(0,5 bodu) Rozhodněte, zdali je následující jazyk L_1 regulární, či nikoliv. Pokud jazyk není regulární, formálně toto tvrzení dokažte. Pokud jazyk regulární je, popište jej jedním z formalismů pro popis regulárních jazyků (tj. KA, RG, nebo RV). Dále pro něj nalezněte nejmenší konstantu pumping lemma p (jejíž existence je pro regulární jazyky v pumping lemma zaručena) a zdůvodněte, proč je vaše konstanta správná a nejmenší.

$$L_1 = \{w : w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \wedge |w|_{\mathrm{a}} \bmod 3 = |w|_{\mathrm{b}}\} \cap \left\{\mathtt{a}^m \mathtt{b}^j \mathtt{b}^i : m, j, i \in \mathbb{N}_0 \wedge j < m\right\}$$

Poznámka: Pomocí zápisu $|x|_a$ značíme počet symbolů a v řetězci x.

Řešení:

(1) Jazyk L_1 je průnikem dvou jazyků L_l a L_r (l jako $left$, r jako $right$), tj $L_1 = L_l \cap L_r$. Prozkoumame jednodtlive jazyky L_l a L_r:

Jazyk L_l:

$$L_l = \{w : w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \wedge |w|_{\mathrm{a}} \bmod 3 = |w|_{\mathrm{b}}\}$$

L_l tedy reprezentuje všechny možné řetězce nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$, kde počet symbolu b je roven počtu symbolů a modulo 3. Důsledkem z toho je, že počet symbolů b je minimalně 0 a maximálně 2. Příklady možných řetězců z tohoto jazyka:

$$L_l = \{\epsilon, ab, ba, aabb, abab, bbaa, baab, aaa, aaaab, aabaa, aaaaabb, aaaaaa, ...\}$$

Jazyk L_r:

$$L_r = \left\{\mathtt{a}^m \mathtt{b}^j \mathtt{b}^i : m, j, i \in \mathbb{N}_0 \wedge j < m\right\}$$

Příklady řetězců:

$$L_r = \{a, ab, abb, abbb, abbb...b, aab, aabb, aabb....b, aa...abb...b, ...\}$$

Všimneme si, že L_r zadává určitou strukturu řetězce - všechny symboly a se vyskytují pouze zleva, zprava pouze symboly b. Dále vidíme, že minimální řetězec je $w = a$, protože máme podmínku $j < m$, a zároveň víme že nejmenší možné j je 0 ($j \in \mathbb{N}_0$, tj. m nemůže být 0, (jinak bychom měli kontradicki, že j musí být menší než nula a zároveň větší nebo rovnen nule). Tj. v podstatě platí, že $m \geq 1$, neboli $m \in \mathbb{N}$ ale bez nuly.

Další pozorování je, i může být libovolné a nijak nezáleží na žádné jiné proměnné. Tj. $\forall m \in \mathbb{N}$, pokud zafixujeme $j = 0$, tak pomocí i vygenerujeme libovolný počet symolů b, a zároveň vždycky bude platit $j < m$.

Pokud sjednotíme oba pozorování vyše, můžeme jazyk L_r zjednodušit následovně:

$$L_r = \{\mathtt{a}^m \mathtt{b}^j \mathtt{b}^i : m, j, i \in \mathbb{N}_0 \wedge j < m\} = \{\mathtt{a}^m \mathtt{b}^i : i \in \mathbb{N}_0 \wedge m \in \mathbb{N}\}$$

Souhrnně dostáváme zjednodušený průnik jazyků:

$$L_1 = \{w : w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \wedge |w|_{\mathrm{a}} \bmod 3 = |w|_{\mathrm{^m b}}\} \cap \left\{\mathtt{a}^m \mathtt{b}^i : i \in \mathbb{N}_0 \wedge m \in \mathbb{N}\right\}$$

