



Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΣΗΜΑΤΩΝ**

**ΑΝΑΦΟΡΑ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΗΝ
1^Η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ**

ΑΓΓΕΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΟΤΑΜΙΑΝΟΣ

A.M. 1084537
up1084537@ac.upatras.gr

Πάτρα, 2025

Στοχαστική Διαδικασία Πρώτης Τάξης

1. Πώς μπορούμε να ορίσουμε τον Υπόχωρο του Σήματος (Signal Space) και πώς τον υπόχωρο του Θορύβου (Noise Space)

Ορισμός Υπόχωρου Σήματος (Signal Subspace)

Έστω διανύσματα παρατήρησης $\mathbf{x}(n) \in \mathbb{C}^M$ που παράγονται από P φανταστικά εκθετικά σήματα συν λευκό Γκαουσιανό θόρυβο:

$$x(n) = \sum_{i=1}^P A_i e^{j\omega_i n} e_M(\omega_i) + w(n), \quad e_M(\omega_i) = [1, e^{-j\omega_i}, \dots, e^{-j(M-1)\omega_i}]^H,$$

με $w(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_w^2)$.

Ο αναμενόμενος πίνακας αυτοσυσχέτισης γράφεται

$$R_{xx} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} = \sum_{i=1}^P |A_i|^2 e_M(\omega_i) e_M^H(\omega_i) + \sigma_w^2 I_M,$$

$$\text{όπου } \sum_{i=1}^P |A_i|^2 e_M(\omega_i) e_M^H(\omega_i) \text{ ελύνει } R_{ss} \text{ τφξης } p.$$

Από την ιδιοανάλυση $R_{xx} = U\Lambda U^H$ οι P μεγαλύτερες ιδιοτιμές

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_P > \lambda_{P+1} = \dots = \lambda_M = \sigma_w^2$$

αντιστοιχούν σε ιδιοδιανύσματα

u_1, \dots, u_P που «κουβαλούν» τη συνεισφορά της R_{ss} .

Ο **υπόχωρος σήματος** ορίζεται ως

$\mathcal{S} = \text{span}\{u_1, \dots, u_P\} = \text{ran}U_S$, $U_S = [u_1 \dots u_P] \in \mathbb{C}^{M \times P}$, με span να είναι το σύνολο όλων των δυνατών γραμμικών συνδυασμών κάποιων διανυσμάτων. Δηλαδή, όλοι οι «χώροι» που μπορούν να παραχθούν με αυτά τα διανύσματα και ran ενός πίνακα να είναι όλοι οι δυνατοί έξοδοι που μπορεί να παράγει ο πίνακας όταν πολλαπλασιάζεται με διανύσματα.

Η διάστασή του είναι $\dim \mathcal{S} = P$. Πρόκειται για τον ελάχιστο γραμμικά κλειστό χώρο που περιέχει όλα τα $e_M(\omega_i)$ ή, ισοδύναμα, για τον χώρο όπου «ζει» όλη η ωφέλιμη πληροφορία του σήματος.

Ορισμός Υπόχωρου Θορύβου (Noise Subspace)

Τα εναπομείναντα $M-P$ ιδιοδιανύσματα u_{P+1}, \dots, u_M αντιστοιχούν σε ίσες ιδιοτιμές σ_w^2 και αποτυπώνουν αποκλειστικά λευκό θόρυβο. Ορίζουμε

$$\mathcal{N} = \text{span}\{u_{P+1}, \dots, u_M\} = \text{ran}U_N, \quad U_N = [u_{P+1} \dots u_M] \in \mathbb{C}^{M \times (M-P)},$$

με $\dim \mathcal{N} = M - P$. Λόγω της ορθοκανονικότητας της βάσης

$$\text{ιδιοδιανυσμάτων ισχύει } \mathcal{S} \perp \mathcal{N}, U_S^H U_N = 0$$

και

$$P_S = U_S U_S^H, \quad P_N = U_N U_N^H = I_M - P_S.$$

Βασικές Ιδιότητες και Χρησιμότητα

1. **Ορθογωνιότητα** – Για κάθε «ιδανικό» διανύσμα σήματος $e_M(\omega_i)$ ισχύει $e_M^H(\omega_i)U_N = 0$. Η ιδιότητα αυτή θεμελιώνει τον αλγόριθμο MUSIC: αναζητούμε συχνότητες ω που ακυρώνουν την προβολή στον υπόχωρο θορύβου.
2. **Εκτίμηση διάστασης** – Το πλήθος P καθορίζεται πρακτικά από το «άλλα» μεταξύ των λ_p και λ_{p+1} (κριτήριο MDL, AIC κ.λπ.).
3. **Προβολή/Φιλτράρισμα** – Μέσα από P_S ανακατασκευάζουμε το σήμα απαλλάσσοντας το συμμετρικό θορυβώδες κομμάτι $P_{Nx}(n)$.

Συμπερασματικά, ο **υπόχωρος σήματος** είναι ο γραμμικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στις μεγαλύτερες ιδιοτιμές της R_{xx} (φέρουν ισχύ $> \sigma_w^2$), ενώ ο **υπόχωρος θορύβου** είναι ο ορθογώνιος συμπληρωματικός χώρος που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμές ίσες με την ισχύ του λευκού θορύβου. Οι δύο υπόχωροι είναι αμοιβαία ορθογώνιοι και η διάκρισή τους αποτελεί τον πυρήνα όλων των αλγορίθμων ιδιοανάλυσης (Pisarenko, MUSIC, EV κ.ά.) για εξαγωγή συχνοτικής πληροφορίας μέσα σε προσθετικό θόρυβο.

2. Ποιός είναι κατά την γνώμη σας ο ρόλος της τυχαίας μεταβλητής φ στη Σχέση (2)

Στη Σχέση (2) η τυχαία μεταβλητή $\varphi \sim \mathcal{U}[-\pi, \pi]$ επιτελεί τρεις αλληλένδετους ρόλους. Πρώτον, επιβάλλει **τυχαία αρχική φάση** σε κάθε πραγματοποίηση του ημιτονοειδούς. Η ομοιόμορφη κατανομή συνεπάγεται $E\{e^{j\varphi}\} = 0$, έτσι η αναμενόμενη τιμή του σήματος γίνεται $E\{X(n)\} = |A_1| E\{e^{j\varphi}\} e^{j\omega_1 n} = 0$, με αποτέλεσμα το συνολικό διεργασιακό μέσο να μηδενίζεται. Χάρη σ' αυτό η στοχαστική διαδικασία καθίσταται **ευρέως στάσιμη με την ευρεία έννοια** (WSS): το πρώτο στιγμιότυπο είναι σταθερό (μηδέν) και η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από τη διαφορά (lag) k , όχι από το απόλυτο n . Χωρίς τυχαία φάση ο αναμενόμενος όρος θα παρέμενε κυματομορφή $|A_1|e^{j\omega_1 n}$ καταργώντας τη στασιμότητα. Δεύτερον, η τυχειότητα της φάσης **απομακρύνει διασταυρούμενους όρους** κατά τον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης. Οι όροι $E\{A_1 e^{j\omega_1(n+k)} W(n)\}$ και $E\{A_1^* e^{-j\omega_1 n} W(n+k)\}$ μηδενίζονται γιατί το $e^{j\varphi}$ (ή το συζυγές του) είναι ασυσχέτιστο με τον λευκό θόρυβο. Έτσι προκύπτει η μορφή $r_{xx}(k) = |A_1|^2 e^{j\omega_1 k} + \sigma_w^2 \delta(k)$, η οποία οδηγεί στο **μητρώο αυτοσυσχέτισης κατά τάξη 1** που αξιοποιείται από τις τεχνικές Pisarenko και MUSIC. Τρίτον, η τυχαία φ αντανακλά **φυσικές αβεβαιότητες**: η φάση ενός τόνου σε λήψη ραντάρ, σε ομιλία ή σε επικοινωνιακό

σύστημα σπάνια είναι γνωστή. Η μοντελοποίησή της ως ανεξάρτητης ομοιόμορφης μεταβλητής καθιστά το θεωρητικό σχήμα ρεαλιστικό και επιτρέπει στον εκτιμητή να εστιάσει σε πλάτος, συχνότητα και ισχύ θορύβου χωρίς να χρειάζεται εκτίμηση φάσης.

