NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Fakultet for teknologi

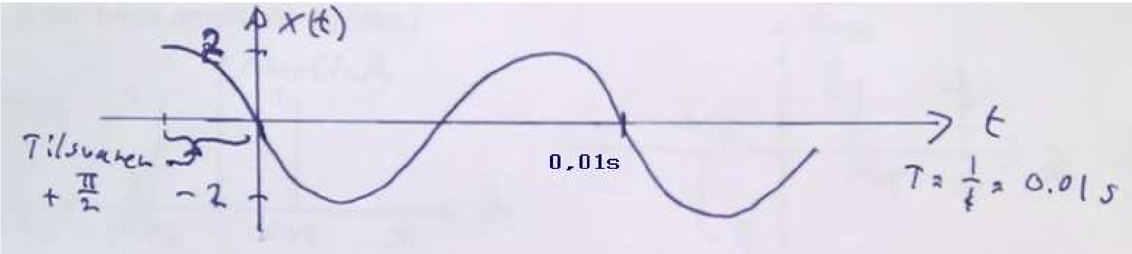
Eksamensoppgave i TELE 2003 Signalbehandling (mai 2016)

Løsningsforslag

Oppgave 1 (30 %)

Gitt $x(t) = 2\cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{2})$

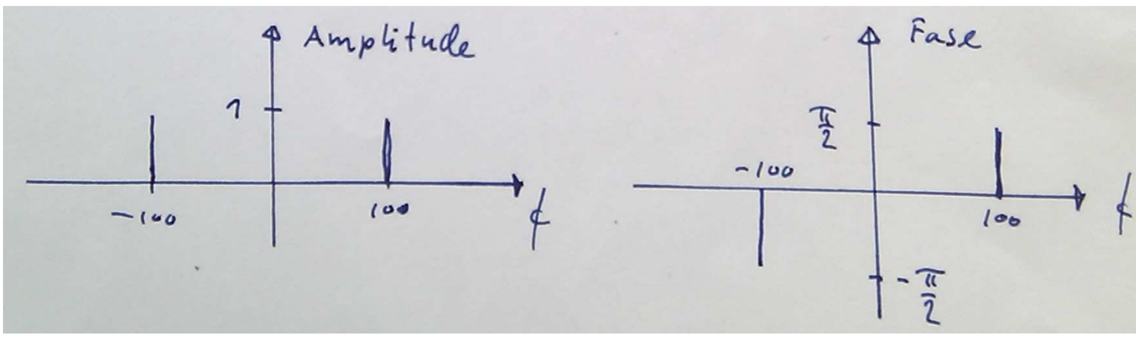
a) Skisser x(t). Merk av og sett tallverdier for amplitude, fase og periodetid på figuren.



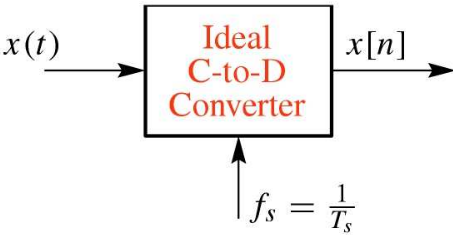
b) Skriv opp et uttrykk for x(t) som en sum av komplekse eksponentialer.

$$x(t) = 2\cos(2\pi 100t + \tfrac{\pi}{2}) = e^{j(2\pi 100t + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(2\pi 100t + \frac{\pi}{2})} = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(2\pi 100t)} + e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j(2\pi 100t)}$$

c) Tegn spekteret til x(t).
(Hint: både amplitude og fase.)



