

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---

Άσκηση 1

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

Η συνάρτηση $X(n, \theta) = A(\theta) [u(n) - u(n - 100)]$, εκφράζεται ως το γινόμενο μιας τυχαίας μεταβλητής $A(\theta)$ και της διαφοράς δύο βηματικών συναρτήσεων. Η βηματική συνάρτηση $u(n)$ παίρνει την τιμή 1 για $n \geq 0$ και την τιμή 0 για $n < 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά $u(n) - u(n - 100)$ παίρνει την τιμή:

- 0, για $n < 0$, επειδή και οι δύο συναρτήσεις είναι 0,
- 1, για $0 \leq n < 100$, επειδή $u(n) = 1$ και $u(n - 100) = 0$,
- 0, για $n \geq 100$, επειδή και οι δύο συναρτήσεις είναι 1.

Επομένως, η συνάρτηση $X(n, \theta)$ είναι ίση με $A(\theta)$ για $0 \leq n < 100$, και 0 αλλού.

Η τυχαία μεταβλητή $A(\theta)$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$. Η μέση τιμή μιας ομοιόμορφης κατανομής είναι απλά το μέσον των άκρων του διαστήματος, δηλαδή:

$$E[A(\theta)] = \frac{\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = 0$$

Επομένως, η στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας $X(n, \theta)$ είναι $E[X(n, \theta)] = E[A(\theta)] * E[u(n) - u(n - 100)] = 0 * 1 = 0$, για $0 \leq n < 100$

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $rand(\cdot)$ της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

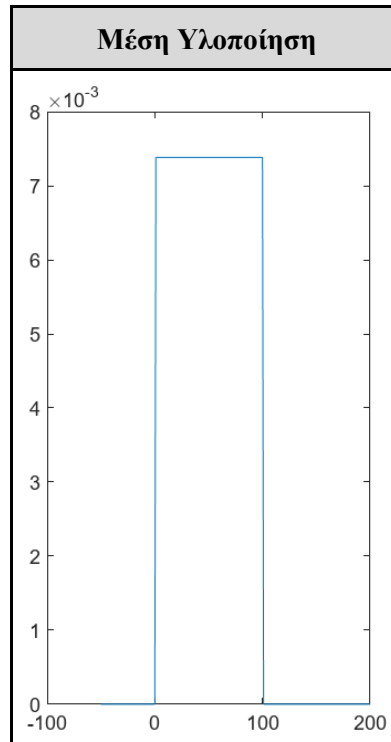
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---

Απάντηση:

Όταν αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων K της στοχαστικής διαδικασίας, τότε τείνουμε να παρατηρήσουμε μια βελτίωση στην ακρίβεια της εκτίμησης της στοχαστικής μέσης τιμής. π.χ για $K=2000$



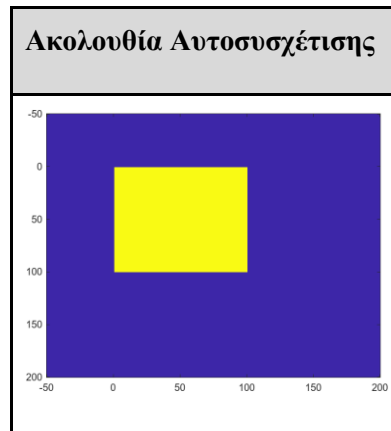
(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

Όταν αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων K της στοχαστικής διαδικασίας, τότε τείνουμε να παρατηρήσουμε μια βελτίωση στην ακρίβεια της εκτίμησης της στοχαστικής μέσης τιμής. π.χ για $K=2000$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---



(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία “λευκή”; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση: Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία δεν μπορεί να θεωρηθεί ως "λευκή" ή "white noise". Μια λευκή ή ασπρόφωτη διαδικασία είναι μια τυχαία διαδικασία στην οποία όλες οι τιμές είναι ανεξάρτητες και ιδιαίτερα διανεμημένες. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών χρονικών σημείων (σε κελια εκτός της διαγωνίου), που επιβεβαιώνουν ότι η διαδικασία δεν είναι λευκή.

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K ;

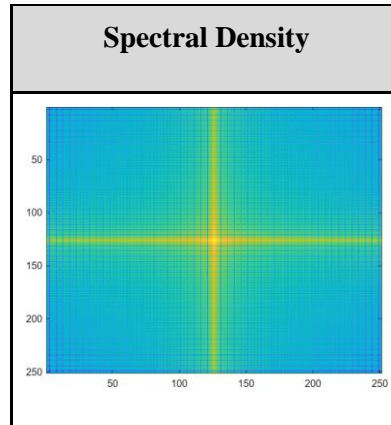
Απάντηση:

Είναι αρκετά κοντά αν και μετατοπισμένη με την εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4. Όσο μεγαλύτερο το K τόσο μικρότερο το σφάλμα.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Όν/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---



