Capítulo 3

Grafos de Cayley

En esta lectura, $(G, \cdot)$ es un grupo (usualmente finito) y A es un subconjunto (siempre finito) de G.

Definición 14. El *grafo de Cayley* para G con respecto a A es el grafo dirigido (V, E) donde

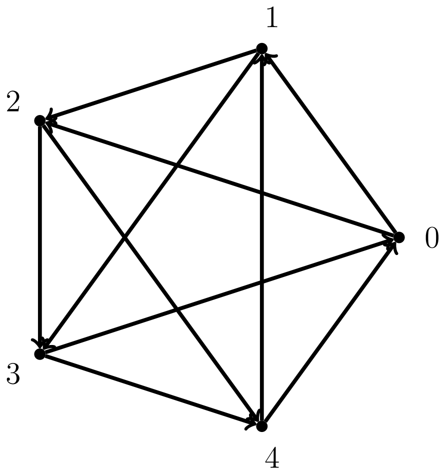
1. el conjunto de vértices, V, es igual al conjunto de elementos de G;
2. si $g, h \in G$, entonces hay una arista de g a h si y sólo si $h = ga$ para algún $a \in A$.

Escribimos $\Gamma(G, A)$ para este grafo.[1]

Si $A = A^{-1}$ hay una arista de g a h, si y sólo si hay una arista de h a g. En este caso, podemos reemplazar las dos aristas dirigidas con una arista sin direccíon, y podemos pensar en $\Gamma(G, A)$ como un grafo no-dirigido.

Ejemplo 4.

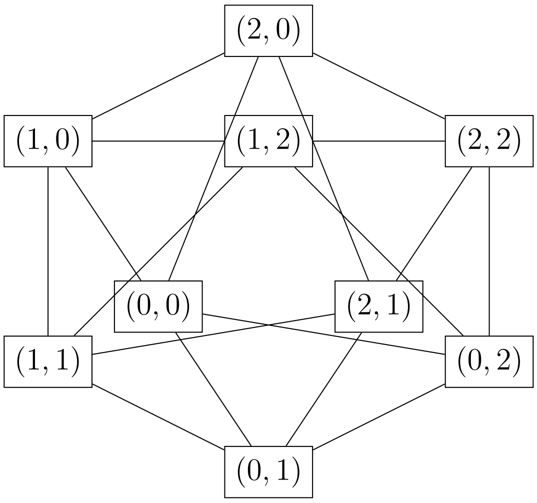
1. Sea $G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ y $A = \{1, 2\}$. Entonces $\Gamma(G, A)$ es



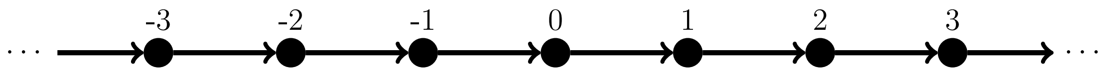
[1]Hay varias convenciones sobre la definición de un grafo de Cayley. En nuestra definición hay una manera natural de nombrar los vértices de $\Gamma(G, A)$ (por los elementos de G). En las diagrámas siguientes, escribiremos estos nombres aunque, de hecho, estamos interesado solamente en la estructura del grafo "abstracto" y, por lo tanto, estos nombres no importan. Por otro lado, algunos autores nombran las aristas también, por los elementos de A. Por ejemplo, si vértices v y w son conectados porque hay $a \in A$ tal que $va = w$, entonces el arista de v a w puede tomar el nombre a (observe que este nombre es único). No haremos esto.

Observe que si agregamos los inversos de los elements de A (para obtener un grafo no-dirigido), entonces $A = G \setminus \{0\}$, y el grafo de Cayley es el grafo completo. Este es verdadero en general: para cualquier grupo G, si A es igual a los elementos de G sin la identidad, entonces $\Gamma(G, A)$ es el grafo completo. ¿Qué pasa si $A = G$?

2. Sea $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ y $A = \{(1, 0), (2, 0), (0, 1), (0, 2)\}$. Observe que, ya que $A = -A$, el grafo es no-dirigido.



