ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Εφαρμογες Της Ψηφιακης Επεξεργασιας Σηματων

Εκτιμηση Συχνοτητων Σηματων

Με Ιδιοαναλυση του Μητρωου Αυτοσυσχετισης

Διδάσκων: Αναπλ. Καθηγητής Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Επικουρικό έργο: Ευάγγελος Σαρτίνας, Παναγιώτης Γεωργαντόπουλος

Πάτρα Οκτώβριος 2021

Εισαγωγη

Η εκτίμηση του συχνοτικού περιεχόμενου ένος σήματος αποτελεί εδώ και πολλές δεκαετίες ένα βασικό πρόβλημα που εμφανίζεται σε όλους σχεδόν τους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας όπως στην:

- επεξεργασία σημάτων ομιλίας [1]
- επεξεργασία βϊοιατρικών σημάτων [2]
- επικοινωνίες δεδομένων [3]
- ραντάρ [4]
- σόναρ [5]
- σεισμολογία [6]
- ασφάλεια και έλεγχο της αρτιότητας της ατράκτου των αεροπλάνων [7]
- ανάλυση των δομικών δυναμικών παραμέτρων συστημάτων [8]
- εύρεση φυσικής συχνότητας δόνησης σε κτιριακές δομές [9] (κτίρια, γέφυρες, κλπ.)

Τα τελευταία χρόνια, νέες τεχνικές που βασίζονται σε νέες τεχνολογίες [10] προτείνονται στη διεθνή βιβλιογραφία.

Στη γενική περίπτωση έχουμε στη διάθεσή μας, σε μορφή παρατηρήσεων, μία ή περισσότερες υλοποιήσεις μιάς στοχαστικής διαδικασίας και σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε το συχνοτικό της περιεχόμενο, όπως και στατιστικές του προσθετικού θορύβου που τις περισσότερες φορες υποβαθμίζει τις παρατηρήσεις μας.

Στοιχειωδης Θεωρια

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε στην διάθεσή μας την ακόλουθη στοχαστική διαδικασία:

$$\mathcal{X}(n) = \sum_{i=1}^{P} \mathcal{A}_i e^{jn\omega_i} + \mathcal{W}(n),\ n = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{1}$$

με $\mathcal{A}_i = |A_i| e^{j\phi_i}$, ϕ_i, $i = 1, 2, ..., P$ ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[-\pi,\ \pi]$ και $\mathcal{W}(n)$ λευκός γκαουσιανός θόρυβος διασποράς $\sigma_{\mathcal{W}}^2$.

Ένα βασικό πρόβλημα της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων είναι η εκτίμηση των πλατών των συχνοτήτων και των στατιστικών του θορύβου.

Άρα, σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τα πλάτη $|A_i|$, τις συχνότητες ω_i, $i = 1, 2, ..., P$ καθώς και την διασπορά $\sigma_{\mathcal{W}}^2$ του λευκού θορύβου.

Στοχαστική Διαδιακασία Πρώτης Τάξης

Σε αυτού του είδους τα προβλήματα η στοχαστική διαδικασία θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathcal{X}(n) = \mathcal{A}_1 e^{j\omega_1 n} + \mathcal{W}(n) = \mathcal{S}(n) + \mathcal{W}(n). \tag{2}$$

και για την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(k) &= \mathbb{E}\{\mathcal{X}(n+k)\mathcal{X}(n)\} \\ &= \mathbb{E}\{(A_1 e^{j\omega(n+k)} + \mathcal{W}(n+k))(A_1^* e^{-j\omega_1 n} + \mathcal{W}(n))\} \\ &= \mathbb{E}\{|A_1|^2 e^{j\omega_1 k} + \mathcal{W}(n+k)\mathcal{W}(n) + \\ &\quad A_1 e^{j\omega_1(n+k)}\mathcal{W}(n) + A_1^* e^{-j\omega_1 n}\mathcal{W}(n+k)\} \\ &= |A_1|^2 e^{j\omega_1 k} + \sigma_{\mathcal{W}}^2 \delta(k) \end{aligned} \tag{3}$$

Άρα, το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας, μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(0) & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(1) & \ldots & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(M-1) \\ r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(-1) & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(1) \\ r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(-(M-1)) & \cdots & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(-1) & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(0) \end{bmatrix} \\ &= R_{\mathcal{S}\mathcal{S}} + R_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\ &= |A_1|^2 \mathbf{e}_M(\omega_1)\mathbf{e}_M^h(\omega_1) + \sigma_{\mathcal{W}}^2 I_M \end{aligned} \tag{4}$$

