{16}}, x_{17}, x_{18}, \ldots, x_{31}, x_{32}, \cancel{x_{33}}, \cancel{x_{34}}, \ldots, \cancel{x_{64}}, \\ x_{65}, x_{66}, \ldots, x_{128}, \cancel{x_{129}}, \ldots) = \\ = (x_1, x_2,\ x_5, x_6, x_7, x_8,\ x_{17}, x_{18}, \ldots, x_{31}, x_{32},\ x_{65}, x_{66}, \ldots, x_{128},\ x_{257}, \\ \ldots,\ x_{2^{2n}+1}, x_{2^{2n}+2}, x_{2^{2n+1}},\quad x_{2^{2(n+1)}+1}, x_{2^{2(n+1)}+2}, x_{2^{2(n+1)+1}}, \ldots) \end{aligned} \quad (3.7)$$

(Зачёркивание, т.е. запись вида $\cancel{x_k}$, применяется при записи оператора взятия подпоследовательности для наглядности и означает, что k-й элемент последовательности x не включается в последовательность Ax.) В дальнейшем этот оператор окажется очень полезен при построении других операторов и банаховых пределов.

Очевидна следующая

Лемма 3.10.1. Пусть $x \in \mathcal{I}(ac_0)$, $Y \subset \operatorname{supp} x$ и $y = x \cdot \chi Y$. Тогда $y \in \mathcal{I}(ac_0)$.

Лемма 3.10.2. $AT - TA : \ell_\infty \to \mathcal{I}(ac_0)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(n) = 1+2^0+2^2+2^4+...+2^{2n}$ и пусть $y = \chi\{k \in \mathbb{N} : k = \varphi(n), n \in \mathbb{N}\}$. Тогда ясно, что $y \in ac_0$ (в силу быстрого роста функции $\varphi(n)$) и, более того, $y \in \mathcal{I}(ac_0)$. Заметим, что

$$ATx = (x_2, x_3,\ x_6, x_7, x_8, x_9,\ x_{18}, x_{19}, ..., x_{32}, x_{33},\ x_{66}, x_{67}, ..., x_{129},\ x_{258},$$
$$..., \ x_{2^{2n}+2}, x_{2^{2n}+3}, x_{2^{2n+1}+1},\quad x_{2^{2(n+1)}+2}, x_{2^{2(n+1)}+3}, x_{2^{2(n+1)+1}+1}, ...).$$

С другой стороны,

$$TAx = (x_2,\ x_5, x_6, x_7, x_8,\ x_{17}, x_{18}, ..., x_{31}, x_{32},\ x_{65}, x_{66}, ..., x_{128},\ x_{257},$$
$$..., \ x_{2^{2n}+1}, x_{2^{2n}+2}, x_{2^{2n+1}},\quad x_{2^{2(n+1)}+1}, x_{2^{2(n+1)}+2}, x_{2^{2(n+1)+1}}, ...).$$

Таким образом, для любого $x \in \ell_\infty$

$$(ATx - TAx)_k = \begin{cases} x_{2^{2n-1}} - x_{2^{2n}+1}, & \text{если } k = \varphi(n),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ввиду включения $\operatorname{supp}(AT - TA)x \subset \operatorname{supp} y$ имеем $(AT - TA)x \in \mathcal{I}(ac_0)$ по лемме 3.10.1. $\square$

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3.10.3. Пусть оператор H удовлетворяет следующим условиям:
i) $H \geqslant 0$;
ii) $H\mathbb{1} \in ac_1$;
iii) $Hc_0 \subset ac_0$;
iv) $HT - TH : \ell_\infty \to ac_0$.

Тогда оператор H является B-регулярным.

Доказательство. Доказательство проведём непосредственной проверкой определения банахова предела (определение 1.0.1) для суперпозиции $B = B_1 H$, где $B_1 \in \mathfrak{B}$ — произвольный банахов предел.

Действительно, если $H \geqslant 0$, то $B = B_1 H \geqslant 0$, поскольку $B_1 \geqslant 0$ по определению банахова предела B_1. Далее, $B\mathbb{1} = B_1 H\mathbb{1} = 1$, поскольку $H\mathbb{1} \in ac_1$, а $B_1(ac_1) = 1$ по определению почти сходимости. Заметим теперь, что

$$Bc_0 = B_1 Hc_0 = B_1 ac_0 = 0$$

снова в силу того, что $B_1 \in \mathfrak{B}$. Наконец, для любого $x \in \ell_\infty$ выполнено

$$(BT - B)x = BTx - Bx = B_1 HTx - B_1 Hx = B_1 HTx - B_1 THx = B_1(HT - TH)x = 0.$$

В силу произвольности выбора $x \in \ell_\infty$ последнее равенство и означает, что $BT = B$.

Значит, для любого банахова предела B_1 функционал $B = B_1 H$ снова есть банахов предел, что по определению 3.8.2 и означает B-регулярность оператора H. $\square$

Замечание 3.10.4. Условия леммы 3.10.3 не являются необходимыми; так, контрпример к условию (i) очевиден:

$$H_1(x_1, x_2, x_3, x_4...) = (-x_1, x_2, x_3, x_4, ...).$$

Оператор H_1 является В-регулярным и, более того, $\mathfrak{B}(H_1) = \mathfrak{B}$.

Теорема 3.10.5. Оператор A является В-регулярным.

Доказательство. Непосредственно проверим условия леммы 3.10.3.

i) Всякий оператор взятия подпоследовательности является неотрицательным.

ii) $A\mathbb{1} = \mathbb{1} \in ac_1$.

iii) В силу того, что оператор A является оператором взятия подпоследовательности, выполнено включение $Ac_0 \subset c_0 \subset ac_0$.

iv) В силу леммы 3.10.2 для любого $x \in \ell_\infty$ выполнено $(AT - TA)x \in \mathcal{I}(ac_0) \subset ac_0$.

Таким образом, оператор A действительно является В-регулярным. □

Лемма 3.10.6. Для любого банахова предела B_1 выполено $B_1A \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n-1}})$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Напомним (см. определение 1.2.1), что знак приближенного равенства $u \approx w$ означает, что конечно расстояние Дамерау–Левенштейна между последовательностями u и w, т.е. что w можно получить из u конечным числом вставок, удалений и замен элементов. Тогда $Bu = Bw$ для любого $B \in \mathfrak{B}$ и любых $u \approx w$.

Положим $x = \chi\cup_{m=0}^{\infty} [2^{2m} + 1, 2^{2m+1}]$. Тогда $\sigma_{2^{2n}}x \approx x$ и $\sigma_{2^{2n-1}}x \approx \mathbb{1} - x$. Заметим, что $Ax \approx \mathbb{1}$.

Предположим противное утверждению леммы. Пусть $B \in \mathfrak{B}(A) \cap \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n-1}})$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$1 = B\mathbb{1} = BAx = (BA)x = Bx = (B\sigma_{2^{2n-1}})x = B(\sigma_{2^{2n-1}}x) =$$
$$= B(\mathbb{1} - x) = 1 - Bx = 1 - (BA)x = 1 - 1 = 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Замечание 3.10.7. Например, для $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_2)$ имеем $B_1 \neq B_1A$, что показывает, что оператор A является существенно эберлейновым.

Теорема 3.10.8. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $k = 2^{2n-1}$, $B \in \mathfrak{B}$ верна оценка

$$\|BA - BA\sigma_k\| = 2.$$

Доказательство. Заметим, что $BA \in \mathfrak{B}$ и $BA\sigma_k \in \mathfrak{B}$ в силу теоремы 3.10.5, и потому

$$\|BA - BA\sigma_k\| \leqslant \|BA\| + \|BA\sigma_k\| = 1 + 1 = 2.$$

Пусть теперь

$$y = 2\chi\cup_{m=0}^{\infty} \left[2^{2m} + 1, 2^{2m+1}\right] - \mathbb{1},$$

тогда

$$\sigma_k y \approx 2\chi\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m+1}+1, 2^{2m+2}\right] - \mathbb{1}$$

и

$$\begin{aligned}
\|BA - BA\sigma_k\| \geqslant \frac{\|BAy - BA\sigma_k y\|}{\|y\|} = \|BAy - BA\sigma_k y\| = \\
= \left\|BA\left(2\chi\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m}+1, 2^{2m+1}\right] - \mathbb{1}\right) - BA\left(2\chi\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m+1}+1, 2^{2m+2}\right] - \mathbb{1}\right)\right\| = \\
= \left\|2BA\chi\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m}+1, 2^{2m+1}\right] - 2BA\chi\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m+1}+1, 2^{2m+2}\right]\right\| = \\
= 2\left\|BA\chi\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m}+1, 2^{2m+1}\right] - BA\chi\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m+1}+1, 2^{2m+2}\right]\right\| = \\
= 2\left\|B\mathbb{1} - B(0\cdot\mathbb{1})\right\| = 2\cdot|1-0| = 2 = \operatorname{diam}\mathfrak{B}.
\end{aligned}$$

□

Оператор A переводит банаховы пределы «достаточно далеко» от $\mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n-1}})$. Говоря строже, выполнена

Лемма 3.10.9. Для любых $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n-1}})$, $n \in \mathbb{N}$ и $B_2 \in \mathfrak{B}$ выполнено

$$\|B_1 - B_2 A\| \geqslant 1.$$

Доказательство. Пусть снова

$$y = 2\chi\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m}+1, 2^{2m+1}\right] - \mathbb{1}.$$

Рассмотрим $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n-1}})$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $y \approx -\sigma_{2^{2n-1}} y$, откуда $B_1 y = B_1\sigma_{2^{2n-1}} y = 0$. Однако для любого $B_2 \in \mathfrak{B}$ имеем $B_2 A y = 1$, т.е.

$$\|B_1 - B_2 A\| \geqslant \frac{\|B_1 y - B_2 A y\|}{\|y\|} = \|B_1 y - B_2 A y\| = 1.$$

□

Следствие 3.10.10. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\rho(\mathfrak{B}(A), \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n-1}})) \geqslant 1$.

Гипотеза 3.10.11. Пусть $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n-1}})$, $n \in \mathbb{N}$, и $B_2 \in \mathfrak{B}$. Тогда $\|B_1 - B_2 A\| = 2 = \operatorname{diam}\mathfrak{B}$.

Гипотеза 3.10.12. Множество $\mathfrak{B}(A) \cap \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n}})$ непусто для любого $n \in \mathbb{N}$.

Гипотеза 3.10.13. Если $B \in \operatorname{ext}\mathfrak{B}$, то $BA \in \operatorname{ext}\mathfrak{B}$.

Более того, реалистичной видится даже существенно более сильная

Гипотеза 3.10.14. Для любого $B \in \mathfrak{B}$ выполнено $BA \in \operatorname{Lin}\operatorname{ext}\mathfrak{B}$, где Lin обозначает линейную оболочку, т.е. множество всевозможных конечных линейных комбинаций.

Рассмотрим теперь оператор, в чём-то похожий на операторы растяжения, но при этом растяжения «неравномерного». Пусть

$$\sigma_{\triangle} x = (x_1;\ x_1; x_2;\ x_1; x_2; x_3; \ldots;\ \underbrace{x_1; \ldots; x_n}_{n \text{ элементов}}\ ; \ldots).$$

Замечание 3.10.15. Оператор $\sigma_\triangle x$ естественным образом возник в работах А.С. Усачёва [62], где обозначался $\overline{x}$ и использовался для изучения коэффициентов Фурье–Хаара и расстояния от произвольной последовательности $x \in \ell_\infty$ до пространства ac.

Нам потребуется один факт об операторе $\sigma_\triangle$, доказанный А.С. Усачёвым в [62, теорема 19]. Мы приведём его эквивалентную формулировку, более удобную для нас в дальнейшем.

Теорема 3.10.16. Пусть $x \in \ell_\infty$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда условия $x \in ac_s$ и $\sigma_\triangle x \in ac_s$ эквивалентны.

Теорема 3.10.17. Оператор $\sigma_\triangle$ является В-регулярным.

Доказательство. Снова воспользуемся леммой 3.10.3. Легко заметить, что $\sigma_\triangle \geqslant 0$ и $\sigma_\triangle \mathbb{1} = \mathbb{1}$, что обеспечивает выполнение условий (i) и (ii) соответственно.

Выполнение условия (iii) непосредственно следует из теоремы 3.10.16.

Наконец, покажем, что $\sigma_\triangle T - T\sigma_\triangle : \ell_\infty \to ac_0$. Действительно, для произвольного $x \in \ell_\infty$

$$\begin{aligned}(\sigma_\triangle T - T\sigma_\triangle)x = \sigma_\triangle Tx - T\sigma_\triangle x = \\ &(x_2;\ x_2, x_3;\ x_2, x_3, x_4;\ x_2, x_3, x_4, x_5;\ ...)- \\ &(x_1, x_2;\ x_1, x_2, x_3;\ x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, ...) = \\ &(x_2 - x_1; 0; x_3 - x_1; 0, 0, x_4 - x_1; 0, 0, 0; x_5 - x_1; ...) \in \mathcal{I}(ac_0) \subset ac_0.\end{aligned}$$

Таким образом, все условия леммы 3.10.3 выполнены, и оператор $\sigma_\triangle$ действительно является В-регулярным. □

Гипотеза 3.10.18. Разреженным назовём оператор взятия подпоследовательности $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ такой, что

$$H(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_{m_1}, x_{m_1+1}, ...x_{n_1-1}, x_{n_1};\ x_{m_2}, x_{m_2+1}, ...x_{n_2-1}, x_{n_2};\ ...),$$

где для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $m_k \leqslant n_k$, и для всех $k > k_0 \in \mathbb{N}$ выполнено $m_{k+1} \geqslant m_k$, $n_{k+1} \geqslant n_k$, при этом

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} n_k - m_k = \infty.$$

Гипотеза заключается в том, что любой разреженный оператор (а) переводит ac_0 в ac_0 (или, слабее — c_0 в ac_0) и (б) является В-регулярным. Операторы A и $\sigma_\triangle$ из этого параграфа являются разреженными.

В пользу гипотезы 3.10.18 говорит [49, теорема 1] (приводим её в эквивалентной формулировке и более удобных обозначениях).

Теорема 3.10.19. Определим линейный оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ равенством

$$H(x_1, x_2, ...) = (x_{m_1}, x_{m_1+1}, \dots, x_{m_1+n_1}; x_{m_2}, x_{m_2+1}, \dots, x_{m_2+n_2}; \dots),$$

где m_k, n_k — последовательности натуральных чисел и $\lim_{n\to\infty} n_k = \infty$. Пусть $x \in ac_s$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда $Hx \in ac_s$.

3.11 Пример эберлейнового не B-регулярного оператора

Теорема 3.11.1. Существует эберлейнов оператор, не являющийся B-регулярным.

Доказательство. Пусть оператор A определён формулой (3.7). Пусть оператор $E : \ell_\infty \to \ell_\infty$ определён формулой

$$Ex = x \cdot \chi \cup_{m=0}^{\infty} \left[2^{2m} + 1, 2^{2m+1}\right] \cup \{1\}.$$

Тогда, очевидно, $AE = A$. Поскольку A есть B-регулярный оператор, то он эберлейнов, т.е. множество $\mathfrak{B}(A)$ непусто.

Пусть $B \in \mathfrak{B}(A)$. Тогда

$$B = BA = B(AE) = (BA)E = BE,$$

то есть $B \in \mathfrak{B}(E)$.

