

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ  
ΤΗΣ  
ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

---

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΧΑΜΗΛΗΣ ΤΑΞΗΣ  
ΙΔΙΟΦΙΛΤΡΑ

Διδάσκων: Αναπλ. Καθηγητής Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης  
Επικουρικό έργο: Ευάγγελος Σαρτίνας, Παναγιώτης Γεωργαντόπουλος

Πάτρα Οκτώβριος 2021



# ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΧΑΜΗΛΗΣ ΤΑΞΗΣ

Με την μοντελοποίησης χαμηλής τάξης (Low Rank Modeling) μπορούμε να κωδικοποιήσουμε ένα σήμα με ένα πιο ‘οικονομικό’ αλλά ταυτόχρονα ‘αποδοτικό’ τρόπο, από ότι το αρχικό μας σήμα. Στη βιβλιογραφία στενά συνδεδεμένες τεχνικές με την παραπάνω μοντελοποίηση που βασίζεται στη χρήση τυχαίων μεταβλητών [1], είναι γνωστές με τα ονόματα Larhunen Loeve Decomposition, Principal Component Analysis, Singular System Analysis Singular Value Decomposition.

Η παραπάνω διαδικασία έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλά επιστημονικά πεδία στα οποία συμπεριλαμβάνονται:

- η ανάλυση και επεξεργασία σημάτων [2]
- η επεξεργασία εικόνων [3]
- η συμπίεση δεδομένων [4]
- αναγνώριση συστημάτων και διεργασιών, έλεγχος στη Χημική Μηχανική [5]
- οκεανογραφία [6], κ.α.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την χρησιμότητα αυτής της μοντελοποίησης με μια απλή εφαρμογή, αυτής της μετάδοσης/αποστολής ενός σήματος μέσα σε ένα κανάλι.

Ας υποθέσουμε ότι  $\mathcal{U}(\theta)$  είναι μία διανυσματική τυχαία μεταβλητή μηδενικής μέσης τιμής μήκους  $M$ , δηλαδή:

$$\mathcal{U}(\theta) = [\mathcal{U}_1(\theta) \mathcal{U}_2(\theta) \mathcal{U}_3(\theta) \dots \mathcal{U}_M(\theta)]^T$$

και ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συγκεκριμένη υλοποίησή της, δηλαδή ένα διάνυσμα  $\mathbf{u} = \mathcal{U}(\theta_0)$ . Για λόγους απλότητας όπου  $\mathcal{U}(\theta)$  θα γράφουμε  $\mathcal{U}$ . Σκοπός μας είναι η μετάδοση αυτού του ‘σήματος’ μέσα από ένα κανάλι χρησιμοποιώντας ένα υποσύνολο  $P$  διακριτών τιμών, με  $P < M$ . Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι γνωρίζουμε το μητρώο συνδιασπορών της διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής:

$$C_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = \mathbb{E}\{\mathcal{U}\mathcal{U}^T\} = Q\Lambda Q^T$$

όπου:

$$Q = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_M]$$

ένα  $M \times M$  μητρώο του οποίου η στήλη  $\mathbf{q}_m$  είναι το  $m$ -οστό ιδιοδιάνυσμα του μητρώου  $C_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$  και

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$$

ένα  $M \times M$  διαγώνιο μητρώο που περιέχει τις ιδιοτιμές  $\lambda_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ .

Τότε, υπάρχει μία άλλη τ.μ.  $\mathcal{C}$ , της ίδιας διάστασης της οποίας γραμμικός μετασχηματισμός είναι η αρχική διανυσματική τ.μ.  $\mathcal{C}$ , δηλαδή:

$$\mathcal{U} = Q\mathcal{C} = \sum_{m=1}^M \mathcal{C}_m \mathbf{q}_m. \quad (1)$$

Για την παραπάνω τ.μ.  $\mathcal{C}$ , μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbb{E}\{\mathcal{C}_m\} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbb{E}\{|\mathcal{C}_m|^2\} = \lambda_m \quad (3)$$

$$\mathbb{E}\{\mathcal{U}\mathcal{U}^T\} = Q \underbrace{\mathbb{E}\{\mathcal{C}\mathcal{C}^T\}}_{\Lambda} Q^T = \mathcal{U}\mathcal{U}. \quad (4)$$

Θα πρέπει δε να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι κάθε στοιχείο  $\mathcal{C}_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  της διανυσματικής τ.μ.  $\mathcal{C}$ , αποτελεί την προβολή της τ.μ.  $\mathcal{U}$  στο αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή:

$$\mathcal{C}_m = \langle \mathbf{q}_m, \mathcal{U} \rangle$$

όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ο τελεστής του εσωτερικού γινομένου.