3. Sea $G = (\mathbb{Z}, +)$ y $A = \{1\}$. Entonces $\Gamma(G, A)$ es



3.1 La estructura de $\Gamma(G, A)$

Queremos estudiar la estructura de los grafos de Cayley para varios grupos G y conjuntos $A \subseteq G$. Vamos a usar la teoría de acciones: recuerde que un grupo G puede actuar sobre sí mismo por multiplicación. Hay dos posibilidades: primero G actúa *por la izquierda*. La homomorfismo del acción es

$$\begin{aligned} \iota : G &\to \mathrm{Sim}(G), g \mapsto \iota_g, \text{ donde} \\ \iota_g : G \to G&, h \mapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

Segundo, G actúa *por la derecha*. La homomorfismo es

$$\begin{aligned} \delta : G &\to \mathrm{Sim}(G), g \mapsto \delta_g, \text{ donde} \\ \delta_g : G \to G&, h \mapsto h \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

Observe que, en ambos casos, si $h \in G$, el estabilizador $G_h = \{1\}$.

Sea $A \subseteq G$. Queremos usar el hecho que G es, sí mismo, el conjunto de vértices en el grafo $\Gamma(G, A)$. El resultado siguiente es obvio.

Lema 15. *Cuando G actua sobre sí mismo por multiplicación por la izquierda, esta acción* preserva las aristas de $\Gamma(G, A)$. *Es decir, si $h_1, h_2 \in G$ son conectados en $\Gamma(G, A)$, entonces gh_1, gh_2 son conectados en $\Gamma(G, A)$.*

Formalmente este lema dice que G es *un grupo de automorfismos* del grafo $\Gamma(G, A)$. La importancia de este es que la estructura del grafo es el mismo del punto de vista de cualquier vértice que escogemos. Por ejemplo, si borramos los nombres de los vértices, es imposible decir cuál fue la identidad: para todo vértice v, hay una manera de nombrar tal que v es la identidad.

3.1.1 Diametro

En el siguiente, vamos a escribir $\overrightarrow{vw}$ para una arista dirigida de un vértice v a un vértice w en un grafo dirigido Γ; similarmente, vamos a escribir $\overline{vw}$ para una arista no-dirigida entre dos vertices v y w en un grafo no-dirigido Γ.

Ahora, en un grafo dirigido un *sendero* de un vértice v a un vertice w es una secuencia de aristas dirigidas de la forma

$$\overrightarrow{vv_1},\ \overrightarrow{v_1v_2}, \ldots,\ \overrightarrow{v_{k-2}v_{k-1}},\ \overrightarrow{v_{k-1}w}.$$

Este sendero tiene largo k. La *distancia* de v a w es el largo mínimo de un sendero de v a w. Si no hay un sendero de v a w, decimos que la distancia es ∞.

Similarmente, en un grafo no-dirigido un *sendero* de largo k de un vértice v a un vértice w es una secuencia de aristas de la forma

$$\overline{vv_1},\ \overline{v_1v_2}, \ldots,\ \overline{v_{k-2}v_{k-1}},\ \overline{v_{k-1}w}$$

La *distancia* entre v y w es el largo mínimo de un sendero entre v y w. Otra vez, si no hay un sendero entre v y w, decimos que la distancia es ∞.

En ambos casos, escribimos $d(v, w)$ para la distancia de v a w. Observe que, en un grafo dirigido, es posible que la distancia de v a w es diferente a la distancia de w a v. Por ejemplo en el tercer grafo en Ejemplo 4, $d(1, 2) = 1$ mientras que $d(2, 1) = \infty$.

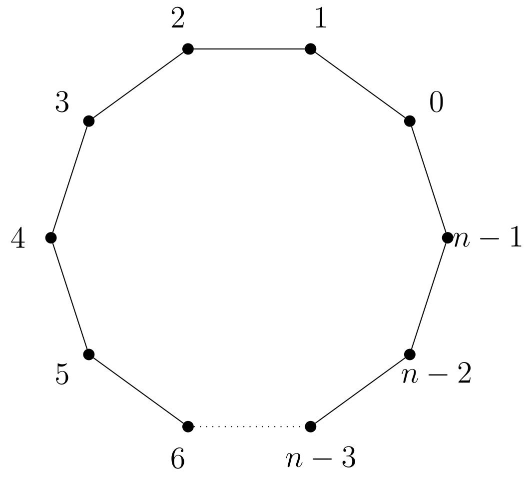
Definición 16. El *diametro* de un grafo Γ, escrito $\mathrm{diam}(\Gamma)$, es definido como

$$\max\{d(v, w) \mid v, w \text{ vértices en } V\},$$

si el máximo exista. Si no, escribimos $\mathrm{diam}(\Gamma) = \infty$.

El ejemplo siguiente será importante más tarde.