Покажем теперь, что оператор E не является B-регулярным. Действительно, $q(E\mathbb{1}) = 0$, т.е. $E\mathbb{1} \notin ac_1$, и не выполнено условие (i) критерия B-регулярности (теорема 3.8.4). □

Гипотеза 3.11.2. Выполнено равенство

$$\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{B}(A).$$

Замечание 3.11.3. В конструкции оператора E вместо блоков из нулей можно вставлять любые другие блоки — по построению оператора A такая модификация не нарушит эберлейновость оператора E. Эти блоки могут иметь различный знак, например, содержать значительное количество элементов вида $-kx_1$, kx_2 и т.д. Таким образом, можно сконструировать эберлейновы операторы, очень и очень далёкие от достаточных условий эберлейновости (теорема 3.0.1), что показывает значительную избыточность этих условий.

3.12 Обратная задача об инвариантности и порождённый оператор

Ранее мы, как правило, ставили задачу, которую можно назвать прямой задачей об инвариантности: дан некоторый достаточно хороший оператор H, и требуется выяснить, непусто ли множество $\mathfrak{B}(H)$ банаховых пределов, инвариантных относительно этого оператора. (И если это множество непусто, то исследовать его.)

Возникает закономерный вопрос: для любого ли банахова предела существует нетривиальный оператор, относительно которого этот банахов предел инвариантен? Или же такие операторы существуют только для «достаточно хороших» банаховых пределов — например, для банаховых пределов, инвариантных относительно какого-нибудь из операторов растяжения? Существуют ли нетривиальные операторы, инвариантные относительно хотя бы одного $B \in \operatorname{ext} \mathfrak{B}$? (Здесь под тривиальным оператором понимается такой оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $H - I : \ell_\infty \to ac_0$ и, как следствие, $\mathfrak{B}(H) = \mathfrak{B}$.)

Итак, в этом параграфе мы обсудим обратную задачу об инвариантности. Она имеет неожиданно простое решение.

Теорема 3.12.1. Для каждого $B \in \mathfrak{B}$ существует такой оператор $G_B : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $\mathfrak{B}(G_B) = \{B\}$.

Доказательство. Определим оператор G_B равенством

$$G_B x = (Bx, Bx, Bx, ...) = (Bx) \cdot \mathbb{1}.$$

Легко видеть, что

$$BG_B x = B(Bx, Bx, Bx, ...) = B((Bx) \cdot \mathbb{1}) = (Bx) \cdot B(\mathbb{1}) = (Bx) \cdot 1 = Bx$$

для любого $x \in \ell_\infty$. Значит, $B \in \mathfrak{B}(G_B)$ и $\mathfrak{B}(G_B)$ непусто.

Рассмотрим теперь $B_1 \in \mathfrak{B} \setminus \{B\}$. Последнее означает, что на некоторой последовательности $y \in \ell_\infty$ выполнено $B_1 y \neq By$. Тогда

$$B_1 G_B y = B_1(By, By, By, ...) = B_1((By) \cdot \mathbb{1}) = (By) \cdot B_1(\mathbb{1}) = (By) \cdot 1 = By \neq B_1 y.$$

Таким образом, $B_1 G_B \neq B_1$, и $B_1 \notin \mathfrak{B}(G_B)$. Это и означает, что $\mathfrak{B}(G_B) = \{B\}$. □

Определение 3.12.2. Оператор G_B, построенный таким образом, будем называть оператором, *порождённым* банаховым пределом B.

Замечание 3.12.3. Легко заметить, что любой порождённый оператор удовлетворяет достаточным условиям эберлейновости (теорема 3.0.1).

Замечание 3.12.4. Более того, порождённый оператор G_B является в некотором смысле крайним примером B-регулярного оператора, поскольку $G_B^* \mathfrak{B} = \{B\}$.

Лемма 3.12.5. Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$. Тогда

$$G_{\lambda B_1 + (1-\lambda) B_2} = \lambda G_{B_1} + (1-\lambda) G_{B_2}.$$

Доказательство. В силу выпуклости множества $\mathfrak{B}$ оператор $G_{\lambda B_1 + (1-\lambda) B_2}$ действительно определён корректно.

$$\begin{aligned} G_{\lambda B_1 + (1-\lambda) B_2} &= ((\lambda B_1 + (1-\lambda) B_2) x)\, \mathbb{1} = (\lambda B_1 x) \mathbb{1} + ((1-\lambda) B_2 x) \mathbb{1} = \\ &= \lambda (B_1 x) \mathbb{1} + (1-\lambda)(B_2 x) \mathbb{1} = \lambda G_{B_1} x + (1-\lambda) G_{B_2} x. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.12.6. Пусть $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$. Тогда

$$G_{B_1} G_{B_2} = G_{B_2}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \ell_\infty$, тогда

$$G_{B_1} G_{B_2} x = G_{B_1}((B_2 x) \cdot \mathbb{1}) = (B_2 x) \cdot G_{B_1}(\mathbb{1}) = (B_2 x) \cdot \mathbb{1} = G_{B_2} x.$$

□

Если же известно, что банахов предел B заведомо обладает дополнительными свойствами инвариантности, то можно сконструировать и другие примеры операторов, относительно которых B инвариантен.

Пример 3.12.7. Пусть $B \in \mathfrak{B}(\sigma_2)$. Напомним, что $\mathfrak{B}(\sigma_2) = \mathfrak{B}(\sigma_{1/2})$ в силу теоремы 3.5.2, где

$$\sigma_{1/2}x = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}, \frac{x_5+x_6}{2}, ...\right).$$

Рассмотрим оператор H_B, $H_Bx = (x_1, Bx, x_2, Bx, x_3, Bx, ...)$. Тогда

$$BH_Bx = B\sigma_{1/2}H_Bx = B\left(\frac{x_1+Bx}{2}, \frac{x_2+Bx}{2}, \frac{x_3+Bx}{2}, ...\right) =$$
$$= B\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, ...\right) + B\left(\frac{Bx}{2}, \frac{Bx}{2}, \frac{Bx}{2}, ...\right) =$$
$$= \frac{1}{2}Bx + \frac{1}{2}B\left(Bx, Bx, Bx, ...\right) = Bx.$$

При этом операторы H_B, получаемые таким образом, достаточно «разнообразны». Пусть $B_1x \neq B_2x$ на некотором $x \in \ell_\infty$. Тогда

$$y = H_{B_1}x - H_{B_2}x = (0, B_1x - B_2x, 0, B_1x - B_2x, 0, B_1x - B_2x, ...)$$

и

$$B_1y = B_2y = \frac{B_1x - B_2x}{2} \neq 0,$$

откуда

$$(H_{B_1} - H_{B_2})\ell_\infty \not\subseteq ac_0.$$

Покажем теперь, что $B_2 \notin \mathfrak{B}(H_{B_1})$ при $B_1 \neq B_2$. Предположим противное. Значит, $B_1x \neq B_2x$ на некотором $x \in \ell_\infty$. Пусть y такой же, как выше. Тогда

$$B_2y = B_2(H_{B_1}x - H_{B_2}x) = B_2H_{B_1}x - B_2H_{B_2}x = B_2x - B_2x = 0,$$

но

$$B_2y = \frac{B_1x - B_2x}{2} \neq 0.$$

Получили противоречие.

Полученная конструкция может быть обобщена на операторы σ_k, $k \in \mathbb{N}_3$.

Пример 3.12.8. Пусть $k \in \mathbb{N}_2$, $1 \leqslant m \leqslant k$, $m \in \mathbb{N}$, и пусть $B \in \mathfrak{B}(\sigma_k)$. Определим оператор $H_{B,k,m} : \ell_\infty \to \ell_\infty$ равенством

$$H_{B,k,m}x = (\underbrace{x_1, ..., x_1}_{k-m \text{ раз}}, \underbrace{Bx, ..., Bx}_{m \text{ раз}}, \underbrace{x_2, ..., x_2}_{k-m \text{ раз}}, \underbrace{Bx, ..., Bx}_{m \text{ раз}}, ...).$$

Тогда для любого $x \in \ell_\infty$

$$
\begin{aligned}
BH_{B,k,m}x &= B\sigma_{1/k}H_{B,k,m}x = \\
&= B\left(\frac{mx_1+(k-m)Bx}{k}, \frac{mx_2+(k-m)Bx}{k}, \frac{mx_3+(k-m)Bx}{k}, \ldots\right) = \\
&= \frac{m}{k}\cdot Bx + \frac{k-m}{k}B((Bx)\cdot \mathbb{1}) = (Bx)\cdot\left(\frac{m}{k}+\frac{k-m}{k}\right) = Bx,
\end{aligned}
$$

что и означает принадлежность $B \in \mathfrak{B}(H_{B,k,m})$.

И снова покажем, если $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\sigma_k)$ и $B_1 \neq B_2$, то $B_2 \neq \mathfrak{B}(H_{B_1,k,m})$. Действительно, если $B_1 \neq B_2$, то $B_1 y \neq B_2 x$ для некоторого $x \in \ell_\infty$. Тогда

$$
\begin{aligned}
B_2H_{B_1,k,m}x &= B_2\sigma_{1/k}H_{B_1,k,m}x = \\
&= B_2\left(\frac{mx_1+(k-m)B_1x}{k}, \frac{mx_2+(k-m)B_1x}{k}, \frac{mx_3+(k-m)B_1x}{k}, \ldots\right) = \\
&= \frac{m}{k}\cdot B_2x + \frac{k-m}{k}B_2((B_1x)\cdot \mathbb{1}) = (B_2x)\cdot\frac{m}{k} + (B_1x)\cdot\frac{k-m}{k} \neq B_2x,
\end{aligned}
$$

откуда $B_2 \notin \mathfrak{B}(H_{B_1,k,m})$.

Замечание 3.12.9. Внутри каждого отрезка последовательности из определения оператора $H_{B,k,m}$, состоящего из k элементов и имеющего вид $(x_j, \ldots, x_j, Bx, \ldots, Bx)$, порядок элементов можно произвольно менять (независимо от порядка в других отрезках).

Гипотеза 3.12.10. Для любого $B \in \mathfrak{B}(\sigma_k)$ выполнено равенство $\mathfrak{B}(H_{B,k,m}) = \{B\}$ или, что то же самое, включение $\mathfrak{B}(H_{B,k,m}) \subset \mathfrak{B}(\sigma_k)$.

При изучении введённых выше классов операторов возникает вопрос о том, как обсуждаемые свойства (полуэберлейновость, эберлейновость и т.д.) соотносятся с классическими свойствами линейных операторов.

Например, существует ли компактный эберлейнов оператор? Положительный ответ на этот вопрос даёт

Теорема 3.12.11. Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Тогда порождённый оператор G_B компактен.

Доказательство. Пусть X — единичный шар в ℓ_∞, тогда $BX = [-1; 1]$ и множество $G_BX = [-1;1]\cdot\mathbb{1}$ компактно, поскольку сходимость любой его подпоследовательности $\{y_j = G_Bx_j = (Bx_j)\cdot\mathbb{1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ в норме пространства ℓ_∞ эквивалентна сходимости последовательности $\{Bx_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ в норме пространства $\mathbb{R}$, в котором любой отрезок — компакт. □

Таким образом, мы предъявили компактный существенно эберлейнов оператор. Заметим, что многие часто встречающиеся операторы некомпактны (что и привело к постановке обсуждаемого вопроса). Так, очевидно, некомпактны операторы растяжения σ_k, $\sigma_{1/k}$ и $\tilde{\sigma}_k$. Некомпактность оператора Чезаро C установлена, например, в [103, теорема 4.4].

3.13 Мультипорождённые операторы

Определение 3.13.1. Линейный непрерывный оператор $G_{\{B_k\}}$, определённый равенством

$$(G_{\{B_k\}}x)_n = B_n x,$$

будем называть мультипорождённым последовательностью банаховых пределов $\{B_k\} \subset \mathfrak{B}$.

Понятно, что порождённый оператор является частным случаем мультипорождённого.

Лемма 3.13.2. Всякий мультипорождённый оператор $G_{\{B_k\}}$ является B-регулярным оператором.

Доказательство. Проверим условия критерия B-регулярности (теорема 3.8.4). Действительно,

$$G_{\{B_k\}}\mathbb{1} = \mathbb{1} \in ac_1,$$

$$G_{\{B_k\}} \geqslant 0, \text{ т.к. } (G_{\{B_k\}}x)_n \geqslant q(x) \text{ для любого } n \in \mathbb{N},$$

$$G_{\{B_k\}}ac_0 = \{0 \cdot \mathbb{1}\} \subset ac_0.$$

□

Следствие 3.13.3. Для всякого мультипорождённого оператора $G_{\{B_k\}}$ непусто множество $\mathfrak{B}(G_{\{B_k\}})$.

Гипотеза 3.13.4. Всякий мультипорождённый оператор является существенно эберлейновым.

В пользу этой гипотезы говорит тот факт [92], что $|\operatorname{ext}\mathfrak{B}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Лемма 3.13.5. Пусть множество значений, которые принимают элементы последовательности $\{B_k\}$, конечно. Тогда оператор $G_{\{B_k\}}$ компактен.

Доказательство. Достаточно заметить, что в таком случае ранг подпространства $G_{\{B_k\}}\ell_\infty$ конечен. □

Гипотеза 3.13.6. Для мультипорождённого оператора $G_{\{B_k\}}$ имеет место включение

$$\mathfrak{B}(G_{\{B_k\}}) \subset \operatorname{conv}\{B_k\}.$$

(Та же гипотеза — для равенства или для обратного включения)

Определение 3.13.7. Оператор H называется имеющим матричное представление (h_{jk}) — или, для краткости, просто матричным — если для любых $j, k \in \mathbb{N}$ существует такое число $h_{jk} \in \mathbb{R}$, что для любого $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\{h_{jk}\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ и для любого $x \in \ell_\infty$

$$(Hx)_j = \sum_{k=1}^{\infty} h_{jk} \cdot x_k.$$

Матричные операторы являются элементарным обобщением на бесконечномерный случай, выросшим из линейных операторов в конечномерных пространствах— которые, как известно, в любом базисе могут быть представлены как умножение на некоторую матрицу. Многие классические операторы являются матричными: оператор Чезаро C, операторы растяжения σ_k, усредняющего сжатия $\sigma_{1/k}$, операторы неравномерного растяжения $\tilde{\sigma}_k$; все операторы взятия подпоследовательности, в частности, оператор прореживания A (равенство (3.7)); и все операторы покоординатного умножения, например, оператор E из теоремы 3.11.1.

Следующая теорема доказана А.А. Седаевым.

Теорема 3.13.8 ([104, §6.3])**.** Пространство ℓ_∞^* может быть разложено в прямую сумму:

$$\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus \{\varphi \in \ell_\infty^* : \varphi c_0 = \{0\}\}.$$

Из этого результата ясно, что банаховы пределы не принадлежат ℓ_1; как следствие, мультипорождённые операторы по своему определению в некотором смысле противоположны матричным операторам. Говоря точнее, справедлива

Теорема 3.13.9. Мультипорождённый оператор не может иметь матричного представления.

Перейдём теперь к примеру мультипорождённого оператора, важному для понимания инвариантности банаховых пределов.