Είναι προφανές ότι η Σχέση (1) ισχύει και για ζευγάρια υλοποιήσεων των διανυσματικών τ.μ.:

$$\mathbf{u} = Q\mathbf{c}.$$

Δηλαδή κάθε υλοποίηση  $\mathbf{u}$  της τ.μ.  $\mathcal{U}$  μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από ένα γραμμικό μετασχηματισμό της υλοποίησης  $\mathbf{c}$  της τ.μ.  $\mathcal{C}$ .

### Περίπτωση Μετάδοσης σε Αθόρυβο Κανάλι

Είναι προφανές ότι μπορούμε στη Σχέση (1) να χρησιμοποιήσουμε τα  $P$  πρώτα ιδιοδιανύσματα του μητρώου  $\mathcal{C}_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$  και να ‘ανακατασκευάσουμε’ μία προσέγγιση της  $\mathcal{U}$ , την  $\hat{\mathcal{U}}$  ως:

$$\hat{\mathcal{U}} = \sum_{m=1}^P \mathcal{C}_m \mathbf{q}_m, \quad P < M$$

με σφάλμα το οποίο εκφράζεται από την ακόλουθη διανυσματική τ.μ.:

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} - \hat{\mathcal{U}} = \sum_{m=P+1}^M \mathcal{C}_m \mathbf{q}_m$$

και μέση ενέργεια ίση με την  $l_2$  στάθμη του παραπάνω διανύσματος, δηλαδή:

$$\mathbb{E}\{\|\mathcal{E}\|_2^2\} = \sum_{m=P+1}^M \lambda_m.$$

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να πούμε ότι η ανακατασκευή  $\hat{\mathcal{U}}$  είναι καλή, με την προϋπόθεση βέβαια ότι οι ιδιοτιμές  $\lambda_m$ ,  $m = P+1, \dots, M$  είναι αρκετά μικρές, επιτρέποντάς μας να μεταδώσουμε τη συμπιεσμένη μορφή  $\mathbf{c}$  της υλοποίησης  $\mathbf{u}$ .

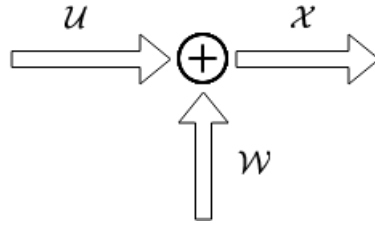
### Περίπτωση Μετάδοσης σε Ενθόρυβο Κανάλι

Με την μοντελοποίηση χαμηλής τάξης είδαμε ότι αναπόφευκτα έχουμε ένα σφάλμα λόγω απωλεστικής συμπίεσης των δεδομένων μας. Θα δούμε τώρα ότι αν θέλουμε να μεταδώσουμε το σήμα σε ενθόρυβο κανάλι η συμπίεση δρα προς όφελός μας, κάτω από προϋποθέσεις που θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια.

Θα συμβολίσουμε την διανυσματική έξοδο του συστήματος  $\mathcal{X}$ :

$$\mathcal{X} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$$

και θα θεωρήσουμε ότι ο προσθετικός θόρυβος  $\mathcal{W}$  είναι λευκός, ισχύος  $\sigma_{\mathcal{W}}^2$  όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