Ασκηση 2

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση: Με τον ίδιο τρόπο και για τον ίδιο λόγο η στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας είναι και πάλι 0 αφού τώρα έχουμε μια Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0, το $E[A(\theta)]$ θα είναι επίσης 0. Συνεπώς, αντικαθιστούμε στην εξίσωση:

$$E[X(n, \theta)] = E[A(\theta)[u(n) - u(n - 100)]]$$

με $E[A(\theta)] = 0$, παίρνουμε:

$$E[X(n, \theta)] = 0 * [u(n) - u(n - 100)] = 0$$

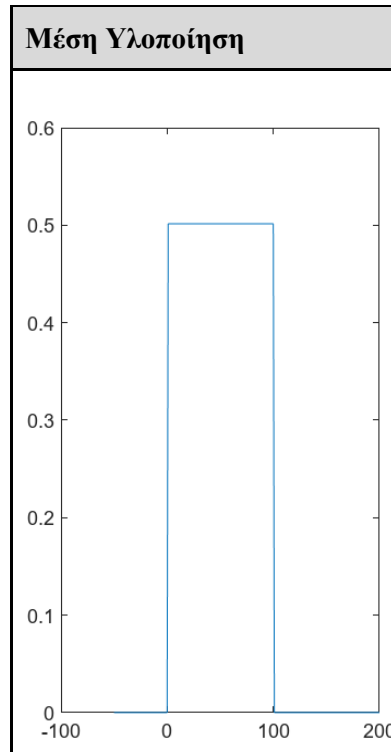
(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $randn(\cdot)$ της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

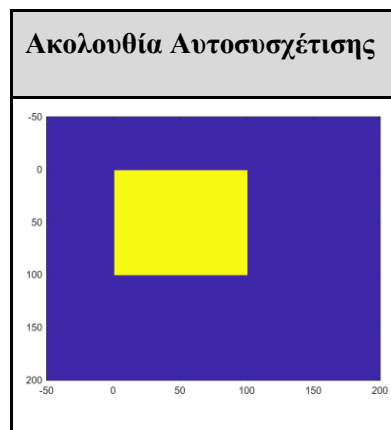
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---

Απάντηση: Ίδια συμπεράσματα με την προηγούμενη άσκηση



(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

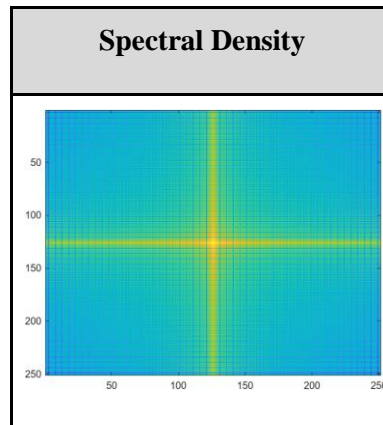
Ον/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---

(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία “λευκή”; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση: Όχι δεν είναι λευκή, για τους ίδιους λόγους (συσχέτιση κελιών εκτος από της διαγωνίου)

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K ;

Απάντηση:



Άσκηση 3

(α) Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.

Απάντηση:

Διασπορά

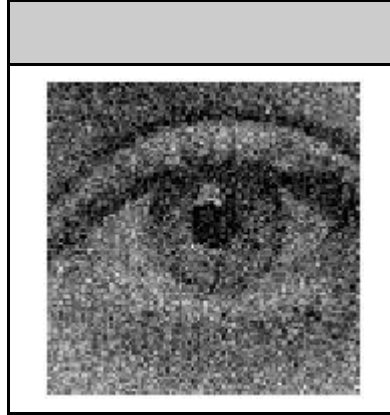
4.0500

samples	1000000×1...	10000	Command Window
variance	4.0500	1×1	>> Script3
			>> Script3

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

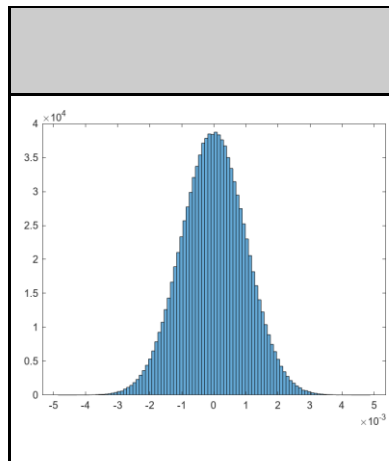
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---



(β) Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Απάντηση: Εφόσον, όπως φαίνεται και στο figure 4, έχουμε τον θόρυβο «μαζεμένο» (να συγκλίνει δηλαδή) προς το κέντρο (προς την κανονική κατανομή δηλαδή), επιβεβαιώνουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.