Signalet x(t) punktprøves nå i en ideell kontinuerlig-til-diskret konverter som vist i figuren under:



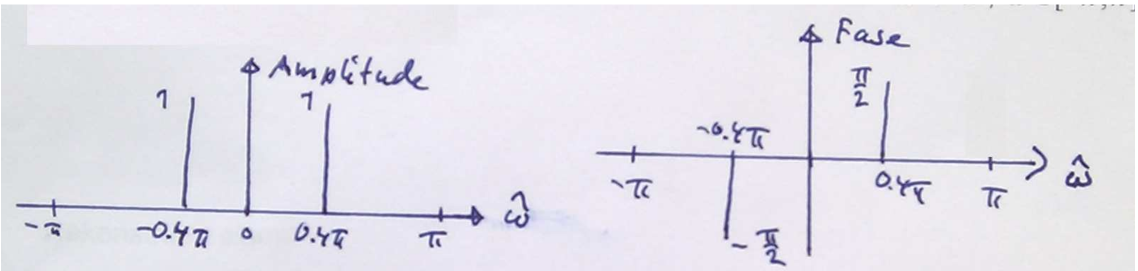
Figur 1.1: Ideell kontinuerlig-til-diskret konverter

$x(t) = 2\cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{2})$ og $f_s = 500$ punktprøver/sek

d) Finn og skriv opp et uttrykk for x[n].

$$x[n] = x(t)\big|_{t=nT_s} = x(t)\big|_{t=\frac{n}{f_s}} = 2\cos(2\pi 100\frac{n}{f_s} + \tfrac{\pi}{2}) = 2\cos(2\pi 100\frac{n}{500} + \tfrac{\pi}{2}) = 2\cos(0,4\pi n + \tfrac{\pi}{2})$$

e) Tegn spekteret til x[n] i området for diskret vinkelfrekvens $\hat{\omega}$ fra $-\pi$ til π , $\hat{\omega} \in [-\pi, \pi]$ (Hint: både amplitude og fase.)



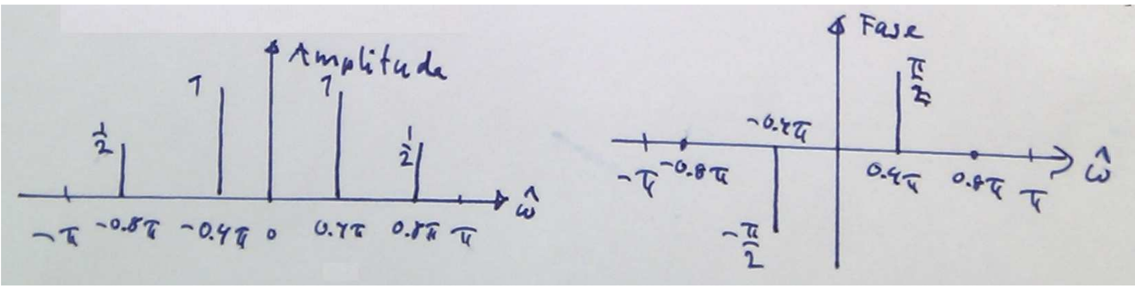
Vi endrer nå x(t) mens punktprøvefrekvensen f_s fortsatt er den samme slik:
$x(t) = 2\cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{2}) + \cos(2\pi 300t)$ og $f_s = 500$ punktprøver/sek

f) Finn og skriv opp et uttrykk for x[n].

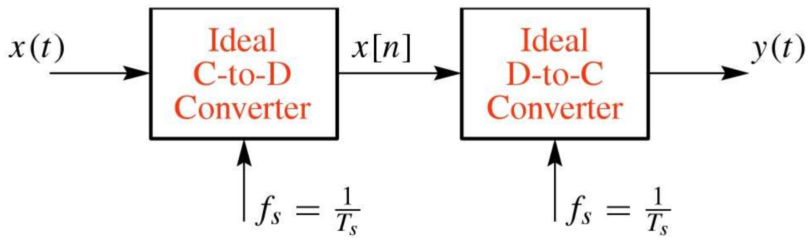
$$x[n] = x(t)\big|_{t=\frac{1}{f_s}} = 2\cos(2\pi 100\frac{n}{500} + \tfrac{\pi}{2}) + \cos(2\pi 300\frac{n}{500}) =$$

$$\underline{\underline{2\cos(0,4\pi n + \tfrac{\pi}{2}) + \cos(1,2\pi n) = 2\cos(0,4\pi n + \tfrac{\pi}{2}) + \cos(0,8\pi n)}}$$

g) Tegn spekteret til x[n] i området for diskret vinkelfrekvens $\hat{\omega}$ fra $-\pi$ til π , $\hat{\omega} \in [-\pi, \pi]$ (Hint: både amplitude og fase.)