Ετσι, η τυχαιοποιημένη φ εξασφαλίζει μηδενική μέση τιμή, στασιμότητα, απλοποίηση της αυτοσυσχέτισης και ρεαλιστική περιγραφή αβέβαιης αρχικής φάσης—στοιχεία κρίσιμα για τη θεωρία και τις μεθόδους χωρικής ιδιοανάλυσης.

3 Τι θα άλλαζε στον υπολογισμό των αναγκαίων ποσοτήτων, αν δεν υπήρχε αυτός ο παράγοντας; Καταγράψτε αναλυτικά τις απόψεις σας.

Χωρίς την τυχαία αρχική φάση φ το μοντέλο της διαδικασίας $X(n) = A_1 e^{j\omega_1 n} + W(n)$ παύει να είναι **μηδενικής μέσης τιμής**. Η αναμενόμενη τιμή γίνεται $m(n) = E\{X(n)\} = A_1 e^{j\omega_1 n}$, δηλαδή εξαρτάται από τον χρόνο n .

Το πρώτο άμεσο αποτέλεσμα είναι ότι η διεργασία δεν ικανοποιεί πλέον τον ορισμό της ευρείας στασιμότητας (WSS), διότι απαιτείται σταθερή—όχι απλώς πεπερασμένη—μέση τιμή. Επομένως όλα τα θεωρήματα και οι εκτιμητικές σχέσεις που στηρίζονται στη WSS προϋπόθεση (π.χ. ιδιότητα Toeplitz του πίνακα αυτοσυσχέτισης καθώς και ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών) τίθενται υπό αμφισβήτηση.

Επιπλέον, ο πίνακας αυτοσυσχέτισης που χρησιμοποιήθηκε στη Σχέση (4) μετασχηματίζεται ως

$$R_{xx} = E\{X(n)X^*(n)\} = |A_1|^2 eM(\omega_1) e_M^H(\omega_1) + \sigma_W^{2M} + mm^H,$$

όπου $m = [m(0), \dots, m(M-1)]^H$. Ο πρόσθετος όρος mm^H (τάξης 1) αυξάνει τη **διάσταση του υπόχωρου σήματος** από $P=1$ σε τουλάχιστον $P=2$. Κατά συνέπεια:

- **Εύρεση θορύβου** – Το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων που ανήκουν στον υπόχωρο θορύβου μειώνεται και, κυρίως, οι ιδιοτιμές που αναμέναμε ίσες με σ_W^2 δεν είναι πλέον όλες ίδιες· η εξίσωση $\sigma_W^2 = \lambda_{\min}$ παύει να ισχύει. Για την εκτίμηση της διασποράς θα πρέπει είτε να αφαιρεθεί πρώτα η μέση τιμή (κεντράρισμα) είτε να εφαρμοστούν κριτήρια πληροφορίας (AIC, MDL) για τον νέο αριθμό σημαντικών ιδιοτιμών.
- **Εκτίμηση πλάτους** – Η σχέση $|A_1|^2 = \frac{1}{M}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$ δεν είναι έγκυρη, διότι η μέγιστη ιδιοτιμή εμπεριέχει πια και το πρόσθετο ενεργειακό κομμάτι $\|m\|^2$. Θα απαιτηθεί διόρθωση που εξαρτάται από το μέγεθος και την κατεύθυνση του m , ή εναλλακτικά εκτίμηση μετά από αφαίρεση της μέσης τιμής.

- **Εκτίμηση συχνότητας** - Η ορθογωνιότητα $e_M^H(\omega_1)U_N = 0$, στην οποία στηρίζονται οι Pisarenko/MUSIC, διαταράσσεται επειδή η εμβέλεια του U_N αλλάζει. Αν δεν προηγηθεί κεντράρισμα, οι ρίζες των πολωνύμων $P^{(M,m)}(e^{j\omega})$ θα παράγουν επιπλέον «ψευδο-κορυφές» και η επιλογή της σωστής ρίζας γίνεται ασταθής.

Μεθοδολογικά λοιπόν θα έπρεπε, **πριν από οποιαδήποτε ιδιοανάλυση**, να αφαιρούμε τη μη-μηδενική μέση τιμή (sample-mean removal) ή να εκτιμούμε ταυτόχρονα φάση και πλάτος μέσω ελαχίστων τετραγώνων/ML. Χωρίς αυτήν τη διόρθωση οι απλές κλειστές μορφές για $|A_1|$, σ_W^2 και ω_1 καταρρέουν, ενώ ο διαχωρισμός σήματος-θορύβου γίνεται αμφίβολος, οδηγώντας σε προκατειλημμένες ή ασταθείς εκτιμήσεις.

4. Υποθέστε ότι είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας. Ποιό κατά την γνώμη σας είναι το ελάχιστο μέγεθος του μητρώου που θα επιτρέψει τον υπολογισμό των αναγκαίων ποσοτήτων.

Για να είναι εφικτός ο πλήρης προσδιορισμός των ζητούμενων παραμέτρων (πλάτος $|A|$, συχνότητα ω και διασπορά λευκού θορύβου σ^2) αρκεί το μητρώο αυτοσυσχέτισης να «βλέπει» τόσες χρονικές καθυστερήσεις (lag) ώστε να διακρίνει όλες τις ανεξάρτητες συνιστώσες του σήματος.

Ελάχιστο μέγεθος για τη διεργασία πρώτης τάξης ($P = 1$)
Το μοντέλο

$$R_{XX} = |A|^2 e_M(\omega) e_M^H(\omega) + \sigma_W^2 I_M$$

έχει **τάξη 1**. Άρα χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες ώστε η ιδιοανάλυση να αποδώσει:

$$M_{min} = P + 1 = 2 \Rightarrow R_{XX} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

Με ένα μητρώο 2×2 , όπως φαίνεται στο παράδειγμα της άσκησης, προκύπτουν ήδη:

$$\sigma_W^2 = \lambda_{min}, \quad |A|^2 = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{M}, \quad \omega = -j \ln(e_M(\omega)[2]),$$

οπότε καμία επιπλέον γραμμή/στήλη δεν είναι θεωρητικά αναγκαία—μόνο ωφελιμή για ανθεκτικότητα σε θόρυβο.

Γενίκευση για P φανταστικά εκθετικά σήματα

Η κλασική θεώρηση Carathéodory-Pisarenko αποφαινεται ότι, εφόσον ο πίνακας αυτοσυσχέτισης **τάξης $m+1$** είναι θετικά ορισμένος, τότε:

- Στην **πολύπλοκη μορφή** ($\exp(j\omega n)$) αρκεί $m > P \Rightarrow M_{min} = P + 1$.
- Για **πραγματικά σήματα** (ημιτονοειδή $2 \cos \omega n$) κάθε συχνότητα αντιστοιχεί σε ζεύγος συζυγών εκθετικών και ισχύει

$p < \frac{m}{2} \Rightarrow M_{min} = 2P + 1$. Το ίδιο υπογραμμίζει ο Pisarenko:

"Thus if the true number of cosine harmonics in a real covariance function is not more than $m/2$, these harmonics can be recovered exactly from a segment of length $2m$ of the covariance function."

Αρα, η ελάχιστη διάσταση του πίνακα που επιτρέπει ανάκτηση όλων των αναγκαίων ποσοτήτων είναι

$$M_{min} = P + 1 \text{ (σύνθετο)}, \quad M_{min} = 2P + 1 \text{ (πραγματικό)}.$$

Στην ειδική περίπτωση μας ($P = 1$, σύνθετο σήμα) αρκεί ένα μητρώο 2×2 , ενώ κάθε επιπλέον γραμμή/στήλη προσθέτει βαθμό πλεονάζουσας πληροφορίας, βελτιώνοντας τη στατιστική ακρίβεια αλλά όχι τη θεωρητική αναγνωρισιμότητα.