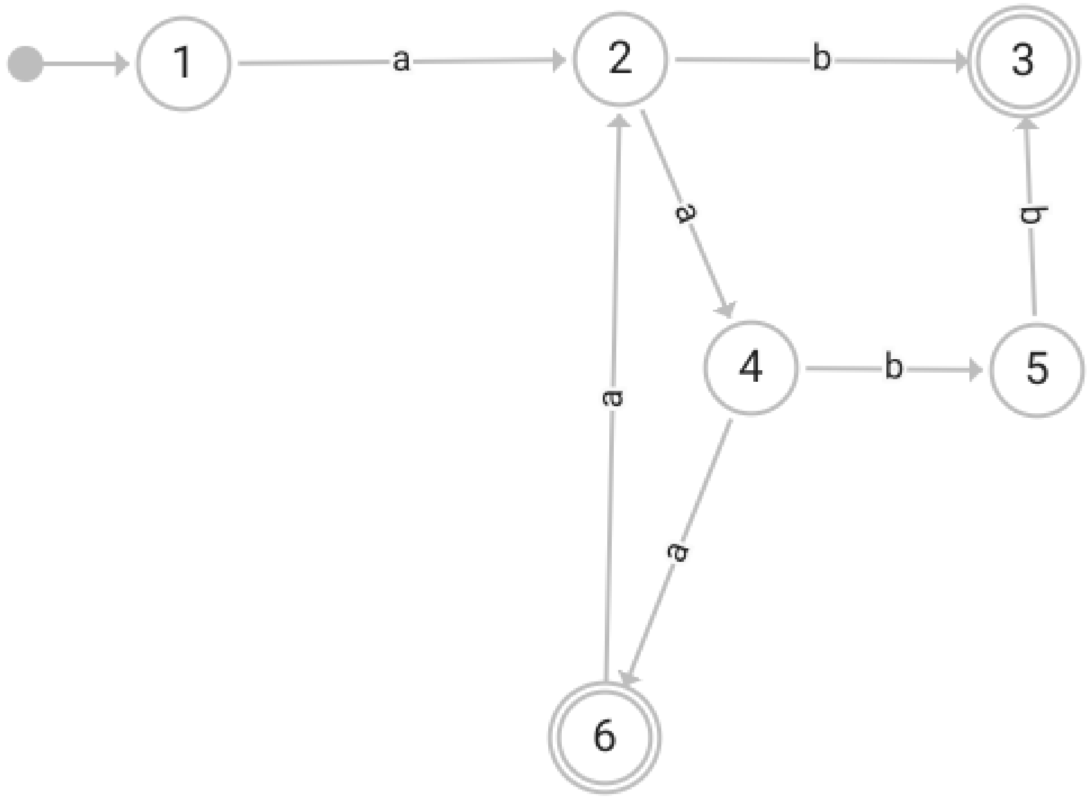
Všímneme si, že L_r nám zadává strukturu jazyka L_1 - tj. zleva jsou vždycky symboly a a zprava jsou vždy symboly b. Další a poslední omezení které L_r dělá je to, že minimální řetězec je a. Jinak může obsahovat libovolně dalších symbolů a zleva a libovolně symbolů b zprava.

Pokud na L_r teď aplikujeme omezení které dělá jazyk L_l, tak vidíme, že zprava můžeme mít $0, 1$ nebo 2 symboly b (v závislosti na počtu symbolů a zleva).

Můžeme tedy zjednodušeně zapsat jazyk L_1 jako:

$$L_1 = \{\mathrm{a}^m \mathrm{b}^n : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0 \wedge |w|_{\mathrm{a}} \bmod 3 = |w|_{\mathrm{b}}\}$$

Pro důkaz, že tento jazyk je regulární mohli bychom využit uzávěrové vlastnosti pro průnik. Tj. pokud bychom dokázali, že L_l a L_r jsou regulární, pak i jejich průnik by byl regulární. Ale teď když máme zjednodušený předpis L_1, který je ekvivalentní, bude mnohem jednodušší, dokázat regualritu tohoto zjednodušeného předpisu, tj. musíme posat ho jedním z formalismu pro popis regulárních jazyků. A to uděláme pomoci tohoto konečného automatu:



Tj. existuje KA (v daném případě DKA), generující tento jazyk, tedy tento jazyk je regulární.

(2) Formálně ověříme, jestli tento jazyk má pumpující vlastnost (již víme, že by ji měl mít, jinak by teno jazyk nemohl být regulární).