Ασκηση 4

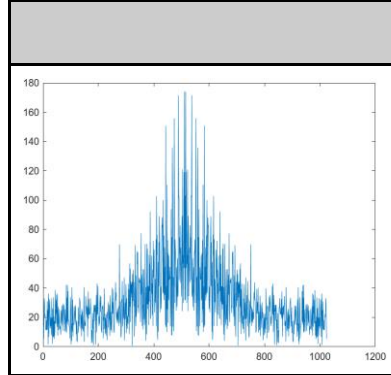
(α) Τι είδους διαδικασία περιγράφει η Σχέση (2); Χρησιμοποιώντας $\omega_0 = 0.25$ και τη συνάρτηση $randn(\cdot)$, δημιουργήστε μερικές υλοποιήσεις της. Υπολογίστε τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου. Συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα;

Απάντηση:

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

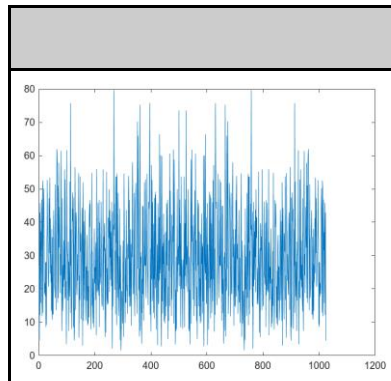
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---



(β) Ποιά η λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης; Καταγράψτε την απάντησή σας.

Απάντηση: Στην από πάνω εικόνα παρατηρούμε τον θόρυβο να συγκλίνει και να συγκεντρώνεται σε συγκεκριμένες συχνότητες (400hz–700hz). Με την λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης επιδιώκουμε να καταλείμουμε ομοιόμορφα την ενέργεια του θορύβου σε όλο το φάσμα συχνοτήτων.



(γ) Η πηγή του σήματος της Σχέσης (1) είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση: Η πηγή του σήματος στην Σχέση (1) είναι στοχαστική. Αυτό οφείλεται στο ότι συμπεριλαμβάνει την τυχαία μεταβλητή φ . Στην πραγματικότητα, το σήμα που παράγεται από αυτήν την εξίσωση δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς, λόγω της φ . Επομένως, το σήμα έχει στοχαστικές ιδιότητες, δηλαδή έχει πιθανοτικές διακυμάνσεις που επηρεάζουν την τελική του τιμή.

(δ) Αν η πηγή του σήματος είναι στοχαστική, είναι ασθενώς στάσιμη πρώτης ή δεύτερης τάξης; Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rand()`, δημιουργείστε υλοποιήσεις της και προσπαθήστε να

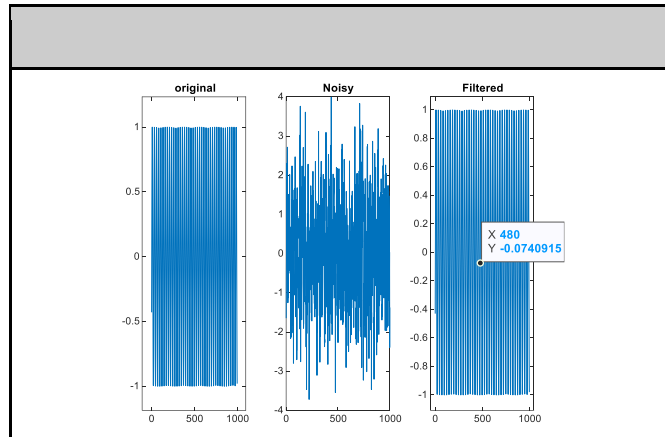
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---

επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και πειραματικά. Καταγράψτε τα πειράματα που κάνατε και τα αποτελέσματά σας.

Απάντηση:



(ε) Εκφράστε την έξοδο του FIR φίλτρου Wiener μήκους M συναρτήσει των συντελεστών της κρουστικής του απόκρισης και του χρωματισμένου θορύβου.

Απάντηση: -

(στ) Σχεδιάστε το βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener μήκους 2 και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Απάντηση: -

(ζ) Επαναλάβετε την Ερώτηση 5 για φίλτρα μήκους 3, 4, 5, 6, υπολογίστε τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τι παρατηρείτε;

Παρατηρώ πως όσο αυξάνεται το μήκος του φίλτρου, τόσο μειώνεται το σφάλμα.

M = 3	M = 4	M = 5	M = 6
32.0205 rms_filt... 0.0339 1x1 rms_noise 32.0205 1x1	31.5638 rms_filt... 0.0655 1x1 rms_noise 31.5638 1x1	30.9862 rms_filt... 0.0534 1x1 rms_noise 30.9862 1x1	29.0059 rms_filt... 0.0931 1x1 rms_noise 29.0059 1x1

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Όν/μο:	ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ	ΑΜ:	1084537	Έτος:	3
--------	-----------------------------------	-----	---------	-------	---

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ο κώδικας που χρησιμοποιήσατε για την υλοποίηση

ΑΣΚΗΣΗ 1:

β.

```
K=2000
figure
plot(n,x);
figure
plot(n,mean_val);
```

ΑΣΚΗΣΗ 2:

ΑΛΛΑΖΩ:

```
A = rand(K,1) ;
```

ΑΣΚΗΣΗ 3:

α.

```
figure
imshow(I(:, :, 1))
...
variance = mean(var(noise))
```

ΑΣΚΗΣΗ 4:

ζ. Αλλάζω το n σε 3,4,5,6 αντίστοιχα

```
for n=2:length(v)
    rsx(1)=rsx(1)+v(n)*w(n);
    rsx(2)=rsx(2)+v(n-1)*w(n);
end
```