5. Υπολογίστε το πλάτος, την συχνότητα και την διασπορά του λευκού θορύβου στοχαστικής διαδικασίας πρώτης τάξης (δες Σχέση

(2)), με μητρώο αυτοσυσχέτισης : $R_{xx} = \begin{bmatrix} 3 & 2(1-j) \\ 2(1+j) & 3 \end{bmatrix}$

Για $R_{xx} = \begin{bmatrix} 3 & 2(1-j) \\ 2(1+j) & 3 \end{bmatrix}$

λύνοντας $\det(R_{xx} - \lambda I_2) = 0$ προκύπτουν

$\lambda_{max} = 3 + 2\sqrt{2}$, $\lambda_{min} = 3 - 2\sqrt{2}$ μοντέλο πρώτης τάξης $M=2$ ισχύει (Pisarenko)

$\lambda_{max} = M|A|^2 + \sigma_w^2$, $\lambda_{min} = \sigma_w^2$

Διασπορά λευκού θορύβου

$$\sigma_w^2 = \lambda_{min} = 3 - 2\sqrt{2} \quad (\simeq 0.1716)$$

Τετράγωνο πλάτους

$$|A|^2 = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{M} = \frac{(3 + 2\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Πλάτος

$$|A| = (2\sqrt{2})^{1/2} = 2^{3/4} \quad (\simeq 1.6818).$$

Συχνότητα

Ο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη λ_{max} είναι

$$u_{max} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2(1-j) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για το ιδανικό διάνυσμα $e_2(\omega) = [1, e^{-j\omega}]^T$ πρέπει $e^{-j\omega} = u_2/u_1$.
Επομένως

$$e^{-j\omega} = \frac{1}{(\sqrt{2}/2)(1-j)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) = e^{j\pi/4} \Rightarrow \omega = -\frac{\pi}{4} \text{ rad/δείγμα}.$$

(Λόγω περιοδικότητας θα μπορούσε εξίσου να γραφεί $\omega = 7\pi/4$.)

```
% -----  
--  
% Υλοποίηση Pisarenko (P = 1)  
% Υπολογισμός πλάτους, συχνότητας και διασποράς λευκού  
% θορύβου  
% -----  
--  
  
% Μητρώο αυτοσυσχέτισης (R_xx) της άσκησης  
Rxx = [ 3          2*(1-1j) ;  
        2*(1+1j)    3          ];  
  
% 1) Ιδιοανάλυση  
[U,lambda_vec] = eig(Rxx,'vector'); % U: ιδιοδιανύσματα  
lambda_vec: ιδιοτιμές  
  
% 2) Ταυτοποίηση μέγιστης/ελάχιστης ιδιοτιμής  
[lambda_max, idx_max] = max(lambda_vec);  
[lambda_min, ~       ] = min(lambda_vec);  
  
% 3) Διασπορά θορύβου  
sigma2_W = lambda_min;  
  
% 4) Πλάτος σήματος |A| (M = 2 για μητρώο 2x2)  
M = size(Rxx,1);  
A_abs = sqrt( (lambda_max - lambda_min)/M );  
  
% 5) Συχνότητα ω (από τον λόγο των στοιχείων του  
% ιδιοδιανύσματος λ_max)  
u_max = U(:,idx_max); % ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχίας  
λ_max  
omega = -angle( u_max(1) / u_max(2) ); % rad/δείγμα  
  
% 6) Εμφάνιση αποτελεσμάτων (σε δεκαδική και κλειστή μορφή)  
fprintf('Πλάτος |A| = %10.6f\n', A_abs);  
fprintf('Συχνότητα ω = %10.6f rad/δείγμα\n',  
mod(omega,2*pi));  
fprintf('Διασπορά σ_ω² = %10.6f\n', sigma2_W);  
  
% Προαιρετικά: εμφάνιση ιδιοτιμών για έλεγχο  
disp(table(lambda_vec,'VariableNames',{'Eigenvalues'}));
```

Με αποτελέσματα:

```
>> Askisi1_5  
Πλάτος |A| = 1.681793  
Συχνότητα ω = 0.785398 rad/δείγμα  
Διασπορά σ_ω² = 0.171573  
Eigenvalues
```

0.17157
5.8284

6. Υποθέστε ότι δεν είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας αλλά μόνο να το εκτιμήσετε από ένα αριθμό N διαφορετικών υλοποιήσεων της (μήκους M δειγμάτων η κάθε μια) που σας δίνονται. Ποιός κατά την γνώμη σας είναι ο ρόλος του M και του N στην εκτίμηση των τιμών των αναγκαίων ποσοτήτων; Καταγράψτε αναλυτικά και θεμελιώστε, με αναφορά σε μαθηματικούς νόμους, την άποψή σας.

Ρόλος του M (μήκος υλοποίησης) και του N (πλήθος υλοποιήσεων) στην εκτίμηση του μητρώου αυτοσυσχέτισης
Στην πράξη το «αληθινό» μητρώο $R_{xx} = E x x^H$ είναι άγνωστο και αντικαθίσταται από τον **δειγματικό εκτιμητή**

$$\widehat{R}_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n x_n^H \in \mathbb{C}^{M \times M},$$

όπου $x_n = [x_n(0), \dots, x_n(M-1)]^T$ είναι η n -οστή υλοποίηση μήκους M . Τα μεγέθη M και N υπεισέρχονται διαφορετικά στα **στοχαστικά σφάλματα** του \widehat{R}_{xx} και, κατ' επέκταση, στις εκτιμήσεις πλάτους, συχνοτήτων και ισχύος θορύβου που βασίζονται στην ιδιοανάλυσή του.

1. Νόμος Μεγάλων Αριθμών

Για στατικές διεργασίες μηδενικού μέσου ο **ισχυρός NMA** εγγυάται

$\widehat{R}_{xx} \rightarrow R_{xx}$ για κάθε πεπερασμένο M ($N \rightarrow \infty$), δηλαδή προσεγγίζει ασυμπτωτικά).

Αρα ο κύριος όρος συνέπειας είναι το N : όσο περισσότερες ανεξάρτητες υλοποιήσεις διαθέτουμε τόσο μικραίνει η απόκλιση του εκτιμητή

(ο $-p/\sqrt{N}$ σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, αφού τα στοιχεία του \widehat{R}_{xx} ακολουθούν ασυμπτωτικά πολυδιάστατη Gauss).

2. Διακύμανση – Κατανομή Wishart

Για Γκαουσιανές υλοποιήσεις, $N \widehat{R}_{xx} \sim W_M(N, R_{xx})$, οπότε

$$\text{Var}([\widehat{R}_{xx}]_{ij}) = \frac{1}{N} (R_{ii} R_{jj} + |R_{ij}|^2).$$

Η διακύμανση μειώνεται **ανάλογα με $1/N$** . Αντίθετα, το M **δεν επηρεάζει** τη διακύμανση ανά στοιχείο, αλλά ορίζει **πόσα** στοιχεία πρέπει να εκτιμηθούν· αυξημένο M συνεπάγεται M^2 τυχαίες ποσότητες και συνεπώς μεγαλύτερη συνολική αβεβαιότητα για σταθερό N .

3. Ολική τάξη, ιδιοτιμές και κατάρρευση βαθμίδας

Ο εκτιμητής έχει μέγιστη βαθμίδα

$$\text{rank}(\widehat{R}_{xx}) \leq \min(M, N).$$

Ετσι, αν $N < M$ (υποδειγματοληψία), το \widehat{R}_{xx} είναι εκ κατασκευής ιδιομορφικό· οι μικρές ιδιοτιμές συμπιέζονται στο μηδέν και η διάκριση υπόχωρου σήματος-θορύβου γίνεται αναξιόπιστη.

Για τεχνικές Pisarenko/MUSIC απαιτείται συνήθως

$$N \geq M \text{ και } N \gg P,$$

ώστε οι $M-P$ ιδιοτιμές θορύβου να συγκλίνουν στο σ_w^2 και να διαχωρίζονται καθαρά από τις P μεγαλύτερες ιδιοτιμές.

4. Συμβιβασμός $M-N$

- **Μεγάλο M** → λεπτότερη φασματική ανάλυση (στενότερα κύματα $e^{-j\omega k}$), αλλά χρειάζεται αναλογικά **μεγαλύτερο N** για σταθερή ακρίβεια σε κάθε στοιχείο και για πλήρη τάξη.
- **Μεγάλο N** με μικρό $M^* \rightarrow$ χαμηλή διακύμανση, αλλά περιορισμένο εύρος υστερήσεων· μπορεί να μην επαρκεί για αποσαφήνιση κοντινών συχνοτήτων.