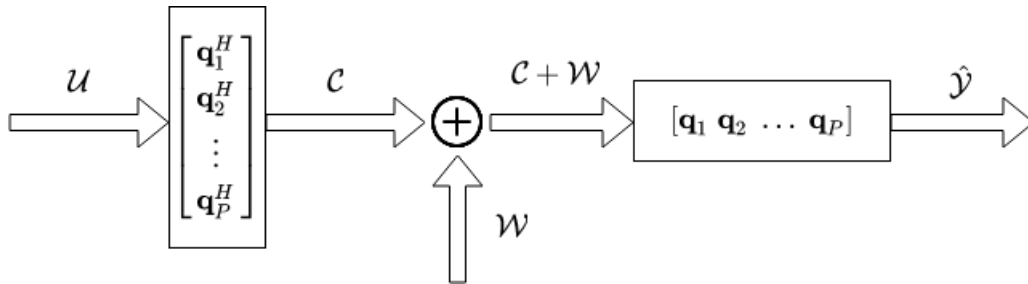
Σχήμα 1: Το προσθετικό μοντέλο θορύβου

Θεωρώντας ότι ο προσθετικός θόρυβος είναι ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου, δηλαδή  $C_{\mathcal{X}\mathcal{W}} = 0$ , μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι το μητρώο συνδιασπορών εξόδου-θορύβου είναι  $C_{\mathcal{X}\mathcal{W}} = \sigma^2 I_M$  όπου  $I_M$  το μοναδιαίο  $M \times M$  μητρώο.

Το σφάλμα μετάδοσης στην περίπτωση αυτή είναι  $\mathcal{E} = \mathcal{X} - \mathcal{U}$  με

$$\mathbb{E}\{\|\mathcal{E}\|_2^2\} = \mathbb{E}\{\|\mathcal{W}\|_2^2\} = M\sigma_{\mathcal{W}}^2. \quad (5)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι εναλλακτικά μεταδίδουμε αντί της  $\mathcal{U}$   $P < M$  προβολές της, αυτές με τις μεγαλύτερες διασπορές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2: Μετάδοση 'συμπιεσμένου' σήματος

Σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα μετάδοσης είναι  $\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{U}$  με

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left\|\hat{\mathcal{E}}\right\|_2^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left\|Q_P Q_P^T \mathbf{U} + Q_P^T \mathbf{W} - \mathbf{U}\right\|_2^2\right\} \\ &= \sum_{m=P+1}^M \lambda_m + P\sigma_W^2.\end{aligned}\quad (6)$$

Από τις Σχέσεις (5) και (6) εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο ακόλουθος κανόνας

$$(M - P)\sigma_W^2 \leq \sum_{m=P+1}^M \lambda_m$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δούμε σε ποιές περιπτώσεις η αποστολή  $P < M$  τιμών αποδίδει καλύτερα.

## ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

- 1 Αποδείξτε τις Σχέσεις (2-6).
- 2 Σας δίνεται το αρχείο **U.mat** που περιέχει 100 υλοποιήσεις της τ.μ.  $\mathbf{U}$  μήκους  $M = 10000$  η κάθε μία. Εκτιμήστε το μητρώο συνδιασπορών  $C_{UU}$ .
- 3 Χρησιμοποιείτε την εντολή *eig(.)* ή *svd(.)* του περιβάλλοντος Matlab για να υπολογίσετε τα μητρώα  $Q$ ,  $\Lambda$  και αποδείξτε πειραματικά την σχέση:

$$\mathbb{E}\{\|\mathcal{E}\|_2^2\} = \sum_{m=P+1}^M \lambda_m$$

- 4 Θεωρώντας την περίπτωση του αθόρυβου καναλιού παρουσιάστε καμπύλη του σχετικού σφάλματος μετάδοσης συναρτήσει της παραμέτρου  $P$ . Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.
- 5 Προσομοιώστε ένα ενθόρυβο κανάλι προσθέτοντας θόρυβο διασποράς  $\sigma_W^2$  της α-ρεσκειάς σας χρησιμοποιώντας την εντολή *randn()*. Σε ποιές περιπτώσεις η αποστολή  $P$  τιμών αποδίδει καλύτερα από την αποστολή  $M$  τιμών. Καταγράψτε την απάντησή σας και παραθέστε σχετικό γράφημα που θα εξηγήει τον συλλογισμό σας<sup>1</sup>.
- 6 Πειραματιστείτε στο Matlab και καταγράψτε τα αποτελέσματα των πιο σημαντικών πειραμάτων σας. Συγκεκριμένα, υλοποιήστε το ανωτέρω σύστημα και συγκρίνετε την απόδοση του, βάσει σχετικού σφάλματος μετάδοσης, σε αθόρυβο περιβάλλον

---

<sup>1</sup>Σημείωση: Πειραματιστείτε για διάφορες διασπορές θορύβου και κρατήστε μία.

