UNIVERSIDAD DE COSTA RICA | ESCUELA DE MATEMATICA

Tópicos en la teoría de grupos | I Semestre 2012 | *5 horas, 5 créditos*

Carta al estudiante

Nick Gill | Office 4.22
2511 6559 | chatwithgill@gmail.com

Introducción

La teoría de grupos es el estudio formal de simetría en matemáticas. Cada vez que un objeto matemático exhibe alguna forma de simetría, un grupo está 'presente' en un cierto sentido.

En este curso nos centramos en *los grupos finitos simples*. En algún sentido general, todos los grupos finitos se construyen a partir de estas estructuras particulares.

Objetivos generales

Uno de los logros más significativo en las matemáticas modernas es la clasificación completa de los grupos finitos simples. Estudiaremos varias familias de grupos que aparecen en esta clasificacíon. Necesitaremos definir estas familias, mostrar su simplicidad y, entonces, estudiaremos algunos de su propiedades estructurales.

Objetivos especificos

Al final del curso el estudiante deberá

(1) tener un entendimiento general del enunciado de la clasificación de los grupos finitos simples;
(2) entender el concepto de una acción de un grupo, y poder describir algunas propiedades fundamentales;
(3) poder definir los grupos finitos alternantes, $\mathrm{Alt}(n)$, mostrar su simplicidad (para $n \geq 5$), y describir la estructura de sus subgrupos maximales;
(4) entender los conceptos de formas cuadráticas y sesquilineales, y poder describir algunas de sus propiedades y sus tipos diversos;
(5) poder definir los grupos $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSp}_n(q)$ y $\mathrm{PSU}_n(q)$, y mostrar su simplicidad (para valores de n y q apropiados);
(6) tener un primer entendimiento de los grupos ortogonales;
(7) (possiblemente) entender el enunciado del teorema de Aschbacher sobre los subgroups maximales de grupos clásicos, y poder describir algunos de las clases de Aschbacher.

Contenidos

Los contenidos pueden cambiar pero, por el momento, esperamos estudiar lo siguiente:

(1) Una introduccíon general a los grupos finitos simples y su clasificación;
(2) Un poco de la teoría de categorías;
(3) Una introduccíon a la teoría de los grupos de permutaciones;
(4) Una primera mirada a los grupos alternantes, incluyendo una demonstracíon de su simplicidad;
(5) El concepto de *primitividad*, y nociones relacionadas;
(6) Subgrupos mínimos normales y el *socle*;
(7) El teorema de O'Nan y Scott incluyendo (dependiendo de la preferencia de los estudiantes) una demonstración de la 'versión débil';
(8) Series;
(9) Cuerpos y espacios vectoriales;
(10) Espacio proyectivo;
(11) Grupos lineales y su acción sobre el espacio proyectivo;
(12) Formas cuadráticas y sesquilineales;
(13) Isometrías y el lema de Witt;
(14) Espacios polares;

(15) Los grupos simplécticos;
(16) Los grupos unitarios;
(17) Los grupos ortogonales;
(18) El teorema de Aschbacher sobre los subgroups maximales de los grupos clásicos (este tópico será incluido si tenemos tiempo, y si los estudiantes lo desean).

Evaluación

La evaluación consistirá de exámenes y tareas. Se realizarán dos exámenes parciales en las fechas indicadas a continuación.

Primer examen parcial	15 de Mayo, 10am
Segundo examen parcial	10 de Julio, 10am

La nota final se calculará ponderando el primer examen en un 40%, el segundo en un 40% y las tareas en un 20%.

Horas de consulta

Las horas de consulta serán los lunes de las 2 a las 3 y los jueves de las 2 a las 4. Serán en la oficina 422.

Bibliografia

No hay un texto que incluya todo el material de este curso. Los textos principales son los siguientes:

- John D. Dixon and Brian Mortimer, *Permutation groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 163, Springer-Verlag, New York, 1996.
- Peter Cameron, *Classical groups*, notas de clase que se pueden encontrar en `http://maths.qmul.ac.uk/pjc/class_gps`
- *Projective and polar spaces*, notas de clase que se pueden encontrar en `http://maths.qmul.ac.uk/pjc/ppc/`
(Estas constituyen la segunda edición. La primera edición se publicó como QMW Maths Notes 13 en 1991.)

Más textos de interés:

- Harald Simmons, *An introduction to category theory*. Notas de clase que se pueden encontrar en `http://www.cs.man.ac.uk/ hsimmons/zCATS.pdf`
(He utilisado una pequeña parte de estas notas cuando he escrito el capítulo sobre la teoría de las categorías.)
- Jean Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*. Un clásico, en francés.
- Peter Kleidman and Martin Liebeck, *The subgroup structure of the finite classical groups*. Este libro contiene una demonstración de (una versión refinada de) el teorema de Aschbacher sobre los subgroups maximales de los grupos clásicos. También contiene muchas informaciones sobre estos grupos (y sobre los otros grupos finitos simples).
- Donald Taylor, *The geometry of the classical groups*. Este texto incluye todo el material de la segunda mitad del curso, y mucho más.
- Helmut Wielandt, *Finite permutation groups*. Otro clásico que da buena información de los temas mayores dentro del desarollo de la teoría de los grupos de permutaciones.
- Robert Wilson, *Finite simple groups*. Este texto no está en la RED, pero unas notas de clases relacionadas se pueden encontrar en `http://www.maths.qmul.ac.uk/ raw/FSG/`
- Joanna Fawcett, *The O'Nan-Scott theorem for finite primitive permutation groups*. Una tesis de maestría muy bonita que da una demonstración autónoma del teorema de O'Nan y Scott. Se puede encontrar en `https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/4534/Fawcett_Joanna.pdf`

Tengo copias electrónicas de la mayor parte de los textos dentro de estas listas, y puedo compartirlos si lo desean.