Matematica Discreta

Nicolás Margenat

1Q 2021

Contents

1 Grafos

1.1 Definciones Previas

Definición 1. Grafo

Un grafo $G = (V, E)$ es una estructura matemática que consta de dos conjuntos V y E. Los elementos de V se llaman vértices o nodos y los elementos de E se llaman aristas. Cada arista tiene un conjunto de uno o mas vértices asociados que se llaman puntos extremos. $(V \neq \varnothing)$

Definición 2. Grafo Trivial

$\#V = 1 \wedge \#E = 0$

Definición 3. Lazo

Es una arista cuyos puntos extremos son coincidentes.

Definición 4. Arista propia

Es una arista que no es un lazo.

Definición 5. Multigrafo

Un grafo $G = (V, E)$ es un multigrafo si $\exists a \wedge b \in V$ con 2 o mas aristas incidentes en a y b. Caso contrario se llama $grafo\ simple$.

Definición 6. Grafo dirigido o digrafo

Es un grafo que tiene todas sus aristas dirigidas.

Definición 7. Multigrafo dirigido

Un grafo $G = (V, E)$ es un multigrafo si $\exists a, b \in V$ con 2 o mas aristas de la forma (a, b). Caso contrario se llama $digrafo\ simple$.
CUIDADO: $(a, b) \neq (b, a)$

Definición 8. Matriz de incidencia

La matriz de incidencia de un grafo G es la matriz I_G cuyas filas y columnas son indexadas por algun orden de V_G y E_G respectivamente, tal que:

$$I_G[v, e] = \begin{cases} 0 & \text{si v no es un extremo de e;} \\ 1 & \text{si v es un extremo de e;} \\ 2 & \text{si e es un lazo en v.} \end{cases}$$

Si es un digrafo;

$$I_D[v,e] = \begin{cases} 0 & \text{si v es un extremo de e;} \\ 1 & \text{si v es la cabeza de e;} \\ -1 & \text{si v es la cola de e;} \\ 2 & \text{si e es un lazo en v.} \end{cases}$$

Apuntes:

- Filas=vértices / Columnas=aristas
- I_G es de $\#V \times \#E$
- Grafos: Cada columna suma como máximo 2, pues cada arista tiene como máximo 2 vértices. La fila no tiene restricción.
- Digrafos: Cada columna suma 2(lazo) o suma 0(dirigido a una dirección).

Definición 9. Matriz de Adyacencia

La matriz de adyacencia de un grafo G es la matriz A_G cuyas filas y columnas son indexadas por algun orden de V_G, tal que:

$$A_G[u,v] = \begin{cases} \text{la cantidad de aristas entre ellos si} & u \neq v; \\ \text{la cantidad de lazos si} & v = u \end{cases}$$

Si es un digrafo:

$$A_D[u,v] = \begin{cases} \text{la cantidad de aristas desde u hasta v si} & u \neq v; \\ \text{la cantidad de lazos si} & v = u \end{cases}$$

Apuntes:

- $A_G = \#V \times \#V$
- Fila=Vértice / Columna=Vértice
- Grafo simple: Siempre son simétricos.
- Digrafo: NO son simétricos, si lo fuese estaríamos ante un grafo simple.

Observaciones:

- Sea G un grafo con una matriz de adyacencia A_G. Entonces $A_G^r(u,v)$ es igual a *la cantidad de caminos $u - v$ de longitud r* (Notar que $A_G^r(u,v)$ significa tomar el elemento (u,v) de la matriz de adyacencia elevada a la r).
- Sea D un grafo con una matriz de adyacencia A_D. Entonces $A_D^r(u,v)$ es igual a *la cantidad de caminos $u - v$ de longitud r.*

Definición 10. Grado

El grado de un vértice en un grafo G denotado $g(v)$ es el numero de aristas propias incidentes en v mas el doble del numero de lazos en v.
En un digrafo se define grado de salida de un vértice v $g_s(v)$ al número de aristas cuya cola esta en v mas el número de lazos, y el grado de entrada de un vértice v $g_e(v)$ al número de aristas cuya cabeza esta en v mas el número de lazos.

Definición 11. Grafo Completo

Es un grafo simple sin lazos tal que todo par de vértices estan unidos por una arista. Un grafo completo de n vértices se llama K_n

Definicion 12. Grafo Bipartito

Un grafo $G = (V, E)$ simple es bipartito si $V = V_1 \vee V_2$, $V_1 \wedge V_2 = \varnothing$ y cada arista de G es de la forma a, b donde $a \in V_1$ y $b \in V_2$. Si cada vértice de V_1 esta unido con todos los vértices de V_2, se tiene un grafo bipartito completo. En este caso si $\#V_1 = m$ y $\#V_2 = n$ se denota $K_{m,n}$.
Apuntes:

- Un grafo bipartito es único, se puede dibujar de distintas maneras pero es el mismo.
- $K_{2,4} = K_{4,2}$

Observaciones

- Para que un grafo sea bipartito debe existir 1 SOLA partición.
- La cantidad mínima de vértices de un grafo bipartito es 2.

Definición 13. Grafo regular

Todos los vértices tienen el mismo grado. Se llama $k - regular$ si todos los vértices tienen grado k.
Apuntes:

- $\forall K_n$ es "n-1 - regular"

Definición 14. Subgrafo

Un subgrafo de un grafo G (dirigido o no) es un grafo H, que cumple que $V_H \subseteq V_G \wedge E_H \subseteq E_G$.

Definición 15. Subgrafo recubridor

H es un subgrafo recubridor de G si $V_G = V_H$

Definición 16. Subgrafo Inducido

Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no). Si $\varnothing \neq U \subseteq V \Rightarrow$ el subgrafo de G inducido por U es el subgrafo cuyo conjunto de vértices es U y que contiene todas las aristas de G de la forma:

1. (x, y) para $x, y \in U$ si es dirigido
2. $\{x, y\}$ para $x, y \in U$ si es no dirigido

Notación: $G(U) =< U >$
Observación: Si el grafo es *recubridor* $\wedge$ *inducido* entonces es el grafo original

Definición 17. Borrado de un vértice

Si v es un vértice de un grafo G (dirigido o no), entonces $G - v$ es el subgrafo inducido por el conjunto de vértices $V_G - v$. En general, el resultado de borrar iterativamente todos los vértices de $U \subseteq V_G$ se denota $G - U$.

Definición 18. Borrado de una arista

Si e es una arista del grafo G (dirigido o no), entonces $G - e$ es el subgrafo cuyo conjunto de aristas es $E_G - e$ y el conjunto de vértices es V_G.

Definición 19. Agregado de un vértice

Agregar un vértice v a un grafo G, donde $v \notin V_G$ significa crear un supergrafo denotado $G \vee v$ donde el conjunto de vértices es $V_G \vee v$ y el conjunto de aristas es E_G.
CUIDADO: NO es lo mismo que la suma.

Definición 20. Agregado de una arista

Agregar una arista e entre dos vértices v y u del grafo G significa crear un supergrafo denotado $G \vee e$ donde el conjunto de vértices es V_G y el conjunto de aristas es $E_G \vee e$.
Es decir, se agrega una arista SÓLO entre vértices que ya pertenecen al grafo.

Definición 21. Suma de grafos

Sean G y H dos grafos. Sumando G y H se obtiene:

$$V_{G+H} = V_G \cup V_H \text{ y } E_{G+H} = E_G \cup E_H \cup e = u, v / u \in V_G, v \in V_H$$

Es decir, se conectan todos los vértices de un grafo, con todos los del grafo que se le suma.

Definición 22. Complemento

El complemento de G (grafo simple sin lazos no dirigido), que se denota G^C o $\bar{G}$ es el subgrafo de K_n formado por los n vértices de G y todas las aristas que no estan en G.

Definicion 23. Isomorfismo de Grafos

Sean $G_1(V_1, E_1)$ y $G_2(V_2, E_2)$ dos grafos no dirigidos, una función $f : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de grafos si:

1. f es biyectiva
2. $\forall a, b \in V_1$, $a, b \in E_1 \;\Leftrightarrow\; f(a), f(b) \in E_2$ (Preserva adyacencias, es decir tienen la misma matriz de adyacencia)

Cuando existe dicha funcion, G_1 y G_2 son grafos isomorfos. Cada clase de equivalencia se llama tipo de isomorfismo.
Notación: $G_1 \approx G_2$.
Apuntes: Básicamente, "dos grafos son isomorfos si son el mismo grafo dibujado distinto".

Definición 24. Camino

Un camino desde el vértice v_0 al vértice v_n es una secuencia alternada $w =< v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n >$ de vértices y aristas donde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ con $i = 1, ..., n$.
Notación: camino $v_0 - v_n$
Apuntes:

- Puedo repetir vértices o aristas pero NO puedo saltearme vértices.
- Los caminos pueden indicarse nombrando sólo la secuencia de vértices si el grafo es simple de lo contrario hay que indicar las aristas. También podemos indicarlos mostrando la secuencia de aristas que recorre el camino. Si lo único que interesa es decir que hay un camino entre un par de vértices podemos decir camino $v_0 - v_n$.

Definición 25. Camino directo

Un camino directo en un digrafo de v_0 a v_n es una secuencia alternada $w =< v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n >$ de vértices y aristas donde $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ con $i = 1, ..., n$.
Notación: camino directo $v_0 - v_n$
Apuntes:

- No es un camino directo si las flechas no me llevan. Por lo tanto puedo repetir vértices siempre y cuando la dirección de las aristas me lo permitan.

Defınción 26. Longitud

La longitud de un camino o camino directo es el numero de aristas que recorre el camino.

Defınción 27. Cerrado

Un camino o camino directo $x-y$ es cerrado si $x = y$, de lo contrario es abierto.

Defınción 28. Concatencación

La concatenación de dos caminos $w_1 =< v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{k-1}, e_k, v_k >$ y $w_2 =< v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, ..., v_{n-1}, e_n, v_n >$ tal que w_2 empieza donde termina w_1 es el camino w_1 o $w_2 =< v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n >$.
Notación: camino $v_0 - v_n$
Apuntes:

- Para poder concatenar grafos/subgrafos, TIENEN que tener vértices en común.

- La longitud final (i.e. luego de concatenar) es: $\#E(w_1) + \#E(w_2)$

Defınción 29. Subcamino

Un subcamino de $w =< v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n >$ es una subsecuencia de entradas consecutivas $s =< v_j, e_{j+1}, v_{j+1}, e_{j+2}, ..., v_{k-1}, e_k, v_k >$ con $0 \leq j \leq k \leq n$ que comienza y termina en un vértice. Un subcamino es en sí mismo un camino.
Apuntes:

- Todo camino es subcamino de si mismo.

- La longitud de un subcamino es $\leq$ a la del camino original.