και στη συνέχεια σε ενθόρυβο, για διάφορες τιμές λόγου σήματος προς θόρυβο (SNR). Θεωρήστε για αρχή ότι το  $P$  έχει συγκεκριμένη τιμή την οποία θα διαλέξετε εσείς. Παραθέστε καμπύλη του σχετικού σφάλματος μετάδοσης συναρτήσει του SNR. Σχολιάστε τα αποτελέσματα σας<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Σημείωση: Θεωρητικά όταν  $SNR \rightarrow \infty$  έχουμε αθόρυβο κανάλι. Στο γράφημά σας η πρώτη μέτρηση να είναι αυτή του αθόρυβου καναλιού και μετά οι υπόλοιπες κατά φθίνον SNR.

## ΙΔΙΟΦΙΛΤΡΑ

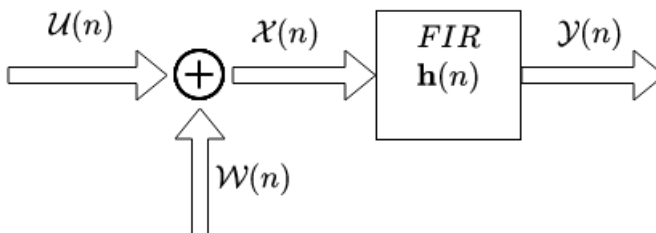
Ας θεωρήσουμε και πάλι το προσθετικό μοντέλο θορύβου της προηγούμενης ενότητας αλλά αυτή τη φορά ας υποθέσουμε ότι η  $\mathcal{U}$  είναι μία ασθενώς στάσιμη δεύτερης τάξης στοχαστική διαδικασία  $\mathcal{U}(n)$  με μέση τιμή μηδέν και ακολουθία αυτοσυσχέτισης:

$$r_{\mathcal{U}\mathcal{U}}(k) = \mathbb{E}\{\mathcal{U}(n)\mathcal{U}(n+k)\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

στην οποία προστίθεται λευκός γκαουσιανός θόρυβος  $\mathcal{W}_n$  με διασπορά  $\sigma_W^2$  και

$$r_{\mathcal{U}\mathcal{W}}(k) = \mathbb{E}\{\mathcal{U}(n)\mathcal{W}(n+k)\} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Γραμμικό φιλτράρισμα για την απομάκρυνση προσθετικού λευκού θορύβου

Αυτή τη φορά θέλουμε την έξοδο του ενθόρυβου καναλιού να την φιλτράρουμε με ένα FIR φίλτρο (eigenfilter) με κρουστική απόκριση  $h(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, M-1$ . Η έξοδος του συστήματος θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(n) &= h(n) * \mathcal{X}(n) \\ &= h(n) * \mathcal{U}(n) + h(n) * \mathcal{W}(n) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{Y}(n) = \mathcal{U}_n^t \mathbf{h} + \mathcal{W}_n^t \mathbf{h}$$

όπου  $*$  ο τελεστής της γραμμικής συνέλιξης και:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n &= [\mathcal{U}(n) \mathcal{U}(n-1) \mathcal{U}(n-2) \cdots \mathcal{U}(n-M+1)]^t \\ \mathcal{W}_n &= [\mathcal{W}(n) \mathcal{W}(n-1) \mathcal{W}(n-2) \cdots \mathcal{W}(n-M+1)]^t. \end{aligned}$$