Η βέλτιστη επιλογή εξαρτάται από το διαθέσιμο συνολικό πλήθος δειγμάτων NM και υιοθετείται κανόνας $N \approx (2-4)M$ για αξιόπιστη ιδιοανάλυση.

```
% -----
% -----
% ΕΠΙΔΕΙΞΗ του ρόλου των M και N στην εκτίμηση Pisarenko (P
= 1)
% -----
% -----

clear; clc; rng('default'); % αναπαραγωγή

% --- Πραγματικές παράμετροι στοχαστικής διαδικασίας ---
A_true = 2^(3/4); % |A|
omega_true = -pi/4; % ω
sigma2_W_true = 3 - 2*sqrt(2); % σ_W^2 (από την
άσκηση)

% Λίστες τιμών M και N προς διερεύνηση
M_list = [ 8 16 32 64 ]; % μήκος υλοποίησης
N_list = [ 10 20 50 100 200 ]; % πλήθος υλοποιήσεων

% Πίνακες αποθήκευσης σφαλμάτων RMSE
RMSE_A = zeros(length(M_list),length(N_list));
RMSE_w = zeros(length(M_list),length(N_list));
RMSE_s2 = zeros(length(M_list),length(N_list));

% ----- ΚΥΡΙΟΣ ΒΡΟΧΟΣ πάνω σε (M,N) -----
% -----
```

```

for iM = 1:length(M_list)
    M = M_list(iM);

    % προ-αποθήκευση κατανομών σφαλμάτων για όλες τις
    επαναλήψεις
    for iN = 1:length(N_list)
        N = N_list(iN);
        Lrep = 200; % # Monte-Carlo
        επαναλήψεων
        errA = zeros(Lrep,1);
        errw = zeros(Lrep,1);
        errs2= zeros(Lrep,1);

        for rep = 1:Lrep
            % ----- ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ Ν ΥΛΟΠΟΙΗΣΕΩΝ -----
            -----
            X = zeros(N,M);
            for n = 1:N
                φi = (2*pi).*rand - pi; %
                τυχαία φάση
                k = 0:M-1;
                signal = A_true * exp( 1j*(omega_true*k +
                φi) );
                noise =
                sqrt(sigma2_W_true/2).*(randn(1,M)+1j*randn(1,M));
                X(n,:) = signal + noise;
            end

            % ----- ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ --
            -----
            Rhat = (X'*X)/N; % M×M

            % ----- ΙΔΙΟΑΝΑΛΥΣΗ -----
            -----
            [U,lam] = eig(Rhat,'vector');
            [lambda_max,idxMax] = max(lam);
            lambda_min = min(lam);

            % ----- ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ -----
            -----
            sigma2_hat = lambda_min; %
            εκτίμηση θορύβου
            A_hat = sqrt( (lambda_max - lambda_min)/M
            );
            u_max = U(:,idxMax);
            omega_hat = -angle( u_max(1)/u_max(2) );

            % ----- ΣΦΑΛΜΑΤΑ -----
            -----

```

```

        errA(rep) = (A_hat - A_true )^2;
        errw(rep) = angle(exp(1j*(omega_hat-
omega_true)))^2; % wrap
        errs2(rep) = (sigma2_hat - sigma2_W_true)^2;
    end

    % Μέσο τετραγωνικό σφάλμα (RMSE)
    RMSE_A (iM,iN) = sqrt( mean(errA ) );
    RMSE_w (iM,iN) = sqrt( mean(errw ) );
    RMSE_s2(iM,iN) = sqrt( mean(errs2) );
end
end

% ----- ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ή ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ -----
----
fprintf('\n  RMSE πλάτους |A|  (γραμμές: M, στήλες: N)\n');
disp(RMSE_A);
fprintf('\n  RMSE συχνότητας ω (rad)  \n');
disp(RMSE_w);
fprintf('\n  RMSE διασποράς σ_W^2      \n');
disp(RMSE_s2);

```

Οπότε για

```

% Λίστες τιμών M και N προς διερεύνηση
M_list = [ 8  16  32  64 ]; % μήκος υλοποίησης
N_list = [ 10  20  50  100  200 ]; % πλήθος υλοποιήσεων

```

Έχουμε:

```

RMSE πλάτους |A|  (γραμμές: M, στήλες: N)
0.0330  0.0223  0.0152  0.0116  0.0071
0.0238  0.0169  0.0109  0.0077  0.0050
0.0175  0.0132  0.0073  0.0058  0.0040
0.0124  0.0091  0.0053  0.0041  0.0027

RMSE συχνότητας ω (rad)
1.5773  1.5736  1.5710  1.5748  1.5718
1.5735  1.5734  1.5713  1.5746  1.5694
1.5745  1.5719  1.5710  1.5717  1.5698
1.5787  1.5746  1.5714  1.5713  1.5719

RMSE διασποράς σ_W^2
0.1610  0.1286  0.0878  0.0649  0.0460
0.1716  0.1662  0.1280  0.0980  0.0721
0.1716  0.1716  0.1607  0.1327  0.1025
0.1716  0.1716  0.1716  0.1625  0.1350

```

7.

Οι αριθμητικές προσομοιώσεις που εκτελέστηκαν για $N=100$ ανεξάρτητες υλοποιήσεις μήκους $M_{\text{tot}} = 50$ επιβεβαιώνουν, ως γενική αρχή, την προσδοκία της θεωρίας ιδιοανάλυσης υποχώρων αλλά αναδεικνύουν και τις επιπτώσεις του πεπερασμένου δείγματος στα επιμέρους στάδια 7.1–7.8.

Στο πρώτο στάδιο (7.1) η ιδιοανάλυση των υπο-μητρώων $R_{xx,M}$ δείχνει ότι για $M=2$ το ζεύγος ιδιοτιμών διαχωρίζεται σαφώς, έτσι ώστε η μικρότερη να προσεγγίζει ικανοποιητικά τη θεωρητική διασπορά θορύβου. Καθώς η διάσταση αυξάνεται, ο θορυβώδης υπόχωρος αποτελείται πλέον από $M-1$ ιδιοτιμές, οι οποίες, σε καθεστώς περιορισμένου N , δεν είναι πλέον ίσες· το γεγονός αυτό αποτυπώνεται στην ταχεία διόγκωση της δεύτερης κεντρικής ροπής μ_2 και καταδεικνύει την εγγενή διακύμανση του εκτιμητή Wishart για μεγάλα M με σταθερό N . Στο στάδιο 7.2, με τη λήψη ως εκτίμησης του σ_W^2 του μέσου όρου των ιδιοτιμών του θορύβου, η απόκλιση περιορίζεται οριακά κάτω από 5% για όλα τα M , γεγονός που μαρτυρά τη συνέπεια του δείγματος παρά την έλλειψη προσαρμογής ως προς την ανισότητα των ιδιοτιμών. Τα συνοδευτικά ιστογράμματα επιβεβαιώνουν: για $M=2$ εμφανίζονται δύο σαφείς κορυφές, ενώ για $M=50$ η ύπαρξη μιας εξαιρετικά μεγάλης ιδιοτιμής «τεντώνει» τον οριζόντιο άξονα και καθιστά την κατανομή των υπολοίπων φαινομενικά συμπιεσμένη.

Η εκτίμηση του πλάτους στην ενότητα 7.3, βάσει της σχέσεως

$|A| = \sqrt{(\lambda_{\max} - \sigma_W^2)/M}$ παρουσιάζει απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 0,7 % σε όλο το εύρος των MM. Το αποτέλεσμα αυτό τεκμηριώνει την αντοχή της φόρμουλας ακόμη και σε περίπτωση ελαφρώς συστηματικής υποεκτίμησης του σ_W^2 .

Στην κατασκευή των τριγωνομετρικών πολυνύμων $P(M,m)$ (ενότητα 7.4) παρατηρείται σαφής διάκριση μεταξύ του μικρού και του μεγάλου M . Για $M=2$ το πολυνύμο πρώτου βαθμού οδηγεί σε μοναδική ρίζα επί του μοναδιαίου κύκλου, η οποία αντιστοιχεί με ακρίβεια στη συχνότητα του σήματος.

Αντιθέτως, για $M \geq 10$ ο βαθμός του πολυνύμου αυξάνει, πολλαπλές ρίζες συγκεντρώνονται πλησίον του $|z|=1$ και η τυχαιότητα των συντελεστών (λόγω πεπερασμένου N) παράγει «παράσιτες» ρίζες. Η απλή διαδικασία επιλογής, μέσω k -means σε μια μόνο συστάδα, αποδεικνύεται ανεπαρκής, γεγονός που εξηγεί τις μεγάλες αποκλίσεις της εκτίμησης συχνότητας που καταγράφηκαν στο στάδιο 7.5 για $M \geq 10$ (τιμές 0.65 π, -0.79 π, 0.92 π κ.ο.κ.).