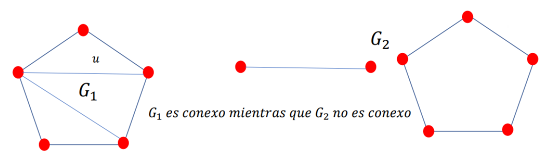
Defición 30. Vértice alcanzable

Un vértice v es alcanzable desde un vértice u si $\exists$ un camino $u - v$.
Apuntes:

- Es una relación de equivalencia (en un grafo, no necesariamente en un digrafo). Por lo tanto es R, S y T.
- No quiere decir que hay una arista que une dos vértices, quiere decir que hay un camino entre ellos.

Definición 31. Conexidad

Un grafo es conexo si $\forall$ par de vértices u y v hay un camino $u - v$. En otras palabras, "para todo par de vértices de un grafo siempre hay un camino que los une".



Definición 32. Digrafo Conexo

Un digrafo es conexo si al considerarlo no dirigido es conexo (*Conexidad debil*).
Un digrafo es *fuertemente conexo* si todo par de vértices en el digrafo es mutuamente alcanzable. Dos vértices u y v son mutuamente alcanzables si existen en el digrafo un camino directo $u - v$ y un camino directo $v - u$.
Apuntes:

- Si puedo probar que hay un *camino directo cerrado* que pasa por todos los vértices del grafo, entonces el grafo es fuertemente conexo.

Definición 33. Distancia

En un grafo la distancia de s a t es la longitud del camino mas corto de s a t o infinito si no hay camino.
En los digrafos la distancia directa es el largo del camino directo mas corto.
Notación: $d(s,t)$

Definición 34. Reducción de un camino

Dado un camino $w = < v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n >$ que contiene un subcamino cerrado $\widetilde{w} = < v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, ..., v_{m-1}, e_m, v_m >$ la reducción de w por $\widetilde{w}$ denotada por $w - \widetilde{w}$ es el camino $w - \widetilde{w} = < v_0, e_1, ..., v_{k-1}, e_k, v_k, v_{m+1}, e_{m+1}, ..., v_{n-1}, e_n, v_n >$, es decir que borra todas las aristas y vértices de $\widetilde{w}$ menos v_k.
En otras palabras, "reducir un camino es quitarle un subcamino cerrado (o parte de él) sin romper el camino".

Definición 35. Recorrido (Trail)

Es un camino que no repite aristas.

Definición 36. Camino Simple (Path)

Es un camino que no repite vértices.
Observación: Todo camino simple es un recorrido, pero no al revés.

Definición 37. Circuito

Es un recorrido cerrado.

Definición 38. Ciclo (Cycle)

Es un camino simple cerrado en el que se repite un unico vértice (el primero, que es tambien el último).
Observación: Todo ciclo es circuito, pero no al revés.

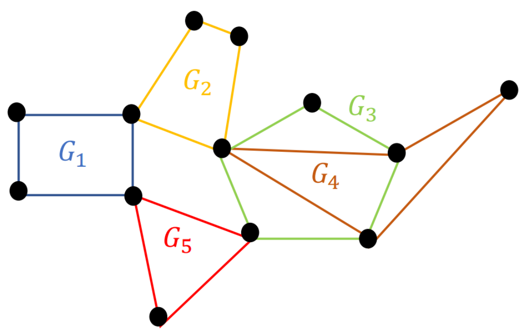
Definición 39. Colección de ciclos de aristas disjuntas

FINAL (no tan importante)
Una colección de ciclos de aristas disjuntas $G_1, G_2, ..., G_m$ es llamada una descomposición de un circuito T si los G_i son subcaminos de T y $E_T = \cup_1^m E_{Gi}$ y $\cap_1^m E_{Gi} = \varnothing$.
Observación:

- SI HAY VÉRTICES DE GRADO IMPAR ENTONCES NO ES UN CIRCUITO.
- Todo circuito se puede descomponer en ciclos de aristas disjuntas.
- La colección de ciclos de aristas disjuntas NO es única.

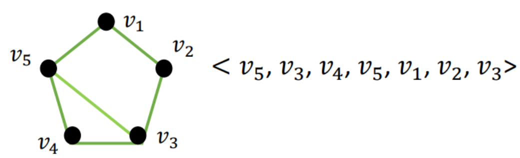
Apuntes:

- Ciclos de aristas disjuntas = Los ciclos no comparten aristas.
- Si tengo una colección de aristas disjuntas entonces puedo pasar por todos los vértices sin pasar por todas las aristas. Tambien puedo recorrer todas las aristas sin repetirlas.



Definición 40. Recorrido Euleriano

Un recorrido euleriano en un grafo es un recorrido que contiene todas las aristas del grafo.

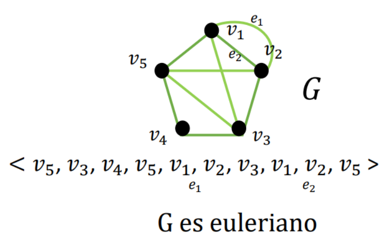


Definición 41. Circuito Euleriano

Un recorrido euleriano en un recorrido euleriano cerrado.

Definición 42. Grafo Euleriano

Es un grafo que tiene un circuito euleriano.

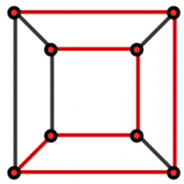


Definición 43. Camino Hamiltoniano

Es un camino simple (no ciclo) en el grafo que contiene todos sus vértices.
Apuntes:

- Todos los P_n son caminos hamiltonianos.

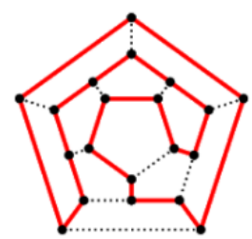
- Para buscar el ciclo de longitud mas corto, si encontras un subgrafo K_3 entonces ya está; sino buscas un C_4.

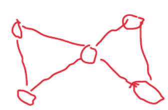


El camino rojo marca el camino hamiltoniano.

Definición 44. Ciclo Hamiltoniano
Si G es un grafo o multigrafo y $\#V \geq 3$ decimos que G tiene un ciclo hamiltoniano si existe un ciclo en G que contenga cada vértice de V.
<u>Apuntes</u>:

- Cualquier K_n tiene un ciclo hamiltoniano.
- La *conexidad* es una condición necesaria pero no suficiente para que un grafo sea un ciclo hamiltoniano.
- Preg. de Final: Dibuje un grafo que sea un camino hamiltoniano pero no un ciclo hamiltoniano. RESP: dibujar el moñito.

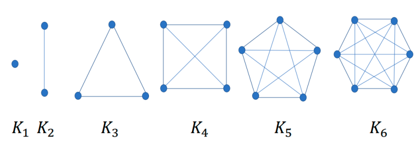




1.2 Grafos Famosos

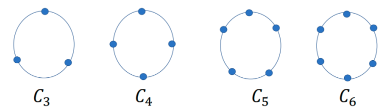
K_n **(Completos)**

- $\#V = n$
- $\#E = \frac{n(n-1)}{2}$
- $n-1$ regular
- $K_n = K_{n-1} + v_n$



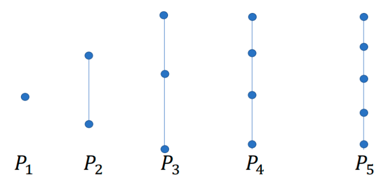
C_n **(Ciclos)**

- $\#V = n$
- $\#E = n$
- 2-regular
- $C_n = P_n + e$ con $n \geq 3$



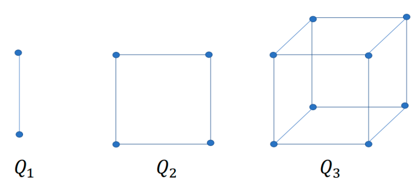
P_n **(Caminos)**

- $\#V = n$
- $\#E = n - 1$
- No es regular salvo P_1 y P_2



Q_n **(Cubos)**

- $\#V = 2^n$
- $\#E = n2^{n-1}$
- n-regular



1.3 Proposiciones

1. Sea el grafo $G(V, E)$ y sean $v_i \in V$ los vértices del grafo G, y $n = \#V$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) \;=\; 2\#E \qquad \text{(cada arista aporta 2 a la suma de grados)}$$

2. La cantidad de vértices de grado impar es par.
3. En un Digrafo la suma de los grados de entrada(o de salida) de los vértices es igual a la cantidad de aristas del digrafo.
4. Todo camino abierto $x - y$ es un camino simple o contiene un subcamino cerrado.
5. Sea $x - y$ un camino abierto, entonces $x - y$ es un camino simple o puede reducirse a un camino simple.
6. Un grafo es bipartito $\Leftrightarrow$ el grafo no contiene ciclos de longitud impar.
7. Todo circuito (consideramos al menos una arista) contiene un subcamino que es un ciclo.

8. Todo circuito se puede descomponer en ciclos (aca consideramos a partir de C_1) de aristas disjuntas.

9. Sea G un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados, entonces:

G es euleriano (en si mismo un circuito) $\Leftrightarrow$ G es conexo y todos sus vertices tienen grado par.

10. Sea G un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados, entonces:

G tiene un recorrido euleriano (no circuito) $\Leftrightarrow$ G es conexo y tiene exactamente 2 vertices de grado impar.

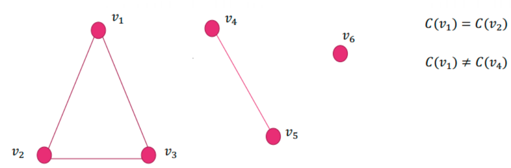
2 Conexidad

TODO SIN LAZOS

2.1 Definiciones Previas

Definición 1. Componente de un grafo

Se llama *componente de un grafo* a un subgrafo conexo maximal del mismo o a los vértices aislados. Es decir, si H es una componente entonces no es un subgrafo propio de ninguna subgrafo conexo de G.



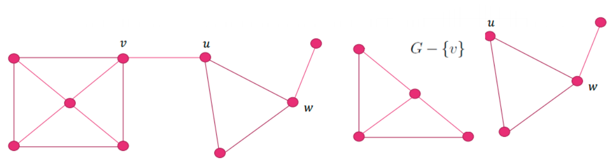
Definición 2. Componente de un vértice

Es el subgrafo inducido por todos los vértices alcanzables por v.
Notación: $C(v)$
Observaciones:

- Si definimos $X \sim Y$ (X se relaciona con Y), si Y es alcanzable por X (en un grafo) $\Rightarrow$ es una relación de equivalencia.
- Si $x \in C(v) \Rightarrow C(x) = C(v)$. Básicamente da lo mismo como llames a la componente.

Definicion 3. Vertice de corte/Punto de articulacion

Un vértice es de corte en un grafo G, si la cantidad de componentes conexas de $G - \{v\}$ es mayor que la cantidad de componentes conexas de G.
En otras palabras, es vértice de corte si cuando lo saco tengo mas componentes que antes.



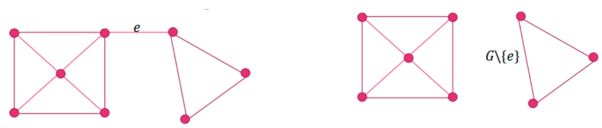
v, u y w son vértices de corte

Teorema

En un grafo conexo G, v es vértice de corte $\Leftrightarrow \exists u, \in V_G$, $u \neq v \neq w/$ todo camino de $u - w$ contiene a v.

