Capítulo 2

Acciones de grupos

En esta lectura, consideramos crecimiento en el contexto de grupos actuando sobre conjuntos. Aquí, $\Omega = \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{Sim}(\Omega) = S_n$ (el *grupo simétrico*) es el conjunto de permutaciones de Ω, y A_n (el *grupo alternante*) es el conjunto de permutaciones pares de Ω.

Recuerde que una *acción* de un grupo G sobre Ω es un homomorfismo $G \to S_n$.[1] Necesitamos alguna terminología:

- Para $\omega \in \Omega$, la *órbita* de ω bajo la acción de G es el conjunto

$$G\omega := \{g\omega \mid g \in G\}.$$

- Para $\omega \in \Omega$, $A \subseteq G$, la *órbita* de ω bajo la acción de A es el conjunto

$$A\omega := \{g\omega \mid g \in A\}.$$

- Para $\omega \in \Omega$, el *estabilizador* de ω in G es el subgrupo

$$G_\omega := \{g \in G \mid g\omega = \omega\}.$$

(La segunda definición es probablemente nueva para usted – es una generalización de la primera, que es estandar.) Recuerde que las órbitas de un grupo G actuando sobre Ω forman una partición de G. Las órbitas de un conjunto A no tienen esta propiedad en general.

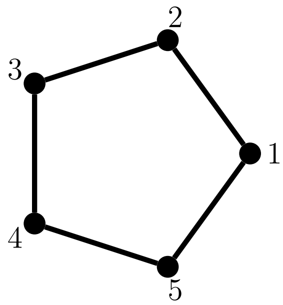
Ejemplo 2.

1. Sea $G = S_n$ y $\omega = 1 \in \Omega$. Entonces la órbita de 1 es Ω, y el estabilizador es

$$G_1 = \{g \in S_n \mid g(1) = 1\} \cong S_{n-1}.$$

2. Sea $\Omega = \{1, \ldots, 5\}$ y $G = D_5$, el grupo dihedral de cardinalidad 10. Es el grupo de automorfismos de un pentágono:

[1] No tengo tiempo en esta lectura discutir la teoría de las acciones de grupos. Para una introducción excellente, recomiendo [6].



Para cada $\omega \in \{1, \ldots, 5\}$, la órbita $G\omega = \Omega$. El estabilizador es de cardinalidad 2 y contiene la identidad y una reflección. Por ejemplo,

$$G_1 = \{(1), (2,5)(3,4)\}.$$

3. Sea $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ y G el grupo de elementos que preservan la partición $\Omega = \{1,2\} \cup \{3,4,5\}$.
   Entonces $G \cong S_2 \times S_3$ y, por construcción las órbitas de G son $\{1,2\}$ y $\{3,4,5\}$. Hay dos tipos de estabilizadores:
   $$G_1 \cong G_2 \cong S_3 \text{ y } G_3 \cong G_4 \cong G_5 \cong S_2 \times S_2.$$
4. Sea V un espacio vectorial de dimensión d sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, y sea $G = \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$, el grupo de transformaciones lineales inversibles, un grupo bajo la operación de composición. G actúa sobre el conjunto V y hay dos órbitas:
   $$\{\mathbf{0}\} \text{ y } V \setminus \{\mathbf{0}\}.$$
   Otra vez, hay dos tipos de estabilizadores. $G_{\mathbf{0}} = G$, mientras que si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces
   $$G_{\mathbf{v}} \cong \mathbb{F}^{d-1} \rtimes GL_{d-1}(\mathbb{F}).$$

En todos los ejemplos anteriores, se puede tomar un subconjunto A del grupo G y las órbitas de A seran subconjuntos de las órbitas de G.

Ahora podemos escribir el **teorema de órbita-estabilizador** pero esta versión incluye una proposición para subconjuntos, no solamente para subgrupos.

Teorema 6. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto Ω. Sea $\omega \in \Omega$, y sea $A \subset G$ no vacío. Entonces*

$$|G\omega| = \frac{|G|}{|G_\omega|} \text{ y } |A\omega| \geq \frac{|A|}{|AA^{-1} \cap G_\omega|}$$

Espero que la igualdad sea familiar a ustedes. La desigualdad es en los ejercicios.

Definición 7. La acción de G es *transitiva* si para todo $\omega_1, \omega_2 \in G$ hay un $g \in G$ tal que $g(\omega_1) = (\omega_2)$.

Si $A \subset G$, decimos que A es *transitivo* si para todo $\omega_1, \omega_2 \in G$ hay un $g \in A$ tal que $g(\omega_1) = (\omega_2)$.

A veces, abusaremos terminología y decimos que un grupo G *es transitivo*, si la acción que consideramos es obvia.