Η μέση ισχύς της εξόδου, δηλαδή:

$$P_{\mathcal{Y}\mathcal{Y}}(\mathbf{h}) = \mathbb{E}\{\mathcal{Y}(n)^2\}$$

θα είναι

$$P_{\mathcal{Y}\mathcal{Y}}(\mathbf{h}) = P_{\mathcal{U}\mathcal{U}}(\mathbf{h}) + P_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(\mathbf{h})$$



όπου :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{U}\mathcal{U}}(\mathbf{h}) &= \mathbf{h}^t R_{\mathcal{U}\mathcal{U}} \mathbf{h} \\ P_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(\mathbf{h}) &= \sigma_{\mathcal{W}}^2 \mathbf{h}^t \mathbf{h} = \sigma_{\mathcal{W}}^2 \|\mathbf{h}\|_2^2 \end{aligned} \quad (7)$$

η μέση ισχύς του σήματος και του θορύβου αντίστοιχα και  $R_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$  το  $M \times M$  μητρώο αυτόσυσχέτισης της διαδικασίας  $\mathcal{U}(n)$  (δες Άσκηση 1).

Παρατηρήστε ότι και οι δύο ποσότητες που ορίστηκαν στις παραπάνω σχέσεις είναι συναρτήσεις των συντελεστών  $\mathbf{h}$  της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις και ο λόγος σήματος προς θόρυβο, τον οποίο θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε, θα είναι και αυτός συνάρτηση των συντελεστών  $\mathbf{h}$  της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου :

$$SNR(\mathbf{h}) = \frac{P_{\mathcal{U}\mathcal{U}}(\mathbf{h})}{P_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(\mathbf{h})},$$

ή ισοδύναμα <sup>3</sup>:

$$\max_{\mathbf{h}} \frac{\mathbf{h}^t R_{\mathcal{U}\mathcal{U}} \mathbf{h}}{\sigma_w^2 \mathbf{h}^t \mathbf{h}}. \quad (8)$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα (βλ. επόμενη παράγραφο) ότι οι συντελεστές της κρουστικής απόκρισης του βέλτιστου φίλτρου είναι οι ακόλουθοι:

$$\mathbf{h}^* = \mathbf{q}_{max}$$

όπου  $\mathbf{q}_{max}$  το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή  $\lambda_{max}$  του μητρώου  $R_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$ .

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΗ LAGRANGE

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης (8) μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^h C \mathbf{h} \\ \text{με συνθήκη:} &\quad \|\mathbf{h}\|_2^2 = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Ορίζοντας τώρα την ακόλουθη επαυξημένη συνάρτηση κόστους :

$$\mathcal{L}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^h C \mathbf{h} - \lambda (\|\mathbf{h}\|_2^2 - 1)$$

---

<sup>3</sup>Ο λόγος που υπεισέρχεται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι γνωστός ως "λόγος του Rayleigh". Η γενική μορφή του λόγου Rayleigh είναι η ακόλουθη :

$$\mathcal{R}(\mathbf{h}) = \frac{\mathbf{h}^h A \mathbf{h}}{\mathbf{h}^h B \mathbf{h}},$$

όπου  $A, B$  θετικά ημιορισμένα τετραγωνικά μητρώα.

και μεγιστοποιώντας την ως προς τους συντελεστές της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου, καταλήγουμε στις ακόλουθες κανονικές εξισώσεις οι οποίες αποτελούν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$C\mathbf{h} - \lambda\mathbf{h} = 0,$$

ή ισοδύναμα:

$$C\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}.$$

Από την παραπάνω σχέση είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε ότι η βέλτιστη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης (9), είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή του μητρώου  $C$  και ότι ο πολλαπλασιαστής του Langrange ισούται με τη μέγιστη ιδιοτιμή του μητρώου.