Ejemplo 5. Sea G el grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ con $A = \{1, -1\}$. Ya que $A = -A$, podemos dibujar $\Gamma(G, A)$ como un grafo no-dirigido:



El grafo es el n-gono, y es obvio que $\operatorname{diam}(\Gamma(G, A)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Note que, cuando $n = p$, el grupo $(G, +) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ es simple. Entonces, tenemos una familia de grafos de Cayley de grupos simples para que el diametro crece linealmente como una función de la cardinalidad del grupo.

3.2 Diametro y crecimiento

Si Γ es un grafo de Cayley, i.e. $\Gamma = \Gamma(G, A)$ para algún G y A, entonces podemos usar Lema 15 para ayudarnos en la calculación del diametro de Γ. Ya que el grafo es el mismo del punto de visto de cualquier vértice, el diametro es la distancia máximo de un vértice de la identidad:

$$\operatorname{diam}(\Gamma(G, A)) = \max\{d(1, v) \mid v \text{ un vértice en } V\}.$$

Note que la calculación del diametro de un grafo es, en general un problema difícil. Necesitamos usar la estructura especial de un grafo de Cayley cuando hacemos esta calculación. El resultado siguiente será útil.

Lema 17. *Sea $\Gamma = \Gamma(G, A)$. El conjunto de vértices de distancia 1 de la identidad es igual al conjunto A. Más generalment, el conjunto de vértices de distancia k de la identidad es igual al conjunto A^k.*

Corolario 18. *El diametro* $\operatorname{diam}(\Gamma(G, A))$ *es igual al número mínimo k tal que*

$$\{1\} \cup A \cup A^2 \cup \cdots \cup A^k = G.$$

Si A contiene la identidad de G, entonces el diametro $\operatorname{diam}(\Gamma(G, A))$ *es igual al número mínimo k tal que $A^k = G$.*

Corolario 19. *(a) El diametro de un grafo de Cayley satisface una cota inferior:*

$$\operatorname{diam}(\Gamma(G, A)) \geq \frac{\log |G|}{\log |A|}.$$

(b) Si $\langle A \rangle = G$, tenemos tambíen una cota superior:

$$\operatorname{diam}(\Gamma(G, A)) \leq |G|.$$

Este corolario dice que el diametro de un grafo de Cayley está entre una función logarítmica y una función lineal en la cardinalidad de G. Pensamos de grafos con pequeño diametro como "compacto" en algún sentido, mientras que los grafos con gran diametro son "dispersado" – mire Ejemplo 5 para una familia de tales grafos.

3.3 Ejercicios

(1) Pruebe que si G es finito, $\Gamma(G, A)$ es conectado si y sólo si A genera G.

(2) Sea $A = \{(1, 2, 3)\} \subset S_3$ y $B = \{(1, 2, 3), (1, 2)\} \subset S_3$.
Dibuje $\Gamma(S_3, A)$, $\Gamma(S_3, B)$. ¿A genera S_3? ¿B genera S_3?

(3) Sea D_5, el grupo dihedral de cardinalidad 10. (La definición exacta fue dada en lectura 2.) Sea $A = \{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 5)(3, 4)\}$. Dibuje $\Gamma(D_5, A)$.

(4) Sea Γ un grafo dirigido, v un vértice de Γ. La incidencia de v es el número de vertices w tal que hay una arista de v a w. Un grafo es *regular* si para todos vértices v, w, la incidencia de v es igual a la incidencia de w.
Muestre que $\Gamma(G, A)$ es regular. ¿Cuál es la incidencia de un vértice de $\Gamma(G, A)$?

(5) Calcule el diametro de cada grafo en Ejemplo 4, y en los ejercicios (2) y (3) .

(6) Sea G el grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ con $A = \{1\}$. Calcule $\mathrm{diam}(\Gamma(G, A))$.

(7)

(a) Sea $G = S_n$, y A el conjunto de todas transposiciones. Calcule $\mathrm{diam}(\Gamma(G, A))$.

(b) Sea $G = A_n$, y A el conjunto de todos 3-ciclos. Calcule $\mathrm{diam}(\Gamma(G, A))$.

(c) Sea $G = S_n$, y $A = \{(1, 2), (1, 2, 3, \ldots, n)\}$. ¿Puede calcular $\mathrm{diam}(\Gamma(G, A))$? (Este es mucho más difícil.)

(8) Pruebe Lema 17, Corolario 18 y Corolario 19.