Observe que una acción es transitiva si y sólo si la órbita de cada elemento de Ω es el mismo Ω. En Ejemplo 2, (1) y (2) son transitivas; (3) y (4) no son transitivas (son *intransitivas*).

Si tenemos una acción intransitivo, podemos descomponer Ω usando las órbitas de la acción. El grupo actúa sobre cada órbita y, por definición, la acción es transitiva. Por ejemplo, el grupo $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$ en la cuarta acción actúa transitivamente sobre el conjunto $V \setminus \{\mathbf{0}\}$.

2.1 t-transitividad

Hay otros conceptos do transitividad más fuerte. Sea t un entero tal que $1 \leq t \leq |\Omega|$. Podemos usar la acción de G sobre Ω definir una acción de G sobre $\Omega^t = \underbrace{\Omega \times \cdots \times \Omega}_{t}$: para $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t) \in \Omega^t$ y $g \in G$:

$$g(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t) = (g\omega_1, g\omega_2, \ldots, g\omega_t).$$

Debe verificar que esta acción es bien-definida.

Considere un subconjunto importante de Ω^t:

$$\Omega^{(t)} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_t) \in \Omega^t \mid \omega_i \neq \omega_j \text{ para todo } i \neq j\}.$$

En otras palabras, $\Omega^{(t)}$ es el conjunto de t-tuplos de elementos *distintos* de Ω. Observe que la acción de G sobre Ω^t se restringe a una acción sobre $\Omega^{(t)}$.

Definición 8. Sea t un entero tal que $1 \leq t \leq |\Omega|$. La acción de G es *t-transitiva* si la acción de G sobre $\Omega^{(t)}$ es transitiva.

Si $A \subseteq G$, decimos que A es t-transitivo si A es transitivo sobre $\Omega^{(t)}$.

En los ejercicios, probaremos que si una acción es t-transitiva para algún $t \geq 2$, entonces es $(t-1)$-transitiva. Observe que una acción es 1-transitiva si y sólo si es transitiva.

Hay dos ejemplos muy importantes de grupos con acciones t-transitivas:

Lema 9. *La acción de S_n sobre Ω es n-transitivo; la acción de A_n sobre Ω es $(n-2)$-transitivo para $n \geq 3$.*

El siguiente es un teorema famoso – es la solucíon a una conjetura de Jordan; su demostración usa la clasificación de grupos finitos simples. Una demostración directa sería un muy gran resultado en la teoría de grupos.

Teorema 10. *Supóngase que G es un grupo finito que actú sobre un conjunto de cardinalidad n, y que esta acción es 6-transitiva. Entonces $G \cong A_n$ o S_n.*

Si reemplazamos 6 con 5, hay dos ejemplos más: $G \cong M_{12}$, M_{24}, S_n o A_n. Sin embargo, si consideramos acciones 2-transitivas o 3-transitiva, hay muchos ejemplos.

Ejemplo 3. Sea $\mathbb{F}_p$, el cuerpo de cardinalidad p, sea $V = \mathbb{F}_p^2$, y sea Ω el conjunto de subespacios 1-dimensionales en V. Entonces $|\Omega| = p + 1$.

Ahora, defina

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, c \in \mathbb{F}_p^*, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Observe que $|G| = p(p-1)^2$ y que G actúa sobre Ω por multiplicación a la izquierda:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

En los ejercicios vamos a probar que esta acción es 3-transitiva. Vamos a ver en los ejercicios también que este resultado implica que un establizador G_ω de $\omega \in \Omega$ tiene una acción 2-transitiva sobre $\Omega \setminus \{\omega\}$.

Parece que es difícil encontrar grupos con acciones t-transitivas para t grande. Qué pasa para conjuntos? Para responder a esta pregunta, necesito una definición nueva:

Definición 11. Sea A un subconjunto de un grupo G finito. Definimos

$$\langle A\rangle := \{a_1a_2\cdots a_k \mid k\in\mathbb{Z}^+, a_1,\ldots,a_k\in A\}$$

y decimos que $\langle A\rangle$ es *el subgrupo de G generado por A*. Si $G=\langle A\rangle$, decimos que A *genera* G.

Vamos a ver en los ejercicios que $\langle A\rangle$ es, de hecho, un subgrupo de G (entonces, nuestra terminología hace sentido). En los ejercicios ampliaremos la definición que se aplica a grupos infinitos también.