## ΛΟΓΟΣ RAYLEIGH - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Ας υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές του μητρώου  $C$  που υπεισέρχεται στο λόγο του Rayleigh είναι ταξινομημένες κατά αύξουσα σειρά, δηλαδή:

$$\lambda_{min} \equiv \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_M \equiv \lambda_{max}.$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, αν περιορίσουμε τον χώρο των λύσεων στην υπερσφαίρα:

$$\mathcal{H}_M = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M : \|\mathbf{h}\|_2^2 = 1\},$$

ο λόγος του Rayleigh  $\mathcal{R}(\mathbf{h})$  παίρνει τη μέγιστη τιμή του αν επιλέξουμε ως  $\mathbf{h}$  το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{q}_M$  που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του μητρώου, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} \equiv \lambda_M &= \max_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M} \mathcal{R}(\mathbf{h}) \equiv \mathcal{R}(\mathbf{q}_M) \\ \mathbf{q}_M &= \arg \max_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M} \mathcal{R}(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο παραπάνω λόγος παίρνει την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει αν χρησιμοποιήσουμε το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{q}_1$ , που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \lambda_{min} \equiv \lambda_1 &= \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M} \mathcal{R}(\mathbf{h}) \equiv \mathcal{R}(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{q}_1 &= \arg \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M} \mathcal{R}(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Επομένως, οι δύο ακραίες ιδιοτιμές αποτελούν την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του λόγου και προκύπτουν από τις λύσεις των αντίστοιχων προβλημάτων βελτιστοποίησης που αναφέρθηκαν παραπάνω. Το ερώτημα που τίθεται εδώ είναι αν αποτελούν και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του μητρώου λύσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης. Η απάντηση, όπως θα δούμε στη συνέχεια, στο παραπάνω ερώτημα είναι καταφατική. Για το σκοπό αυτό, θα περιορίσουμε τον χώρο αναζήτησης των λύσεων, είτε στους χώρους:

$$\mathcal{V}_{M-k}^i = \{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M \text{ και } Q_k^h \mathbf{h} = 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, M-2, \quad i = 1, \dots, \binom{M}{M-k}$$

είτε :

$$\mathcal{V}_k^i = \{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M \text{ και } Q_{M-k}^h \mathbf{h} = 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, M-2, \quad i = 1, \dots, \binom{M}{k}$$

όπου  $Q_l$  το μητρώο που προκύπτει από το μητρώο  $Q$  αν κρατήσουμε  $l$  (οποιοσδήποτε) από τις  $M$  στήλες του και  $\binom{n}{m}$  είναι οι συνδυασμοί των  $n$  ανά  $m$ . Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τις παραπάνω σχέσεις, για κάθε τιμή του  $k$ , το πλήθος, για παράδειγμα των διαφορετικών χώρων  $\mathcal{V}_k^i$  που μπορούμε να ορίσουμε από τις παραπάνω σχέσεις είναι  $\binom{M}{k}$ .

Τότε, η  $k$ -στη ιδιοτιμή του μητρώου  $Q$  μπορεί να χαρακτηριστεί ως η βέλτιστη τιμή των ακόλουθων προβλημάτων βελτιστοποίησης :

$$\lambda_k = \max_{\mathcal{V}_{M-k}} \min_{\mathbf{h}} \mathcal{R}(\mathbf{h})$$

είτε :

$$\lambda_k = \min_{\mathcal{V}_k} \max_{\mathbf{h}} \mathcal{R}(\mathbf{h}).$$

Με άλλα λόγια, μπορούμε να ορίσουμε τις ιδιοτιμές ως οι βέλτιστες τιμές των ακόλουθων minmax προβλημάτων βελτιστοποίησης :

$$\begin{aligned} \lambda_{M-1} &= \min_{\mathcal{V}_1^i} \max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^t Q \mathbf{h} \\ \lambda_{M-2} &= \min_{\mathcal{V}_2^i} \max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^t Q \mathbf{h} \\ \lambda_{M-3} &= \min_{\mathcal{V}_3^i} \max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^t Q \mathbf{h} \\ &\vdots \\ \lambda_2 &= \min_{\mathcal{V}_{M-2}^i} \max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^t Q \mathbf{h} \end{aligned}$$

και maxmin προβλημάτων βελτιστοποίησης αντίστοιχα :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \max_{\mathcal{V}_3^i} \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M} \mathbf{h}^t Q \mathbf{h} \\ &\vdots \\ \lambda_{M-3} &= \max_{\mathcal{V}_{M-4}^i} \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M} \mathbf{h}^t Q \mathbf{h} \\ \lambda_{M-2} &= \max_{\mathcal{V}_{M-3}^i} \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M} \mathbf{h}^t Q \mathbf{h} \\ \lambda_{M-1} &= \max_{\mathcal{V}_{M-2}^i} \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M} \mathbf{h}^t Q \mathbf{h}. \end{aligned}$$

## ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Δημιουργήστε στο περιβάλλον Matlab  $K = 1000$  διαφορετικές υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας

$$\mathcal{X}(n; \theta, \phi) = \sin\left(\frac{2\pi}{1000}n + \phi\right) + \mathcal{W}(n, \theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, 999, \quad \theta, \phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

όπου:

$$\mathcal{W}(n, \theta) \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$$

δηλαδή λευκός Γκαουσιανός θόρυβος ισχύος  $\sigma_W^2 = 0.1$  και

$$\phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$$

δηλαδή μία ομοιόμορφη τ.μ..

2. Εκτιμήστε το μητρώο  $C_{\mathcal{U}}$  και υπολογίστε το αντίστοιχο ιδιοφίλτρο  $\mathbf{h}$ . Εφαρμόστε το χρησιμοποιώντας την εντολή

$$\mathcal{Y}_k(n) = \text{filter}(\mathbf{h}, 1, \mathcal{X}(n; \theta, \phi_k))$$

σε κάθε μία από τις  $K$  υλοποιήσεις που σας διατίθενται.

3. Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, σχεδιάστε (χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις  $\text{plot}(\cdot, \cdot)$ ,  $\text{mesh}(\cdot)$ ,  $\text{stem}(\cdot, \cdot)$ ,  $\text{imagesc}(\cdot)$  του Matlab) σε κατάλληλες γραφικές παραστάσεις:

- α. την εκτίμηση του μητρώου  $C_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$

- β. όλες τις υλοποιήσεις της διαδικασίας

- γ. την μέση διαδικασία

- δ. όλες τις υλοποιήσεις της αποθορυβοποιημένης διαδικασίας, και

- ε. την μέση διαδικασία

4. Εξετάστε τις περιπτώσεις  $K = 10, 50, 100$ , σχολιάστε τα αποτελέσματά σας και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας. Τι συμβαίνει όσο αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων που διαθέτεται;

5. Καταγράψτε, αναλυτικά, πώς μπορούμε να παράξουμε μία στοχαστική διαδικασία από ένα Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα.

6. Δημιουργήστε:

- α. μία ασθενώς στάσιμη δεύτερης τάξης μηδενικής μέσης τιμής στοχαστική διαδικασία  $\mathcal{U}(n, \theta)$  και

- β. λευκό θόρυβο  $\mathcal{W}(n, \theta)$  ισχύος  $\sigma_W^2$

της αρεσκείας σας εκμεταλευόμενοι το γεγονός ότι τα Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως γεννήτορες των ασθενώς στασίμων δεύτερης τάξης στοχαστικών διαδικασιών, και επαναλάβετε τα παραπάνω.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [ 1 ] A. Papoulis, "Propability, Random Variables, and Stochastic Processes," McGraw-Hill, New York, 1965.
- [ 2 ] Markovsky, Ivan. "Structured low-rank approximation and its applications." *Automatica* 44.4 (2008): 891-909.
- [ 3 ] Zhou, Xiaowei, et al. "Low-rank modeling and its applications in image analysis." *ACM Computing Surveys (CSUR)* 47.2 (2014): 1-33.
- [ 4 ] Hou, Junhui, et al. "Sparse low-rank matrix approximation for data compression." *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology* 27.5 (2015): 1043-1054.
- [ 5 ] Nagarajaiah, Satish, and Yongchao Yang. "Modeling and harnessing sparse and low-rank data structure: a new paradigm for structural dynamics, identification, damage detection, and health monitoring." *Structural Control and Health Monitoring* 24.1 (2017): e1851.
- [ 6 ] Buehner, Mark, and Paola Malanotte-Rizzoli. "Reduced-rank Kalman filters applied to an idealized model of the wind-driven ocean circulation." *Journal of Geophysical Research: Oceans* 108.C6 (2003).