Det diskrete signalet x[n] rekonstrueres nå i en ideell diskret-til-kontinuerlig konverter som vist under:



Figur 1.2: Ideell kontinuerlig-til-diskret konverter og diskret-til-kontinuerlig konverter

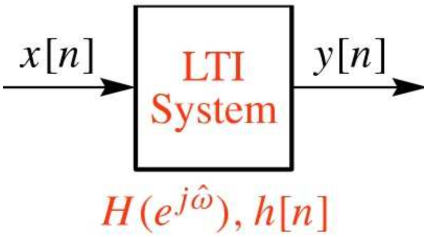
Fortsatt gjelder at $x(t) = 2\cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{2}) + \cos(2\pi 300t)$ og $f_s = 500$ punktprøver/sek

h) Skriv opp et uttrykk for det rekonstruerte signalet y(t).

Rekonstruert signal:

$$\underline{\underline{y(t) = 2\cos(2\pi 100t + \tfrac{\pi}{2}) + \cos(2\pi 200t)}}$$

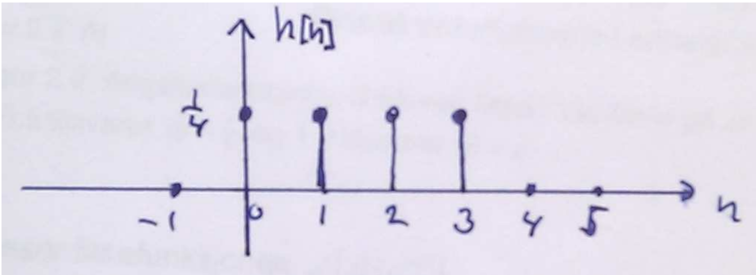
Oppgave 2 (35 %)



Figur 2.1: Blokkskjema for digitalt filter.

Et digitalt filter har enhetspulsrespons $h[n] = \frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2] + \frac{1}{4}\delta[n-3]$

a) Skisser h[n].



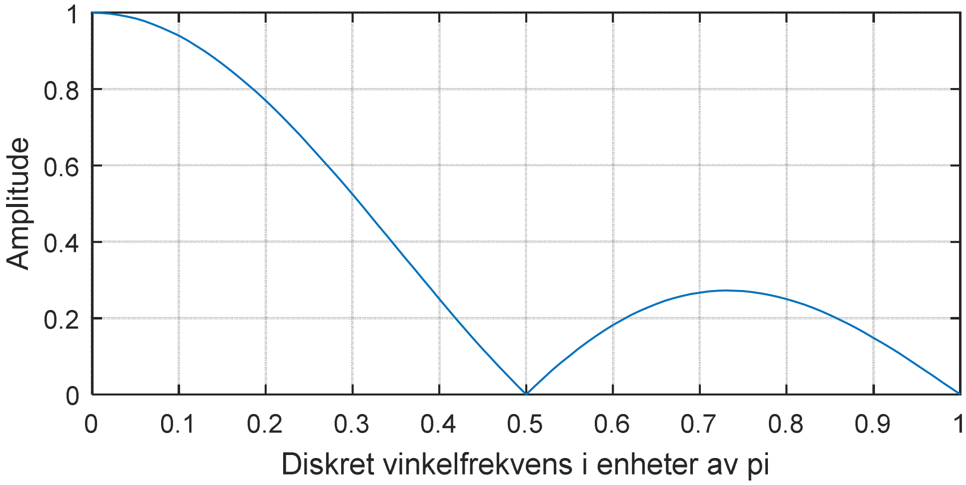
b) Vis ved regning at frekvensresponsen $H(e^{j\hat{\omega}})$ kan uttrykkes som