όπου

$$\mathbf{e}_M(\omega_1) = [\begin{array}{ccccc} 1 & e^{-j\omega_1} & e^{-2j\omega_1} & \ldots & e^{-j(M-1)\omega_1} \end{array}]^h, \tag{5}$$

$R_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ το 1ης τάξης μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας $\mathcal{S}(n)$ και $R_{\mathcal{W}\mathcal{W}}$ το διαγώνιο M-οστής τάξης μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας $\mathcal{W}(n)$ για το οποίο ισχύει:

$$R_{\mathcal{W}\mathcal{W}} = \sigma_w^2 I_M$$

Από τις Σχέσεις (4) και (5) τελικά έχουμε:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}\mathbf{e}_M(\omega_1) = (M|A_1|^2 + \sigma_{\mathcal{W}}^2)\mathbf{e}_M(\omega_1) \tag{6}$$

δηλαδή το διάνυσμα της Σχέσης (5) είναι ιδιοδιάνυσμα του μητρώου $R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $M|A_1|^2 + \sigma_{\mathcal{W}}^2$. Επίσης, αν $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \cdots, \mathbf{n}_M$ είναι τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα του μητρώου, γνωρίζουμε ότι:

$$< \mathbf{e}_M(\omega_1), \mathbf{n}_m >= 0,\ m = 2, 3..., M \tag{7}$$

Επομένως, από τις (4) και (7) παίρνουμε:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}\mathbf{n}_m = \sigma_w^2 n_m = \lambda_m \mathbf{n}_m, \; m = 2, 3, ..., M,$$

δηλαδή για όλες τις ιδιοτιμές του $R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$, εκτός της μεγαλύτερης, έχουμε ότι:

$$\lambda_m = \sigma_{\mathcal{W}}^2, \; m = 2, 3, ..., M \tag{8}$$

και από τις (6) και (8):

$$\lambda_{max} = \lambda_1 = M|A_1|^2 + \sigma_{\mathcal{W}}^2. \tag{9}$$

Ο αλγόριθμος που ακολουθεί, εκτιμά τις ποσότητες που επιθυμούμε:

1. Ιδιο-ανάλυση του μητρώου αυτοσυσχέτισης $R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$ και εύρεση της μεγαλύτερης ιδιοτιμής λ_1 και των υπολοίπων που γνωρίζουμε από την Σχέση (6) ότι είναι όλες ίδιες μεταξύ τους.

Επομένως:

$$\sigma_w^2 = \lambda_{min}, \; \text{και} \tag{10}$$

$$|A_1|^2 = \frac{1}{M}(\lambda_{max} - \lambda_{min}) \tag{11}$$

2. Ξέρουμε από τη Σχέση (5) ότι $\mathbf{e}_M(\omega_1)$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του μητρώου αυτοσυσχέτισης και επομένως

$$\mathbf{e}_M(\omega_1)[2] = e^{-j\omega_1}$$

και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω σχέση για να βρούμε το ω_1, δηλαδή:

$$\omega_1 = -jln(\mathbf{e}_M(\omega_1)[2]). \tag{12}$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1 [Θεωρία] Πώς μπορούμε να ορίσουμε τον Υπόχωρο του Σήματος (Signal Space) και πώς τον υπόχωρο του Θορύβου (Noise Space);

2 [Θεωρία] Ποιός είναι κατά την γνώμη σας ο ρόλος της τυχαίας μεταβλητής ϕ στη Σχέση (2);

3 [Θεωρία] Τι θα άλλαζε στον υπολογισμό των αναγκαίων ποσοτήτων, αν δεν υπήρχε αυτός ο παράγοντας; Καταγράψτε αναλυτικά τις απόψεις σας.

4 [Θεωρία] Υποθέστε οτι είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας. Ποιό κατά την γνώμη σας είναι το ελάχιστο μέγεθος του μητρώου που θα επιτρέψει τον υπολογισμό των αναγκαιών ποσοτήτων;[1]

[1]Pisarenko, V. F. The retrieval of harmonics from a covariance function Geophysics, J. Roy. Astron. Soc., vol. 33, pp. 347-366, 1973

5 [Υλοποίηση] Υπολογίστε το πλάτος, την συχνότητα και την διασπορά του λευκού θορύβου στοχαστικής διαδικασίας πρώτης τάξης (δες Σχέση (2)), με μητρώο αυτοσυσχέτισης:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 3 & 2(1-j) \\ 2(1+j) & 3 \end{bmatrix}.$$

6 [Υλοποίηση] Υποθέστε οτι δεν είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας αλλά μόνο να το εκτιμήσετε από ένα αριθμό N διαφορετικών υλοποιήσεων της (μήκους M δειγμάτων η κάθε μια) που σας δίνονται. Ποιός κατά την γνώμη σας είναι ο ρόλος του M και του N στην εκτίμηση των τιμών των αναγκαίων ποσοτήτων· Καταγράψτε αναλυτικά και θεμελιώστε, με αναφορά σε μαθηματικούς νόμους, την άποψή σας.