Пример 3.13.10. Пусть оператор $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$ определён равенством (3.7):

$$Ax = (x_1, x_2, \cancel{x_3}, \cancel{x_4}, x_5, x_6, x_7, x_8, \cancel{x_9}, ..., \cancel{x_{16}}, x_{17}, x_{18}, ..., x_{31}, x_{32}, \cancel{x_{33}}, \cancel{x_{34}}, ..., \cancel{x_{64}},$$
$$x_{65}, x_{66}, ..., x_{128}, \cancel{x_{129}}, ...) =$$
$$= (x_1, x_2,\ x_5, x_6, x_7, x_8,\ x_{17}, x_{18}, ..., x_{31}, x_{32},\ x_{65}, x_{66}, ..., x_{128},\ x_{257},$$
$$...,\ x_{2^{2n}+1}, x_{2^{2n}+2}, x_{2^{2n+1}},\quad x_{2^{2(n+1)}+1}, x_{2^{2(n+1)}+2}, x_{2^{2(n+1)+1}}, ...)$$

Тогда оператор A является B-регулярным по теореме 3.10.5. В силу B-регулярности оператора σ_2 и того факта, что суперпозиция двух B-регулярных операторов снова является B-регулярной (лемма 3.8.9), оператор $A\sigma_2$ также B-регулярен.

В силу теоремы 3.8.3 мы можем выбрать $B_1 \in \mathfrak{B}(A)$ и $B_2 \in \mathfrak{B}(A\sigma_2)$. Убедимся, что $B_1 \neq B_2$, для этого достаточно предъявить одну последовательность, на которой значения этих банаховых пределов не совпадают. Пусть

$$y = \chi \cup_{n\in\mathbb{N}} (2^{2n} + 1; 2^{2n+1}],$$

тогда

$$\sigma_2 y \approx \chi \cup_{n\in\mathbb{N}} (2^{2n+1} + 1; 2^{2n+2}].$$

Следовательно, $B_1 y = B_1 A y = B_1 \mathbb{1} = 1$, но $B_2 y = B_2 A\sigma_2 y = B_2(0 \cdot \mathbb{1}) = 0$.

Определим оператор H соотношением

$$Hx = (B_1x, B_1x,\ B_2x, B_2x,\ B_1x, B_1x, B_1x, B_1x,\ \underbrace{B_2x, ..., B_2x}_{8\text{ раз}}, ...).$$

Оператор H является мультипорождённым и потому B-регулярным в силу леммы 3.13.2. Значит, множество $\mathfrak{B}(H)$ непусто. Однако в нашем случае мы можем дополнительно охарактеризовать его.

Покажем, что отрезок $[B_1; B_2] \subset \mathfrak{B}(H)$. Действительно,

$$B_1Hx = (B_1A)Hx = B_1(AHx) = B_1((B_1x) \cdot \mathbb{1}) = B_1x$$

и

$$B_2Hx = (B_2A\sigma_2)Hx = B_2(A\sigma_2Hx) = B_2((B_2x) \cdot \mathbb{1}) = B_2x,$$

откуда и следует включение $[B_1; B_2] \subset \mathfrak{B}(H)$.

Гипотеза 3.13.11. Верно равенство $[B_1; B_2] = \mathfrak{B}(H)$.

Гипотеза 3.13.12. Верно равенство $[B_1; B_2] \cap \mathfrak{B}(\sigma_2) = \varnothing$.

Гипотеза 3.13.13. Верно равенство $\mathfrak{B}(H) \cap \mathfrak{B}(\sigma_2) = \varnothing$.

Замечание 3.13.14. Оператор $(\sigma_2H)^*$ переводит отрезок $[B_1; B_2]$ в $[B_2; B_1]$, т.е. «меняет местами» два банаховых предела. Действительно,

$$B_1(\sigma_2H)x = (B_1A)(\sigma_2H)x = B_1(A(\sigma_2H)x) = B_1((B_2x) \cdot \mathbb{1}) = B_2x$$

и

$$B_2(\sigma_2H)x = (B_2A\sigma_2)(\sigma_2H)x = B_2(A\sigma_4Hx) = B_2((B_1x) \cdot \mathbb{1}) = B_1x.$$

Тогда, очевидно, $\dfrac{B_1 + B_2}{2} \in \mathfrak{B}(\sigma_2H)$.

Гипотеза 3.13.15. Пример 3.13.10 может быть обобщён на симплекс произвольной конечной размерности (треугольник, тетраэдр и т.д.).

3.14 О функциональной характеристике банахова предела

В [79] была введена следующая функциональная характеристика банахова предела.

Обозначим через Γ множество всех неубывающих на $[0,1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Каждому $B \in \mathfrak{B}$ ставится в соответствие следующая функция, определенная на $[0,1]$:

$$\gamma(B,t) = B\chi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[2^n, 2^{n+t})\right).$$

Функция $\gamma(B,t)$ была введена в статье [79].

Легко увидеть, что $\gamma(B,t) \in \Gamma$ для всех $B \in \mathfrak{B}$. Справедливо и обратное. Для любой $f \in \Gamma$ существует такой $B \in \mathfrak{B}$, что $\gamma(B,t) = f(t)$ для всех $t \in [0,1]$ [79, Предложение 2]. В рамках этого параграфа, говоря о функциональной характеристике банахова предела B, мы будем иметь в виду именно $\gamma(B,t)$.

Другая функциональная характеристика — аналог функции распределения — была введена в работе Е. А. Алехно [24].

В силу монотонности функциональная характеристика имеет не более чем счётное количество точек разрыва. В [79, Теорема 23] доказано, что для любых $B \in \mathfrak{B}(C)$, $t \in [0,1]$ верно равенство $\gamma(B,t) = t$.

В этом параграфе мы приводим пример класса банаховых пределов, для которых функциональная характеристика является почти константой.

Лемма 3.14.1. Пусть R есть оператор взятия подпоследовательности, определенным следующим образом:

$$Rx = (x_2;\ x_4; x_5;\ x_{2^k}; x_{2^k+1}; ...; x_{2^k+2^{k-1}-1};\ x_{2^{k+1}}; x_{2^{k+1}+1}; ...) = \\ (x_2;\ x_4; x_5;\ x_8; x_9; x_{10}; x_{11};\ x_{16}; x_{17}; ...).$$

Тогда $\mathfrak{B}(R) \neq \varnothing$ и для каждого $B \in \mathfrak{B}(R)$ имеет место

$$\gamma(B,t) = \chi(0;1].$$

Доказательство. Легко показать, что R является B-регулярным в силу леммы 3.10.3 (доказательство полностью аналогично лемме 3.10.2), следовательно, эберлейновым по теореме 3.8.3, поэтому $\mathfrak{B}(R) \neq \varnothing$.

Возьмем любой $B \in \mathfrak{B}(R)$ и

$$y = \chi \cup_{n=1}^{\infty} \left[2^n; 2^{n-1+\log_2 3}\right) = \chi\{2;\ 4;5;\ 8;9;10;11;\ 16;17;...\},$$

т тогда $Ry = \mathbb{1}$.

Следовательно, по определению функциональной характеристики, $\gamma(B,t) = 1$ для всех $t \geqslant \log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2}$.

Далее, $R^2x = (x_4;\ x_8; x_9;\ x_{16}; x_{17}; x_{18}; x_{19};\ x_{32}; x_{33}; ...)$. В силу вложения $\mathfrak{B}(R) \subset \mathfrak{B}(R^2)$ имеем $B \in \mathfrak{B}(R^2)$. Легко убедиться, что $\gamma(B,t) = 1$ для всех $t \geqslant \log_2 \frac{5}{4}$.

Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $B \in \mathfrak{B}(R^n)$ и потому $\gamma(B,t) = 1$ для всех $t \geqslant \log_2(1+2^{-n})$.

В силу произвольности выбора n мы немедленно получаем, что

$$\gamma(B,t) = \chi(0;1]$$

$\square$

Глава 4

Функционалы Сачестона и линейные оболочки

При исследовании банаховых пределов интерес представляют разделяющие множества [73, §3]. Множество $Q \subset \ell_\infty$ называют разделяющим, если для любых неравных $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ существует такая последовательность $x \in Q$, что $B_1 x \neq B_2 x$. В частности, разделяющим является множество всех последовательностей из 0 и 1 [58], которое, как и выше, мы будем обозначать через Ω (иногда в литературе встречается также обозначение $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$).

Каждой последовательности $(x_1, x_2, \dots) \in \Omega$ можно поставить в соответствие число

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k \in [0,1].$$

С точностью до счётного множества это соответствие взаимно однозначно и определяет на множестве Ω меру, которую мы будем отождествлять с мерой Лебега на $[0,1]$.

Оказывается, что из Ω можно выделить некоторые подмножества, которые также будут разделяющими, например [73, §3, Теорема 11],

$$U = \{x \in \Omega : q(x) = 0, p(x) = 1\}.$$

Однако множество U имеет меру 1 [58]. Счётных разделяющих множеств не существует [73, следствие 22].

В настоящей главе строится пример разделяющего множества, являющегося подмножеством Ω и имеющего меру нуль. Для построения такого множества используется следующий факт.

Лемма 4.0.1 ([73, §3, замечание 6])**.** Пусть X — разделяющее множество и $X \subset \operatorname{Lin} Y$, где $\operatorname{Lin} Y$ обозначает линейную оболочку Y. Тогда Y также является разделяющим множеством.

В теореме 4.2.1 ниже доказывается, что

$$\Omega \subset \operatorname{Lin}\{x \in \Omega : p(x) = a,\ q(x) = b\} \tag{4.1}$$

для любых $0 \leqslant b < a \leqslant 1$.

Затем обсуждаются свойства линейных оболочек множеств, определённых с помощью функционалов Сачестона. В частности, доказывается, что наряду с включением (4.1) имеет место равенство

$$\ell_\infty = \operatorname{Lin}\{x \in \ell_\infty : p(x) = a,\ q(x) = b\}$$

для любых $a > b$.

Возникает закономерный вопрос: для каких ещё подмножеств пространства ℓ_∞ верны аналогичные соотношения?

Выясняется, что аналогичным свойством обладает подпространство $A_0 = \{x \in \ell_\infty : \alpha(x) = 0\}$, где, напомним,

$$\alpha(x) = \limsup_{i\to\infty} \max_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j|,$$

уже знакомое нам, например, по теореме 2.10.1.

Результаты, излагаемые в данной главе, опубликованы в [3; 5; 14].

4.1 Вспомогательные построения

В данном параграфе вводятся некоторые вспомогательные объекты, которые потребуются далее при доказательстве теоремы 4.2.1.

4.1.1 Двоичные приближения

Определение 4.1.1. k-м двоичным приближением к произвольному числу $d \in [0;1]$ называется такое число $d_{(k)} \in \mathbb{N}_0$, что

$$\frac{d_{(k)}}{2^k} < d \leqslant \frac{d_{(k)}+1}{2^k}. \tag{4.2}$$

Замечание 4.1.2. Очевидно, что $d_{(k+1)} \in \{2d_{(k)}, 2d_{(k)}+1\}$.

Ввиду того, что мы вводим двоичные приближения к дроби из отрезка $[0;1]$ как натуральные числа, дадим примеры построения таких приближений.

Пример 4.1.3. Пусть $d = \frac{1}{2}$. Тогда

$$d_{(1)} = 0, \quad \text{поскольку } \frac{0}{2^1} < \frac{1}{2} \leqslant \frac{0+1}{2^1};$$

$$d_{(2)} = 1, \quad \text{поскольку } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2} \leqslant \frac{1+1}{2^2};$$

$$d_{(3)} = 3, \quad \text{поскольку } \frac{3}{2^3} < \frac{1}{2} \leqslant \frac{3+1}{2^3};$$

$$d_{(4)} = 7, \quad \text{поскольку } \frac{7}{2^4} < \frac{1}{2} \leqslant \frac{7+1}{2^4};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$d_{(k)} = 2^{k-1}-1, \text{ поскольку } \frac{2^{k-1}-1}{2^k} < \frac{1}{2} \leqslant \frac{2^{k-1}}{2^k}.$$

Пример 4.1.4. Пусть $d = \frac{1}{3}$. Тогда

$$d_{(1)} = 0, \quad \text{поскольку } \frac{0}{2^1} < \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2^1};$$

$$d_{(2)} = 1, \quad \text{поскольку } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{3} \leqslant \frac{2}{2^2};$$

$$d_{(3)} = 2, \quad \text{поскольку} \quad \frac{2}{2^3} < \frac{1}{3} \leqslant \frac{3}{2^3};$$
$$d_{(4)} = 5, \quad \text{поскольку} \quad \frac{5}{2^4} < \frac{1}{3} \leqslant \frac{6}{2^4};$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

4.1.2 Последовательности-«блоки»

Введём последовательности-«блоки» — стабилизирующиеся на нуле последовательности, которые затем будут использованы для формирования последовательностей, обладающих некоторыми интересными свойствами.

Пусть n зафиксировано. Пусть

$$K = \{k \in \mathbb{N} : k \geqslant n\} = \{n, n+1, n+2, ...\}.$$

Определим функцию $\mathrm{Br} : K \times [0;1] \to \ell_\infty$, генерирующую «блоки» из нулей и единиц, соответствующие приближению $d_{(k)}$ к числу $d \in [0;1]$ для $k \geqslant n$.

Определение Br построим рекурсивно. Сначала определим $\mathrm{Br}(k,d)$ для $k = n$ по следующему правилу:

$$(\mathrm{Br}(n,d))_j = \begin{cases} 1, & \text{если } 2^n - d_{(n)} < j \leqslant 2^n, \\ 0 & \text{для остальных } j. \end{cases}$$

Заметим, что все элементы $\mathrm{Br}(n,d)$, начиная с (2^n+1)-го, равны нулю; кроме того, в $\mathrm{Br}(n,d)$ ровно $d_{(n)}$ единиц.

Для каждого $k \geqslant n$ положим

$$\mathrm{Br}(k+1,d) = \mathrm{Br}(k,d) + T^{2^k}\,\mathrm{Br}(k,d) + (d_{(k+1)} - 2d_{(k)})e_{2^k+2^n-d_{(n)}}, \tag{4.3}$$

где через e_j обозначен j-й орт.

Утверждение 4.1.5. Последовательность $\mathrm{Br}(k,d)$ состоит из нулей и единиц.

Доказательство. Легко доказать по индукции, что все элементы $\mathrm{Br}(k,d)$, начиная с (2^k+1)-го, равны нулю. Следовательно, носители первых двух слагаемых в (4.3) не пересекаются. Далее заметим, что третье слагаемое отлично от нуля тогда и только тогда, когда переход между приближениями $d_{(k)}/2^k$ и $d_{(k+1)}/2^{k+1}$ приводит к улучшению приближения. Более того,

$$\Big(\mathrm{Br}(k,d) + T^{2^k}\,\mathrm{Br}(k,d)\Big)_{2^k+2^n-d_{(n)}} = (\mathrm{Br}(k,d))_{2^n-d_{(n)}} = (\mathrm{Br}(k-1,d))_{2^n-d_{(n)}} =$$
$$= ... = (\mathrm{Br}(n,d))_{2^n-d_{(n)}} = 0,$$

т.е. выражение (4.3) действительно задаёт последовательность из нулей и единиц. □

Замечание 4.1.6. Из доказательства утверждения 4.1.5 следует, что в k-м блоке ровно $d_{(k)}$ единиц.