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \tfrac{1}{2}[\cos(\tfrac{\hat{\omega}}{2}) + \cos(\tfrac{3\hat{\omega}}{2})] \cdot e^{-j\frac{3}{2}\hat{\omega}}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{k=3} h[k] e^{-j\hat{\omega}k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-j\hat{\omega}} + \frac{1}{4}e^{-j2\hat{\omega}} + \frac{1}{4}e^{-j3\hat{\omega}}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-j\frac{3}{2}\hat{\omega}}(e^{j\frac{3}{2}\hat{\omega}} + e^{j\frac{1}{2}\hat{\omega}} + e^{-j\frac{1}{2}\hat{\omega}} + e^{-j\frac{3}{2}\hat{\omega}}) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{2}\hat{\omega}} \cdot [\cos(\frac{\hat{\omega}}{2}) + \cos(\frac{3\hat{\omega}}{2})]$$

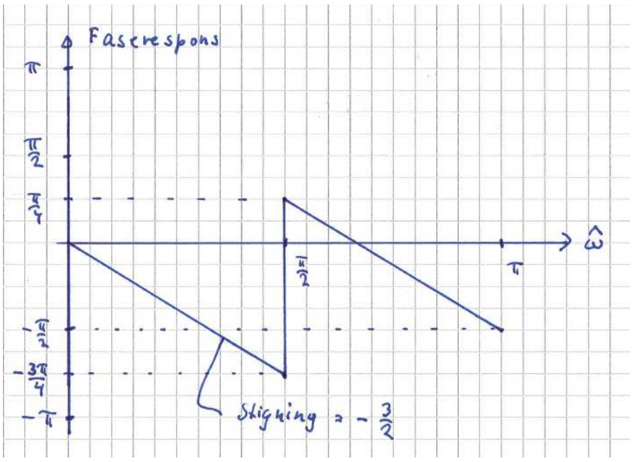
Amplituderesponsen $\left|H(e^{j\hat{\omega}})\right|$ kan skisseres som vist under:



Figur 2.2: Amplituderespons til filteret. Merk! Verdiene på $\hat{\omega}$-aksen er vist i enheter av π slik at 0.5 tilsvarer $\hat{\omega}=\frac{\pi}{2}$ og 1.0 tilsvarer $\hat{\omega}=\pi$.

c) Skisser fasefunksjonen $\angle\left\{H(e^{j\hat{\omega}})\right\}$

Fra b) ser vi at $\angle\left\{H(e^{j\hat{\omega}})\right\} = -\dfrac{3}{2}\hat{\omega}$



d) Finn amplitude og fase for $H(e^{j\hat{\omega}})$ når $\hat{\omega}=\frac{\pi}{4}$.

Setter inn i formelen og finner:

$$H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = \tfrac{1}{2}[\cos(\tfrac{\frac{\pi}{4}}{2}) + \cos(\tfrac{3\frac{\pi}{4}}{2})]\cdot e^{-j\frac{3}{2}\frac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{3\pi}{8})]\cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}}$$

$$= \tfrac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{3\pi}{8})]\cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}} = \tfrac{1}{2}[0.924 + 0.383]\cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}} = \tfrac{1}{2}[1.307]\cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}} = 0.654\cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}}$$

Gitt det periodiske signalet $x[n]=1+\cos(\frac{\pi}{4}\cdot n)+\cos(\frac{\pi}{2}\cdot n)$, der perioden N=8.