Chceme ověřit, že existuje konstanta $p \in \mathbb{N}$ taková, že $\forall$ řetězec $w \in L_1$, kde pokud $|w| \geq p$, pak platí, že existuje nějaký rozklad řetězce $w = xyz$ tak, že $|y| \geq 1$ a zároveň $|xy| \leq p$ a zároveň $\forall k \in \mathbb{N}_0$ platí, že $xy^kz \in L_1$

Formálně:

$$(\exists p \geq 1)(\forall w \in L_1)[|w| \geq p \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^*)(w = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1 \wedge (\forall k \geq 0)(xy^kz \in L_1))]$$

Zároveň musíme najít tuto konstantu p nejmenší.

Zkusíme pro $p = 1$:

Vezmeme řetězec $w = a$, potom existuje právě jedno rozdělení w:

$$x = \epsilon$$
$$y = a$$
$$z = \epsilon$$

Potom ale pro $k = 0$ dostaneme $xy^0z = \epsilon a^0 \epsilon = \epsilon \notin L_1$. Tj. už nemůžeme pro všechny řetězce delký alespoň 1 zajistit pumpující vlastnost, musíme vzít větší konstantu p.

Pro $p = 2$:

Jako protipříklad vezmeme řetězec $w = ab$. Má to sice dvě různá rozdělení, ale pro každé určitě nalezneme nějaké k, pro které výsledný řetězec nebude z jazyka, protože nebude sedět počet symbolů a a b.

Například:

$$x = \epsilon$$
$$y = a$$
$$z = b$$

Potom pro $k = 0$ dostaváme $xy^0z = \epsilon a^0 b = b \notin L_1$.

Pokud zvolíme to druhé zbývající rozdělení, tak zase pro $k = 0$ dostaneme prázdný řetězec a ten do jazyka nepatří.

A žádná další rozdělení nemáme, pro toto $p = 2$ nemůžeme dokázat pumpijící vlastnost jazyka.

Pro $p = 3$:

Zvolíme zase minimální řetězec délky 3:

$$w = aaa$$

.

Pokud zvolíme $y = aaa$, pak $\forall k \geq 1$ pumpující vlastnost platí.

Ale pro $k = 0$ dostaneme prázdný řetězec, který do jazyka nepatří. Pokud zkusíme zbývající dvě rozdělení, určitě najdeme taková k, kde nebude sedět počet symbolů a a b.

Pozorování: Vidíme, že pokud pumpujeme podřetězec aaa, tak nikdy neporušíme podmínku na počet symbolů a a b. Tj. obecně hledáme rozdělení, kde $y = aaa$, ale zároveň nedostaneme prázdný řetězec.

Pro $p = 4$:

Minimální řetězec bude $w = aabb$. Úplně analogicky pro káždé rozdělení určitě najdeme takové k, že výsledný řetězec nebude patřít do jazyka, a to přes porušení správného počtu symbolů a a b.

Pro $p = 5$:

Minimální řetězec bude $w = aaaab$. Všimneme si taky, že pro káždý řetězec $w \geq 5$ máme ten řetězec ve tvaru $a^3 a^m b^{m \bmod 3}, \forall m \in \mathbb{N}$

Vždycky zvolíme rozdělení:

$$x = \epsilon$$
$$y = a^3$$
$$z = a^m b^{m \bmod 3}$$

A pro káždý takový řetězec v tomto tvaru a pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí pumpující vlastnost.

Takže pro $p = 5$ platí pumpující vlastnost pro jazyk L_1, která je nutnou podmínkou (nikoliv postačující) pro regularitu jazyka L_1. Zároveň nalezená konstanta $p = 5$ je nejmenší, protože pro všechny nižší hodnoty jsme vyvrátili pumpující vlastnosti pro určité řetězce a konstanty k.