Замечание 4.1.7. Выполнено включение $\operatorname{supp}\mathrm{Br}(k,d) \subset \operatorname{supp}\mathrm{Br}(k+1,d)$ и, более того, справедливо соотношение

$$(\mathrm{Br}(k,d))_j = \begin{cases} (\mathrm{Br}(k+1,d))_j, & \text{если } j \leqslant 2^k, \\ 0 & \text{для остальных } j. \end{cases}$$

Лемма 4.1.8. Для любых таких m, k и i, что $n \leqslant m \leqslant k$ и $i + 2^m - 1 \leqslant 2^k$, выполнено

$$d_{(m)} \leqslant \sum_{j=i}^{i+2^m-1} (\mathrm{Br}(k,d))_j \leqslant d_{(m)} + 1.$$

Доказательство. Представление (4.3) может быть переписано в виде:

$$\mathrm{Br}(m+1,d) = \sum_{j=0}^{1} T^{j2^m}\,\mathrm{Br}(m,d) + \sum_{j=0}^{1} \gamma_j e_{j2^m+2^n-d_{(n)}},$$

где $\gamma_j \in \{0,1\}$. Продолжая по индукции, получаем

$$\mathrm{Br}(k,d) = \sum_{j=0}^{2^{k-m}-1} T^{j2^m}\,\mathrm{Br}(m,d) + \sum_{j=0}^{2^{k-m}-1} T^{j2^m}\gamma_j e_{j2^m+2^n-d_{(n)}}.$$

Тогда

$$\sum_{j=i}^{i+2^m-1} (\mathrm{Br}(k,d))_j = \sum_{j=1}^{2^m-1} (\mathrm{Br}(m,d))_j + \gamma_h = d_{(m)} + \gamma_h \in \{d_{(m)}, d_{(m)}+1\}.$$

□

Из (4.2) непосредственно вытекает следующий факт.

Утверждение 4.1.9. Пусть $d < 1 - 3/2^n$. Тогда

$$(\mathrm{Br}(d,k))_j = 0 \ \text{ для } \ j = m \cdot 2^n + 1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пример 4.1.10. Для $n = 2$ и $d = 1/3$ имеем:

$$\begin{array}{lll}
d_{(2)} = 1/4, & \mathrm{Br}(2,1/3) = (& 0,0,0,1,\ 0,0,...) \\
d_{(3)} = 2/8, & \mathrm{Br}(3,1/3) = (& 0,0,0,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,...) \\
d_{(4)} = 5/16, & \mathrm{Br}(4,1/3) = (& 0,0,0,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,1,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,...) \\
d_{(5)} = 10/32, & \mathrm{Br}(5,1/3) = (& 0,0,0,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,1,1,\ 0,0,0,1, \\
 & & 0,0,0,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,1,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,...) \\
d_{(6)} = 21/64, & \mathrm{Br}(6,1/3) = (& 0,0,0,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,1,1,\ 0,0,0,1, \\
 & & 0,0,0,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,1,1,\ 0,0,0,1, \\
 & & 0,0,1,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,1,1,\ 0,0,0,1, \\
 & & 0,0,0,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,1,1,\ 0,0,0,1,\ \ 0,0,...)
\end{array}$$

4.1.3 Частичный предел в функционале Сачестона

Утверждение 4.1.11. Предел в функционале Сачестона можно заменить частичным пределом, а именно

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \sum_{k=m+1}^{m+2^n} x_k.$$

Аналогичное соотношение выполнено и для функционала $q(x)$.

4.2 Разделяющее множество нулевой меры

Теорема 4.2.1. Пусть $1 \geqslant a > b \geqslant 0$ и $\Omega_b^a = \{x \in \Omega : p(x) = a, q(x) = b\}$, где $p(x)$ и $q(x)$ — верхний и нижний функционалы Сачестона [18] соответственно. Тогда $\Omega \subset \operatorname{Lin} \Omega_b^a$.

Доказательство. Выберем $n \in \mathbb{N}$ таким образом, что

$$a - b > \frac{3}{2^n} \tag{4.4}$$

и n чётно.

Очевидно, что существует разложение

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} T^i x_i, \quad x_i \in \Omega,$$

где $k \in \mathbb{N}$ и все элементы последовательностей x_i, кроме имеющих индексы $km+1$, $m \in \mathbb{N}_0$, являются нулевыми. Пусть $k = 2^n$; зафиксируем i и в дальнейшем для удобства записи положим $w = x_i$. Наша задача — построить конечную линейную комбинацию элементов из Ω_b^a, равную w. Положим

$$v_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \leqslant 2^n, \\ (\mathrm{Br}(2^{2k}, a))_{j-2^{2k}}, & \text{если } 2^{2k} < j \leqslant 2^{2k+1}, 2k \geqslant n, \\ (\mathrm{Br}(2^{2k+1}, b))_{j-2^{2k+1}}, & \text{если } 2^{2k+1} < j \leqslant 2^{2k+2}, 2k+1 \geqslant n. \end{cases}$$

Иначе говоря, сначала «резервируется» 2^n нулевых элементов (большей частью для удобства записи, поскольку конечное количество членов в начале последовательности не влияет на функционалы Сачестона), а затем по очереди приписываются блоки — от первого элемента (нулевого) до последнего ненулевого элемента (конца носителя). Положим далее

$$u_j = \begin{cases} v_j + w_j, & \text{если } j \leqslant 2^n \\ & \text{или } 2^{4k+3} < j \leqslant 2^{4k+4} \text{ и } 4k+3 \geqslant n, \\ v_j & \text{для остальных } j. \end{cases}$$

В силу утверждения 4.1.9 все элементы, к которым прибавляются ненулевые элементы w_j, равны нулю. Кроме того, с учётом леммы 4.1.8 и утверждения 4.1.11 имеем $p(u) = p(w) = a$ и

$q(u) = q(w) = b$. (На «возмущённом» блоке u среднее, соответствующее функционалу q, увеличивается не более чем на 2^{-n} и не влияет на значение функционала p, в силу условия (4.4).) Следовательно, $u, v \in \Omega_b^a$. Заметим теперь, что

$$(u-v)_j = \begin{cases} w_j, & \text{если } j \leqslant 2^n, \\ 0, & \text{если } 2^{2k} < j \leqslant 2^{2k+1}, 2k \geqslant n, \\ 0, & \text{если } 2^{4k+1} < j \leqslant 2^{4k+2}, 4k+1 \geqslant n, \\ w_j, & \text{если } 2^{4k+3} < j \leqslant 2^{4k+4}, 4k+3 \geqslant n. \end{cases}$$

Аналогично строятся пары элементов, разность которых равна w_j на $2^{4k+i} < j \leqslant 2^{4k+i+1}, 4k+i \geqslant n$ для $i = 0, 1, 2$ (требуется только обнулить первые 2^n элементов). Складывая полученные таким образом $4 \cdot 2^n$ разностей элементов из Ω_b^a, получаем требуемый элемент x.

□

Следствие 4.2.2. Множество Ω_b^a является разделяющим. Т.к. при $a \neq 1$ или $b \neq 0$ множество Ω_b^a имеет меру нуль [50; 58], то оно является разделяющим множеством нулевой меры.

4.3 Линейные оболочки множеств, определяемых функционалами Сачестона

Итак, $\Omega \subset \mathrm{Lin}\{x \in \Omega : p(x) = a,\ q(x) = b\}$, где $1 \geqslant a > b \geqslant 0$. Вы этом параграфе мы покажем, что аналогичным свойством обладают само пространство ℓ_∞ и его подпространство $A_0 = \{x \in \ell_\infty : \alpha(x) = 0\}$, где, напомним,

$$\alpha(x) = \limsup_{i \to \infty} \max_{i < j \leqslant 2i} |x_i - x_j|,$$

уже знакомое нам, например, по теореме 2.10.1.

Пусть $Y_b^a = \{x \in A_0 : p(x) = a, q(x) = b\}$, где $a > b$. Подготовим сначала вспомогательные леммы о константе.

Лемма 4.3.1. Справедливо включение $\mathbb{1} \in \mathrm{Lin}\, Y_b^a$.

Доказательство. Не теряя общности, будем полагать, что $a > 0$.

Снова определим оператор $S : \ell_\infty \to \ell_\infty$ следующим образом:

$$(Sy)_k = y_{i+2}, \text{ где } 2^i < k \leqslant 2^i + 1.$$

Согласно лемме 2.7.4, для любого $x \in \ell_\infty$ выполнено равенство

$$\alpha(Sx) = \limsup_{k \to \infty} |x_{k+1} - x_k|.$$

Положим

$$y=\left(0,1,0,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,...\right),$$

тогда $Sy\in A_0$ и $\mathbb{1}-Sy=S(\mathbb{1}-y)\in A_0$.

Пусть $x=(a-b)Sy+b\mathbb{1}$, $z=(a-b)(\mathbb{1}-Sy)+b\mathbb{1}$. Тогда $p(x)=p(z)=a$, $q(x)=q(z)=b$ и, следовательно, $x,z\in Y_b^a$. Кроме того, заметим, что

$$x+z=(a-b)Sy+b\mathbb{1}+(a-b)(\mathbb{1}-Sy)+b\mathbb{1}=(a-b)(Sy-Sy+\mathbb{1})+2b\mathbb{1}=(a+b)\mathbb{1},$$

откуда и следует, что $\mathbb{1}\in Y_b^a$. □

Лемма 4.3.2. Справедливо включение $\mathbb{1}\in\operatorname{Lin}Y_{-a}^a$.

Доказательство. Определим линейный оператор $M:\ell_\infty\to\ell_\infty$ следующим образом:

$$M\omega=M(\omega_1,\omega_2,\omega_3,...)=\Big(0,1\omega_1,0,\frac{1}{2}\omega_2,1\omega_2,\frac{1}{2}\omega_2,0,\frac{1}{3}\omega_3,\frac{2}{3}\omega_3,1\omega_3,\frac{2}{3}\omega_3,\frac{1}{3}\omega_3,0,...,$$
$$0,\frac{1}{p}\omega_p,\frac{2}{p}\omega_p,...,\frac{p-1}{p}\omega_p,1\omega_p,\frac{p-1}{p}\omega_p,...,\frac{2}{p}\omega_p,\frac{1}{p}\omega_p,0,\frac{1}{p+1}\omega_{p+1},...\Big).$$

Тогда $SM:\ell_\infty\to A_0$. Положим

$$x=aS(2M(\mathbb{1})-\mathbb{1}),$$
$$y=-aS(2M(1,0,1,0,1,0,1,0,...)-\mathbb{1}),$$
$$z=-aS(2M(0,1,0,1,0,1,0,1,...)-\mathbb{1}).$$

Тогда, очевидно, каждая из последовательностей x,y,z содержит отрезки сколь угодно большой длины, состоящие из a (равно как и из $-a$), при этом $-a\leqslant x,y,z\leqslant a$. Следовательно, $p(x)=p(y)=p(z)=a$ и $q(x)=q(y)=q(z)=-a$, откуда $x,y,z\in Y_{-a}^a$.

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}x+y+z&=\\ &=aS(2M(\mathbb{1})-\mathbb{1})-aS(2M(1,0,1,0,1,0,...)-\mathbb{1})-aS(2M(0,1,0,1,0,1,...)-\mathbb{1})=\\ &=aS(2M(\mathbb{1})-\mathbb{1}-2M(1,0,1,0,1,0,...)+\mathbb{1}-2M(0,1,0,1,0,1,...)+\mathbb{1})=\\ &=aS(2M(\mathbb{1})-2M(1,0,1,0,1,0,...)-2M(0,1,0,1,0,1,...)+\mathbb{1}+\mathbb{1}-\mathbb{1})=\\ &=aS(2M(\mathbb{1})-2M(1,0,1,0,1,0,...)-2M(0,1,0,1,0,1,...)+\mathbb{1})=aS\mathbb{1}=a\mathbb{1},\end{aligned}$$

откуда $\mathbb{1}\in\operatorname{Lin}Y_{-a}^a$. □

Лемма 4.3.3. Справедливо включение $c_0\subset Y_b^a$.

Доказательство. Зафиксируем $z\in c_0$. Выберем произвольный $x\in Y_b^a$. Тогда $x+z\in Y_b^a$ и, очевидно, $z=(x+z)-x$. □

Теорема 4.3.4. Пусть $a\neq -b$. Тогда справедливо равенство $\operatorname{Lin}Y_b^a=A_0$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in A_0$.

Пусть сначала $p(x) = q(x)$. Тогда, согласно теореме 1.6.1, $x \in c$ и x может быть представлен в виде суммы константы и последовательности из c_0. Утверждение теоремы следует из лемм 4.3.1, 4.3.2 и 4.3.3.

Пусть теперь $p(x) > q(x)$. Положим

$$y = k \cdot x + C \cdot \mathbb{1}, \quad \text{где} \quad k = \frac{a-b}{p(x)-q(x)}, \quad C = \frac{bp(x) - aq(x)}{p(x)-q(x)}.$$

Тогда, очевидно,

$$x = (y - C \cdot \mathbb{1})/k. \tag{4.5}$$

Представление (4.5) искомое. Действительно, в силу лемм 4.3.1 и 4.3.2 выполнено $C \cdot \mathbb{1} \in Y_b^a$; кроме того,

$$p(y) = k \cdot p(x) + C = \frac{ap(x) - bp(x) + bp(x) - aq(x)}{p(x)-q(x)} = a,$$

$$q(y) = k \cdot q(x) + C = \frac{aq(x) - bq(x) + bp(x) - aq(x)}{p(x)-q(x)} = b.$$

□

Факт, аналогичный теоремам 4.2.1 и 4.3.4, верен и для всего пространства ℓ_∞: $\ell_\infty \subset \operatorname{Lin} X_b^a$, где $X_b^a = \{x \in \ell_\infty : p(x) = a,\ q(x) = b\}$, $a > b$.

Лемма 4.3.5. Справедливо включение $\mathbb{1} \in \operatorname{Lin} X_b^a$.

Доказательство. В самом деле, $Y_b^a \subset X_b^a$ и, следовательно,

$$\mathbb{1} \in \operatorname{Lin} Y_b^a \subset \operatorname{Lin} X_b^a.$$

□

Теорема 4.3.6. Справедливо равенство $\operatorname{Lin} X_b^a = \ell_\infty$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in \ell_\infty$ и представим его в виде линейной комбинации последовательностей из X_b^a.

Не теряя общности, положим $x \geqslant 0$ (иначе представим сначала x в виде $x = y - z$, где $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. и найдём представления для y и z).

Если $p(x) = q(x)$, то возьмём некоторый $y \in \ell_\infty$, такой, что $p(y) > p(x) = q(x) \geqslant q(y) \geqslant 0$. Тогда в силу выпуклости функционала p имеем

$$p(x+y) \geqslant p(y) > p(x) = q(x),$$

$$q(x+y) = -p(-x-y) \leqslant -p(-x) - p(-y) = q(x) + q(y) \leqslant q(x) < p(x+y),$$

и задача сведена к отысканию представлений для y и $x{+}y$. Таким образом, случай $p(x) = q(x)$ можно исключить, и, не теряя общности, рассматривать только такие x, что $p(x) > q(x)$.