e) Vis at en periode av signalet x[n] kan uttrykkes som sekvensen

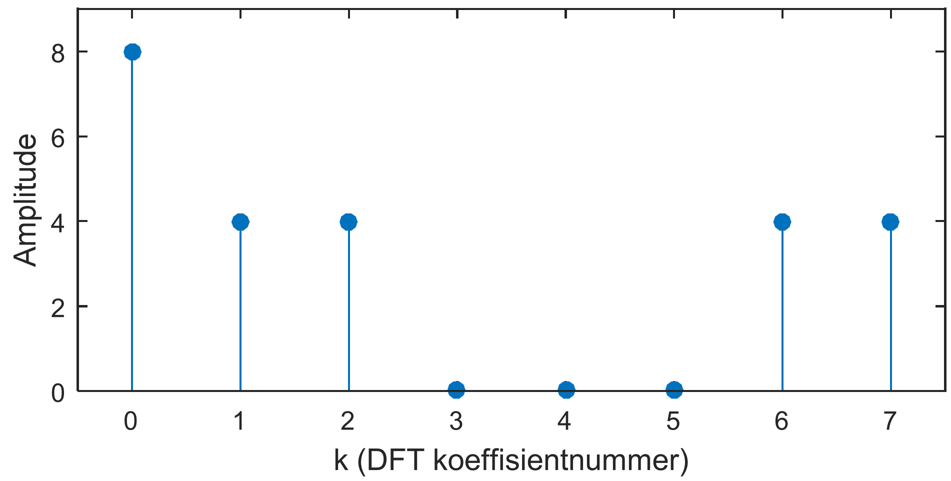
$x[n]=\{3 \quad 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

(eller avrundet: ($x[n]=\{3 \quad 1.707 \quad 0 \quad 0.293 \quad 1 \quad 0.293 \quad 0 \quad 1.707\}$)

f)

g) Svar på f) og g) samlet:

Vis eller forklar at en 8-punkt DFT av signalet x[n] blir $X\{k\}=\{8 \quad 4 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4\}$



Figur 2.3: 8-punkt DFT til x[n]

Hvilke diskrete vinkelfrekvenser $\hat{\omega}$ tilsvarer de ulike verdiene av k=0 til k=7?

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{\omega}$	0	$\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$	$2\cdot\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$	$3\cdot\frac{2\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$	$4\cdot\frac{2\pi}{8}=\pi$	$5\cdot\frac{2\pi}{8}=\frac{5\pi}{4}$	$6\cdot\frac{2\pi}{8}=\frac{3\pi}{2}$	$7\cdot\frac{2\pi}{8}=\frac{7\pi}{4}$
X{k}	8	4	4	0	0	0	4	4

X{1} representerer en DC-komponent på 8/N=1 (Husk: Her er N=8)

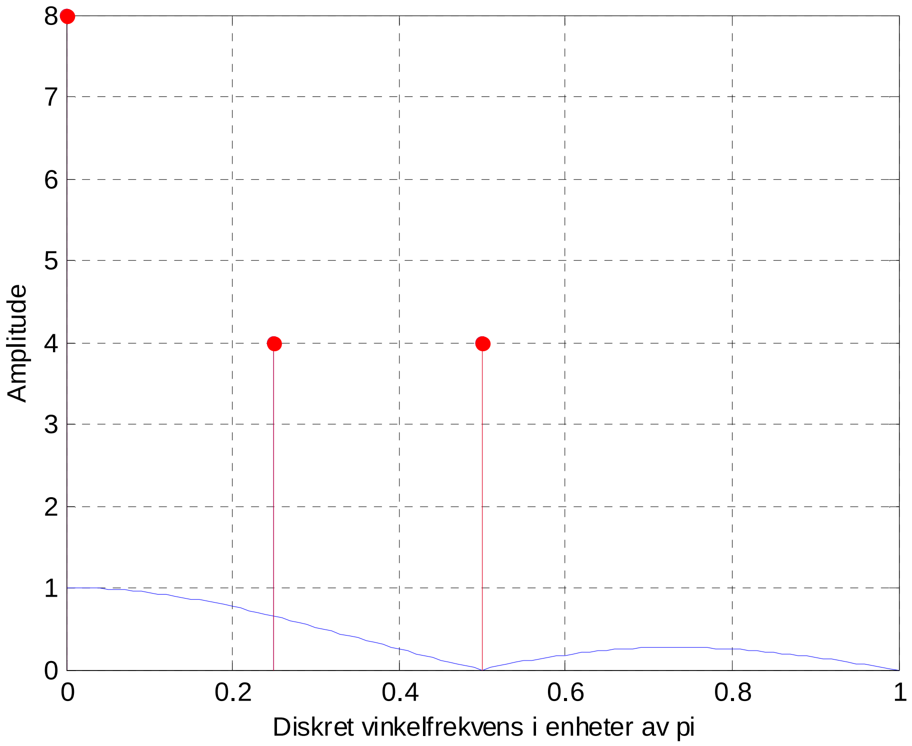
X{2} og X{7} representerer tilsammen et sinussignal med fase 0 (dvs cosinusfunksjon) med amplitude (4+4)/N og diskret vinkelfrekvens pi/4.