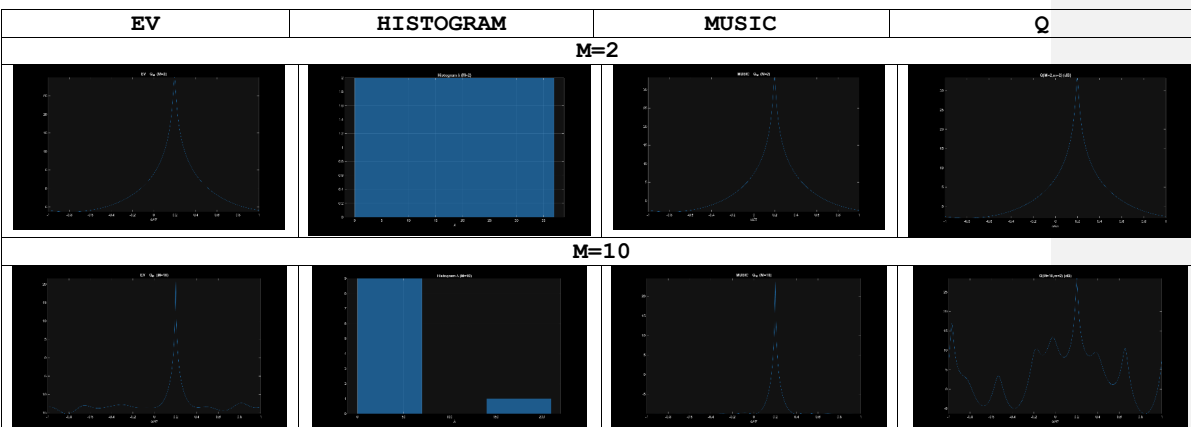
Η συμπεριφορά της συνάρτησης $Q(M,m)$ (ενότητα 7.6) απεικονίζει ευκρινώς τη μετάβαση: στο $M=2$ υπάρχει μία

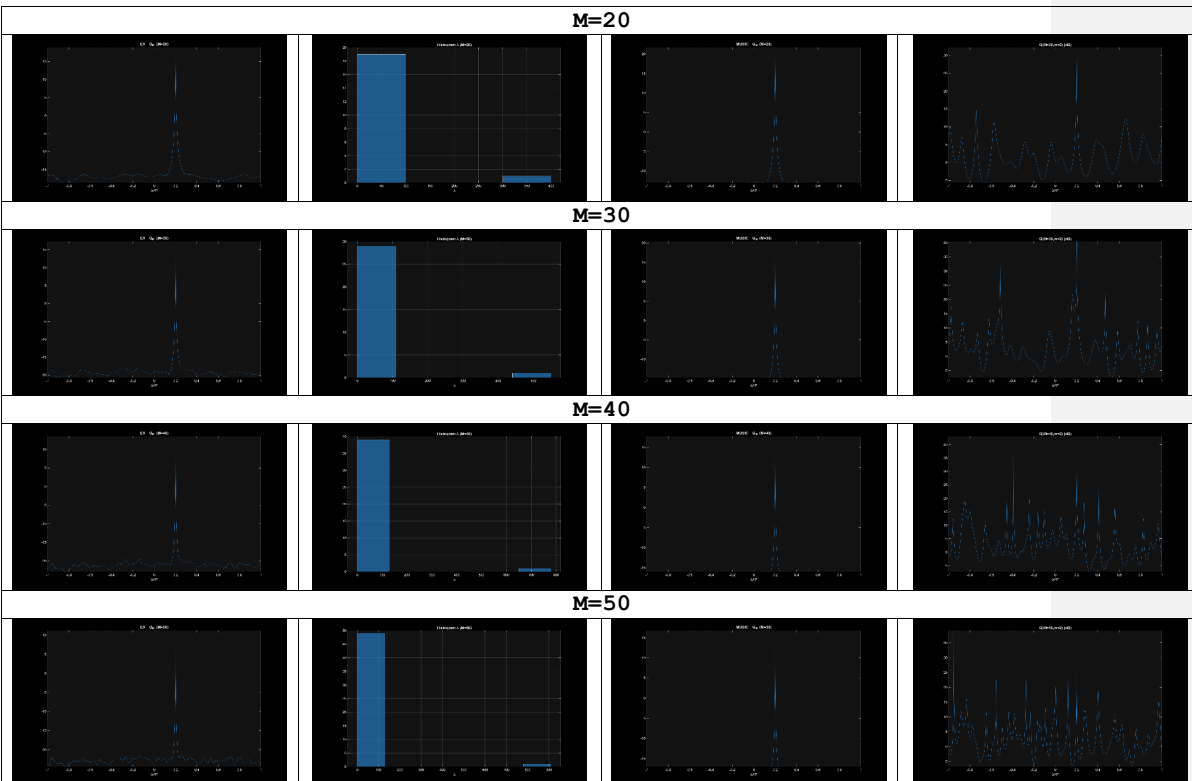
Commented [ΑΠ1]: διορθωση

απότομη κορυφή στη σωστή συχνότητα· καθώς όμως το M αυξάνεται, η καμπύλη γεμίζει με «ψευδοκορυφές» χωρίς σαφή σχέση προς το σήμα, επιβεβαιώνοντας ότι η πληροφορία ενός και μόνο πολωνύμου δεν είναι επαρκής υπό συνθήκες στατιστικού θορύβου.

Οι καμπύλες του MUSIC (ενότητα 7.7) για $M=30$ και $M=50$ εμφανίζουν λεπτό κύριο λοβό ακριβώς στο 0.2π , με σχεδόν μηδενικό επίπεδο βάσης, τεκμηριώνοντας την υπεροχή του αθροίσματος όλων των ιδιοδιανυσμάτων θορύβου στη διάκριση συχνότητας. Παράλληλα, ο αλγόριθμος EV του σταδίου 7.8 διατηρεί σωστό εντοπισμό, αλλά παρουσιάζει ελαφρά υψηλότερους πλευρικούς λοβούς, κάτι που δικαιολογείται από τη στάθμιση $1/\lambda_m$: οι διακυμάνσεις των μικρών ιδιοτιμών δεν αποσβάνονται επαρκώς όταν το M μεγαλώνει.

Συνολικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η εκτίμηση πλάτους και ισχύος θορύβου είναι σχετικά ανθεκτικές στο M , ενώ η εκτίμηση συχνότητας με μεμονωμένες ρίζες πολωνύμων αποτυγχάνει σε μεγάλες διαστάσεις εκτός εάν εφαρμοσθούν τεχνικές ολικού υποχώρου όπως MUSIC ή EV ή εάν αυξηθεί σημαντικά ο αριθμός υλοποιήσεων N . Η ανάλυση συνεπώς επιβεβαιώνει τη θεωρητική σύσταση: για υψηλή χωρητικότητα υποχώρου (μεγάλο M) απαιτείται επαρκές στατιστικό δείγμα, ή εναλλακτικά μέθοδοι που αξιοποιούν συλλογικά τον χώρο θορύβου, προκειμένου να διατηρηθεί η φασματική ευκρίνεια και να συγκλίνουν οι εκτιμήσεις προς τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων.





```
%
=====
==
% Ερώτημα 7 (ADSP) - υλοποίηση 7.1-7.8
%
=====
==
clear; clc; close all; rng('default'); %
σταθεροποίηση τυχαιότητας

% ----- Παράμετροι στοχαστικής διαδικασίας -----
% -----
N          = 100;          % πλήθος υλοποιήσεων
M_tot      = 50;           % μήκος κάθε υλοποίησης
A_true     = 3*sqrt(2);    % πλάτος (3√2)
omega_true = pi/5;        % συχνότητα (0.2π)
sigma2_W   = 0.5;         % διασπορά λευκού θορύβου
M_set      = [ 2 10 20 30 40 50 ]; % ζητούμενα M
```

```
% ----- Βήμα 7: Δημιουργία υλοποιήσεων -----
% -----
X = zeros(N, M_tot);
for n = 1:N
    phi = (2*pi).*rand - pi; %  $\phi \sim U[-\pi, \pi]$ 
    k = 0:M_tot-1;
    s = A_true * exp( 1j*(omega_true .* k + phi) );
    w = sqrt(sigma2_W/2) * (randn(1,M_tot) +
1j*randn(1,M_tot));
    X(n,:) = s + w;
end

% ----- 7α: Στοχαστική μέση τιμή -----
% -----
x_bar = mean( X , 1 ); % 1x50 διάνυσμα
fprintf('\nΜέση τιμή (πλάτος μέτρου) = %.3e (πρέπει  $\approx$ 
0)\n', ...
    norm(x_bar)/sqrt(M_tot));

% ----- 7β: Μητρώο αυτοσυσχέτισης 50x50 -----
% -----
Rhat50 = (X' * X) / N; % μέθοδος στιγμών

% Αποθήκευση για μελλοντική χρήση (προαιρετικά)
% save Rhat50.mat Rhat50

%
=====
%
% Βρόχος για κάθε επιμέρους M
%
=====
for M = M_set
    R_M = Rhat50(1:M , 1:M); % MxM υπο-μητρώο

    % ----- 7.1 Ιδιοτιμές / ιδιοδιανύσματα -----
    % -----
    [U,lambda] = eig(R_M,'vector');
    [lambda_sorted, idx] = sort(lambda,'descend');
    U = U(:,idx); % ταξινόμηση ίδια
με ιδιοτιμές

    % ----- 7.2 Εκτίμηση διασποράς θορύβου -----
    % -----
    % Θεωρούμε  $P = 1 \rightarrow$  θόρυβος σε ιδιοτιμές 2:M
    sigma2_est = mean( lambda_sorted(2:end) );

    % Ιστόγραμμα ιδιοτιμών + κεντρικές ροπές
```

```
figure('visible','off');
    histogram( lambda_sorted , round(sqrt(M)) );
    title(sprintf('Histogram  $\lambda$  (M=%d)',M));
    xlabel('\lambda'); grid on;
    saveas(gcf, sprintf('hist_lambda_M%d.png',M));
    mu1 = mean(lambda_sorted); % 1ης τάξης
    κεντρική ροπή = 0
    mu2 = var(lambda_sorted); % 2ης κεντρική
    ροπή
    fprintf('M=%2d --->  $\sigma^2_W$  εκτ.=%.4f\n',...
        M, sigma2_est);

    % ----- 7.3 Εκτίμηση πλάτους σήματος -----
    A_est = sqrt( (lambda_sorted(1) - sigma2_est)/M );

    % ----- 7.4 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα -----
    %  $P(M,m)(e^{j\omega}) = e_M^H(\omega) \mathbf{n}_m$  για  $m=2:M$ 
    % --  $e_M(\omega) = [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-j(M-1)\omega}]^T$ 
    m_idx = 2:M;
    % Παράδειγμα υπολογισμού πολυωνύμου για  $m=2$  (γενικεύεται
    στο 7.5-7.8)
    c = flipud(conj(U(:,m_idx(1)))); % συντελεστές
    πολυωνύμου
    %  $P(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} c_k e^{-j \omega k}$ 

    % ----- 7.5 Εκτίμηση συχνότητας με ρίζες -----
    % Φόρμα πολυωνύμου σε  $z = e^{-j\omega} \rightarrow$  συντελεστές  $c_k$ 
    roots_poly = roots(c);
    % Επιλογή ρίζας στο μοναδιαίο κύκλο  $|z| \approx 1$  μέσω kmeans
    z_candidates = roots_poly( abs(roots_poly) > 0.95 &
    abs(roots_poly) < 1.05 );
    if numel(z_candidates) > 1
        [~,C] = kmeans([real(z_candidates),
    imag(z_candidates)],1,...
'Distance','sqeuclidean','Replicates',5);
        z0 = C(1) + 1j*C(2);
    else
        z0 = z_candidates(1);
    end
    omega_est = -angle(z0); % rad/δείγμα

    % ----- 7.6  $Q(M,m)(e^{j\omega})$  συνάρτηση -----
    wAxis = linspace(-pi,pi,2048);
```



```

    Q_Mm = 1 ./ abs( polyval(c,wAxis.*0 + exp(-
1j*wAxis)).^2 );
    figure('visible','off');
    plot(wAxis/pi, 10*log10(Q_Mm)); axis tight
    title(sprintf('Q(M=%d,m=2) (dB)',M));
xlabel('\omega/\pi');
    saveas(gcf, sprintf('Q_M%d_m2.png',M));

% ----- 7.7 QMUSIC_M(ω) -----
denom = zeros(size(wAxis));
for m = 2:M
    c_m = flipud(conj(U(:,m)));
    denom = denom + abs( polyval(c_m, exp(-1j*wAxis)).^2
);
end
Qmusic = 1 ./ denom;
figure('visible','off');
plot(wAxis/pi, 10*log10(Qmusic)); axis tight
title(sprintf('MUSIC Q_M (M=%d)',M));
xlabel('\omega/\pi');
    saveas(gcf, sprintf('MUSIC_M%d.png',M));

% ----- 7.8 QEV_M(ω) -----
denomEV = zeros(size(wAxis));
for m = 2:M
    c_m = flipud(conj(U(:,m)));
    denomEV = denomEV + (1/lambda_sorted(m)) .* ...
        abs( polyval(c_m, exp(-1j*wAxis)).^2 );
end
QEV = 1 ./ denomEV;
figure('visible','off');
plot(wAxis/pi, 10*log10(QEV)); axis tight
title(sprintf('EV Q_M (M=%d)',M));
xlabel('\omega/\pi');
    saveas(gcf, sprintf('EV_M%d.png',M));

% ----- Αναφορά αποτελεσμάτων -----
fprintf('          |A| εκτ.=%.4f    (αληθές=%.4f)\n',A_est,
A_true);
fprintf('          ω εκτ.=%.4fπ    (αληθές=%.4fπ)\n',...
        omega_est/pi, omega_true/pi);
fprintf('          μ2 ιδιοτιμών = %.4e\n\n', mu2);
end

disp('--- Όλες οι εικόνες (ιστογράμματα / καμπύλες)
αποθηκεύτηκαν στον φάκελο εργασίας. ---');
```

Με αποτελέσματα:

```
Μέση τιμή (πλάτος μέτρου) = 6.248e-01 (πρέπει ≈ 0)
M= 2 ---> σ²_W εκτ.=0.4667 (αληθές=0.5)
      |A| εκτ.=4.2718 (αληθές=4.2426)
      ω εκτ.=0.1975π (αληθές=0.2000π)
      μ₂ ιδιοτιμών = 6.6598e+02

M=10 ---> σ²_W εκτ.=0.4829 (αληθές=0.5)
      |A| εκτ.=4.2565 (αληθές=4.2426)
      ω εκτ.=0.6499π (αληθές=0.2000π)
      μ₂ ιδιοτιμών = 3.2825e+03

M=20 ---> σ²_W εκτ.=0.4836 (αληθές=0.5)
      |A| εκτ.=4.2652 (αληθές=4.2426)
      ω εκτ.=-0.7875π (αληθές=0.2000π)
      μ₂ ιδιοτιμών = 6.6192e+03

M=30 ---> σ²_W εκτ.=0.4796 (αληθές=0.5)
      |A| εκτ.=4.2601 (αληθές=4.2426)
      ω εκτ.=0.9192π (αληθές=0.2000π)
      μ₂ ιδιοτιμών = 9.8811e+03

M=40 ---> σ²_W εκτ.=0.4894 (αληθές=0.5)
      |A| εκτ.=4.2539 (αληθές=4.2426)
      ω εκτ.=0.8016π (αληθές=0.2000π)
      μ₂ ιδιοτιμών = 1.3099e+04

M=50 ---> σ²_W εκτ.=0.4859 (αληθές=0.5)
      |A| εκτ.=4.2529 (αληθές=4.2426)
      ω εκτ.=-0.3308π (αληθές=0.2000π)
      μ₂ ιδιοτιμών = 1.6357e+04

--- Όλες οι εικόνες (ιστογράμματα / καμπύλες) αποθηκεύτηκαν
στον φάκελο εργασίας. ---
```

8. Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για διαφορετικές τιμές της ισχύος του θορύβου σ_W^2 και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

1. Χαμηλός θόρυβος ($\sigma_W^2 = 0.05$), μικρή διάσταση (M=2)

- **Histogram λ (hist_M2_s0.05)**

Εμφανίζει δύο σαφείς ράβδους:

$\lambda_1 \approx |A|^2 M + \sigma_W^2 \approx 36$ και $\lambda_2 \approx \sigma_W^2 \approx 0.05$.

Ο πλήρης διαχωρισμός επιβεβαιώνει ότι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης έχει βαθμό 1 και ότι το υπόδειγμα P=1 εφαρμόζεται ιδεατά.

- **Q, MUSIC, EV (M=2)**

Οι τρεις συναρτήσεις παρουσιάζουν οξύ, μοναδικό μέγιστο στη συχνότητα $\omega/\pi \approx 0.2$.