Definición 4. Arista de corte/Arista puente

Una arista e es de corte, si la cantidad de componentes conexas de $G - \{e\}$ es mayor que la cantidad de componenetes conexas de G.



Observación

- Si tenemos la arista de corte $e = \{u, v\}$, entonces v es vértice de corte si $g(v) \gneq 1$.

Teorema 2.A
En un grafo conexo G, e es una arista de corte $\Leftrightarrow$ $e \notin$ a un ciclo de G

Definicion 5. Conexidad por vertices

Es la cantidad mínima de vértices que hay que remover del grafo G para que deje de ser conexo o se transforme en el grafo trivial.
Notación: $K_v(G)$
Observaciones:

- Si un grafo NO es conexo $\Rightarrow$ $K_v(G) = 0$
- Si $K_v(G) \geq k$ $\Rightarrow$ se dice que G es k-conexo.
- Si un grafo es k-conexo $\Rightarrow$ $\#V_G \gneq k$

Apuntes:

- $K_v(K_n) = n - 1$
- Otra manera de ver la definición es, si un grafo es k-conexo, puedo sacarle $k - 1$ vertices y sigue siendo conexo.
- Si $K_v(G) = 2$ podemos decir que es 2-conexo o 1-conexo(conexo), pero NO podemos decir que es 3-conexo.
- El grafo puede convertirse en el grafo trivial.

Teorema 2.B
Sea G un grafo k-conexo con $k \geq 3$ $\Rightarrow$ $G - e$, $e \in E_G$ es $(k-1)$-conexo.

Corolarios T2.B

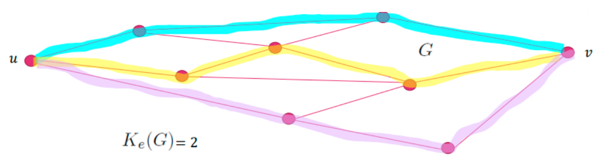
1. Sea G k-conexo, y S un conjunto de $(k-1)$ aristas $\Rightarrow$ $G-S$ es conexo.
2. Sea G k-conexo, y S un conjunto de $m \lneq k$ aristas $\Rightarrow$ $G-S$ es $(k-m)$ conexo.
3. Sea G un grafo conexo, la conectividad por aristas es $\geq$ que la conectividad por vértices.

Definición 6. vértice Interno

Dado un camino simple P en un grafo G, v es vértice interno si no es ni el inicial ni el final.

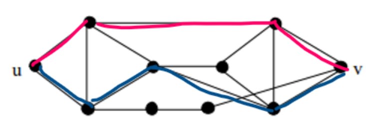
Definición 7. Colección de caminos internamente disjuntos

Sean u, v vértices de G, una colección de caminos internamente disjuntos $u - v$ (simples) es un conjunto de caminos tales que ningún par de ellos tiene vértices internos en común.



Apuntes:

- Internamente Disjuntos = disjuntos por aristas Y por vértices.
- La máxima cantidad de caminos internamente disjuntos es el $min(K_v) = u, v$, siendo u y v los extremos del grafo.



Posibles preguntas de Final

- $K_e(G)$ es igual al mínimo grado de G? NO
- Si G es K_n-regular entonces el $K_e(G)$ = grado? NO
- Dibujar un grafo K_n-regular con $K_e(G) = 2$

Definición 8. Conexidad por aristas

Es la cantidad mínima de aristas que hay que remover del grafo G, para desconectarlo.
Notación: $K_e(G)$
Observaciones:

- $K_e(G) \geq k \Rightarrow$ se dice que G es k-aristas conexo.

Apuntes:

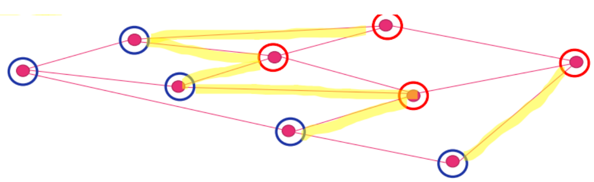
- No se puede transformar en el grafo trivial (a diferencia de la conexidad por vértices)

Definición 9. Partición por corte de aristas

$< X_1, X_2 >$: x_i es un conjunto de vértices del grafo G, que cumple:

$$X_1 \cup X_2 = V_G \text{ y } X_1 \cap X_2 = \varnothing.$$

$< X_1, X_2 >= \{e = \{u, v\} / u \in X_1 \wedge v \in X_2$



donde X_1 son los vértices azules, X_2 los rojos y $< X_1, X_2 >$ esta resaltado en amarillo.

Definición 10. Adición de un camino simple

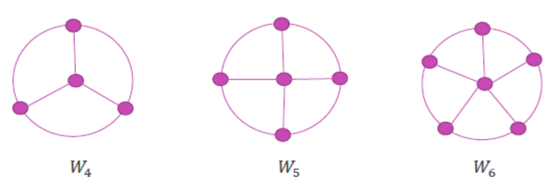
Dado un grafo G, adicionar un camino simple a G, es agregar un camino simple a G entre un par de vértices de G, de modo que los vértices internos del camino no pertenezcan a G.

Definición 11. Grafo Rueda

Se obtiene un grafo rueda al sumarle un vértice a C_{n-1}

$$W_n = C_{n-1} + v \text{ con } n \geq 4$$

Notación: W_n



2.2 Teoremas

2.2.1 Teorema de Whitney

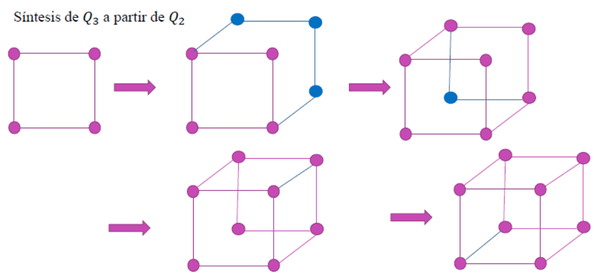
Sea G un grafo conexo con 3 o mas vértices, entonces G es 2-conexo $\Leftrightarrow$ $\forall$par de vértices u, v en G, hay por lo menos 2 caminos internamente disjuntos que los une.

Corolario del Teorema de Whitney

Sea G un grafo con, por lo menos 3 vértices $\Rightarrow$ G es 2-conexo $\Leftrightarrow$ $\forall$ par de vértices de G, hay un ciclo que los contiene.

Síntesis de Whitney

De un grafo G desde un grafo H. Es una secuencia de grafos $G_0, ..., G_L$ donde $G_0 = H$, $G_L = G$ y G_i se obtiene de adicionar un camino simple al $G_i - 1$.



Lemas

1. Sea H un grafo 2-conexo $\Rightarrow$ el grafo G que resulta de adicionar a H un camino tambien es 2-conexo.

2. Sea H un subgrafo de un grafo G 2-conexo, y sea e una arista del $E_G - E_H$ $\Rightarrow$ se puede adicionar un camino simple a H que contiene dicha arista.

Teorema

Un grafo G es 2-conexo $\Leftrightarrow$ G es un ciclo o una síntesis de Whitney de un ciclo.

Caracterizacion de los grafos 2-conexos

Sea G un grafo conexo con por lo menos 3 vértices. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El grafo G es 2-conexo.

2. $\forall$ par de vértices de G, $\exists$ un ciclo en G que contiene a ambos.

3. $\forall$ par de un vértice y una arista de G, $\exists$ un ciclo en G que contiene a ambos.

4. $\forall$ par de aristas de G, $\exists$ un ciclo en G que contiene a ambas.

5. $\forall$ par de vértices y una arista de G, $\exists$ un camino simple en G que contiene a los 3.

6. $\forall$ conjunto de 3 vértices distintos de G, $\exists$ un camino simple en G que contiene a los 3.

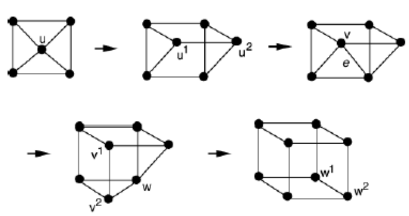
7. $\forall$ conjunto de 3 vértices distintos de G, $\exists$ un camino simple en G que contiene a dos de ellos y no contiene al tercero.

2.2.2 Teorema de Tutte

Es para reconocer grafos 3-conexos.
Un grafo G es 3- conexo $\Leftrightarrow$ es un W_n o se obtiene a partir de un W_n, por una secuencia de operaciones:

1. Adición de una arista entre vértices de un grafo.

2. Reemplazo de un vértice v tal que $g(v) \geq 4$, por 2 vértices unidos por una arista, de modo que cada vértice adyacente al original, es ahora adyacente a uno de los dos nuevos vértices, y sólo a uno, con la condición de que el grado de cada nuevo vértice sea $g(vi) \geq 3$.



Síntesis de Tutte de Q_3 por lo tanto Q_3 es tres conexo

2.2.3 Teorema de Menger

G grafo conexo $u, v \in V_G$ no adyacentes $\Rightarrow$ la máxima cantidad de caminos internamente disjuntos entre u y v es igual a la mínima cantidad de vértices que hay que sacar para desconectar u y v.

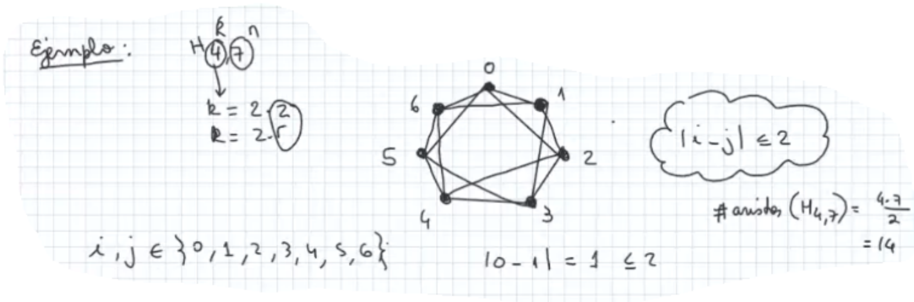
2.2.4 Grafos de Harary

$H_{k,n}$ es el grafo de Harary k-conexo, con n vertices y $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$ aristas $(k \geq 2)$

Caso 1. k **par**

Sea $k = 2r$

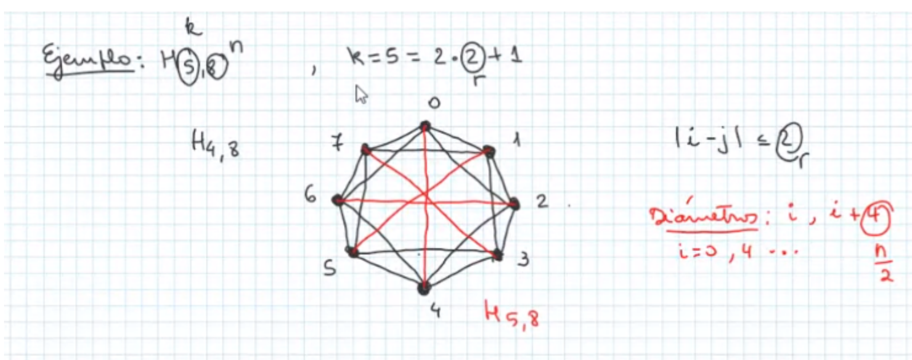
Los vértices i, j son adyacentes si $\underbrace{|j-i|_n}_{\min\{|j-i|;\ n-|j-i|\}} \leq r$