X{2} og X{7} representerer tilsammen et sinussignal med fase 0 (dvs cosinusfunksjon) med amplitude (4+4)/N og diskret vinkelfrekvens pi/2.

Til sammen blir dette: $x[n]=1+\cos(\frac{\pi}{4}\cdot n)+\cos(\frac{\pi}{2}\cdot n)$

x[n] sendes nå inn på filteret vist i Figur 2.1 og omtalt i punktene a) til d):

h) Bruk de opplysningene du nå har til å angi Y(k), der Y(k) er 8-punkt DFT til utgangs-signalet y[n].
Forklar kort hvordan du har tenkt.
(Hint: se punkt d) over.)



Her er filterets amplituderespons (blå strek) og DFT av inngangssignalet (rød) tegnet i samme figur for $0 \le \omega \le \pi$.

Y(k) finner vi ved å ta produktet av X(k) og filterets frekvensrespons for hver k-verdi.

$$Y(0) = X(0) \cdot H(e^{j0}) = 8 \cdot 1 = 8$$

$$Y(1) = X(1) \cdot H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = 4 \cdot 0.654 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}} = 2.62 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}}$$

$$Y(2) = X(2) \cdot H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 4 \cdot 0 = 0$$

$$Y(3) = X(3) \cdot H(e^{j\frac{3\pi}{4}}) = 0 \cdot H(e^{j\frac{3\pi}{4}}) = 0$$

$$Y(4) = X(4) \cdot H(e^{j\pi}) = 0 \cdot 0 = 0$$

Y(5) = kompleks konjugert til Y(3)

Y(6) = kompleks konjugert til Y(2)

Y(7) = kompleks konjugert til Y(1)

i) Finn et uttrykk for y(n).

Fra DFT-koeffisientene: $y[n] = \frac{Y(0)}{8} + \frac{2 \cdot |Y(1)|}{8} \cos(\frac{\pi}{4} n - \frac{3\pi}{8}) = 1 + 0.655 \cdot \cos(\frac{\pi}{4} n - \frac{3\pi}{8})$

Anta nå isteden at inngangssignalet består av den endelige sekvensen

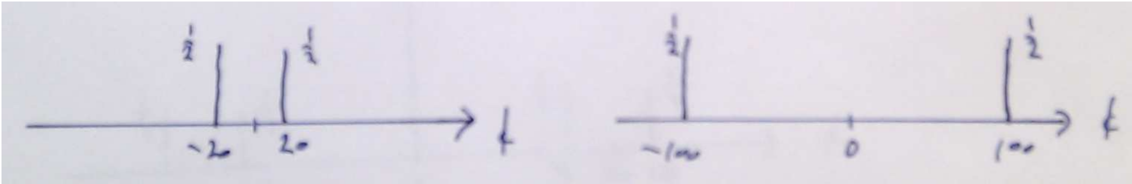
$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$

h[n]	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
x[n]	1	-2	2	-1			
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
		$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$		
			$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	
				$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
y[n]	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

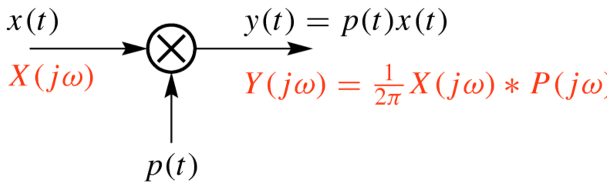
Oppgave 3 (20 %)

Gitt to de sinusformede funksjonene $x(t) = \cos(2\pi \cdot 20 \cdot t)$ og $p(t) = \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t)$.

a) Tegn frekvensspekteret til hver av disse funksjonene.