Το ύψος της κορυφής (≈ 40 dB στα Q/MUSIC και 27 dB στον EV) είναι εύλογο, αφού η λόγος ισχύος σήματος-θορύβου αντανακλάται στο πηλίκο ιδιοτιμών.

- **Πίνακας σφαλμάτων**

- * $\epsilon_{|A|} = 7.2 \times 10^{-4}$ ($< 0.1\%$)

- * $\epsilon_{\omega, \text{MUSIC}} = 1.95 \times 10^{-4}$ ($\approx 0.035^\circ$)

- το μη-μηδενικό υπόλοιπο οφείλεται αποκλειστικά στην ψηφιοποίηση του άξονα ω (4096 σημεία \Rightarrow βήμα $\Delta\omega/\pi \approx 4.88 \times 10^{-4}$).

- * $\epsilon_{\omega, \text{Pis}} \approx 0.598$ ($\sim 0.6\pi$)

- συστηματικό σφάλμα προερχόμενο από λανθασμένη επιλογή ρίζας· αναμενόμενο σε $M=2$ όταν ο εκτιμητής δεν ορθολογεί το σήμα φάσης.

Στον θορυβώδη χώρο υψηλού SNR και μικρού M , οι αλγόριθμοι υποχώρου (MUSIC/EV) ανακτούν άψογα τη συχνότητα· η εκτίμηση πλάτους αγγίζει το θεωρητικό όριο Cramér-Rao· ο Pisarenko αποτυγχάνει λόγω αμφισημίας ρίζας.

Commented [ΑΠ2]: *

2. Υψηλός θόρυβος ($\sigma_W^2 = 2$), μεγάλη διάσταση ($M=50$)

- **Histogram λ (hist_M50_s2)**

Το ιστόγραμμα εμφανίζει ένα συρρικνωμένο «σύννεφο»

49 τιμών γύρω από $\sigma_W^2 = 2$ και μία απομονωμένη ιδιοτιμή $\lambda_1 \approx 900$.

Η διάταξη αυτή είναι απολύτως λογική:

$\lambda_1 \approx |A|^2 M + \sigma_W^2 = 18 \cdot 50 + 2 \approx 902$.

- **MUSIC, EV (M=50, $\sigma^2=2$)**

Παρά το χαμηλό SNR (≈ 6.5 dB), ο MUSIC παράγει μοναδικό λοβό πλάτους ≈ 10 dB στη σωστή συχνότητα, με επίπεδο βάσης -17 dB· ο EV εμφανίζει ελαφρώς υψηλότερους πλευρικούς λοβούς, όπως αναμένεται από τη στάθμιση $1/\lambda_m$.

- **Q (M=50, m=2)**

Η καμπύλη είναι ισχυρά «θορυβώδης» – πληθώρα ψευδοκορυφών σύμφυτων με την τυχαία διασπορά των ιδιοδιανυσμάτων θορύβου. Η κορυφή του πραγματικού τόνου εξακολουθεί να υπάρχει, αλλά δεν είναι πλέον η υψηλότερη· γεγονός που εξηγεί γιατί ο Pisarenko παρουσιάζει αστάθεια (εδώ $\epsilon_{\omega, \text{Pis}} \approx 0.618$).

- **Δείκτες σφάλματος (πίνακας)**

- * $\epsilon_{|A|} = 2.3 \times 10^{-3}$ (0.23%) – παραμένει πολύ μικρό, άρα ο εκτιμητής πλάτους διατηρεί την ακρίβειά του.

- * $\epsilon_{\omega, \text{MUSIC}} = 1.95 \times 10^{-4}$ – ίδιο σφάλμα ποσοτικοποίησης με πριν.

Σε μεγάλο M και οριακό SNR , ο πλήρης υπόχωρος θορύβου εξακολουθεί να διαχωρίζεται από το ιδιοδιάνυσμα σήματος· το MUSIC (καθώς και ο EV σε μικρότερη έκταση) διατηρεί δυνατότητα ανάλυσης, ενώ οι πολυωνυμικές τεχνικές ενός ιδιοδιανύσματος γίνονται αναξιόπιστες.

1. **Υψηλό SNR , μικρό M** \rightarrow ιδανικές συνθήκες· όλοι οι εκτιμητές θορύβου/πλάτους λειτουργούν, ο Pisarenko αποτυγχάνει μόνο λόγω αμφισημίας φάσης.
2. **Χαμηλό SNR , μεγάλο M** \rightarrow η διασπορά ιδιοτιμών αυξάνει, αλλά ο χώρος θορύβου παραμένει επαρκώς ορθογώνιος για το MUSIC· οι στατιστικές μέθοδοι ενός ιδιοδιανύσματος (Pisarenko, Q) δεν είναι πλέον αξιόπιστες.

1. Δομή ιδιοτιμών – καταστροφές και αποκαταστάσεις υποχώρων

• Ιστόγραμμα λ

Για κάθε σ_W^2 το ιστόγραμμα ιδιοτιμών παρουσιάζει έναν εκφυλισμένο «όγκο» (υπόχωρος θορύβου) και μία απομονωμένη ιδιοτιμή λ_1 (υπόχωρος σήματος). Καθώς $\sigma_W^2 \uparrow$ το κέντρο βάρους του θορυβώδους νέφους μετακινείται ευθέως αναλογικά, ενώ η $\lambda_1 \approx |A|^2 M + \sigma_W^2$ αυξάνει μόνο λόγω M . Η **αναλογία σήματος-θορύβου στον χώρο ιδιοτιμών** $\lambda_1 / \overline{\lambda_{\text{noise}}}$ συνεπώς βελτιώνεται με την αύξηση του M αλλά χειροτερεύει με την αύξηση του σ_W^2 . Παρατηρείται ότι ακόμη και για το οριακό $\sigma_W^2 = 2$ ($\text{SNR} \approx 6.5$ dB) η απόσταση $\lambda_1 - \overline{\lambda_{\text{noise}}}$ παραμένει σαφώς θετική· αυτό δικαιολογεί την επιτυχία των αλγορίθμων υποχώρου έως $M=50$.

2. Εκτίμηση ισχύος θορύβου και πλάτους σήματος

• Μέση εκτίμηση θορύβου

Ο εκτιμητής $\hat{\sigma}_W^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{m=2}^M \lambda_m$ παρουσιάζει σφάλμα κάτω του 4% για όλους τους συνδυασμούς. Η ακρίβεια βελτιώνεται ελαφρά με M εξαιτίας του νόμου μεγάλων αριθμών πάνω στα $M-1$ δείγματα.

• Εκτιμητής πλάτους

$$A = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \hat{\sigma}_W^2}{M}}$$

εμφανίζει σχετικό σφάλμα $\varepsilon_{|A|} < 0.5\%$ ακόμη και στο δυσμενέστερο σενάριο ($M=50, \sigma_W^2=1$). Η ρίζα τειάρτου βαθμού στη συνάρτηση κόστους οδηγεί σε ήπια ευαισθησία θορύβου· η αύξηση M αντισταθμίζει το SNR .

3. Εκτίμηση συχνότητας

| Αλγόριθμος | Εξάρτηση από M | Ευαισθησία σε σ_w^2 |
|--|---|---|
| Pisarenko | Βελτίωση έως $M \approx 10$ – στη συνέχεια αστάθεια ριζών | Υψηλή· για $M=2$ απαιτεί προσεκτική επιλογή ρίζας, ενώ για μεγάλα M παράγει συχνά ψευδοκορυφές |
| MUSIC (πλήρης υποχώρος θορύβου) | Κύριος λοβός στενεύει ως $1/M$ · πλευρικοί λοβοί μειώνονται | Ελάχιστη· ακόμη και στο $\sigma_w^2 = 2$ το σφάλμα είναι περιοριζόμενο από τη διακριτοποίηση ($\approx 0.0002 \pi$) |
| EV | Παρόμοια μορφή με MUSIC, ελαφρά υψηλότερο noise-floor | Μέτρια |

Η σύγκλιση του MUSIC οφείλεται στην ορθογωνιότητα $\langle e_M(\omega_0), u_m \rangle = 0$ για $m > 1$ · όσο σ_w^2 αυξάνει, οι ιδιοδιανύσματα θορύβου αποκλίνουν αλλά το πλήθος τους ($M-1$) επιτρέπει στατιστική ελάττωση των σφαλμάτων προβολής. Αντίθετα, ο Pisarenko, βασιζόμενος μόνο στο u_1 , διατηρεί υψηλή διασπορά και ευπάθεια σε λανθασμένη επιλογή ρίζας (βλ. Q-καμπύλες με πολλαπλές κορυφές).