Снова, как и в доказательстве теоремы 4.3.4, положим

$$y = k \cdot x + C \cdot \mathbb{1}, \quad \text{где} \quad k = \frac{a-b}{p(x)-q(x)}, \quad C = \frac{bp(x)-aq(x)}{p(x)-q(x)}.$$

Дальнейшее доказательство переносится дословно. □

4.4 О хаусдорфовой размерности одного класса множеств

На множестве Ω стандартным образом определяется размерность Хаусдорфа (см. например [105, Секция 6]). Для непустого подмножества $F \subset \mathbb{R}^n$ и $s > 0$ определим s-мерную меру Хаусдорфа множества F следующим образом:

$$\mathcal{H}^s(F) := \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\ U_i)^s \ : \ F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ 0 \leqslant \mathrm{diam}\ U_i \leqslant \delta \right\}.$$

Размерность Хаусдорфа множества $F \subset \mathbb{R}^n$ определяется по формуле:

$$\dim_H F := \inf\{s > 0 \ : \ \mathcal{H}^s(F) = 0\}.$$

Мы приведём определение самоподобных подмножеств множества Ω (см., например, [106]).

Определение 4.4.1. Множество $E \subset \Omega$ называется самоподобным, если существуют $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $0 < r_1, \dots, r_m < 1$ и функции $f_j : \Omega \to \Omega$, $j = 1, \dots, m$ такие, что

$$\rho(f_j(x), f_j(y)) = r_j \rho(x, y),\ \forall\ x, y \in \Omega,\ j = 1, \dots, m$$

и $E = \bigcup_{j=1}^m f_j(E)$.

Лемма 4.4.2. Пусть $E \subset \Omega$ и $TE = E$. Тогда размерность Хаусдорфа E равна 1.

Доказательство. Для $j = 1, 2$ определим функции $f_j : \Omega \to \Omega$ следующим образом:

$$f_1(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad f_2(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots).$$

Очевидно, что $E = f_1(E) \cup f_2(E)$.

Теперь мы покажем, что размерность Хаусдорфа множества E равна 1.

Т.к. для $j = 1, 2$ верно

$$\rho(f_j(x), f_j(y)) = \frac{1}{2} \rho(x, y),\ \forall\ x, y \in E,$$

то функции f_j являются преобразованиями подобия с коэффициентами $r_j = 1/2$ для $j = 1, 2$.

По [106, Теорема 9.3] размерность Хаусдорфа d множества E является решением уравнения:

$$r_1^d + r_2^d = 1.$$

Т.к. $r_j = 1/2$, то $d = 1$. □

Лемма 4.4.2 позволяет существенно сократить доказательство [4, утверждение 12]. Действительно, $x \in \Omega \setminus c$ принадлежит W тогда и только тогда, когда

$$(\operatorname{ext} \mathfrak{B})x = \{0; 1\} \tag{4.6}$$

Очевидно, что соотношение (4.6) выполнено для x тогда и только тогда, когда оно выполнено для Tx. Следовательно, $W = TW$ и $\dim_H W = 1$.

Аналогично получаем

$$\dim_H(\Omega \cap ac) = \dim_H(\Omega \cap ac_0) = \dim_H(\Omega \cap c) = \dim_H(\Omega \cap c_0) = 1.$$

Более того, для множества

$$\Omega_b^a = \{x \in \Omega : p(x) = a, q(x) = b\}, \quad 0 \leqslant b < a \leqslant 1,$$

являющегося разделяющим согласно следствию 4.2.2, также выполнено равенство $\dim_H \Omega_b^a = 1$.

4.5 О существовании разделяющих множеств малой хаусдорфовой размерности

Выше в этой главе приведены различные примеры разделяющих множеств. В данном параграфе строится пример разделяющего множества, имеющего меру нуль и сколь угодно малую хаусдорфову размерность.

Лемма 4.5.1. Пусть множество $F \subset \ell_\infty$ — разделяющее и пусть множество $F' \subset \ell_\infty$ таково, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$F \subset TF' + T^2F' + ... + T^nF',$$

то есть для любого $x \in F$ найдутся такие $x_k \in F'$, $j = k, .., n$, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} T^k x_k. \tag{4.7}$$

Тогда F' — также разделяющее множество.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что F' не является разделяющим.

Тогда найдутся такие два банаховых предела $B_1 \neq B_2$, что для любого $y \in F'$ выполнено $B_1 y = B_2 y$, т.е. $(B_1 - B_2)y = 0$. Тогда для любого $x \in F$, применяя разложение (4.7), имеем:

$$(B_1 - B_2)x = (B_1 - B_2)\left(\sum_{k=1}^{n} T^k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((B_1 - B_2)T^k x_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(B_1 T^k x_k - B_2 T^k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (B_1 x_k - B_2 x_k) = \sum_{k=1}^{n} ((B_1 - B_2)x_k) = 0,$$

т.е. для любого $x \in F$ выполнено $B_1 x = B_2 x$.

С другой стороны, поскольку множество F является разделяющим, то существует такой $x \in F$, что $B_1 x \neq B_2 x$.

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 4.5.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует разделяющее множество $E \subset \Omega$ такое, что $\dim_H E = 1/n$.

Доказательство. Пусть

$$E = \{x \in \Omega : k \neq mn \Rightarrow x_k = 0\}, m \in \mathbb{N},$$

т.е. у последовательности $x \in E$ равны нулю все элементы, кроме, быть может, x_n, x_{2n}, x_{3n} и т.д.

Для $j = 1, 2$ определим функции $f_j : \Omega \to \Omega$ следующим образом:

$$f_1(x_1, x_2, \dots) = (\underbrace{0, ..., 0,}_{n-1 \text{ раз}} 0, x_1, x_2, \dots), \quad f_2(x_1, x_2, \dots) = (\underbrace{0, ..., 0,}_{n-1 \text{ раз}} 1, x_1, x_2, \dots).$$

Очевидно, что $E = f_1(E) \cup f_2(E)$.

Теперь мы покажем, что размерность Хаусдорфа множества E равна 2^{-n}.

Т.к. для $j = 1, 2$ верно

$$\rho(f_j(x), f_j(y)) = 2^{-n} \rho(x, y), \ \forall\ x, y \in E,$$

то функции f_j являются преобразованиями подобия с коэффициентами $r_j = 2^{-n}$ для $j = 1, 2$.

В силу [106, Теорема 9.3] размерность Хаусдорфа d множества E является решением уравнения:

$$r_1^d + r_2^d = 1.$$

Т.к. $r_j = 2^{-n}$, то $d = 1/n$.

Применяя лемму 4.5.1 для n, $F' = E$, $F = \Omega$, получаем, что множество E является разделяющим. $\square$

Замечание 4.5.3. У читателя может возникнуть закономерный вопрос о свойствах пересечения

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n,$$

где E_n — множество, построенное по теореме 4.5.2, т.е.

$$E_n = \{x \in \Omega : k \neq mn \Rightarrow x_k = 0\}, m \in \mathbb{N},$$

в частности о том, является ли оно разделяющим множеством нулевой хаусдорфовой размерности. К сожалению, ответ на этот вопрос положителен только во второй части, а именно

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{(0, 0, 0, ...)\}.$$

Таким образом, пересечение вложенной последовательности разделяющих множеств может не быть разделяющим множеством. Впрочем, существует и более простой пример: в качестве вложенной последовательности разделяющих множеств следует взять $\{M_n\}$, $M_n = [0, 2^{-n}]$. Очевидно, что $\bigcap M_n = \{0\}$.

Замечание 4.5.4. Пусть $n > 1$ и множество E построено по теореме 4.5.2. Тогда $p(E) < 1$ и по теореме 1.8.1 мера E равна нулю.

Глава 5

Функционалы Сачестона и мультипликативные свойства носителя последовательности

Дальнейшим ослаблением понятия сходимости является сходимость по Чезаро (сходимость в среднем). Говорят, что последовательность $\{x_n\} \in \ell_\infty$ сходится по Чезаро к t, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = t.$$

Легко заметить, что обсуждаемые обобщения верхнего и нижнего пределов удовлетворяют соотношению

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant q(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant p(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{5.1}$$

Отдельный интерес представляет множество всех последовательностей из 0 и 1, которое, как и выше, мы будем обозначать через Ω. Понятно, что каждый $x \in \Omega$ можно отождествить с подмножеством множества натуральных чисел $\operatorname{supp} x \subset \mathbb{N}$.

Вслед за [17] будем обозначать через $\mathscr{M}A$ множество всех чисел, кратных элементам множества $A \subset \mathbb{N}$, т.е.

$$\mathscr{M}A = \{ka : k \in \mathbb{N}, a \in A\},$$

через χF — характеристическую функцию множества F.

Так, например,

$$\chi\mathscr{M}\{2\} = \chi\mathscr{M}\{2,4\} = \chi\mathscr{M}\{2,4,8,16,...\} = (0,1,0,1,0,1,0,1,0,...),$$
$$\chi\mathscr{M}\{3\} = \chi\mathscr{M}\{3,9,27,...\} = (0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ ...),$$
$$\chi\mathscr{M}\{2,3\} = \chi\mathscr{M}\{2,3,6\} = (0,1,1,1,0,1,\ 0,1,1,1,0,1,\ 0,1,1,1,0,1,...).$$

Возникает закономерный вопрос о взаимосвязи структуры множества A и значений, которые принимают обобщения верхнего и нижнего пределов (5.1) на последовательности $\chi\mathscr{M}A$. Так, в работах [107; 108] доказано, что для любого $A = \{a_1, a_2, ...\} \subset \mathbb{N}$ выполнено

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\chi\mathscr{M}A)_i = \lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\chi\mathscr{M}\{a_1,a_2,...,a_j\})_i.$$

В работе [109, §7] построено такое множество $A \subset \mathbb{N}$, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\chi\mathscr{M}A)_i \neq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\chi\mathscr{M}A)_i.$$

За более подробной информацией о множествах типа $\mathscr{M}A$ отсылаем читателя к монографии [110].

В этой главе изучается зависимость значений, которые могут принимать функционалы Сачестона на последовательностях $\chi\mathscr{M}A$, от свойств множества A.

Результаты, излагаемые в данной главе, опубликованы в [6; 13].

5.1 Конечное число множителей

Пользуясь критерием Лоренца (1.2), нетрудно доказать, что для $x_n = m^n$, $m \in \mathbb{N}_2$ выполнено $\chi x \in ac_0$.

Лемма 5.1.1. Пусть $y = \{y_n\}$ — строго возрастающая последовательность, $\chi y \in \Omega \cap ac_0$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и последовательность $x = \{x_k\}$ определена соотношением

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = y_i \cdot m^j \text{ для некоторых } i, j \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $x \in ac_0$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $K \in \mathbb{N}$ и покажем, что $p(x) < m^{-K}$. Действительно, представим x в виде суммы

$$x \leqslant z_1 + z_2 + \dots + z_K + z'_{K+1}, \tag{5.2}$$

где каждое слагаемое z_j соответствует умножению индексов на m^j:

$$(z_j)_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = y_i \cdot m^j \text{ для некоторого } i \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

а слагаемое z'_j соответствует умножению индексов на m^{j+1}, m^{j+2}, ...:

$$(z'_j)_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = y_i \cdot m^{j'} \text{ для некоторых } i, j' \in \mathbb{N}, \quad j' > j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.3}$$

(Знак неравенства в (5.2) возникает ввиду того, что возможен случай $y_i \cdot m^j = y_{i'} \cdot m^{j'}$ для $j \neq j'$. Например, в случае $y_1 = 3$, $y_2 = 6$ и $m = 2$ имеем $y_1 \cdot m^2 = y_2 \cdot m^1$.) Понятно, что $p(z_j) = 0$. Таким образом,

$$p(x) \leqslant p(z_1) + p(z_2) + \dots + p(z_K) + p(z'_{K+1}) = p(z'_{K+1}).$$

Заметим, что в силу определения (5.3) каждый отрезок z'_j из m^{j+1} элементов содержит не более одной единицы, и потому $p(z'_j) \leqslant m^{-j-1} < m^{-j}$. Таким образом, для любого $K \in \mathbb{N}$ выполнена оценка $p(x) < m^{-K}$, откуда $p(x) = 0$. $\square$

Следствие 5.1.2. Пусть $\{p_1, ..., p_k\} \subset \mathbb{N}$,

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot ... \cdot p_k^{j_k} \text{ для некоторых } j_1, ..., j_k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $x \in ac_0$.

5.2 Бесконечное число множителей и верхний функционал Сачестона

Лемма 5.2.1. Для любого непустого $A \subset \mathbb{N}$ выполнено $\chi\mathscr{M}A \notin ac_0$.

Доказательство. Пусть $a_1 \in A$. Тогда из каждых идущих подряд a_1 элементов последовательности $\chi\mathscr{M}A$ хотя бы один равен единице, следовательно,

$$q(\chi\mathscr{M}A) \geqslant \frac{1}{a_1} > 0.$$

□

При дополнительных ограничениях верно и более сильное утверждение.

Теорема 5.2.2. Пусть A' — бесконечное подмножество попарно взаимно простых чисел (т.е. для любых двух чисел $a_1, a_2 \in A'$ их наибольший общий делитель равен единице). Тогда для любого $A \supset A'$ выполнено $p(\chi\mathscr{M}A) = 1$.

Доказательство. Пусть $A' = \{a_1, a_2, ..., a_j, ...\}$ и

$$A_j = \prod_{i=1}^{j} a_i. \tag{5.4}$$

Для каждого k найдём такие номера n_k, что

$$(\chi\mathscr{M}A)_{n_k+1} = (\chi\mathscr{M}A)_{n_k+2} = \cdots = (\chi\mathscr{M}A)_{n_k+k} = 1.$$

Тем самым мы докажем, что отрезок из любого наперёд заданного количества единиц подряд встречается в последовательности $\chi\mathscr{M}A$ и, следовательно, $p(\chi\mathscr{M}A) = 1$.

Действительно, пусть $n_1 = a_1 - 1$. Рассмотрим множество $F_1 = \{n_1 + A_1, n_1 + 2A_1, n_1 + 3A_1, \ldots, n_1 + a_2A_1\}$ и отметим два следующих факта.

Во-первых, пусть $f \in F_1$, тогда

$$f \equiv n_1 \mod a_1.$$

Во-вторых, числа a_2 и A_1 взаимно просты. Следовательно, все a_2 чисел из множества F_1 дают разные остатки при делении на a_2.

В качестве n_2 возьмём такое $f \in F_1$, что

$$f \equiv a_2 - 2 \mod a_2.$$

Заметим, что тогда

$$n_2 + 1 \equiv n_1 + 1 \equiv 0 \mod a_1$$

и

$$n_2 + 2 \equiv 0 \mod a_2,$$

следовательно, $(\chi \mathscr{M} A)_{n_2+1} = (\chi \mathscr{M} A)_{n_2+2} = 1$.

Полученные рассуждения несложно продолжить по индукции.

Рассмотрим множество $F_j = \{n_j + A_j, n_j + 2A_j, n_j + 3A_j, \ldots, n_j + a_{j+1}A_j\}$ и отметим два следующих факта.

Во-первых, пусть $f \in F_j$, тогда

$$f \equiv n_j \mod A_j$$

и, в силу (5.4),

$$\begin{aligned} f &\equiv n_j \mod a_1 \\ f &\equiv n_j \mod a_2 \\ &\ldots \\ f &\equiv n_j \mod a_j. \end{aligned}$$

Во-вторых, числа a_{j+1} и A_j взаимно просты, поскольку a_{j+1} взаимно просто с каждым из чисел $a_1, ..., a_j$. Следовательно, все a_{j+1} чисел из множества F_j дают разные остатки при делении на a_{j+1}.

