EJERCICIOS 2

(1) Calcular los tres autovalores de la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Calcular los tres autovalores distintos λ_1, λ_2, λ_3 de la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Resolver las ecuaciones $(\lambda_j I_3 - A)\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}$, $j = 1,2,3$, para obtener tres autovectores $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ de A. Sea $P := [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3]$. Verificar que la matriz $P^{-1}AP$ es diagonal y que sus elementos diagonales son los autovalores de A.

(3) Calcular los autovalores de la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtener una matriz inversible P cuyas columnas son autovectores de A y verificar que las transpuestas de las filas de P^{-1} son autovectores de A^t.

(4) Un “cuadrado mágico” de lado n es una matriz $n \times n$ cuyas entradas son los enteros $1,2,\dots,n^2$ dispuestos de tal manera que la suma de las entradas de cada fila y de cada columna es la misma. Verificar que $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ es un autovalor de esta matriz.

(5) Calcular los polinomios característicos y determinar los autovalores de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix},$$

donde $-\pi < \theta \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, y $\omega = e^{2\pi i/3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

(6) Calcular el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

y concluir que todo polinomio $f(t)$ es el polinomio característico de alguna matriz.

(7) (a) Si $P^{-1}AP = D$ es una matriz diagonal, demostrar que $A^k = PD^kP^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Calcular los dos autovalores de la matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ y obtener un par de autovectores correspondientes.

(c) Usar los resultados de las partes (a) y (b) para comprobar que

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}^9 = \begin{bmatrix} -1025 & 513 \\ -1026 & 514 \end{bmatrix}.$$

(8) Supongase que

- V es un espacio vectorial finitodimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$;
- $W_1, \ldots, W_k \leq V$ (es decir, son subespacios);
- $W_1 + \cdots + W_k = V$;
- $\dim(W_1) + \cdots + \dim(W_k) = V$.

Demostrar que

- $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$;
- Si β_i es una base para W_i ($i = 1, \ldots, k$), entonces
$$\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_k$$
es una base para V.

(Este ejercicio da una manera alternativa a demostrar Teorema 2.1. ¿Es la condición que V es finitodimensional necesaria?)

(9) Supongase que V es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$, y $T : V \to V$ es una transformación lineal. Sea β una base de V tal que
$$(T)_\beta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
Demostrar que T tiene sólo un valor propio si y sólo si
$$a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = 0.$$
(En particular, si $a^2 + d^2 - 2ad + 4bc \neq 0$, entonces T es diagonalizable. Podemos concluir que “casi todo” 2×2 matrices sobre $\mathbb{R}$ son diagonalizables. Una declaración similar es verdad para $n \times n$ matrices sobre $\mathbb{R}$.)

(10) Supongase que V es un espacio vectorial finitodimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, y $T : V \to V$ es una transformación lineal con polinomio característico f. Supongase que c es una raiz de f de multiplicidad d. Demostrar que, si W es el espacio propio de T asociado a c, entonces $\dim(W) \leq d$.

(11) Supongase que V es un espacio de dimensión $n < \infty$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, y $T : V \to V$ es una transformación lineal con polinomio característico
$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$
Escribe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ para los valores propios de T contado con multiplicidad, finalmente sea β una base de V y escribe $A = (T)_\beta$. Demostrar que

- $a_0 = (-1)^n \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- $a_{n-1} = -(A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$. El número $A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$ se llama *la traza* de A. Concluir que, si $A \sim B$, la traza de A es igual a la traza de B y, entonces, podemos definir *la traza* de T ser la traza de $(T)_\beta$ donde β es cualquiera base de V.
- ¿ Puede obtenir mas fórmulas para $a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots$? En particular, sea $n = 3$, y calcular a_1.