7 [Υλοποίηση] Δημιουργήστε $N = 100$ υλοποιήσεις (μήκους $M = 50$ δείγματα η κάθε μια) της ακόλουθης στοχαστικής διαδικασίας:

$$\mathcal{X}(n) = 3\sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{5}n+\phi)} + \mathcal{W}(n), \tag{13}$$

όπου ϕ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-\pi,\ \pi]$ και $\mathcal{W}(n)$ λευκός γκαουσιανός θόρυβος διασποράς $\sigma^2_{\mathcal{W}} = 0.5$.

Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τις υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας και εκτιμήστε:

α. τη στοχαστική μέση τιμή

β. το μητρώο αυτοσυσχέτισης $R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$ μεγέθους 50×50

Χρησιμοποιήστε το παραπάνω μητρώο που εκτιμήσατε και δημιουργήστε τα ακόλουθα πέντε μητρώα:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X},\ M},\ M = 2, 10, 20, \cdots, 50$$

μεγέθους $M \times M$ αντίστοιχα.

Για κάθενα από τα παραπάνω μητρώα $M = 2, 10, 20, \cdots, 50$:

7.1 Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας κατάλληλη εντολή του Matlab, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{aligned} &\lambda_m,\ m = 1, 2, \cdots, M \\ &\mathbf{e}_M(\omega_1),\ \text{και} \\ &\mathbf{n}_m,\ m = 2, 3, \cdots, M \end{aligned} \tag{14}$$

αντίστοιχα.

7.2 Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τις ιδιοτιμές $\lambda_m,\ m = 2, 3, \cdots, M$ που υπολογίσατε και εκτιμήστε την διασπορά $\sigma^2_{\mathcal{W}}$ του λευκού θορύβου. Σχεδιάστε το ιστόγραμμα των παραπάνω ιδιοτιμών και υπολογίστε της πρώτης και δεύτερης τάξης κεντρικές ροπές των. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

7.3 Χρησιμοποιήστε τη Σχέση (12) και την εκτίμηση της διασποράς του θορύβου και εκτιμήστε το πλάτος του σήματος. Σχολιάστε την εκτίμησή σας.

7.4 Ορίστε τα ακόλουθα τριγωνομετρικά πολυώνυμα:

$$P_{(M,\ m)}(e^{j\omega}) = \mathbf{e}_M^h(\omega)\mathbf{n}_m,\ m = 2, 3, \cdots, M. \tag{15}$$

7.5 Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τις $M-1$ σχέσεις ορθογωνιότητας της Σχέσης (7) και τις ρίζες των παραπάνω πολυωνύμων και εκτιμήστε την συχνότητα ω_1. Σχολιάστε την ποιότητα της εκτιμήσης σας. Πώς απομονώσατε την ρίζα που σας ενδιέφερε· Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση $kmeans()$ του Matlab με τα κατάλληλα ορίσματα. Σχολιάστε αναλυτικά.

7.6 Ορίστε τις ακόλουθες ρητές συναρτήσεις:

$$Q_{(M,\ m)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{|P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})|^2},\ m = 2, 3, \cdots, M. \tag{16}$$

όπου $|P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})|$ το μέτρο του $m-$οστου μιγαδικού πολυωνύμου $P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})$ της Σχέσης (15). Σχεδιάστε τις παραπάνω συναρτήσεις και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

7.7 Ορίστε την ακόλουθη ρητή συνάρτηση:

$$Q_M^{MUSIC}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{m=2}^{M} |P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})|^2}, \tag{17}$$

η οποία αποτελεί την συνάρτηση που βασίζονται οι εκτιμήσεις του αλγορίθμου MUSIC (MUltiple SIgnal Classification). Σχεδιάστε την παραπάνω συνάρτηση και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

7.8 Ορίστε την ακόλουθη ρητή συνάρτηση:

$$Q_M^{EV}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{m=2}^{M} \frac{1}{\lambda_m} |P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})|^2}, \tag{18}$$

η οποία αποτελεί την συνάρτηση που βασίζονται οι εκτιμήσεις του αλγορίθμου EV(EigenVector). Σχεδιάστε την παραπάνω συνάρτηση και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

Σχολιάστε την ποιότητα των εκτιμήσεών σας καθώς το M αυξάνεται.