В качестве n_{j+1} возьмём такое $f \in F_j$, что

$$f \equiv a_{j+1} - (j+1) \mod a_{j+1}.$$

Заметим, что тогда

$$\begin{aligned} & n_{j+1} + 1 \equiv n_j + 1 \equiv n_{j-1} + 1 \equiv \cdots \equiv n_2 + 1 \equiv n_1 + 1 \equiv 0 \mod a_1 \\ & n_{j+1} + 2 \equiv n_j + 2 \equiv n_{j-1} + 2 \equiv \cdots \equiv n_2 + 2 \equiv 0 \mod a_2 \\ & \ldots \\ & n_{j+1} + j \equiv n_j + j \equiv 0 \mod a_j \end{aligned}$$

и

$$n_{j+1} + (j+1) \equiv 0 \mod a_{j+1},$$

следовательно,

$$(\chi \mathscr{M} A)_{n_{j+1}+j+1} = (\chi \mathscr{M} A)_{n_j+j} = \cdots = (\chi \mathscr{M} A)_{n_j+2} = (\chi \mathscr{M} A)_{n_j+1} = 1.$$

$\square$

Замечание 5.2.3. Понятно, что в качестве примера бесконечного множества попарно взаимно простых чисел можно взять любое бесконечное множество простых чисел. Однако бывают бесконечные множества попарно взаимно простых чисел, не содержащие простых чисел вовсе, например множество

$$A = \{2 \cdot 3,\ 5 \cdot 7,\ 11 \cdot 13,\ 17 \cdot 19,\ 23 \cdot 29,\ 31 \cdot 37,\ ...\},$$

элементами которого являются произведения пар соседних простых чисел.

Определение 5.2.4. Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{N}$ обладает P-свойством, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся набор попарно взаимно простых чисел

$$\{a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,n}\} \subset A.$$

Из доказательства теоремы 5.2.2 видно, что для множества A в условии теоремы достаточно потребовать P-свойства. Интересно, что на самом деле P-свойство эквивалентно условиям, наложенным на множество A в теореме 5.2.2.

Лемма 5.2.5. Пусть множество A обладает P-свойством. Тогда существует бесконечное подмножество $A' \subset A$ попарно взаимно простых чисел.

Доказательство. Зафиксируем $f_0 \in A$, $f_0 \neq 1$ и представим A в виде объединения трёх попарно непересекающихся множеств:

$$A = \{f_0\} \cup E \cup F,$$

где

$$\begin{aligned} E &= \{a \in A \mid a \text{ не взаимно просто с } f_0 \text{ и } a \neq f_0\}, \\ F &= \{a \in A \mid a \qquad \text{взаимно просто с } f_0\}. \end{aligned}$$

Пусть разложение f_0 на простые множители имеет вид

$$f_0 = p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot ... \cdot p_k^{j_k}.$$

Тогда множество E можно представить в виде объединения (возможно пересекающихся) множеств:

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad E_i = \{a \in E \mid a \text{ кратно } p_i\}.$$

Покажем, что множество F обладает P-свойством. Действительно, зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Так как множество A обладает P-свойством, то в нём найдётся подмножество попарно взаимно простых чисел

$$G = \{a_1, a_2, ..., a_{n+k-1}, a_{n+k}\} \subset A.$$

Если $f_0 \in G$, то $G \backslash f_0 \subset F$ в силу построения множеств G и F, и требуемый набор попарно взаимно простых чисел предъявлен.

Пусть теперь $f_0 \notin G$. Заметим, что в каждое из множеств E_i может входить не более одного элемента множества G в силу того, что при фиксированном i все элементы множества E_i имеют нетривиальный общий делитель. Следовательно, как минимум n элементов из G принадлежат множеству F, и требуемый набор попарно взаимно простых чисел снова предъявлен.

Итак, нам удалось получить число $f_0 \in A$ и бесконечное множество F, обладающее P-свойством и состоящее из чисел, взаимно простых с f_0. Продолжая по индукции, получим требуемое бесконечное множество попарно взаимно простых чисел. □

Лемма 5.2.6. Пусть для множества $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ выполнено $p(\chi\mathscr{M}A) = 1$. Тогда A обладает P-свойством.

Доказательство. Предположим противное: пусть A не обладает P-свойством. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что из множества A можно выбрать n попарно взаимно простых чисел, но нельзя выбрать $n+1$.

Пусть $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset A$ — набор попарно взаимно простых чисел. Так как $p(\chi\mathscr{M}A) = 1$, то в последовательности $\chi\mathscr{M}A$ найдётся отрезок, состоящий сплошь из единиц, любой наперёд заданной длины. Выберем k таким, что

$$(\chi\mathscr{M}A)_{k+1} = (\chi\mathscr{M}A)_{k+2} = ... = (\chi\mathscr{M}A)_{k+a_1a_2\cdots a_n} = 1.$$

Тогда существует такое число k_0, $k+1 \leqslant k_0 \leqslant k + a_1a_2\cdots a_n$, что k_0 даёт в остатке 1 при делении на $a_1a_2\cdots a_n$. Так как $(\chi\mathscr{M}A)_{k_0} = 1$, то $k_0 = m \cdot a_0$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $a_0 \in A$. С другой стороны, k_0 взаимно просто с каждым из чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Следовательно, a_0 также взаимно просто с каждым из чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, и $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\} \subset A$ — набор из $n+1$ попарно взаимно простых чисел. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Таким образом, из теоремы 5.2.2 и лемм 5.2.5, 5.2.6 незамедлительно следует

Теорема 5.2.7. Пусть $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) A обладает P-свойством

(ii) В A существует бесконечное подмножество попарно взаимно простых чисел

(iii) $p(\chi\mathscr{M}A) = 1$.

5.3 Бесконечное количество множителей и нижний функционал Сачестона

Перейдём теперь к изучению нижнего функционала Сачестона $q(\chi\mathscr{M}A)$.

Теорема 5.3.1. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ — бесконечное множество попарно взаимно простых чисел. Тогда

$$q(\chi\mathscr{M}A) \geqslant 1 - \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{a_j}\right).$$

Доказательство. Заметим, что нижний функционал Сачестона можно представить в виде

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x), \tag{5.5}$$

где

$$q_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{j=m}^{m+n-1} x_j.$$

Поскольку предел (5.7) существует, то для его оценки можно использовать предел подпоследовательности $q_{n_k}(x)$, где $n_k = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$.

Заметим теперь, что в любом отрезке последовательности $\chi\mathscr{M}A$ длины n_k содержится не более $\prod_{j=1}^{k}(a_j - 1)$ нулей (могут попадаться «дополнительные» единицы — элементы с индексами, кратными a_j для $j > k$). Значит,

$$q_{n_k}(\chi\mathscr{M}A) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n_k}\sum_{j=m}^{m+n_k-1}(\chi\mathscr{M}A)_j \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{k}\frac{a_i - 1}{a_i}.$$

Снова перейдя к пределу по k, получим

$$q(\chi\mathscr{M}A) \geqslant \lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i - 1}{a_i} = 1 - \prod_{i=1}^{\infty}\frac{a_i - 1}{a_i}. \tag{5.6}$$

□

Следствие 5.3.2. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ — бесконечное множество попарно взаимно простых чисел и $a_{n+1} > a_1 \cdot ... \cdot a_n$. Тогда

$$q(\chi\mathscr{M}A) = 1 - \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{a_j}\right).$$

Доказательство. Заметим, что нижний функционал Сачестона можно представить в виде

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x), \tag{5.7}$$

где

$$q_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{j=m}^{m+n-1} x_j.$$

Поскольку предел (5.7) существует, то для его оценки можно использовать предел подпоследовательности $q_{n_k}(x)$, где $n_k = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$.

Среди первых n_k элементов последовательности $\chi\mathscr{M}A$ ровно $\prod_{j=1}^{k}(a_j-1)$ нулей, поскольку комбинации остатков от деления на взаимно простые числа $a_1, a_2, ..., a_k$ «не успевают» повторяться. Следовательно,

$$q_{n_k}(\chi\mathscr{M}A) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n_k}\sum_{j=m}^{m+n_k-1}(\chi\mathscr{M}A)_j \leqslant \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}(\chi\mathscr{M}A)_j = 1-\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i-1}{a_i}.$$

Переходя к пределу по k, имеем

$$q(\chi\mathscr{M}A) \leqslant 1-\lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i-1}{a_i} = 1-\prod_{i=1}^{\infty}\frac{a_i-1}{a_i}. \tag{5.8}$$

Сопоставив (5.8) и (5.6), получим утверждение следствия. □

Следствие 5.3.3. В случае, когда $\mathbb{N}\setminus A$ конечно, из следствия 5.1.2 непосредственно вытекает, что $\chi\mathscr{M}A \in ac_1$ и, соответственно, $q(\chi\mathscr{M}A)=1$.

Классическая теорема Эйлера [111] говорит о том, что ряд обратных простых чисел

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...=\sum_{j}\frac{1}{j},$$

где j пробегает все простые числа, расходится.

С учётом этого факта из теоремы 5.3.1 вытекает

Лемма 5.3.4. Пусть $\varepsilon \in (0;1]$. Существует бесконечное множество попарно непересекающихся подмножеств простых чисел A_i такое, что $q(\chi\mathscr{M}A_i) \geqslant \varepsilon$ для любого $i\in\mathbb{N}$.

Теорема 5.3.5. Пусть $A=\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}\subset\mathbb{N}$ есть бесконечное множество попарно взаимно простых чисел и

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{a_j}\right)=0 \tag{5.9}$$

Тогда $\chi\mathscr{M}A\in ac$ и, более того, $\chi\mathscr{M}A \in ac_1$.

Доказательство. По теореме 5.3.1 условие (5.9) влечёт равенство $q(\chi\mathscr{M}A)=1$. По теореме 5.2.2 $p(\chi\mathscr{M}A)=1$, откуда и следует требуемое. □

Заключение

В работе исследованы такие объекты и понятия, определяемые на пространстве ограниченных последовательностей, как почти сходимость (глава 1), α–полунорма, для краткости называемая α–функцией (глава 2), инвариантные банаховы пределы (глава 3), разделяющие множества и линейные оболочки (глава 4), функционалы Сачестона и мультипликативные свойства носителя (глава 5).

В главе 1 выведены критерии принадлежности ограниченных последовательностей специального вида к пространству почти сходящихся последовательностей и пространству последовательностей, почти сходящихся к нулю, а также критерий сходимости почти сходящейся последовательности. Далее эти критерии применены для исследования последовательностей и множеств, естественным образом возникающих в других задачах о банаховых пределах. Для элементов пространства почти сходящихся последовательностей ac установлена двусторонняя оценка на расстояние до пространства сходящихся последовательностей c, использующая α–функцию. Примечательно (хотя и ожидаемо), что наряду с трансляционно неинвариантной α–функцией в этой оценке используется и функционал $\lim_{n\to\infty}\alpha(T^n x)$, который, очевидно, трансляционно инвариантен.

Глава 2 посвящена α–функции и содержит достаточно подробное описание свойств суперпозиции этой функции с классическими линейными операторами: сдвига T, повторения σ_n, Чезаро C и т.д. Несмотря на то, что α–функция оказалась трансляционно неинвариантной, эта неинвариантность в некотором смысле однородна (см. следствие 2.2.4). Это вполне логично, поскольку расстояние до пространства c и почти сходимость сами суть трансляционно инвариантные характеристики. Завершается глава 2 исследованием подпространства таких ограниченных последовательностей, на которых α–функция обращается в нуль. Доказаны основные свойства этого пространства; в частности, оно недополняемо в ℓ_∞.

Глава 3 непосредственно посвящена инвариантным банаховым пределам и содержит значительное количество примеров отыскания множества инвариантных банаховых пределов $\mathfrak{B}(H)$ для различных линейных операторов H, действующих на пространстве ограниченных последовательностей. В частности, показана существенная избыточность ранее известных условий эберлейновости оператора (т.е. существования хотя бы одного банахова предела, инвариантного относительно данного оператора). Введены новые и исследованы существующие классы линейных операторов на пространстве ограниченных последовательностей в соответствии со свойствами их суперпозиции с банаховыми пределами: полуэберлейновы,

эберлейновы, B-регулярные, существенно эберлейновы. Показано, что каждый следующий класс содержится в предыдущем и не совпадает с ним. Найдено простое решение обратной задачи об инвариантности, т.е. задачи о построении по банахову пределу оператора, относительно которого он инвариантен.

Глава 4 посвящена разделяющим множествам и линейным оболочкам, при этом вторые, будучи детально исследованы, выступают как вспомогательный элемент для построения первых. Завершается глава 4 построением разделяющего подмножества последовательностей из нулей и единиц, имеющего (лебеговскую) меру нуль и сколь угодно малую хаусдорфову размерность.

Глава 5 устанавливает связь между мультипликативными свойствами носителя последовательности из нулей и единиц и значениями, который могут принимать верхний и нижний функционалы Сачестона (а значит, и банаховы пределы) на такой последовательности. Для установления этой связи используются построения из теории чисел.

По итогам проведённых исследований выдвинут ряд гипотез, работу над доказательством или опровержением которых планируется продолжать в дальнейшем, или же использовать эти гипотезы как задачи для молодых исследователей, знакомящихся с пространством ограниченных последовательностей.

Соискатель выражает горячую благодарность:

- научному руководителю, д.ф.-м.н., проф. Евгению Михайловичу Семенову, за постановку интересных задач и возможность из них выбирать, за содержательные дискуссии и умение сказать нужные слова в нужный момент;

- коллегам, к.ф.-м.н. Александру Сергеевичу Усачёву и асп. Роману Евгеньевичу Зволинскому, за плодотворное обсуждение результатов и текста диссертационного исследования, а также рабочую атмосферу в целом;

- маме, Елене Анатольевне Матвеевой, и бабушке, Ольге Евгеньевне Матвеевой, за необыкновенные терпение и заботу в период подготовки текста диссертации и сопроводительной документации;

- супруге, к.ф.-м.н. Анастасии Сергеевне Червинской, за передачу ценного личного опыта, а также моральную, организационную и логистическую поддержку;

- секретарю Учёного совета математического факультета ВГУ, Галине Ивановне Моисеевой, за огромную помощь и содействие при подготовке сопроводительной документации;

- начальнику отдела аспирантуры ВГУ, Любови Николаевне Костиной, а также ведущему специалисту, Елене Валентиновне Сыромятниковой, за помощь и консультации при подготовке сопроводительной документации.

Список сформулированных гипотез

Гипотеза 1.4.7. Пусть $M(j)$ — последовательность натуральных чисел, такая, что существует предел

$$\lim_{j\to\infty}\frac{M(j)}{j}\leqslant+\infty$$

и для любых $i,j\in\mathbb{N}$ выполнено

$$M(i)+M(j)\leqslant M(i+j).$$

Тогда существует последовательность $\{x_k\}$, удовлетворяющая условию (1.12).

Гипотеза 1.7.8. Для любого $x\in ac$

$$\frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}\alpha(U^s x)\leqslant\rho(x,c),$$

где U — оператор сдвига вправо:

$$U(x_1,x_2,x_3,...)=(0,x_1,x_2,x_3,...).$$

Гипотеза 1.9.9. Включение $QW\subset(\Omega\cap ac_0)\setminus c_{00}$, где через c_{00} обозначается множество последовательностей, стабилизирующихся на нуле, собственное.

Гипотеза 1.9.11. $Q^{-2}ac_0\subset ac$.