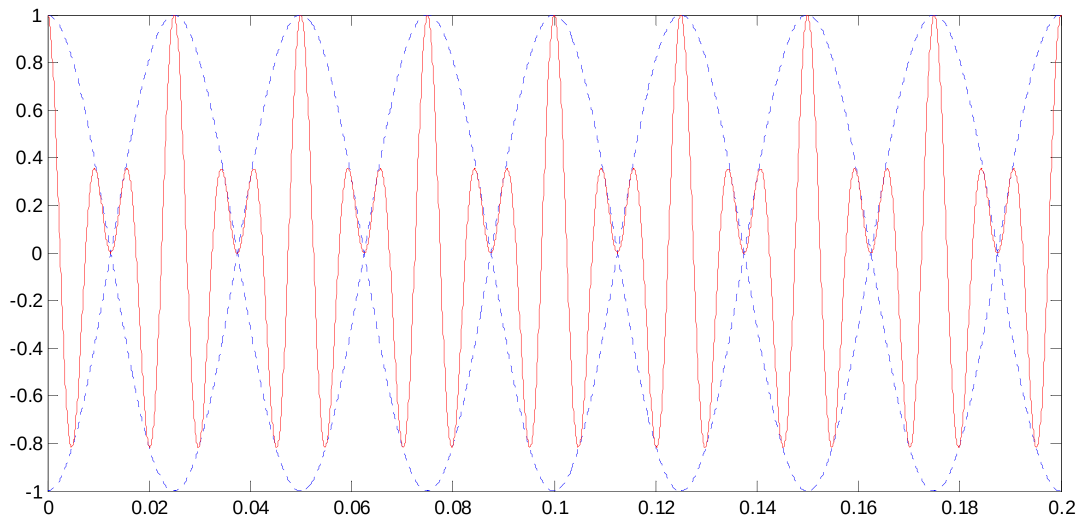


x(t) p(t)



Figur 3.1: Multiplikasjon av x(t) med p(t).

b) La $y(t) = x(t) \cdot p(t)$ som vist i Figur 3.1. Skisser y(t).

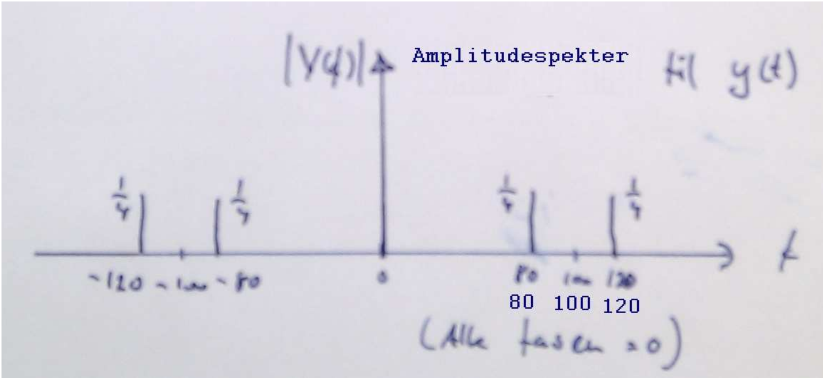


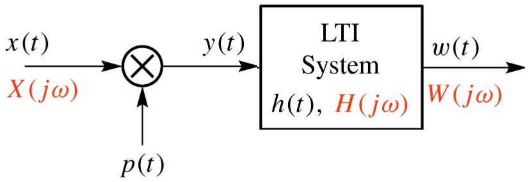
c) Finn et uttrykk for y(t) uttrykt som en sum av to cosinusfunksjoner.

Bruker den trigonometriske formelen: $\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

Dette gir: $y(t) = \cos(2\pi 20t) \cdot \cos(2\pi 100t) = \frac{1}{2}[\cos(2\pi 80t) + \cos(2\pi 120t)]$

d) Tegn frekvensspekteret til y(t).