Caso 2. k **impar y** n **par**

Sea $k = 2r + 1$

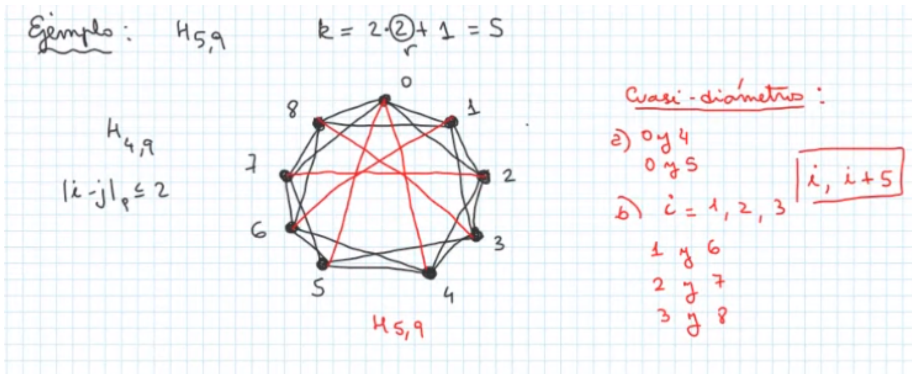
1. $H_{2r,n}$ (osea se cumple el Caso 1)
2. Se agregan *diámetros*, o sea: una arista entre los vértices i e $i + \frac{n}{2}$ para $i = 0, 1, ..., \frac{n}{2} - 1$



Caso 3. k **impar y** n **impar**

Sea $k = 2r + 1$

1. $H_{2r,n}$ (osea se cumple el Caso 1)
2. Se agregan *cuasi-diámetros*, o sea:
   (a) Dibujar una arista desde 0 al $\frac{n-1}{2}$ y del 0 al $\frac{n+1}{2}$
   (b) Dibujar una arista desde i al $i + \frac{n+1}{2}$ para $i = 1, 2, ..., \frac{n-3}{2}$

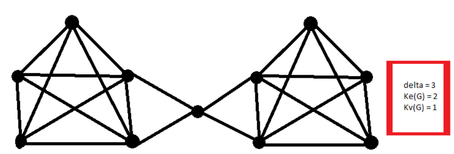


2.3 Proposiciones

1. Sea G un grafo conexo y $\delta = min\{g(v_i)\}$ $\forall v_i \in V_G$ $\Rightarrow$ $K_e(G) \leq \delta$.

2. Se un grafo es k-aristas conexo $\Rightarrow$ toda partición por corte tiene, por lo menos, k aristas.

3. $\delta >= K_e(G) >= K_v(G) >= k$
(Posible pregunta de final: Dibujar un grafo donde se cumpla la desigualdad estricta)



4. Sea $h_k(n)$ la minima cantidad de aristas necesarias para un grafo k-conexo con n-vertices $\Rightarrow$ $h_k(n) \geq \lceil \frac{kn}{2} \rceil$.

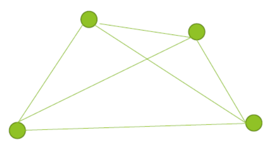
3 Planaridad

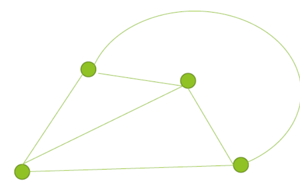
3.1 Definiciones Previas

Definición 1. Grafo Plano

Un grafo es plano si puede dibujarse en el plano de modo que sus aristas se intersequen solo en los vértices de G. Es decir, es un grafo que no tiene aristas que se intersecan.
Función inmersión en el plano:

$$i : G \to S$$





Definición 2. Región

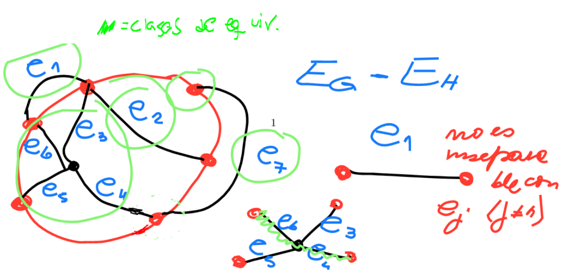
Cuando realizamos la inmersión plana de un grafo G el plano queda dividido en regiones contiguas llamadas caras o simplemente regiones.

Definición 3. Grado de una Región

Número de aristas recorridas en un camino cerrado(el más corto) por las aristas de las fronteras de R.
Es decir, la cantidad de aristas que hay en la frontera de la región.
Notación: $g(R)$

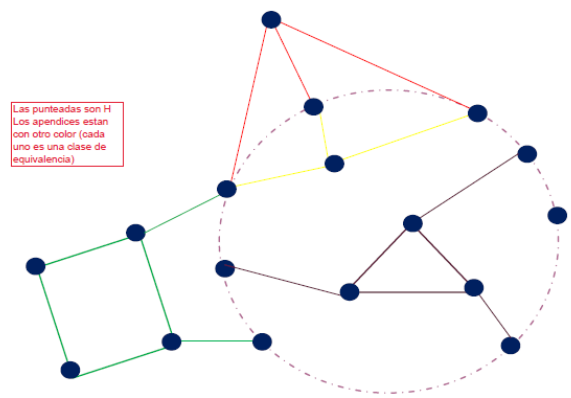
Definición 4. Aristas inseparables

Sea H un subgrafo de un grafo conexo G. Dos aristas e_1 y e_2 del conjunto de aristas $E_G - E_H$ son *inseparables* por H si existe un camino interno en G que contiene ambas aristas pero cuyos vértices internos no estan en H.
Observación: La relación de inseparables por H es una relación de equivalencia sobre $E_G - E_H$.



Definición 5. Apéndice de un grafo

Sea H un subgrafo de un grafo G. Entonces un *apéndice de* H es el subgrafo inducido sobre una clase de equivalencia de aristas de $E_G - E_H$ bajo la relación de inseparables.
Es decir, es el conjunto de aristas y vértices de una clase de equivalencia.
Observación: Siempre se tiene que poder representar a todo el grafo G a partir de los apéndices mas H.

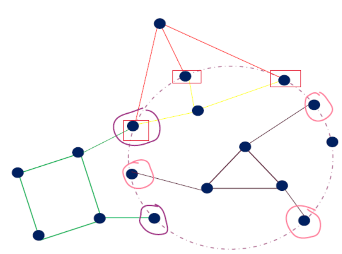


Definición 6. Cuerda de un grafo

Apéndice que tiene una sola arista. Une dos vértices de H pero no esta en H. Es decir, es una clase de equivalencia que tiene un sólo elemento (una sola arista).

Definición 7. Punto de contacto

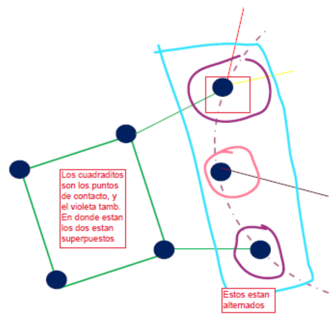
Sea H un subgrafo de un grafo G y sea B un apéndice de H. Entonces un *punto de contacto de* B es un vértice de $B \cap H$.



Definición 8. Superposición de apéndices

Sea C un ciclo en un grafo G. Los apéndices B_1 y B_2 de C se superponen si ocurre alguna de las siguientes condiciones:

1. Dos puntos de contacto de B_1 alternan con 2 puntos de contacto de B_2 sobre un ciclo C.
2. B_1 y B_2 tienen 3 puntos de contacto en común.



3.2 Algoritmo de Planaridad

1. Sea H un subgrafo de un grafo G. En un dibujo plano de H, un **apéndice de H no puede dibujarse en una región** R si la frontera de R no contiene todos los puntos de contacto del apéndice.
2. Sea H un subgrafo de un grafo G. En un dibujo plano de H, un **apéndice de H esta bloqueado** si dicho apéndice no puede dibujarse en ninguna region.
3. Sea H un subgrafo de un grafo G. En un dibujo de H sobre alguna superficie, un **apéndice de H esta forzado al interior de** R, si R es la unica región cuya frontera contiene todos los puntos de contacto del apéndice.

Algoritmo

Entrada: Un grafo G 2-conexo.
Salida: Un dibujo plano de G o Imprime que el grafo no es plano.

1- Encuentre un ciclo arbitrario G_0 en G y dibújelo en el plano.
2- WHILE ($G_j \neq G$)
3- {
4- IF (algún apéndice está bloqueado) THEN PRINT "El grafo no es plano"; RETURN.
5- IF (algún apéndice está forzado) THEN B:= dicho apéndice ELSE B:=cualquier apéndice.
6- R:=región que contiene todos los puntos de contacto de B en su frontera.
7- Seleccione un camino simple entre dos puntos de contacto de B y dibuje ese camino dentro de R para obtener $G_j + 1$.

8- }
9- RETURN el dibujo plano de G

3.3 Homeomorfismo

Dos grafos G y H son homeomorfos si son isomorfos o si ambos pueden obtenerse del mismo grafo por una sucesión de subdivisiones elementales. La relación de Homeomorfismo es una relación de equivalencia (es R, S y T).
Notación: $G \sim_H H$
Observación: El homeomorfismo NO MODIFICA la planaridad.

3.3.1 Operaciones

Subdivisión elemental de una arista

Sea $e = \{u, v\}$ una arista del grafo G. Subdividir e significa agregar w a V_G y reemplazar e por $e_1 = \{u, w\}$ y $e_2 = \{u, w\}$

Remover débilmente un vértice

Es la operación inversa a la anterior.
Sea w un vértice de grado 2 en $G / e_1 = \{u, w\}$ y $e_2 = \{u, w\}$ son las aristas incidentes en él, remover débilmente w significa sacar w de V_G y reemplazar e_1 y e_2 por la arista $e = \{u, v\}$.

3.4 Teoremas

3.4.1 Teorema de Euler

FINAL Sea un grafo G plano, conexo con v vértices, e aristas y r el número de regiones en el plano determinadas por una inmersión plana de G

$$\Rightarrow \; v - e + r = 2$$

Nota: Cuenta como región infinita la región exterior al grafo.

3.4.2 Teorema

Si el grafo G contiene un subgrafo H que no es plano $\Rightarrow$ G no es plano.

3.4.3 Teorema de Kuratowski

Un grafo no es plano $\Leftrightarrow$ contiene un subgrafo homeomorfo K_5 o $K_{3,3}$.