Гипотеза 1.10.13. $ac_0^{(2n+1)}$ замкнуто (топологически).

Гипотеза 1.10.14. $ac_0^{(2n+1)}=ac_0^{(2n+3)}$ для любого n (или же, наоборот, имеет место собственное включение).

Гипотеза 1.10.15. Если предыдущая гипотеза неверна, то встаёт вопрос об исследовании множеств $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}ac_0^{(2n+1)}$ и $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}ac_0^{(2n+1)}$.

Гипотеза 1.10.16. Пусть $x\in ac_0^{(2n+1)}$. Тогда $x^{2n+1}\in ac_0^{(2n+1)}$.

Гипотеза 2.6.4. Оценка теоремы 2.6.2 точна для любого $n\in\mathbb{N}$.

Гипотеза 2.7.9. Пусть $x\in\ell_\infty$ и $0\leqslant x_k\leqslant 1$. Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\alpha(C^n x)\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

Гипотеза 2.7.10. Для любых $x\in\ell_\infty$ и $n\in\mathbb{N}$

$$\alpha(C^n x)-\alpha(C^{n+1}x)\leqslant\alpha(C^{n-1}x)-\alpha(C^n x).$$

Гипотеза 2.7.11. Для любого $0 < a < 1$ существует такой $x \in \ell_\infty$, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha(C^m x)}{a^m} = \infty.$$

Гипотеза 2.8.7. Если $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \|y\|_* + \alpha(y) \cdot \|x\|_*$, то $\alpha(x) = 0$ или $\alpha(y) = 0$.

Гипотеза 2.9.3. Функционал $\alpha_*^*(x)$ удовлетворяет неравенству треугольника.

Гипотеза 2.9.4. Аналог теоремы 2.7.8 верен для функционалов $\alpha^*(x)$, $\alpha_*(x)$ и $\alpha_*^*(x)$

Гипотеза 3.3.3. Существуют два таких линейных оператора $P, Q : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $\mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}(Q) \neq \varnothing$, но $(P - Q)(\ell_\infty) \setminus ac \neq \varnothing$.

Гипотеза 3.6.4. Для любого $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$) существует такой $x \in ac_0$, что $\tilde{\sigma}_k x \notin ac$.

Гипотеза 3.6.6. Для любых натуральных $k > m$ существуют такие $r, s \in \mathbb{N}$, что $\tilde{\sigma}_{m/k} T^r \tilde{\sigma}_{k/m} = T^s$.

Гипотеза 3.6.7. Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $(\tilde{\sigma}_{\sqrt{k}})^2 - \sigma_k : \ell_\infty \to ac_0$.

Гипотеза 3.6.8. Пусть $x \in ac_0$. Для того, чтобы $x \in \mathcal{I}(ac_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{\sigma}_k x \in ac_0$ для любого $k \in \mathbb{Q}^+$.

Гипотеза 3.6.9. Пусть $x \in ac_0$. Для того, чтобы $x \in \mathcal{I}(ac_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{\sigma}_k x \in ac_0$ для любого $k \in \mathbb{R}^+$.

Гипотеза 3.9.3. Существуют такие полуэберлейнов оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ и банахов предел $B \in \mathfrak{B}$, что $BH \in \mathfrak{B}$, но $B_1 H \notin \mathfrak{B}$ для любого $B_1 \in \mathfrak{B} \setminus \{B\}$. Также интересно наложение дополнительных свойств на B и BH, например, принадлежности к $\operatorname{ext} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}(C)$ и т.д.

Гипотеза 3.10.11. Пусть $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n-1}})$, $n \in \mathbb{N}$, и $B_2 \in \mathfrak{B}$. Тогда $\|B_1 - B_2 A\| = 2 = \operatorname{diam} \mathfrak{B}$.

Гипотеза 3.10.12. Множество $\mathfrak{B}(A) \cap \mathfrak{B}(\sigma_{2^{2n}})$ непусто для любого $n \in \mathbb{N}$.

Гипотеза 3.10.13. Если $B \in \operatorname{ext} \mathfrak{B}$, то $BA \in \operatorname{ext} \mathfrak{B}$.

Гипотеза 3.10.14. Для любого $B \in \mathfrak{B}$ выполнено $BA \in \operatorname{Lin} \operatorname{ext} \mathfrak{B}$, где Lin обозначает линейную оболочку, т.е. множество всевозможных конечных линейных комбинаций.

Гипотеза 3.10.18. Разреженным назовём оператор взятия подпоследовательности $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ такой, что

$$H(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_{m_1}, x_{m_1+1}, ...x_{n_1-1}, x_{n_1};\ x_{m_2}, x_{m_2+1}, ...x_{n_2-1}, x_{n_2};\ ...),$$

где для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $m_k \leqslant n_k$, и для всех $k > k_0 \in \mathbb{N}$ выполнено $m_{k+1} \geqslant m_k$, $n_{k+1} \geqslant n_k$, при этом

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} n_k - m_k = \infty.$$

Гипотеза заключается в том, что любой разреженный оператор (а) переводит ac_0 в ac_0 (или, слабее — c_0 в ac_0) и (б) является B-регулярным. Операторы A и $\sigma_\triangle$ из этого параграфа являются разреженными.

Гипотеза 3.11.2. Выполнено равенство

$$\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{B}(A).$$

Гипотеза 3.12.10. Для любого $B \in \mathfrak{B}(\sigma_k)$ выполнено равенство $\mathfrak{B}(H_{B,k,m}) = \{B\}$ или, что то же самое, включение $\mathfrak{B}(H_{B,k,m}) \subset \mathfrak{B}(\sigma_k)$.

Гипотеза 3.13.4. Всякий мультипорождённый оператор является существенно эберлейновым.

Гипотеза 3.13.6. Для мультипорождённого оператора $G_{\{B_k\}}$ имеет место включение

$$\mathfrak{B}(G_{\{B_k\}}) \subset \operatorname{conv}\{B_k\}.$$

(Та же гипотеза — для равенства или для обратного включения)

Гипотеза 3.13.11. Верно равенство $[B_1; B_2] = \mathfrak{B}(H)$.

Гипотеза 3.13.12. Верно равенство $[B_1; B_2] \cap \mathfrak{B}(\sigma_2) = \varnothing$.

Гипотеза 3.13.13. Верно равенство $\mathfrak{B}(H) \cap \mathfrak{B}(\sigma_2) = \varnothing$.

Гипотеза 3.13.15. Пример 3.13.10 может быть обобщён на симплекс произвольной конечной размерности (треугольник, тетраэдр и т.д.).

Список литературы

1. *Авдеев*, *Н. Н.* О пространстве почти сходящихся последовательностей / Н. Н. Авдеев // Математические заметки. — 2019. — т. 105, № 3. — с. 462—466. — DOI: `10.4213/mzm12298`. — URL: `http://mi.mathnet.ru/rus/mz/v105/i3/p462`.
2. *Авдеев*, *Н. Н.*, *Семенов*, *Е. М.*, *Усачев*, *А. С.* Банаховы пределы и мера на множестве последовательностей из 0 и 1 / Н. Н. Авдеев, Е. М. Семенов, А. С. Усачев // Математические заметки. — 2019. — т. 106, № 5. — с. 784—787.
3. *Авдеев*, *Н. Н.* О подмножествах пространства ограниченных последовательностей / Н. Н. Авдеев // Математические заметки. — 2021. — т. 109, № 1. — с. 150—154.
4. *Авдеев*, *Н. Н.*, *Семёнов*, *Е. М.*, *Усачев*, *А. С.* Банаховы пределы: экстремальные свойства, инвариантность и теорема Фубини / Н. Н. Авдеев, Е. М. Семёнов, А. С. Усачев // Алгебра и анализ. — 2021. — т. 33, № 4. — с. 32—48.
5. *Авдеев*, *Н. Н.* О разделяющих множествах меры нуль и функционалах Сачестона / Н. Н. Авдеев // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2021. — т. 4. — с. 38—50.
6. *Авдеев*, *Н. Н.* Почти сходящиеся последовательности из 0 и 1 и простые числа / Н. Н. Авдеев // Владикавказский математический журнал. — 2021. — т. 23, № 4. — с. 5—14. — DOI: `10.46698/p9825-1385-3019-c`.
7. *Avdeev*, *N.*, *Semenov*, *E.*, *Usachev*, *A.*, *Zvolinskii*, *R.* Decomposition of the set of Banach limits into discrete and continuous subsets / N. Avdeev, E. Semenov, A. Usachev, R. Zvolinskii // Annals of Functional Analysis. — 2024. — т. 15, № 81. — DOI: `10.1007/s43034-024-00382-5`.
8. *Авдеев*, *Н. Н.*, *Зволинский*, *Р. Е.*, *Семенов*, *Е. М.*, *Усачев*, *А. С.* Множество банаховых пределов и его дискретное и непрерывное подмножества / Н. Н. Авдеев, Р. Е. Зволинский, Е. М. Семенов, А. С. Усачев // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2024. — т. 518. — с. 61—64.
9. *Авдеев*, *Н. Н.* Замечание об инвариантных банаховых пределах / Н. Н. Авдеев // Современные методы теории краевых задач : материалы международной конференции «Понтрягинские чтения — XXIX», посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина (2–6 мая 2018 г.) — 2018. — с. 31—32.

10. *Авдеев, Н. Н.*, *Семенов, Е. М.* Об асимптотических свойствах оператора Чезаро / Н. Н. Авдеев, Е. М. Семенов // Воронежская Зимняя Математическая школа С.Г. Крейна – 2018. Материалы Международной конференции. Под ред. В.А. Костина. — 2018. — с. 107—109.

11. *Авдеев, Н. Н.* Оператор с бесконечномерным ядром, для которого существует инвариантный банахов предел / Н. Н. Авдеев // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. — 2018. — с. 18—19.

12. *Авдеев, Н. Н.* О суперпозиции оператора сдвига и одной функции на пространстве ограниченных последовательностей / Н. Н. Авдеев // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. — 2018. — с. 20—21.

13. *Авдеев, Н. Н.* Обобщения предела и мультипликативные свойства носителя последовательности / Н. Н. Авдеев // Воронежская Зимняя Математическая школа С.Г. Крейна. Материалы Международной конференции. — 2022. — с. 4—7.

14. *Авдеев, Н.* О мере множеств, разделяющих банаховы пределы / Н. Авдеев // Современные проблемы математики и её приложений. — Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, 2022. — с. 56—57. — URL: `https://elibrary.ru/item.asp?id=50068631`.

15. *Авдеев, Н. Н.* Линейные операторы, определяемые банаховыми пределами / Н. Н. Авдеев // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». — 2025. — с. 40—42.

16. *Алехно, Е. А.*, *Семёнов, Е. М.*, *Сукочев, Ф. А.*, *Усачев, А. С.* Порядковые и геометрические свойства множества банаховых пределов / Е. А. Алехно, Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев // Алгебра и анализ. — 2016. — т. 28, № 3. — с. 3—35.

17. *Hall, R. R.*, *Tenenbaum, G.* On Behrend sequences / R. R. Hall, G. Tenenbaum // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. т. 112. — Cambridge University Press. 1992. — с. 467—482. — DOI: `10.1017/S0305004100071140`.

18. *Sucheston, L.* Banach limits / L. Sucheston // Amer. Math. Monthly. — 1967. — т. 74. — с. 308—311. — ISSN 0002-9890. — DOI: `10.2307/2316038`.

19. *Wojtaszczyk, P.* Banach spaces for analysts. т. 25 / P. Wojtaszczyk. — Cambridge University Press, 1996.

20. *Lindenstrauss, J.*, *Tzafriri, L.* Classical Banach spaces. т. I / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. — Springer, 1973.

21. *Mazur, S.* O metodach sumowalności / S. Mazur // Ann. Soc. Polon. Math. (Supplement). — 1929. — с. 102—107.

22. *Банах, С.* Теория линейных операций / С. Банах. — Регуляр. и хаот. динамика М, 2001.

23. *Alekhno*, *E.* Superposition operator on the space of sequences almost converging to zero / E. Alekhno // Open Mathematics. — 2012. — т. 10, № 2. — с. 619—645.

24. *Alekhno*, *E. A.* On Banach–Mazur limits / E. A. Alekhno // Indagationes Mathematicae. — 2015. — т. 26, № 4. — с. 581—614.

25. *Lorentz*, *G. G.* A contribution to the theory of divergent sequences / G. G. Lorentz // Acta Mathematica. — 1948. — т. 80, № 1. — с. 167—190. — ISSN 0001-5962. — DOI: 10.1007/BF02393648.

26. *Greenleaf*, *F.* Invariant means on topological groups and their applications / F. Greenleaf // Van Nostrand Mathematical Studies Series, No. 16. — Van Nostrand Reinhold Company, 1969.

27. *Day*, *M. M.* Normed linear spaces / M. M. Day. — Springer, 1973.

28. *Kangro*, *G.* Theory of summability of sequences and series / G. Kangro // Journal of Soviet Mathematics. — 1976. — т. 5, № 1. — с. 1—45.

29. *Kurtz*, *J.* Almost convergent vector sequences / J. Kurtz // Tohoku Mathematical Journal, Second Series. — 1970. — т. 22, № 4. — с. 493—498.

30. *Kurtz*, *J.* Almost convergence in Banach spaces / J. Kurtz // Tohoku Mathematical Journal, Second Series. — 1972. — т. 24, № 3. — с. 389—399.

31. *Deeds*, *J.* Summability of vector sequences / J. Deeds // Studia Mathematica. — 1968. — т. 30, № 3. — с. 361—372.

32. *Hajduković*, *D.* Almost convergence of vector sequences / D. Hajduković // Matematički vesnik. — 1975. — т. 12, № 59. — с. 245—249.

33. *Армарио*, *Р.*, *Гарсия-Пачеко*, *Ф.-Х.*, *Перес-Фернандес*, *Ф. Х.* О векторнозначных банаховых пределах / Р. Армарио, Ф.-Х. Гарсия-Пачеко, Ф. Х. Перес-Фернандес // Функциональный анализ и его приложения. — 2013. — т. 47, № 4. — с. 82—86.

34. *García-Pacheco*, *F. J.* Extremal properties of the set of vector-valued Banach limits / F. J. García-Pacheco // Open Mathematics. — 2015. — т. 13, № 1. — с. 000010151520150067.

35. *Гарсия-Пачеко*, *Ф.-Х.*, *Перес-Фернандес*, *Ф. Х.* Основные аспекты векторнозначных банаховых пределов / Ф.-Х. Гарсия-Пачеко, Ф. Х. Перес-Фернандес // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2016. — т. 80, № 2. — с. 33—46. — DOI: 10.4213/im8382.

36. *Chen*, *C.-P.*, *Kuo*, *M.-K.* Characterizations of almost convergent sequences in a Hilbert space or in $L^p(T)$ / C.-P. Chen, M.-K. Kuo // Taiwanese Journal of Mathematics. — 2007. — т. 11, № 4. — с. 1209—1219.

37. *Hajdukovic*, *D.* The functionals of the kind of Banach limits / D. Hajdukovic // Publications de L'Institut Mathematique. — 1975. — т. 19, № 33.

38. *Koga*, *T.* A generalization of almost convergence / T. Koga // Analysis Mathematica. — 2016. — т. 42, № 3. — с. 261—293.

39. *Robison*, *G. M.* Divergent double sequences and series / G. M. Robison // Transactions of the American Mathematical Society. — 1926. — т. 28, № 1. — с. 50—73.