Figur 3.2: Multiplikasjon og ideelt filter

e) La nå y(t) filtreres med et ideelt filter $H(\mathrm{j}\omega)$ som vist i Figur 3.2 der

Fra frekvensspekteret i d) ser vi at:

$$y(t)=\frac{1}{4}e^{j(2\pi 80t)}+\frac{1}{4}e^{-j(2\pi 80t)}+\frac{1}{4}e^{j(2\pi 120t)}+\frac{1}{4}e^{-j(2\pi 120t)}=\frac{1}{2}\cos(2\pi 80t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi 120t)$$

$$H(j\omega)=\begin{cases} 1\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{320}\omega} & \text{for} \quad 0\le|\omega|\le 2\pi\cdot 110 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Utgangssignalet :

Fra faseleddet ser vi at ved f=80Hz er fasen: $-\frac{2\pi 80}{320}=-\frac{\pi}{2}$

$$w(t)=1\cdot\frac{1}{2}\cos(2\pi 80t-\frac{\pi}{2})+0\cdot\frac{1}{2}\cos(2\pi 120t)$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{2}\cos(2\pi 80t-\frac{\pi}{2})}}$$

f)

La $H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |\omega| \geq 2\pi \cdot 110 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Utgangssignalet

$$w(t) = 0 \cdot \frac{1}{2}\cos(2\pi 80t) + 1 \cdot \frac{1}{2}\cos(2\pi 120t) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cos(2\pi 120t)}}$$

Oppgave 4 (15 %)

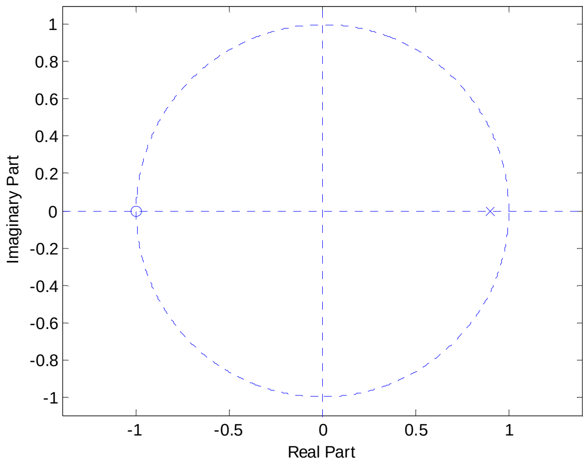
Differanseligningen for et filter er gitt ved $y[n] = x[n] + x[n-1] + 0.9 \cdot y[n-1]$

a) Finn filterets systemfunksjon $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$.

$$Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) + 0.9 \cdot z^{-1}Y(z)$$
$$Y(z)(1 - 0.9 \cdot z^{-1}) = (1 + z^{-1})X(z)$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1+z^{-1})}{(1-0.9 \cdot z^{-1})} = \frac{(z+1)}{(z-0.9)}$$

b) Tegn opp filterets pol- nullpunktdiagram.

Filteret har nullpunkt i z=-1 og pol i z=0.9 :



c) Finn tallverdier til filterets amplituderespons $\left|H(e^{j\hat{\omega}})\right|$ for de tre tilfellene $\hat{\omega} = 0$, $\hat{\omega} = \pi$ og $\hat{\omega} = \frac{\pi}{2}$

$$\left|H(e^{j\hat{\omega}})\right| = \left|H(z)\right|\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$

$$\left|H(e^{j0})\right| = \left|H(z)\right|\Big|_{z=1} = \left|\frac{1+1}{1-0.9}\right| = 20$$

$$\left|H(e^{j\pi})\right| = \left|H(z)\right|\Big|_{z=-1} = \left|\frac{1-1}{-1-0.9}\right| = 0$$

$$\left|H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right| = \left|H(z)\right|\Big|_{z=j} = \left|\frac{j-1}{j-0.9}\right| = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+0.81}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1.81}} = 1.05 \approx 1$$

d) Skisser filterets amplituderespons, $\left|H(e^{j\hat{\omega}})\right|$.