EJERCICIOS 1

(1) (a) Demuestre que los tres vectores $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,-1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Exprese los vectores $\underline{e_1}$, $\underline{e_2}$, $\underline{e_3}$ de la base estándar como combinaciones lineales de ellos.

(b) Demuestre que los tres polinomios $\frac{1}{2}t(t-1)$, $1-t^2$, $\frac{1}{2}t(t+1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{Q}[t]$. Exprese los monomios 1, t, t^2 como combinaciones lineales de ellos.

(2) Si $p,q,r,s \in \mathbb{R}$ son distintos, demuestre que los cuatro vectores

$$(1,1,1,1), \quad (p,q,r,s), \quad (p^2,q^2,r^2,s^2), \quad (p^3,q^3,r^3,s^3)$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$.

(3) Demuestre que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ es un cuerpo si y solo si n es primo.

(4) Sea $k \in \mathbb{Z}$. Definimos dos operaciónes de multiplicación sobre el espacio vectoriale $\mathbb{R}^2$ como sigue: los elementos de $\mathbb{R}^2$ son escrito como $a + b\alpha$ donde α es un símbolo, y $a, b \in \mathbb{R}$. Define

$$\begin{aligned}(a+b\alpha) + (c+d\alpha) &= (a+b) + (c+d)\alpha;\\ (a+b\alpha)\cdot(c+d\alpha) &= (a\cdot c) + (bc+ad)\alpha + (bd)\alpha^2,\end{aligned}$$

y define el símbolo α^2 ser igual a $-k\alpha + 1$. Muestre que esta definición da un cuerpo si y solo si $k \neq \pm 2$.

(5) Un **monomio** en k variables $t_1,\dots,t_k$ es un producto $c\,t_1^{m_1}t_2^{m_2}\dots t_k^{m_k}$; su *grado* es la suma $m_1+\dots+m_k$ de los exponentes. Un **polinomio homogéneo** de grado m es una suma finita de monomios de grado m; ellos forman un espacio vectorial $P_m^{(k)}$. ¿Cuál es la dimensión de $P_m^{(k)}$?

(6) Sea X una parte de V. Demuestre que hay un subespacio único W tal que, si Y es un subespacio de V que contiene X, entonces Y contiene W.

(7) Sea V el conjunto de secuencias infinitas con entradas en $\mathbb{R}$:

$$\{(a_1,a_2,a_3,\dots) \mid a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Demuestre que V es un espacio vectorial.
(2) Sea e_i el secuencia con 0 in todas entradas excepto en entrada i que es igual a 1. Cual es la subespacio generado por $\{e_i \mid i = 1,2,3,\dots\}$?

(8) Encuentre los subespacios $\ker T$ y $T(\mathbb{R}^3)$ y las dimensiones $n(T)$ y $r(T)$, si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ y la matriz de T respecto de la base estándar $\{\underline{e_1},\underline{e_2},\underline{e_3}\}$ es

$$A := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

(9) Calcular (por inducción sobre n) las potencias A^n, B^n, C^n de las siguientes matrices:

$$A := \begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad \text{donde} \quad a \in \mathbb{F}.$$

(10) Sea A una matriz triangular superior con ceros en la diagonal:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

así que $a_{ij} = 0$ para $i \geq j$. Demostrar que $A^n = O$. Concluir que $I_n + A$ es inversible, con

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - A + A^2 - \cdots + (-1)^{n-1} A^{n-1}.$$

Usar esta relación para calcular el inverso de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(11) Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{Z}^+$, y sea V el espacio vectorial de polinomios con $\mathrm{grd}(f) \leq n$. Demuestre que, dado $c \in \mathbb{F}$, el conjunto

$$\{(x-c)^0, (x-c)^1, \dots, (x-c)^n\}$$

es un base de V.

(12) Demuestre que $(\mathrm{GL}(V), \circ)$ es un grupo.

(13) Supongo que

$$V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_1$$

son transformaciones lineales tal que $T_2 \circ T_1$ es inversible. Demuestre que $T_1 \circ T_2$ es inversible si y sólo si $\dim(V_1) = \dim(V_2)$.

(14) Demuestre que, si $U, W \leq V$, con

$$\dim(U) + \dim(W) > \dim(V),$$

entonces $U \cap V$ es un espacio vectorial non-trivial.

Más dificil es la siguiente declaración mas fuerte: Demuestre que,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

donde $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.

(15) Calcular $r(A)$, encontrar una base para el espacio de soluciones de $A\underline{x} = \underline{0}$ y describir el conjunto de soluciones de $A\underline{x} = b$, donde

$$[A \mid b] := \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right].$$

(16) Considere el ideal en $\mathbb{R}[x]$,

$$I := (x^2 + 3x + 2)\mathbb{R}[x] + (x^4 - 2)\mathbb{R}[x].$$

Escribe el polinomio mónico $f(x)$ tal que $I = f(x)\mathbb{R}[x]$.

(17) Demuestre que el polinomio $x^2 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si y sólo si $p \equiv 3 \pmod 4$.