□

(0,5 bodu) Rozhodněte, zdali je následující jazyk L_2 regulární, či nikoliv. Pokud jazyk není regulární, formálně toto tvrzení dokažte. Pokud jazyk regulární je, popište jej jedním z formalismů pro popis regulárních jazyků (tj. KA, RG, nebo RV). Dále pro něj nalezněte nejmenší konstantu pumping lemma p (jejíž existence je pro regulární jazyky v pumping lemma zaručena) a zdůvodněte, proč je vaše konstanta správná a nejmenší.

$$L_2 = \{2^m 1^n 2^j : m, n, j \in \mathbb{N} \land m > 1 \land n, j \geq 1 \land j \neq m + n\}$$

Řešení:

Vidíme, že počet symbolů 2 zprava nesmí být stejný jako počet všech ostatních symbolů zleva.

Příklad řetězců obsažených v tomto jazyku:

$$L_2 = \{2212, 22122, 2212222, 22112, ...\}$$

Pozorování: minimální řetězec je 2212.

Zatím mohli bychom mít intuici, že tento jazyk nemá pumpující vlastnost kvůli podmínce $j \neq m + n$, zkusíme tedy vyvrátit pumpující vlastnost, tj. že pro daný jazyk L_2 neplatí pumpující vlastnost a tedy není splněná nutná podmínka pro regularitu tohoto jazyka (tj. použijeme obměnenou implikaci v pumping lemma):

Pokud L_2 nemá pumpující vlastnost, potom není regulární.

Musíme tedy dokázat negaci pumpující vlastnosti:

$$\neg(\exists p \geq 1)(\forall w \in L_1)[|w| \geq p \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^*)(w = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1 \wedge (\forall k \geq 0)(xy^k z \in L_1))] \equiv$$
$$\equiv (\forall p \geq 1)(\exists w \in L_2)[|w| \geq p \wedge (\forall x, y, z \in \Sigma^*)((w = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow (\exists k \geq 0)(xy^k z \notin L_2))]$$

Pokud tuto negaci dokážeme, tak z toho bude plynout, že L_2 není regulární.

Pro důkaz neregularity budeme dokazovat neregularitu doplňku L_2. Důvodem je to, že může být, že důkaz pro L_2 povede na práci s faktoriály. Bude jednodušší vyvratit pumpující vlastnost pro doplňěk jazyka L_2.

Víme z vlástností regulárních jazyků, že regulární jazyky jsou uzavřené na operaci doplňku. Tj. platí:

$$L \text{ je regulární } \Leftrightarrow \Sigma^* \setminus L = \overline{L} \text{ je regulární}$$

.

T.j. vyvrátíme pumpující vlastnost pro jazyk $\overline{L_2} = \Sigma^* \setminus L_2$.

Konkrétně vezmeme nějaký řetězec, kde platí $j = m + n$. Libovolný takový řetězec není v L_2, ale jistě je v $\overline{L_2}$. Například:

$$w = 22^p 12^{p+2}$$
$$w = 22_1 2_2 ... 2_{p-1} 2_p 12_1 2_2 ... 2_{p+2}$$
$$max\ xy = 22_1 2_2 ... 2_{p-1}$$
$$min\ xy = 2$$
$$min\ z = 2_p 12_1 2_2 ... 2_{p+2}$$

Potom každé možné rozložení pro takové w lze představit jako:

$$x = 2^r \qquad r \geq 0$$
$$y = 2^s \qquad s \geq 1$$
$$z = 2^t 12^{p+2} \qquad t \geq 1$$
kde zároveň platí:
$$r + s + t + 1 = p + 2 \Leftrightarrow r + t = p + 1 - s$$

Potom vždycky při volbě $k = 0$ dostaváme:

$$xy^0 z = 2^r (2^s)^0 2^t 12^{p+2} = 2^r 2^t 12^{p+2},$$
aby tento řetězec byl z jazyka $\overline{L_2}$, musí platit:
$$r + t + 1 = p + 2 \Rightarrow p + 1 - s + 1 = p + 2 \Rightarrow s = 0,$$
což je spor s tím, že $s \geq 1$

To znamená, že pří žádném rozkladu pro $k = 0$ nikdy nebude výsledný řetězec z jazyka $\overline{L_2}$. Tj. neplatí pro tento jazyk pumpující vlastnost, a tím padem tento jazyk není regulární, a tím pádem není regulární i jazyk L_2!

□