3.5 Proposiciones

1. Sea un grafo G plano, conexo con v vértices, e aristas y r el número de regiones en el plano determinadas por una inmersión plana de G

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} g(R_i) = 2e$$

   Cada arista pertenece a la frontera de dos regiones o se cuenta dos veces en la frontera de una misma región (vértice colgante)

2. Sea G un grafo plano, conexo, sin lazos, simple y con al menos 3 aristas:

$$\Rightarrow \; e \leq 3v - 6$$

3. Sea G un grafo plano, conexo y bipartito:

$$\Rightarrow \; e \leq 2v - 4 \text{ con } e \geq 2$$

   Nota: Si es bipartito conexo y plano $\Rightarrow$ es simple, conexo, plano y sin lazos (NO PASA VICEVERSA).

4. Si el grafo G es homeomorfo o isomorfo al grafo H, entonces:

$$H \text{ es plano } \Leftrightarrow \; G \text{ es plano}$$

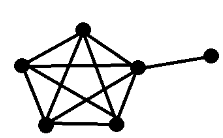
5. Sea C un ciclo en un dibujo plano de un grafo y sean B_1 y B_2 apéndices superpuestos de C $\Rightarrow$ Los apéndices NO pueden estar ambos del mismo lado del ciclo en el plano.

6. Sea $i : H \to S_0$ un dibujo plano de un subgrafo H de un grafo G, tal que H tiene un apéndice bloqueado B $\Rightarrow$ no es posible extender $i : H \to S_0$ a un dibujo plano de G.

7. Un grafo es plano $\Leftrightarrow$ todos sus bloques son planos.

3.6 Posibles preguntas de Final

1. Dibujar un grafo donde se cumpla la condición del corolario de Euler y no sea plano.
   Respuesta:



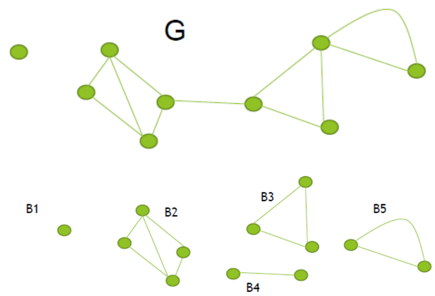
2. G plano conexo, simple, sin lazos entonces que se cumple?
   Respuesta: Se cumple que la cantidad de aristas es menor/igual a 3v-6

4 Bloques

4.1 Definiciones Previas

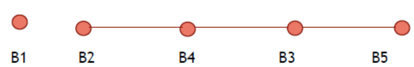
Definición 1. Bloque

Un bloque de un grafo sin lazos es un subgrafo conexo maximal H tal que ningún vértice de H es un vértice de corte de H.
Si un bloque *tiene por lo menos 3 vértices es 2-conexo.* Los únicos otros tipos de bloque son aislados o dipolos.



Definición 2. Grafo Bloque

Es un grafo donde los vértices representan los bloques de G y estos vértices estan unidos por una arista simple si los bloques en G tienen un vértice en común.
Notación: BL(G)



Definición 3. Bloque hoja

Es un bloque que contiene exactamente un vértice de corte de G.
En la imagen anterior los Bloques Hoja son los vértices de grado 1, osea B2 y B5.

4.2 Proposiciones

1. Todo grafo conexo G no trivial contiene 2 o mas vértices que no son de corte.

2. Dos bloques no conexos de un grafo G deben tener como mucho un vertice en comun.

3. Si un grafo G tiene por lo menos un vértice de corte $\Rightarrow$ G tiene por lo menos dos bloques hojas.

4.3 Corolarios

1. El conjunto de aristas de los bloques de un grafo G es una partición del conjunto E_G.

2. Sea x un vértice de $G \Rightarrow x$ es vértice de corte de $G \Leftrightarrow x$ esta en bloques diferentes de G.

3. Sean B_1 y B_2 bloques distintos de un grafo conexo G, y_1 e y_2 vértices de B_1 y B_2 respectivamente tal que ninguno es vértice de corte de $G \Rightarrow y_1$ NO es adyacente a y_2.

5 Coloreo

TODO SIN LAZOS

5.1 Definiciones Previas

Definición 1. **k-coloreo de vértices**

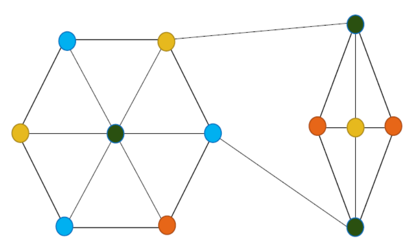
Es un coloreo que usa exactamente k colores ($k \in \mathbb{N}$).

Definición 2. **Coloreo propio**

Vértices adyacentes tienen colores distintos.

Definición 3. **k-coloreable**

Un grafo G es k-coloreable si tiene un k-coloreo propio



Definición 4. **Clase de color**

Es un subconjunto V_G que tiene todos los vértices del mismo color.

Definición 5. **Número Cromático**

Es el mínimo número de colores diferentes que se requiere para un coloreo propio.
Notacion: $X(G) = k$ si G es k-cromatico

Definición 6. **Clique**

Un clique en G es un subconjunto maximal de vértices mutuamente adyacentes. Es decir, es el n de cada K_n subgrafo de G.

Definición 7. **Clique number**

Es el número de vértices del clique mas grande de G. Es decir, es el subgrafo K_n maximal con mayor n que tiene G.
Notación: $W(G)$

Definición 8. **k-crítico**

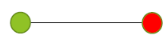
Un grafo G es k-crítico si $X(G) = k$ y $G - e$ es $(k-1)$-coloreable $\forall e \in E_G$

Definición 9. **Obstrucción k-cromática**

Una obstrucción k-cromática es un subgrafo $H/\ X(H) \gneq k$. Entonces fuerza a todo grafo que lo contiene a tener $X(G) \gneq k$.

Definición 10. **Conjunto de grafos críticos**

Un conjunto $\{G_j\}$ de grafos $(k+1)$-críticos es un conjunto completo de obstrucciones k-cromáticas con mínima cantidad de aristas, si todo grafo $(k+1)$-cromático contiene al menos un miembro de $\{G_j\}$ como subgrafo.



Todo grafo que necesita dos colores tiene como mínimo dos vértices adyacentes.

Definición 11. **Conjunto de vértices independientes**

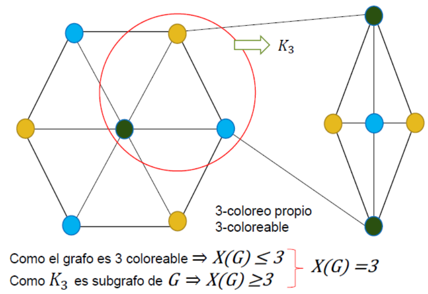
Un *conjunto de vértices independientes de A* en un grafo, es un conjunto de vértices tales que si x e y estan en A en el grafo no hay arista con dichos vértices como extremos.

Definición 12. **Independencia de G**

La *independencia de G* es el máximo cardinal entre los conjuntos indepnendientes.
Notación: $ind(G)$

5.2 Proposiciones

1. Si $X(G) = k \Rightarrow G$ es k-coloreable pero no $(k-1)$-coloreable.
2. Un grafo G con $X(G) = 1$ no tiene aristas.
3. Las aristas múltiples no afectan el coloreo pero los lazos lo impiden.
4. Si G es un grafo con k-vertices mutuamente adyacentes (i.e. K_n) $\Rightarrow X(G) \geq k$
5. K_n es n-cromático. Entonces, si K_n es subgrafo de G necesito como mínimo n colores.



6. Si H es un subgrafo de $G \Rightarrow X(G) \geq X(H)$
7. $X(G) \geq W(G)$
8. G y H grafos $\Rightarrow X(G+H) = X(G) + X(H)$
9. G bipartito $\Rightarrow X(G) = 2$
10. G conexo, k-crítico y v un vértice de $V_G \Rightarrow G - v$ es $(k-1)$-coloreable.
11. G conexo, k-critico $\Rightarrow g(v_i) \geq k - 1 \, \forall v_i \in V_G$
12. Sea G un grafo $(k+1)$-crítico $\Rightarrow G - e$ no es una obstrucción k-cromática $\Rightarrow G$ es una obstrucción k-cromática con mínima cantidad de aristas.
13. Sea G un grafo, entonces $X(G) \geq \lceil \frac{\#V_G}{ind(G)} \rceil$
14. $X(G) \leq \delta_M(G) + 1$
15. **Teorema de Brooks**: G no completo, k-regular, 2-conexo, con $k \geq 3$. Entonces G tiene un vértice con dos vecinos no adyacentes entre ellos tal que $G - \{x, y\}$ es un grafo conexo.
16. Sea G un grafo simple, conexo, no completo con $\delta_M(G) \geq 3$ $\Rightarrow X(G) \leq \delta_M(G)$

6 Grafo Dual

Para construir un dual de una *inmersión plana* de un grafo o multigrado plano G, colocamos un vértice dentro de cada región incluyendo la región infinita. Para cada arista compartida por dos regiones dibujamos una arista que une los vértices que estan dentro de cada región. Si la frontera de la región tiene una arista (entonces tiene un vértice colgante) que se recorre dos veces dibujamos un lazo en el vértice de dicha región.
Notación: G_d

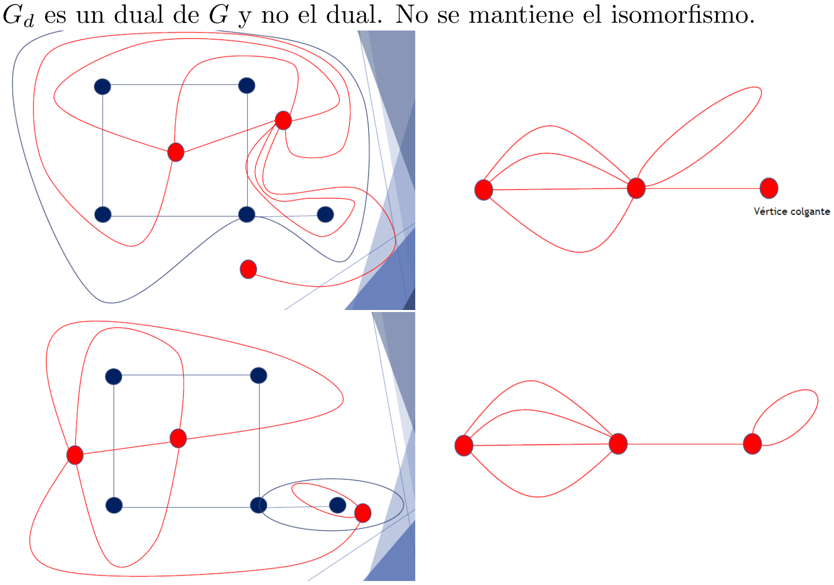
6.1 Observaciones

1. Cada arista de G se corresponde con una arista en G_d y viceversa.

2. Un vértice de grado 2 en G origina en G_d un par de aristas que unen los mismos vértices.

3. Dado un lazo en G, si el interior de la región determinada por el lazo no contiene otro vértice o arista de G, entonces el lazo origina un vértice colgante en G_d y viceversa.