Lema 12. *Supóngase que $A\subseteq G$, un grupo, G actúa sobre un conjunto Ω, y $\omega\in\Omega$. Escribe $H:=\langle A\rangle$ y tome $k\in\mathbb{Z}^+$. Si Λ es la órbita de ω bajo A^k y bajo A^{k+1}, entonces Λ es una órbita para H.*

No hemos definido formalmente lo que significa "el crecimiento de una órbita", pero se puede pensar de este resultado como *si una órbita no crece, entonces es lo más grande que se puede.*

Demostración. Ya que Λ es la órbita de ω bajo A^k, luego

$$\Lambda=\{b\omega\mid b\in A^k\}.$$

Ahora, ya que Λ es una órbita para A^{k+1} también,

$$\Lambda=\{ab\omega\mid a\in A, b\in A^k\}.$$

Entonces, si $\lambda\in\Lambda$, entonces $a\lambda\in\Lambda$, y por lo tanto

$$a_1\cdots a_k\lambda\in\Lambda$$

para todo $a_1,\ldots,a_k\in A$. Es decir que si $\lambda\in\Lambda$, entonces $h\lambda\in\Lambda$ para todo $h\in H$. Entonces Λ es una unión de órbitas de H. Pero Λ es una órbita de A^k implica que Λ es un subconjunto de una órbita de $H\supseteq A^k$, entonces Λ es una órbita de H. $\square$

Corolario 13. *Supóngase que la acción de $H=\langle A\rangle$ sobre Ω sea t-transitiva, y Ω sea finito de cardinalidad n. Entonces el conjunto A^{n^t} es t-transitivo.*

Probaremos este resultado en los ejercicios. Con este resultado, podemos encontrar muchos conjuntos t-transitivos para t grande. Por ejemplo, podemos tomar un conjunto $A\subseteq S_n$ que genera S_n (es decir, no es un subconjunto de un subgrupo de S_n). Entonces A^{n^t} será t-transitivo para todo $1\leq t\leq n$.

2.2 Ejercicios

(1) Sea G un grupo. Sean $H < G$, $g \in G \backslash H$ y $A = H \cup \{g\}$. Entonces $|A|^2 < 3|A|$, pero $A^3 \supset HgH$, y HgH puede ser mucho más grande que A. Dar un ejemplo (tal vez, con $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$).

(2) Escriba un subconjunto A de S_3 para que las órbitas de los elements de $\Omega = \{1, 2, 3\}$ bajo A no forman una partición de Ω.

(3) Pruebe el teorema de órbita-estabilizador para conjuntos. Use el principio del palomar.

(4) Supóngase que G sea un grupo actuando sobre un conjunto Ω, que $\omega \in \Omega$, y que $2 \leq t \in \mathbb{Z}$. Pruebe que la acción de G es t-transitivo si y sólo si la acción de G es transitivo, y la accíon del establizador G_ω sobre $\Omega \setminus \{\omega\}$ es $(t-1)$-transitivo.

(5) ¿Porqué hemos definido t-transitividad para $t \leq |\Omega|$?

(6) Pruebe Lema 9.

(7) Pruebe que la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sobre el conjunto en Ejemplo 2 es 3-transitiva. ¿ Cuál es el estabilizador del subespacio $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$?

Sugerencia: use Ejercicio (4) .

(8) Sea $A \subseteq G$, un grupo finito. Pruebe que $\langle A \rangle$ es un subgrupo de G. Dé un ejemplo para mostrar que esta conclusión no es verdadera para grupos infinitos. ¿Cómo necesito cambiar la definición para que $\langle A \rangle$ sea un subgrupo en el caso infinito también?

(9) Pruebe que A genera G si y sólo si A no es un subconjunto de un subgrupo proprio de G.

(10) Pruebe Corolario 13.

(11) Tome un grupo G actuando sobre un conjunto Ω. Un *sistema de imprimitividad* para esta acción es una relación de equivalencia R sobre Ω tal que

$$\omega_1 \; R \; \omega_2 \text{ y } g \in G \Longrightarrow \omega_1^g \; R \; \omega_2^g.$$

Hay dos relaciones *triviales*

$$\omega_1 \; R_1 \; \omega_2, \; \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega \text{ tal que } \omega_1 = \omega_2 \qquad\qquad \omega_1 \; R_2 \; \omega_2, \; \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega.$$

Llamamos la acción *imprimitiva* si hay una sistema de imprimitividad no-trivial, y llamamos la acción *primitiva* si no.

(a) Pruebe que, si $|\Omega| > 2$ y la acción es primitiva, entonces la acción es transitiva.

(b) Pruebe que si la acción es 2-transitiva, entonces la acción es primitiva.

(c) Pruebe que la acción del grupo dihedral D_n sobre el n-gono es primitiva para $n = 5$ pero no para $n = 6$.[2]

[2] Este ejercicio con Ejercicio (4) mostran que hay una cadena de implicaciones para acciones de grupos:

$$\cdots \Longrightarrow 3 - \text{transitiva} \Longrightarrow 2 - \text{transitiva} \Longrightarrow \text{primitiva} \Longrightarrow \text{transitiva}.$$