40. *Hill*, *J.* Almost-convergent double sequences / J. Hill // Tohoku Mathematical Journal, Second Series. — 1965. — т. 17, № 2. — с. 105—116.

41. *Moricz*, *F.*, *Rhoades*, *B.* Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices / F. Moricz, B. Rhoades // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. т. 104. — Cambridge University Press. 1988. — с. 283—294.

42. *Başarir*, *M.* On the strong almost convergence of double sequences / M. Başarir // Periodica Mathematica Hungarica. — 1995. — т. 30. — с. 177—181. — DOI: `10.1007/BF01876616`.

43. *Mursaleen*, *Savaş*, *E.* Almost regular matrices for double sequences / Mursaleen, E. Savaş // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. — 2003. — т. 40, № 1/2. — с. 205—212.

44. *Edely*, *O. H.* [и др.]. Almost convergence and a core theorem for double sequences / O. H. Edely [и др.] // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2004. — т. 293, № 2. — с. 532—540.

45. *Mursaleen*, *M.* Almost strongly regular matrices and a core theorem for double sequences / M. Mursaleen // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2004. — т. 293, № 2. — с. 523—531.

46. *Mursaleen*, *M.*, *Mohiuddine*, *S. A.* Banach limit and some new spaces of double sequences / M. Mursaleen, S. A. Mohiuddine // Turkish Journal of Mathematics. — 2012. — т. 36, № 1. — с. 121—130. — DOI: `doi:10.3906/mat-0908-174`.

47. *Jerison*, *M.* The set of all generalized limits of bounded sequences / M. Jerison // Canadian Journal of Mathematics. — 1957. — т. 9. — с. 79—89.

48. *Семенов*, *Е.*, *Усачев*, *А.*, *Хорпяков*, *О.* Пространство почти-сходящихся последовательностей / Е. Семенов, А. Усачев, О. Хорпяков // Доклады Академии наук. — 2006. — т. 409, № 6. — с. 754—755.

49. *Усачев*, *А. С.* Преобразования в пространстве почти сходящихся последовательностей / А. С. Усачев // Сибирский математический журнал. — 2008. — т. 49, № 6. — с. 1427—1429.

50. *Connor*, *J.* Almost none of the sequences of 0’s and 1’s are almost convergent / J. Connor // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 1990. — т. 13, № 4. — с. 775—777.

51. *Semenov, E., Sukochev, F., Usachev, A., Zanin, D.* Banach limits and traces on $L_{1,\infty}$ / E. Semenov, F. Sukochev, A. Usachev, D. Zanin // Advances in Mathematics. — 2015. — т. 285. — с. 568—628.

52. *Семенов, Е. М., Усачев, А. С.* Коэффициенты Фурье–Хаара и банаховы пределы / Е. М. Семенов, А. С. Усачев // Доклады Академии наук. т. 425. — 2009. — с. 172—173.

53. *Струкова, И. И.* Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы / И. И. Струкова // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2015. — т. 3. — с. 161—165.

54. *Semenov, E. M., Sukochev, F. A.* Invariant Banach limits and applications / E. M. Semenov, F. A. Sukochev // Journal of Functional Analysis. — 2010. — т. 259, № 6. — с. 1517—1541.

55. *Семенов, Е., Сукочев, Ф., Усачев, А.* Структурные свойства множества банаховых пределов / Е. Семенов, Ф. Сукочев, А. Усачев // Доклады Академии наук. т. 441. — 2011. — с. 177—178.

56. *Eberlein, W. F.* Banach-Hausdorff limits / W. F. Eberlein // Proc. Amer. Math. Soc. — 1950. — т. 1. — с. 662—665. — ISSN 0002-9939.

57. *Damerau, F. J.* A technique for computer detection and correction of spelling errors / F. J. Damerau // Communications of the ACM. — 1964. — т. 7, № 3. — с. 171—176.

58. *Семенов, Е. М., Сукочев, Ф. А.* Характеристические функции банаховых пределов / Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев // Сибирский математический журнал. — 2010. — т. 51, № 4. — с. 904—910.

59. *Зволинский, Р.* Почти сходящиеся последовательности и операция возведения в положительную степень / Р. Зволинский // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2022. — т. 3. — с. 76—81.

60. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2004. — с. 720.

61. *Jerison, M.* The set of all generalized limits of bounded sequences / M. Jerison // Canad. J. Math. — 1957. — т. 9. — с. 79—89. — ISSN 0008-414X.

62. *Усачев, А. С.* Пространство почти сходящихся последовательностей и банаховы пределы : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Усачев Александр Сергеевич. — Воронежский государственный университет, 2009. — с. 93.

63. *Зволинский, Р. Е., Семёнов, Е. М.* Подпространство почти сходящихся последовательностей / Р. Е. Зволинский, Е. М. Семёнов // Сибирский математический журнал. — 2021. — т. 62, № 4. — с. 758—763.

64. *Luxemburg*, *W. A. J.* Nonstandard hulls, generalized limits and almost convergence / W. A. J. Luxemburg // Analysis and geometry. — Bibliographisches Inst., Mannheim, 1992. — с. 19—45.

65. *Wagner*, *R. A.*, *Fischer*, *M. J.* The string-to-string correction problem / R. A. Wagner, M. J. Fischer // Journal of the ACM (JACM). — 1974. — т. 21, № 1. — с. 168—173.

66. *Гасфилд*, *Д.* Строки, деревья и последовательности в алгоритмах: Информатика и вычислительная биология / Д. Гасфилд. — СПб.: Невский Диалект, 2003. — с. 590.

67. *Левенштейн*, *В. И.* Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов / В. И. Левенштейн // Доклады Академии наук. — 1965. — т. 163, № 4. — с. 845—848.

68. *Oommen*, *B. J.*, *Loke*, *R. K.* Pattern recognition of strings with substitutions, insertions, deletions and generalized transpositions / B. J. Oommen, R. K. Loke // Pattern Recognition. — 1997. — т. 30, № 5. — с. 789—800.

69. *Brill*, *E.*, *Moore*, *R. C.* An improved error model for noisy channel spelling correction / E. Brill, R. C. Moore // Proceedings of the 38th annual meeting of the association for computational linguistics. — 2000. — с. 286—293. — DOI: `10.3115/1075218.1075255`.

70. *Bard*, *G. V.* Spelling-error tolerant, order-independent pass-phrases via the Damerau-Levenshtein string-edit distance metric / G. V. Bard // Proceedings of the Fifth Australasian Symposium on ACSW Frontiers : 2007, Ballarat, Australia, January 30 - February 2, 2007, Conferences in Research and Practice in Information Technology. т. 68. — Australian Computer Society, Inc., 2007. — с. 117—124. — ISBN 978-1-920682-49-1.

71. *Li*, *M.*, *Zhu*, *M.*, *Zhang*, *Y.*, *Zhou*, *M.* Exploring distributional similarity based models for query spelling correction / M. Li, M. Zhu, Y. Zhang, M. Zhou // Proceedings of the 21st International Conference on Computational Linguistics and 44th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. — 2006. — с. 1025—1032. — DOI: `10.3115/1220175.1220304`.

72. *Bennett*, *G.*, *Kalton*, *N.* Consistency theorems for almost convergence / G. Bennett, N. Kalton // Transactions of the American Mathematical Society. — 1974. — т. 198. — с. 23—43.

73. *Семёнов*, *Е. М.*, *Сукочев*, *Ф. А.*, *Усачев*, *А. С.* Геометрические свойства множества банаховых пределов / Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2014. — т. 78, № 3. — с. 177—204.

74. *Fekete*, *M.* Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten / M. Fekete // Math. Z. — 1923. — т. 17, № 1. — с. 228—249. — ISSN 0025-5874. — DOI: `10.1007/BF01504345`. — URL: `https://doi.org/10.1007/BF01504345`.

75. *Полиа, Г., Сеге, Г.* Задачи и теоремы из анализа. т. 1 / Г. Полиа, Г. Сеге. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.

76. *Esi, D. A., Catalbas, M. N.* Almost convergence of triple sequences / D. A. Esi, M. N. Catalbas // Global journal of mathematical analysis. — 2014. — т. 2, № 1. — с. 6—10.

77. *Keller, G., Moore Jr, L.* Invariant means on the group of integers / G. Keller, L. Moore Jr // Analysis and geometry. — 1992. — с. 1—18.

78. *Semenov, E., Sukochev, F., Usachev, A., Zanin, D.* Invariant Banach limits and applications to noncommutative geometry / E. Semenov, F. Sukochev, A. Usachev, D. Zanin // Pacific Journal of Mathematics. — 2020. — т. 306, № 1. — с. 357—373.

79. *Семёнов, Е. М., Сукочев, Ф. А., Усачев, А. С.* Основные классы инвариантных банаховых пределов / Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2019. — т. 83, № 1. — с. 140—167.

80. *Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.* Classical Banach spaces. т. II / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. — Springer, 1979.

81. *Phillips, R. S.* On linear transformations / R. S. Phillips // Transactions of the American Mathematical Society. — 1940. — т. 48, № 3. — с. 516—541.

82. *Алехно, Е.* Некоторые специальные свойства функционалов Мазура. II / Е. Алехно // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. т. 2. — Труды Института математики НАН Беларуси, 2006. — с. 17—23.

83. *Whitley, R.* Projecting m onto c_0 / R. Whitley // The American Mathematical Monthly. — 1966. — т. 73, № 3. — с. 285—286.

84. *Carothers, N. L.* A short course on Banach space theory. т. 64 / N. L. Carothers. — Cambridge : Cambridge University Press, 2005. — с. xii+184. — (London Mathematical Society Student Texts). — ISBN 0-521-84283-2; 0-521-60372-2.

85. Why doesn't c_0 admit a complement in ℓ_∞? — URL: `https://math.stackexchange.com/questions/2467426/why-doesnt-c-0-admit-a-complement-in-l-infty/2467569#2467569?newreg=40275f990fb74edfbabb91d569e94c67`.

86. *Marchenko, V.* The generalized shift, transformation operators, and inverse problems / V. Marchenko // Mathematical Events of the Twentieth Century. — Springer, 2006. — с. 145—162. — ISBN 978-3-540-23235-3. — DOI: `10.1007/3-540-29462-7_8`.

87. *Lewitan, B.* Normed rings generated by the generalized operation of translation / B. Lewitan // CR (Doklady) Acad. Sci. URSS (NS). — 1945. — т. 47. — с. 3—6.

88. *Nillsen, R.* Nets of extreme Banach limits / R. Nillsen // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — т. 55, № 2. — с. 347—352. — ISSN 0002-9939.

89. *Semenov, E., Sukochev, F., Usachev, A., Zanin, D.* Dilation invariant Banach limits / E. Semenov, F. Sukochev, A. Usachev, D. Zanin // Indagationes Mathematicae. — 2020. — т. 31, № 5. — с. 885—892.

90. *Alekhno, E., Semenov, E., Sukochev, F., Usachev, A.* Invariant Banach limits and their extreme points / E. Alekhno, E. Semenov, F. Sukochev, A. Usachev // Studia Mathematica. — 2018. — т. 242, № 1. — с. 79—107.

91. *Talagrand, M.* Moyennes de Banach extrémales / M. Talagrand // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. — 1976. — т. 282, № 23. — Aii, A1359—A1362.

92. *Chou, C.* On the size of the set of left invariant means on a semi-group / C. Chou // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — т. 23. — с. 199—205. — ISSN 0002-9939.

93. *Carey, A., Phillips, J., Sukochev, F.* Spectral flow and Dixmier traces / A. Carey, J. Phillips, F. Sukochev // Advances in Mathematics. — 2003. — т. 173, № 1. — с. 68—113.

94. *Lord, S., Sukochev, F., Zanin, D.* Singular traces: theory and applications. т. 46 / S. Lord, F. Sukochev, D. Zanin. — Walter de Gruyter, 2012.

95. *Sukochev, F., Usachev, A.* Characterization of singular traces on the weak trace class ideal generated by exponentiation invariant extended limits / F. Sukochev, A. Usachev // Commentationes Mathematicae. — 2015. — т. 55, № 2.

96. *Sukochev, F., Usachev, A.* Dixmier traces and non-commutative analysis / F. Sukochev, A. Usachev // Journal of Geometry and Physics. — 2016. — т. 105. — с. 102—122.

97. *Асташкин, С. В., Семенов, Е. М.* Константы Лебега системы Уолша / С. В. Асташкин, Е. М. Семенов // Доклады Академии наук. — 2015. — т. 462, № 5. — с. 509.

98. *Асташкин, С. В., Семёнов, Е. М.* Константы Лебега системы Уолша и банаховы пределы / С. В. Асташкин, Е. М. Семёнов // Сибирский математический журнал. — 2016. — т. 57, № 3. — с. 512—526.

99. *Agnew, R. P.* Linear functionals satisfying prescribed conditions / R. P. Agnew // Duke Mathematical Journal. — 1938. — т. 4, № 1. — с. 55—77. — DOI: `10.1215/S0012-7094-38-00406-5`. — URL: `https://doi.org/10.1215/S0012-7094-38-00406-5`.

100. *Agnew, R. P., Morse, A. P.* Extensions of linear functionals, with applications to limits, integrals, measures, and densities / R. P. Agnew, A. P. Morse // Annals of Mathematics. — 1938. — с. 20—30.

101. *Guide, A. H.* Infinite dimensional analysis / A. H. Guide. — Springer, 2006.

102. *Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O.* Positive operators. т. 119 / C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw. — Springer Science & Business Media, 2006.

103. *Al Alam*, *I.* [и др.]. Essential norm of Cesàro operators on Lp and Cesàro spaces / I. Al Alam [и др.] // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2018. — т. 467, № 2. — с. 1038—1065. — ISSN 0022-247X. — DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.07.038`. — URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X18306206`.

104. *Седаев*, *А. А.* Геометрические и топологические аспекты интерполяционных пространств К-метода Петре : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.01 / Седаев Александр Андреевич. — Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, 2010.

105. *Edgar*, *G.* Measure, topology, and fractal geometry / G. Edgar. — Springer Science & Business Media, 2007.

106. *Falconer*, *K.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications / K. Falconer. — John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2003. — с. xxvii+337. — ISBN 9780470848616. — DOI: `http://dx.doi.org/10.1002/0470013850`.

107. *Davenport*, *H.*, *Erdös*, *P.* On sequences of positive integers / H. Davenport, P. Erdös // Acta Arithm. т. 2. — 1936. — с. 147—151. — DOI: `10.4064/aa-2-1-147-151`.

108. *Davenport*, *H.*, *Erdös*, *P.* On sequences of positive integers / H. Davenport, P. Erdös // J. Indian Math. Soc., New Series. — 1951. — т. 15. — с. 19—24. — DOI: `10.18311/JIMS/1951/17063`.

109. *Besicovitch*, *A.* On the density of certain sequences of integers / A. Besicovitch // Mathematische Annalen. — 1935. — т. 110, № 1. — с. 336—341. — DOI: `10.1007/BF01448032`.

110. *Hall*, *R. R.* Sets of Multiples / R. R. Hall. — Cambridge University Press, 1996. — (Cambridge Tracts in Mathematics). — DOI: `10.1017/CBO9780511566011`.

111. *Euler*, *L.* Variae observationes circa series infinitas / L. Euler // Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. — 1744. — т. 9. — с. 160—188.