4. G_d es un dual de G y no el dual. No se mantiene el isomorfismo.



5. Los ciclos en G de longitud n se corresponden con un conjunto de corte de n aristas en G_d y viceversa.

6. Un lazo en G corresponde a un conjunto de corte (el conjunto de corte es de aristas) de una arista en G_d. Si el lazo no tiene nada dentro o todo el grafo estan dentro del lazo, queda un vértice colgante; si partes del grafo estan dentro del lazo y otras fuera queda un puente.

7 Complejidad

7.1 Defínciones previas

Definición 1. Algoritmo

Es un conjunto de instrucciones perfectamente expresadas de tal modo que pueden ser ejecutadas por una máquina o una persona, sin apelar a conocimientos adicionales a los que requieran las mismas instrucciones ni al sentido común. La noción de algoritmo es la de un procedimiento mecánico.
Propiedades:

1. **Finitud**: Debe ser descripto por un texto finito.
2. **Efectividad**: Cada paso del algoritmo tiiene que podeer ser efectuado en la práctica.
3. **Terminación**: Tiene que parar en un número finito de pasos.
4. **Determinismo**: La secuencia de pasos tiene que estar unívocamente determinada para cada entrada.

Definición 2. Complejidad

La complejidad de un cálculo es la cantidad de recursos necesarios para efectuarlo.

Definición 3. Complejidad temporal

La complejidad temporal de un cálculo es la cantidad de tiempo necesaria para efectuarlo.

Definición 4. Complejidad de los algoritmos

La complejidad de un algoritmo es función de la longitud de la entrada, con lo cual se puede analizar el peor caso, el mejor caso y el caso promedio. Para una definición formal se adopta un punto de vista pesimista y se define la complejidad temporal del algoritmo como su rendimiento en el peor caso. La complejidad de un problema es la complejidad del algoritmo mas sencillo que lo resuelve.
Apuntes:

1. Si el n de entrada es mayor $\Rightarrow$ la complejidad es mayor. FALSO
2. Lo unico que contamos al evaluar la complejidad de un algoritmo son las *comparaciones*.

7.2 Notación O mayúscula

Es usada ampliamente para estimar el número de operaciones que un algoritmo usa dependiendo del crecimiento de los datos de entrada.
Observaciones:

1. Se tenemos dos funciones $f(n)$ y $g(n)/\ f(n) = O(h(n))$ y $g(n) = O(h(n))$ $\Rightarrow\ f(n)$ y $g(n)$ son del mismo orden.

2. Cuando $f(n)$ es $O(g(n))$ y $h(n)$ es una función que tiene valores absolutos mas grandes que $g(n)$ para valores mas grandes que $g(n)$ para valores mas grandes que $n \Rightarrow\ f(n) = O(h(n))$.

3. Cuando la función O es usada, la funcion g es escogida tan pequeña como sea posible.

4. $f_1(n)$ es $O(g_1(n))$ y $f_2(n)$ es $O(g_2(n))$. Entonces:

   (a) $(f_1 + f_2)(n)$ es de $O(max = \{|g_1(n)|, |g_2(n)|\})$

   (b) $(f_1 * f_2)(n)$ es de $O(g_1(n) * g_2(n))$

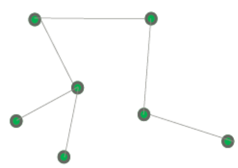
8 Árboles

TODO SIMPLE SIN LAZOS

8.1 Definiciones Previas

Definición 1. Árbol

Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos.

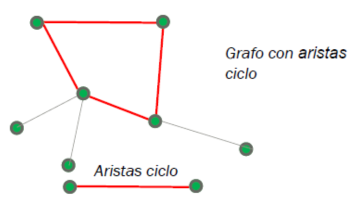


Apuntes:

1. K_1 es el minimo arbol. K_2 es el minimo árbol con aristas.

Definición 2. Arista ciclo

Sea e una arista de un grafo G se llama arista ciclo si existe en G un ciclo que la contiene.

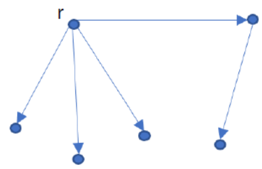


Definición 3. Árbol dirigido

Un árbol dirigido es un digafo cuyo grafo subyacente es un árbol.

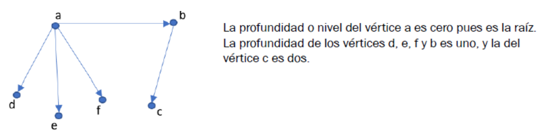
Definición 4. Árbol con raiz

Un árbol con raíz es un árbol dirigido con un vértice distinguido r llamado tal que $\forall v \in V_G$ hay un camino directo de r a v.



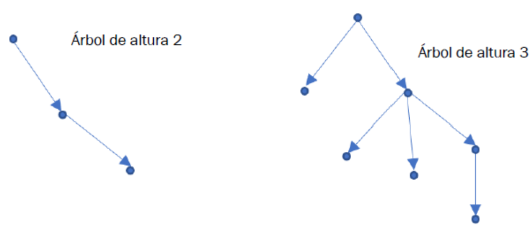
Definición 5. Profundidad

Es un árbol con raíz la profundidad o nivel del vértice v es su distancia a la raíz.



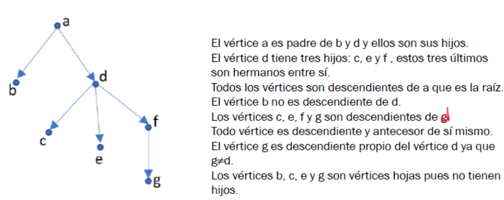
Definición 6. Altura

La altura de un árbol con raíz es la longitud del camino mas largo desde la raíz.



Definición 7. Padre - hijo

Si el vértice v es el que precede inmediatamente a w en el camino directo $r - w$ entonces v es el padre de w y w es el hijo de v. Si dos vértices tienen el mismo padre, se llaman hermanos.



Definición 8. Descendiente

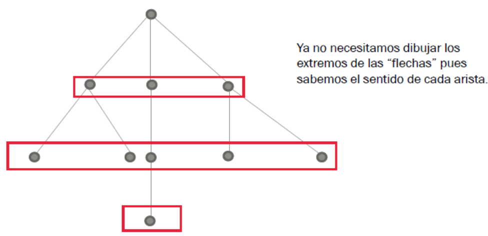
Un vértice w es llamado descendiente de un vértice v, y v es llamado *antecesor de* w, si v esta en el unico camino $r - w$. Si $w \neq v$, w es un descendiente propio de v, y v un antecesor propio de w.

Definición 9. Hoja

Un vértice que no tiene hijos se llama hoja y un *vértice interno* es un vértice que no es hoja.

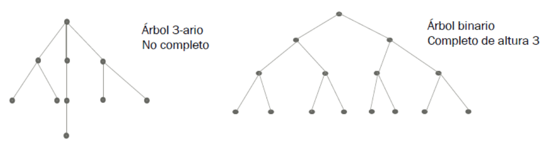
Definición 10. Dibujo plano estándar

Es dibujar la raíz arriba de todo y los vértices que estan a un mismo nivel horizontalmemte alineados.



Definición 11. Árbol m-ario

Un árbol m-ario con $m \geq 2$ es un árbol con raíz en el cual todo vertice tiene m hijos o menos de m hijos.

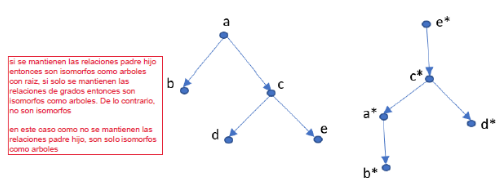


Definición 12. Árbol m-ario completo

Un árbol m-ario en el cual todos los vértices internos tienen exactamente m hijos y todas las hojas tienen la misma profundidad.

Definición 13. Isomorfismo como árboles

Un árbol m-ario en el cual todos los vértices internos tienen exactamente m hijos y todas las hojas tienen la misma profundidad.



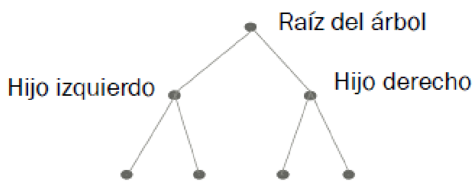
Los grafos subyacentes de estos árboles son isomorfos. Sin embargo no son isomorfos como árboles con raíz.

Definición 14. Árbol ordenado

Es un árbol con raíz en el cual cada hijo de cada vértice tiene asignado un orden fijo.

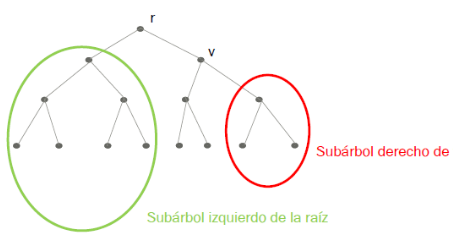
Definición 15. Árboles binarios

Un árbol binario es un árbol $2 - ario$ en el cual cada hijo es deignado o hijo izquierdo o hijo derecho.



Definición 16. Subárbol

El subárbol izquierdo (derecho) de un vértice v en un árbol binario T es el subárbol binario recubridor del hijo izquierdo (derecho) y todos sus descendientes.



Definición 17. Código binario

Un código binario es una asignación de símbolos a cadenas de bits. Cada cadena de bits se llama palabra del código.

Definición 18. Código prefijo

Es un código binario con la siguiente propiedad: ninguna palabra del código es una subpalabra inicial de otra palabra del código.

Algoritmo de Huffman

Algoritmo de Huffman de código prefijo

Entrada: $S = \{s_1, \cdots, s_m\}$, $W = \{w_1, \cdots, w_m\}$. simbolos que quiero codificar y la frecuencia de cada simbolo

Salida: Un árbol binario F representante del código prefijo de S donde el largo de las palabras de código tienen el mínimo promedio ponderado.

1. FOR I:=1 TO m
2. {
3. Elegir de F dos árboles T_1 y T_2 de peso mínimo.
4. Crear un nuevo árbol cuyo subárbol izquierdo sea T_1 y cuyo subárbol derecho sea T_2.
5. Etiquetar la arista que va a T_1 con 0 y la que va a T_2 con 1.
6. Asignar al nuevo árbol peso $w(T_1) + w(T_2)$.
7. Reemplazar T_1 y T_2 por el nuevo árbol en F.
8. }
9. RETURN F.

Definición 19. Pila

Es una secuencia de elementos tal que cada nuevo elemento es agregado al final y se lo llama tope y un elemento es removido también del tope.
Last In First Out. LIFO.

Definición 20. Cola

Es una secuencia de elementos tal que cada nuevo elemento es agregado al final y un elemento es removido del principio.
First In First Out. FIFO.

Definición 21. Árbol de Expresion

Un árbol de expresión para una expresión aritmética es o un vértice etiquetado por un número o es un árbol que tiene un operador en la raíz y los subárboles izquierdo y derecho son árboles de expresión.

Definición 22. Tabla de Acceso Aleatorio

Es una tabla con dos columnas, en la primera se ponen los datos y en la segunda las claves. La clave identifica la posición en la tabla del elemento que está en la misma fila.

