EJERCICIOS 1

(1) Sea A un subconjunto de $\mathbb{Z}$.
(a) Muestre que $|A+A| \geq 2|A|-1$.
(b) Muestre que si A es una progesión aritmética, entonces $|A+A| = 2|A|-1$.
(c) Muestre que si $|A+A| = 2|A|-1$, entonces A es una progesión aritmética.[1]

(2) Sea B un subconjunto de $\mathbb{Z}^+$.
(a) Muestre que $|B \cdot B| \geq 2|B|-1$.
(b) Muestre que B es una progesión geométrica si y sólo si $|B \cdot B| = 2|B|-1$.
(c) Porqué la restricción a los enteros **positivos**?

(3) (a) Muestre que si A es una progesión aritmética, entonces $|A \cdot A| \geq \frac{1}{2}|A|^2 - 1$.
(b) Muestre que si B es una progesión geométrica, entonces $|B+B| \geq \frac{1}{2}|B|^2 - 1$.[2]

(4) Muestre proposición 1.

(5) Sea A un conjunto en G abeliano. Muestre que $2A = A$ si y sólo si A es un grupo.

(6) Sea G un grupo finito y abeliano, y supóngase que A y B son subconjuntos de G tal que

$$|A| + |B| > |G|.$$

Muestre que $A+B = A-B = G$. De un ejemplo de conjuntos tal que

$$|A| + |B| = |G| \text{ y } A+B \neq G.$$

[1]Partes (b) y (c) junto forman un caso especial del **teorema de Freiman**. Este teorema da una descripción completa de subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que satisface una cota superior lineal por duplicación. El teorema dice el siguiente:

Para todo $C > 0$, existe $d, k \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $A \subseteq \mathbb{Z}$ con $|A+A| < C|A|$, hay una progesión aritmética P de dimensión d y largo k tal que $A \subseteq P$.

En otras palabras, el teorema de Freiman dice que todos subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que tienen duplicación pequeña son subconjuntos de progesiónes aritméticas de dimensión cotada y largo cotado. Tal vez, usted no sabe lo que significa la *dimensión* de una progesión – por eso se necesita generalizar la definición de una progesión aritmética. Con esta generalización los progesiones aritméticas usuales son los progesiones aritméticas de dimensión 1. Visite wikipedia para más detalles!

[2] Los primeros dos ejercicios mostran que podemos encontrar subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que respectan una cota superior lineal con respecto una de les operaciones disponibles: por "+", podemos tomar las progesiones aritméticas, y por "·", podemos tomar las progesiones geométricas.

El tercer ejercicio mostra que, en cada caso, los conjuntos que hemos encontrado no respectan una cota superior lineal con respecto la otra operación; de hecho, son crecimiento es tan rápido como posible: por ejemplo, con respecto a la operación "·", progesiones aritméticas crecen cuadráticamente.

Una pregunta natural es encontrar subconjuntos que respectan cotas superiores con respecto a las dos operaciones simultaneamente. Una **conjetura de Erdös y Szemerédi** dice que este no es posible. La conjetura completa es abierta todavía pero una versión más debil (con una demostración muy hermosa) es un **teorema de Solymosi**. Su resuelto es el siguiente:

Para todo $\varepsilon > 0$, hay un $C > 0$ tal que, para todo finito $A \subset \mathbb{Z}$,

$$\max\{|A \cdot A|, |A+A|\} \geq C|A|^{4/3-\varepsilon}.$$

La conjetura de Erdös y Szemerédi es la misma declaración con 4/3 reemplazado con 2. En otra palabras, la conjetura dice que todos subconjuntos de $\mathbb{Z}$ crecen con respecto a "+" o "·" y, además, este crecimiento es tan cerca a cuadrático como posible... sin ser siempre cuadrático.

(7) (Tao-Vu, 2.3.7) Sea G un grupo abeliano, y supóngase que A y B son subconjuntos de G. Muestre que

$$|A - B| = |A|^{\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}$$

si y sólo si A, B son coconjuntos de un subgrupo finito H de G.

(8) Muestre Corolario 1, parte 2.

(9) (Breuillard, Ejercicio 2.8) Sea G un grupo abeliano, y supóngase que A es un subconjuntos de G. Muestre que si $|AA| < \frac{3}{2}|A|$, entonces A^2 es un coset de un subgrupo de G. Dar un ejemplo de un conjunto A tal que $|AA| = \frac{3}{2}|A|$ pero A no es un coset de un subgrupo.

(10) Sea R el anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Es posible encontrar un subconjunto de R tal que $|A \cdot A| < |A|$? Escriba la declaración más fuerte posible sobre esta pregunta para todos valores de $n \geq 2$.