8 [Υλοποίηση] Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για διαφορετικές τιμές της ισχύος του θορύβου $\sigma_{\mathcal{W}}^2$ και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

Στοχαστική Διαδιακασία P-οστής Τάξης

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία συντίθεται από P φανταστικά εκθετικά σήματα. Στην περίπτωση αυτή το μητρώο αυτοσυσχέτισης θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = E(\omega)\Lambda E(\omega)^h + \sigma_{\mathcal{W}}^2 I$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^{P} |A_i|^2 \mathbf{e}_M(\omega_i)\mathbf{e}_M^h(\omega_i) + \sigma_{\mathcal{W}}^2 I \\ &= R_{\mathcal{S}\mathcal{S}} + R_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \end{aligned} \tag{19}$$

όπου:

$$R_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{P} |A_i|^2 \mathbf{e}_M(\omega_i)\mathbf{e}_M^h(\omega_i) \tag{20}$$

$$R_{\mathcal{W}\mathcal{W}} = \sigma_{\mathcal{W}}^2 I. \tag{21}$$

Από τις Σχέσεις (20), (21) είναι φανερό ότι τα μεγέθους $M \times M$ μητρώα $R_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ και $R_{\mathcal{W}\mathcal{W}}$ είναι τάξης P και M αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι U είναι ένα μητρώο που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου αυτοσυσχέτισης της Σχέσης (19). Τότε, μπορούμε να χωρίσουμε το μητρώο U σε δύο τμήματα. Το πρώτο, το οποίο θα συμβολίσουμε ως U_S θα περιέχει τα πρώτα P ιδιοδιανύσματα και θα αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του σήματος και το δεύτερο, το οποίο θα συμβολίσουμε ως U_N θα περιέχει τα υπόλοιπα $M - P$ ιδιοδιανύσματα και θα αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του θορύβου. Για τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι προφανές ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$< \mathbf{e}_M(\omega_i),\ \mathbf{u}_m >= 0,\ \forall\ i = 1, 2, ..., P \text{ και } m = P+1, P+2, ..., M.$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. [Θεωρία] Πώς μπορούμε να ορίσουμε στην γενική περίπτωση τον Υπόχωρο του Σήματος και πώς τον Υπόχωρο του Θορύβου ·
2. [Θεωρία] Ποιός είναι κατά την γνώμη σας ο ρόλος των τυχαίων μεταβλητών $\phi_i,\ i = 1, 2, \cdots, P$ στη Σχέση (17)·
3. [Θεωρία] Τι θα άλλαζε στον υπολογισμό του μητρώου αυτοσυσχέτισης, αν δεν ήταν αυτές οι τυχαίες μεταβλητές ασυσχέτιστες· Καταγράψτε αναλυτικά τις απόψεις σας.

4. [Θεωρία] Υποθέστε οτι είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας. Ποιό κατά την γνώμη σας είναι το ελάχιστο μέγεθος του μητρώου που θα επιτρέψει τον υπολογισμό των αναγκαιών ποσοτήτων (δες την αντίστοιχη ερώτηση του μέρους Α της άσκησης)·

5. [Θεωρία] Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι, γενικά, τα διανύσματα $\mathbf{e}_M(\omega_i),\ i = 1, 2, \cdots, P$ δεν είναι ιδιοδιανύσματα του μητρώου αυτοσυσχέτισης. Ποιές θα πρέπει να είναι οι συχνότητες $\omega_i,\ i = 1, 2, \cdots, P$ για να ισχύει αυτό · Καταγράψετε την απάντησή σας.

6. [Υλοποίηση] Υπολογίστε τα πλάτη, τις συχνότητες και την διασπορά του λευκού θορύβου στοχαστικής διαδικασίας δεύτερης τάξης με το ακόλουθο μητρώο αυτοσυσχέτισης:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 6 & 1.92705 - j4.58522 & -3.42705 - j3.49541 \\ 1.92705 + j4.58522 & 6 & 1.92705 - j4.58522 \\ -3.42705 + j3.49541 & 1.92705 + j4.58522 & 6 \end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα που ανήκει στον υπόχωρο του θορύβου είναι το $\mathbf{u}_3$. Άρα

$$< \mathbf{e}_3(\omega_i), \mathbf{u}_3 >= 0,\ i = 1, 2.$$

Αν επομένως ορίσουμε και πάλι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο της Σχέσης (1), τότε οι επιθυμητές συχνότητες μπορούν να προκύψουν από τον υπολογισμό των ριζών του παραπάνω πολυωνύμου (επιβεβαιώστε). Σχεδιάστε το ακόλουθο πολυώνυμο:

$$P_{inv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2}$$

και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας

7. [Υλοποίηση] Υποθέστε οτι δεν είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας αλλά μόνο να το εκτιμήσετε από ένα αριθμό N διαφορετικών υλοποιήσεων της (μήκους M δειγμάτων η κάθε μια) που σας δίνονται. Ποιός κατά την γνώμη σας είναι ο ρόλος του M και του N στην εκτίμηση των τιμών των αναγκαίων ποσοτήτων· Καταγράψτε αναλυτικά και θεμελιώστε, με αναφορά σε μαθηματικούς νόμους, την άποψή σας.

8. [Υλοποίηση] Δημιουργήστε $N = 100$ υλοποιήσεις (μήκους $M = 50$ δείγματα η κάθε μια) στοχαστικής διαδικασίας της Σχέσης (1) με τα ακόλουθα χαρακτηριστι-

κά:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i &= \frac{1}{2^{i-1}}e^{j\phi_i},\ i=1,2,\cdots,5 && (22)\\
\omega_1 &= 0.2\pi\\
\omega_2 &= 0.4\pi\\
\omega_3 &= 0.5\pi\\
\omega_4 &= 0.75\pi\\
\omega_5 &= 0.88\pi && (23)\\
\sigma^2_{\mathcal{W}} &= 0.75 && (24)
\end{aligned}$$

όπου $\phi_i,\ i=1,2,\cdots,5$ τυχαίες ασυσχέτιστες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[-\pi,\ \pi]$ και $\mathcal{W}(n)$ λευκός γκαουσιανός θόρυβος διασποράς $\sigma^2_{\mathcal{W}}=0.5$.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας:

α. Επαναλάβετε τη διαδικασία του πρώτου μέρους, με τις αναγκαίες τροποποιήσεις, και καταγράψτε τα συμεράσματά σας.

β. Χρησιμοποιείστε διαφορετικές συχνότητες, και εκτιμήστε τη ρωμαλεότητα των διαφορετικών τεχνικών εκτίμησης των παραμέτρων. Καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

Βιβλιογραφια

[1] Yu, Guoshen, Stéphane Mallat, and Emmanuel Bacry. "Audio denoising by time-frequency block thresholding." IEEE Transactions on Signal processing 56.5 (2008): 1830-1839.

[2] Nasrolahzadeh, Mahda, Zeynab Mohammadpoory, and Javad Haddadnia. "A novel method for early diagnosis of Alzheimer's disease based on higher-order spectral estimation of spontaneous speech signals." Cognitive neurodynamics 10.6 (2016): 495-503.

[3] Angrisani, Leopoldo, Massimo D'Apuzzo, and Michele Vadursi. "Power measurement in digital wireless communication systems through parametric spectral estimation." IEEE transactions on instrumentation and measurement 55.4 (2006): 1051-1058.

[4] Shrestha, Shanker Man, and Ikuo Arai. "Signal processing of ground penetrating radar using spectral estimation techniques to estimate the position of buried targets." EURASIP journal on advances in signal processing 2003.12 (2003): 1-12.
Zhu, Bin, et al. "Fusion of sensors data in automotive radar systems: A spectral estimation approach." 2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2019.

[5] Bordoni, Federica, et al. "Adaptive scan-on-receive based on spatial spectral estimation for high-resolution, wide-swath Synthetic Aperture Radar." 2009 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Vol. 1. IEEE, 2009.

[6] Prerau, Michael J., et al. "Sleep neurophysiological dynamics through the lens of multitaper spectral analysis." Physiology 32.1 (2017): 60-92.

[7] El-Shafie, Ahmed, et al. "Fast orthogonal search (FOS) versus fast Fourier transform (FFT) as spectral model estimations techniques applied for structural health monitoring (SHM)." Structural and Multidisciplinary Optimization 45.4 (2012): 503-513.

[8] Trendafilova, Irina. "Singular spectrum analysis for the investigation of structural vibrations." Engineering Structures 242 (2021): 112531.

[9] Nagayama, T., et al. "Bridge natural frequency estimation by extracting the common vibration component from the responses of two vehicles." Engineering Structures 150 (2017): 821-829.

[10] Jiang, Yuan, Hongbin Li, and Muralidhar Rangaswamy. "Deep learning denoising based line spectral estimation." IEEE Signal Processing Letters 26.11 (2019): 1573-1577.