Definición 23. Árbol Binario de Busqueda (BST)

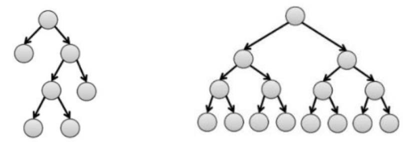
Es un árbol binario donde cada vértice tiene asignado una clave tal que la clave de un vértice v es más grande que todas las de su subárbol izquierdo y más chica que todas las claves de su subárbol derecho.

Definición 24. Arista frontera

Sea T un árbol subgrafo de G, una arista $e = \{a, b\}$ se llama arista frontera de T si a es un vértice de T y b es un vértice de G que no está en T.

Definición 25. Árbol Binario Balanceado

Si para todo vértice, el número de vértices de su subárbol izquierdo difiere a lo sumo en uno respecto al número de vértices de su subárbol derecho.



Árbol no balanceado   Árbol balanceado

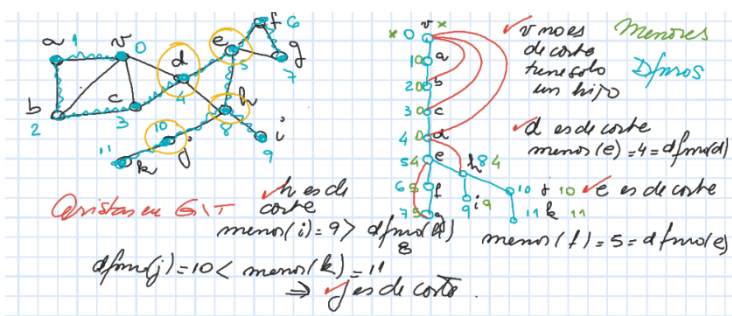
<u>**Operaciones**</u>

- Realizar una busqueda
- Insertar
- Borrar

Definicion 26. *$menor(w)$*

PARCIAL

$menor(w) = min\{dfnro(w), a\}$ siendo $a = min\{dfnro(v_j)\}$, si existe en $G - T$ una arista $\{v_j, desc(w)\}$



8.2 Proposiciones

1. Sea e una arista de un grafo conexo G entonces $G - e$ es conexo $\Leftrightarrow$ e es una arista ciclo de G.

<u>Corolario P1.1</u>

Una arista de un grafo es una arista de corte $\Leftrightarrow$ no es una arista ciclo.

<u>Corolario P1.2</u>

Sea e cualquier arista de G. Entonces:

$$k(G-e) \begin{cases} k(G) & \text{si } e \text{es una arista ciclo} \\ k(G)+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Todo arbol con por lo menos una arista tiene por lo menos dos vertices de grado 1.

Corolario P2
Si el grado de todos los vértices de un grafo es $\geq 2 \Rightarrow$ el grafo debe contener al menos un ciclo.

3. Todo arbol con n vertices contiene exactamente $n-1$ aristas.

Corolario P3.1
Un bosque F con n vértices tiene $n-k(G)$ aristas. Un *bosque* es un conjunto de árboles.

Corolario P3.2
Un grafo bosque G con n vértices tiene por lo menos $n-k(G)$ aristas.

4. Sea un grafo G simple con n vertices y k componentes $\Rightarrow$ la cantidad de aristas es $\#E_G \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$

Corolario P4
Un grafo simple con n vértices y más de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ aristas debe ser conexo.

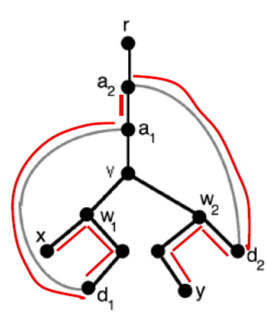
5. Un árbol m-ario tiene como mucho m^k vértices en el nivel k.

6. Sea T un árbol en un grafo G y sea e una arista frontera de $T \Rightarrow T+e$ es un árbol T'.

7. Sea T un árbol recubridor producido por el algoritmo DFS en un grafo no dirigido y sea $e=\{x,y\}$ en $G-T/\, dfnro(x) \lneq dfnro(y) \Rightarrow x$ es un ancestro de y en T.

8. Cuando BFS es aplicado a un grafo no dirigido, los extremos de una arista en $G-T$ están al mismo nivel o en niveles consecutivos.

9. Sea T un árbol que resulta de aplicar DFS a un grafo G conexo, entonces un vértice v de T que no es raíz, es un vértice de corte de $G \Leftrightarrow v$ tiene un hijo w tal que ningún descendiente de w está unido a un ancestro propio de v por una arista en $G-T$.



10. Sea T un arbol que resulta de aplicar DFS a un grafo G conexo, entonces la raiz r de T es un vertice de corte de $G \Leftrightarrow r$ tiene mas de un hijo en T.

11. Sea T un árbol que resulta de aplicar DFS a un grafo G conexo, entonces un vértice v de T que no es raíz, es un vértice de corte de $G \Leftrightarrow v$ tiene un hijo w tal que $menor(w) \geq dfnro(v)$.

12. Sea T_k el árbol de PRIM luego de k iteraciones en el algoritmo sobre el grafo G conexo, donde $k \leq n-1$ (n cant de vértices de G) $\Rightarrow T_k$ es subárbol de un árbol mínimo recubridor T de G.

8.3 Teoremas

8.3.1 Teorema 1

Sea T un grafo con n vertices (sin lazos). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es un árbol
2. T no contiene ciclos y tiene $(n-1)$ aristas.
3. T es conexo y tiene $(n-1)$ aristas.
4. T es conexo y toda arista es una arista de corte.
5. Todo par de vértices de T estan conectados por exactamente un camino simple.
6. T no contiene ciclos y $T + e$ tiene exactamente un ciclo.

8.3.2 Teorema 2

Sea T un árbol con n vértices y sea G un gafo simple/

$$\delta_{min}(G) \geq n-1 \Rightarrow T \text{ es subgrafo de } G.$$

8.3.3 Teorema 3

Un árbol dirigido es repredentable como un árbol con raiz $\Leftrightarrow$ un vértice tiene grado de entrada 0 y todos los demas grado de entrada 1.

8.3.4 Teorema 4

Sea T un árbol m-ario con n vértices y altura h. Entonces:

$$h+1 \leq n \leq \frac{m^{h+1}-1}{m-1}$$

8.3.5 Teorema 5

Un árbol binario completo de altura h tiene $2^{h+1}-1$ vértices.

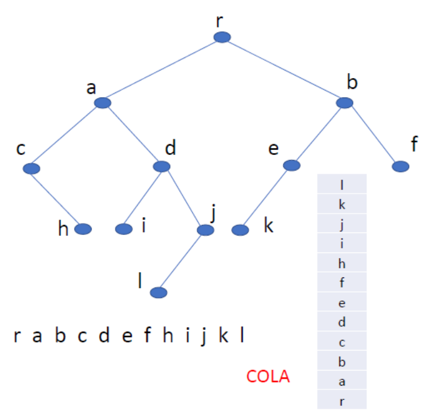
Corolario T5 Todo árbol binario de altura h tiene a lo sumo $2^{h+1}-1$ vértices.

8.4 Algoritmos de Ordenación

8.4.1 Orden por Nivel

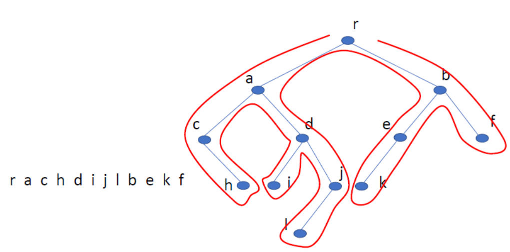
El orden por nivel de un árbol ordenado es un listado de los vértices en orden creciente según la profundidad, tal que los vértices que tienen la misma profundidad son listados acordes a su orden prescripto. De arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

Algoritmo para Ordenar por Nivel



8.4.2 Pre-Orden Izquierdo

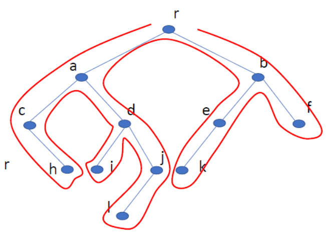
Hacemos una curva alrededor del árbol empezando por la raíz y dejando el árbol a la izquierda. A medida que vemos los vértices los vamos anotando en una lista.



8.4.3 Post-Orden Izquierdo

Hacemos una curva alrededor del árbol empezando por la raíz y dejando el árbol a la izquierda. Anotamos los vértices la última vez que los vemos.

h c i l j d a k e f b r

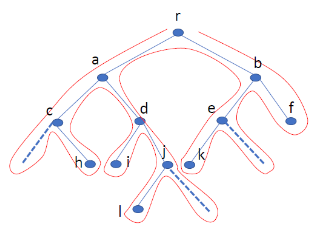


Apunte: Es como hacer un Pre-Orden Derecho pero escrito de derecha a izquierda.

8.4.4 In Orden

Hacemos una curva alrededor del árbol empezando por la raíz y dejando el árbol a la izquierda. Anotamos los vértices la segunda vez que los vemos.

c h a i d l j r k e b f



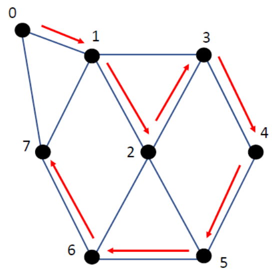
8.4.5 Depth First Search (DFS)

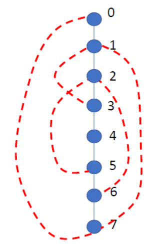
Entrada: G grafo conexo, v: vértice de G.
Salida: T árbol recubridor.

este alg busca que el arbol sea lo mas alto posible(como que trata de hacerlo un Pn)

1. Inicializar T como el vértice v
2. $F := \emptyset$; dfnro(v)=0; i:=1;
3. WHILE ($V_T \neq V_G$)
4. {
5. $F := \{e = \{v, w\} \ / \ v \in V_T \ \ y \ \ w \in V_G - V_T\}$
6. Sea e perteneciente a F y v tiene el mayor dfnro
7. Agregar w y e a T
8. dfnro(w):=i; i:=i+1;
9. }
10. RETURN T

el dfnro es la etiqueta

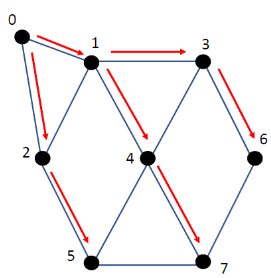


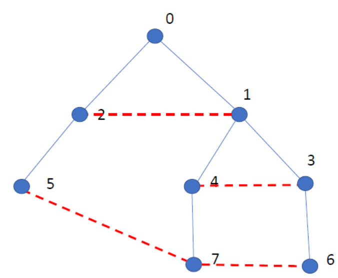


8.4.6 Breadth First Search (BFS)

Entrada: G grafo conexo, v: vértice de G.
Salida: T árbol recubridor.

Inicializar T como el vértice v
$F := \emptyset$; etiqueta(v):=0; i:=1;
WHILE ($V_T \neq V_G$)
{
    $F := \{e = \{u, v\} \ / \ u \in V_T \ \ y \ \ v \in V_G - V_T\}$
    Sea e perteneciente a F y u tiene menor etiqueta
    Agregar v y e a T
    etiqueta(v):=i; i:=i+1;
}
RETURN T





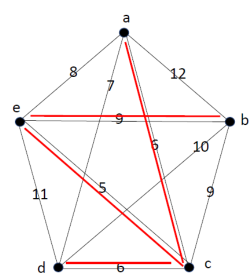
8.4.7 Árbol Recubridor Mínimo

Sea G un grafo conexo ponderado encontrar un árbol recubridor de G tal que el total de la suma de los pesos de las aristas sea mínimo.

Entrada: G grafo conexo ponderado.
Salida: T árbol recubridor mínimo.

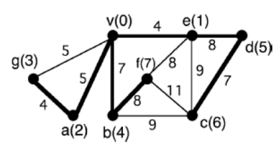
1. Elegir $s \in V_G$ cualquiera.
2. Inicializar T como el vértice s .
3. $F := \emptyset$.
4. WHILE ($V_G \neq V_T$)
5. {   cjto de aristas frontera
6. $F := \{e = \{v, w\} \ / \ v \in V_T \ \ y \ \ w \in V_G - V_T\}$
7.   Sea $e \in F$ tal que e tiene el peso mínimo
8.   Agregar w y e a T
9. }
10. RETURN T

Ejemplo:



Arista	Peso
{e,c}	5
{d,c}	6
{a,c}	6
{e,b}	9
Peso total	26

En cada paso obtenemos un subgrafo de G que es un árbol.



9 Redes de Flujo

9.1 Definiciones Previas

Definición 1. Red

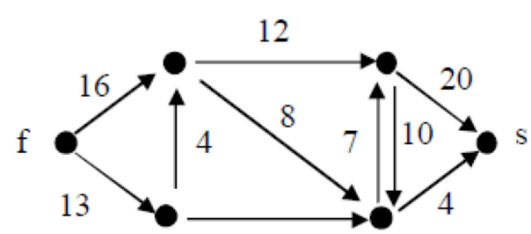
Una red N con una fuente simple (una sola) y un sumidero simple (uno solo) es un digrafo conexo que tiene un vértice distinguido llamado fuente con grado de salida distinta de cero y un vértice distinguido llamado sumidero con grado de entrada distinto de cero.
Notación: red $f-s$
Apuntes: *Sólo la fuente genera productos y sólo el sumidero consume.*
Observación: Si las capacidades son fraccionarias pueden ser transformadas en enteras multiplicando por el MCM de los denominadores de las capacidades.

Definición 2. Red con Capacidad

Una red con capacidad es un digrafo conexo tal que cada arco e tiene asignado una capacidad no negativa $cap(e)$ llamada *capacidad del arco e.*
Notación:

1. $Sal(v) = \{e \in E_N / \text{ la cola } (e) = v\}$
2. $Ent(v) = \{e \in E_N / \text{ la cabeza } (e) = v\}$
3. $\langle X, Y \rangle = \{e \in E_N / \text{ la cola } (e) \in X \text{ y la cabeza } e \in Y\}$

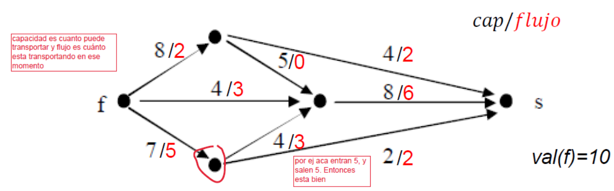
Observación: Si las capacidades son fraccionarias pueden ser transformadas en enteras multiplicando por el MCM de los denominadores de las capacidades.



Definición 3. Posible flujo

Sea N una red $f-s$ con capacidad, un *posible flujo en N* es una función $f : E_N \to \mathbb{R}^+$ que asigna un número real positivo $f(e)$ a cada arco e tal que:

1. **Restricción de capacidad**
   $f(e) \leq cap(e)$
2. **Restricción de conservacion**
   $\sum_{e \in Ent(v)} f(e) = \sum_{e \in Sal(v)} f(e) \; \forall v \in V_N / v \neq f \, \wedge \, v \neq s$



Definición 4. Valor de flujo

El valor de flujo f de una red con capacidad N denotado $val(f)$ es el flujo neto que sale de la fuente.

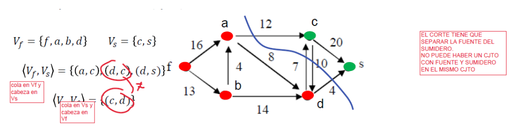
$$val(f) = \sum_{e \in Ent(v)} f(e) - \sum_{e \in Sal(v)} f(e)$$

Definición 5. Flujo Máximo

El flujo máximo f^* en una red con capacidad es tal que $val(f) \leq val(f^*) \forall f \in N$

Definición 6. Corte en la red

Sea N una red $f - s$ y sea V_f y V_s una partición de los vértices de N tal que $f \in V_f$ y $s \in V_s$, entonces $\langle V_f, V_s \rangle$ se llama corte $f - s$ en la red.
Observación: Note que el conjunto de aristas $Sal(f)$ es el corte $f - s$ $\langle f, V_N - \{f\} \rangle$ y que $Ent(s) = \langle V_N - \{s\}, s \rangle$.



Definición 7. Capacidad de un Corte

La capacidad de un corte $\langle V_f, V_s \rangle$ denotada $cap\langle V_f, V_s \rangle$ es la suma de las capacidades de los arcos en el corte $\langle V_f, V_s \rangle$. Es decir:

$$cap\langle V_f, V_s \rangle = \sum_{e \in \langle V_f, V_s \rangle} cap(e)$$

Definición 8. Corte Mínimo

Un corte mínimo en la red N es un corte con capacidad mínima.

Definición 9. Cuasi-camino

Un *cuasi-camino* $f - s$ en una red N es una secuencia alternada de vértices y aristas $Q = \langle f = v_0, e_1, v_1, ..., v_k = s \rangle$ que forman un camino $f - s$ en el grafo

subyacente de N (no importa el sentido de las flechas).
<u>Notación</u>:

1. **Arco directo**: $v_{i-1} \rightarrow v_i$
2. **Arco inverso**: $v_{i-1} \leftarrow v_i$

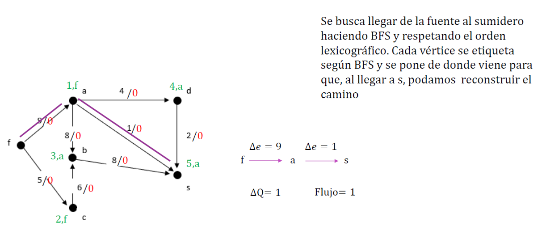
Definición 10. Camino de flujo aumentativo

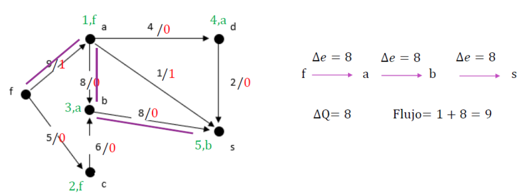
Sea f un flujo en una red N. Un camino de flujo aumentativo Q es un cuasi-camino $f - s$ en N tal que el flujo de cada arco directo puede ser incrementado y en cada arco inverso puede ser decrementado.

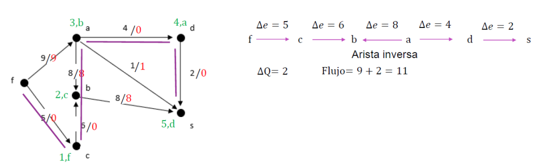
1. $f(e) \lneq cap(e)$ si e es un arco directo
2. $f(e) \gneq 0$ si e es un arco inverso

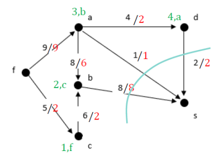
<u>Notación</u>:

1. $\triangle\ e = cap(e) 0 f(e)$ si e es un arco directo.
2. $\triangle\ e = f(e)$ si e es un arco inverso.
3. $\triangle\ Q = min_{e \in Q}\{\triangle\ e\}$









No se puede seguir avanzando los vértices que quedaron etiquetados pertenecen a V_f los que quedaron sin etiquetar a V_s .

$V_f = \{f, a, b, c, d\}$ $\quad V_s = \{s\}$ $\quad \Rightarrow \langle V_f, V_s \rangle$ es un corte mínimo y Flujo=11 es el flujo máximo.

9.2 Proposiciones

1. Sea $\langle V_f, V_s \rangle$ un corte de $f - s$ en la red N, entonces todo camino directo $f - s$ en N contiene por lo menos un arco en este conjunto de corte.

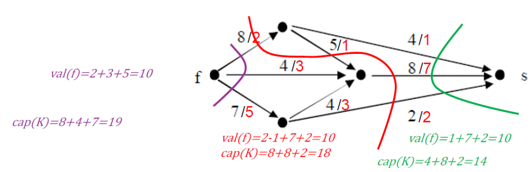
2. Sea f un flujo en una red N y sea $\langle V_f, V_s \rangle$ un corte. Entonces:

$$val(f) = \sum_{e \in \langle V_f, V_s \rangle} f(e) - \sum_{e \in \langle V_s, V_f \rangle} f(e)$$

<u>Corolario P2</u>

Sea f un flujo en una red $f - s$. Entonces:

$$val(f) = \sum_{e \in Ent(s)} f(e) - \sum_{e \in Sal(s)} f(e)$$



9.3 Teoremas

9.3.1 Problema de Flujo y Corte Máximo

Sea f un flujo en una red N y sea $\langle V_f, V_s \rangle$ un corte. Entonces:

$$val(f) \leq cap\langle V_f, V_s \rangle$$

<u>Corolario 1</u>

Sea f^* un flujo máximo en una red N y sea K^* un corte mínimo en N. Entonces el valor del flujo máximo es menor o igual que la capacidad mínima.

$$val(f) \leq cap(K^*)$$

Corolario 2

Sea f un flujo en ua red N y sea K un corte. Supongamos que $val(f) = cap(K)$. Entonces f es un flujo máximo y K es un corte mínimo.

Corolario 3

Sea $\langle V_f, V_s \rangle$ un corte en la red N y supongamos que f es un flujo tal que:

1. $f(e) = cap(e)$ si $e \in \langle V_f, V_s \rangle$
2. $f(e) = 0$ si $e \in \langle V_s, V_f \rangle$

Entonces f es un flujo máximo y $\langle V_s, V_f \rangle$ es un corte mínimo.

9.3.2 Lema

Sea $\langle V_f, V_s \rangle$ un corte $f - s$ en la red N. Entonces:

$$\cup_{v \in V_f} Sal(v) = \langle V_f, V_f \rangle \cup \langle V_f, V_s \rangle \text{ y } \cup_{v \in V_f} Ent(v) = \langle V_f, V_f \rangle \cup \langle V_s, V_f \rangle$$