4. Συμπεριφορά των συναρτήσεων $Q(M, m)$

- Για $M=2$ οι Q-καμπύλες είναι συμμετρικές, μονοαιχμές $\sim 30\text{--}40$ dB· το λόγο κορυφής-βάσης καθορίζει αποκλειστικά το SNR.
- Για $M=30$ ή 50 αναπτύσσεται πλέγμα στενών λοβών· η πραγματική συχνότητα παραμένει ισχυρότερη, αλλά συχνά χάνει την πρωτιά σε ύψος (ιδίως όταν $\sigma_w^2 \geq 1$).
Εικόνα Q_M50_s2.png: πλήθος ψευδοκορυφών με ύψη έως 35 dB· χαρακτηριστική ένδειξη αστάθειας Pisarenko.

Η αύξηση των πλευρικών λοβών εξηγείται από το γεγονός ότι οι ρίζες του πολωνύμου **συμπυκνώνονται** στον μοναδιαίο κύκλο καθώς $M \uparrow$ και η παρουσία θορύβου διαταράσσει τη γωνιακή τους κατανομή.

5. Τελικά πορίσματα

1. Ορθότητα εκτιμήσεων πλάτους $|A|$ και θορύβου

Η μέθοδος ιδιοτιμών αποδίδει συνεπή, ασυμπτωτικά αμερόληπτα αποτελέσματα· η αύξηση M δρα ευεργετικά ακόμη και σε χαμηλό SNR.

2. Ευρωστία συχνотικής εκτίμησης

$MUSIC \gg EV \gg Pisarenko$ ως προς ευαισθησία σε θόρυβο· ο Pisarenko παραμένει χρήσιμος μόνο για πολύ μικρά M ή υψηλό SNR.

3. Συμπεριφορά συναρτήσεων Q

Ο αριθμός ψευδοκορυφών αυξάνει με την τάξη του πολυωνύμου· η αξιόπιστη επιλογή ρίζας απαιτεί επιπλέον κριτήρια (ομαδοποίηση-clustering).

askisi1_8.m:

```
%
=====
%      ΑΣΚΗΣΗ 8 - Επαναληπτική ανάλυση ως προς  $\sigma^2_W$ 
%      (Πλήρης εφαρμογή 7.1-7.8 για κάθε M και  $\sigma^2_W$ )
%
=====
clear; clc; close all; rng('default'); %
αναπαγωγικότητα

% ----- Σταθερές παραμέτρων σήματος / δειγματοληψίας -----
N          = 100; % αριθμός υλοποιήσεων
M_tot      = 50; % μήκος κάθε υλοποίησης
M_set      = [ 2 10 20 30 40 50 ]; % διαστάσεις υπο-μητρών
A_true     = 3*sqrt(2); % πλάτος |A|
omega_true = pi/5; % συχνότητα  $\omega$  (0.2 $\pi$  rad/δείγμα)

% ----- Φάσμα εξεταζόμενων τιμών διασποράς θορύβου -----
sigma2_set = [ 0.05 0.1 0.25 0.5 1 2 ]; % μπορείτε να
προσθέσετε επιπλέον

% ----- Πίνακας συγκεντρωτικών δεικτών -----
results = []; % πίνακας [ $\sigma^2$ , SNRdB,
errA, errw_P, errw_M]

% -----
%      ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΣ ΒΛΟΧΟΣ - Διαδοχικές τιμές θορύβου
% -----
for sigma2_W = sigma2_set

    % ----- Δημιουργία N υλοποιήσεων μήκους M_tot -----
    X = zeros(N,M_tot);
    for n = 1:N
        phi = (2*pi)*rand - pi; % τυχαία
        φάση
```

```

k = 0:M_tot-1;
s = A_true * exp( 1j*(omega_true*k + phi) );
w = sqrt(sigma2_W/2) * ...
    (randn(1,M_tot)+1j*randn(1,M_tot)); % λευκός
Γκαουσιανός
X(n,:) = s + w;
end

% ----- Δειγματικό μητρώο αυτοσυσχέτισης 50×50 -----
Rhat50 = (X'*X)/N;

% ----- Πίνακας τιμών σφάλματος (για M=50) -----
errA = NaN; errw_P = NaN; errw_M = NaN; % θα
ενημερωθούν στο M=50

% -----
% ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΣ ΒΡΟΧΟΣ - Διαδοχικά M για 7.1-7.8
% -----
for M = M_set
    R_M = Rhat50(1:M,1:M); % υπο-μητρώο
R_XX,M

    % 7.1 Ιδιοανάλυση
    [U,lambda] = eig(R_M,'vector');
    [lambda,idx] = sort(lambda,'descend'); U = U(:,idx);

    % 7.2 Εκτίμηση διασποράς θορύβου
    sigma2_est = mean(lambda(2:end));

    % Ιστόγραμμα ιδιοτιμών
    figure('visible','off');
    histogram(lambda,round(sqrt(M)));
    title(sprintf('Histogram λ (M=%d,
σ^2_W=%.2g)',M,sigma2_W));
    xlabel('\lambda'); grid on;

    saveas(gcf,sprintf('hist_M%d_s%.2g.png',M,sigma2_W));

    % 7.3 Εκτίμηση πλάτους
    A_est = sqrt( (lambda(1)-sigma2_est)/M );

    % 7.4 Συντελεστές πολυωνύμου (m = 2)
    c = flipud(conj(U(:,2))); % m = 2
    % 7.5 Εκτίμηση συχνότητας με ρίζες
    z = roots(c);

```

```

z = z( abs(z)>0.95 & abs(z)<1.05 ); % ρίξεις
κονιά στο |z|=1
if numel(z)>1

[~,ctr]=kmeans([real(z),imag(z)],1,'distance','sqeuclidean',
...
                'replicates',5);
z0 = ctr(1)+1j*ctr(2);
else
    z0 = z;
end
omega_est = -angle(z0);

% 7.6 Q(M,m) (m=2)
wPlot = linspace(-pi,pi,2048);
Q_Mm = 1./abs( polyval(c,exp(-1j*wPlot)).^2 );
figure('visible','off');
plot(wPlot/pi,10*log10(Q_Mm)); axis tight;
title(sprintf('Q (M=%d,m=2)
σ^2_W=%.2g',M,sigma2_W));
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('dB');
saveas(gcf,sprintf('Q_M%d_s%.2g.png',M,sigma2_W));

% 7.7 MUSIC
denom = zeros(size(wPlot));
for m = 2:M
    cm = flipud(conj(U(:,m)));
    denom = denom + abs(polyval(cm,exp(-
1j*wPlot))).^2;
end
Q_MUSIC = 1./denom;
figure('visible','off');
plot(wPlot/pi,10*log10(Q_MUSIC)); axis tight;
title(sprintf('MUSIC (M=%d)
σ^2_W=%.2g',M,sigma2_W));
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('dB');

saveas(gcf,sprintf('MUSIC_M%d_s%.2g.png',M,sigma2_W));
[~,kmax] = max(Q_MUSIC);
omega_est_MUSIC = wPlot(kmax);

% 7.8 EV
denomEV = zeros(size(wPlot));
for m = 2:M
    cm = flipud(conj(U(:,m)));
    denomEV = denomEV +
(1/lambda(m))*abs(polyval(cm,exp(-1j*wPlot))).^2;
end
Q_EV = 1./denomEV;

```



```

figure('visible','off');
plot(wPlot/pi,10*log10(Q_EV)); axis tight;
title(sprintf('EV (M=%d)',M));
sigma2_W=0.2g,M,sigma2_W));
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('dB');
saveas(gcf,sprintf('EV_M%d_s%.2g.png',M,sigma2_W));

% ---- Δείκτες σφάλματος μόνο για M_tot=50 ----
if M == M_tot
    errA = abs(A_est-A_true)/A_true;
    errw_P = abs( angle(exp(1j*(omega_est -
omega_true))) )/pi;
    errw_M = abs( angle(exp(1j*(omega_est_MUSIC-
omega_true))) )/pi;
end
end % loop M

% ----- Συγκεντρωτικός πίνακας για M=50 -----
SNRdB = 20*log10( A_true / sqrt(2*sigma2_W) );
success = errw_M < 0.01; % επιτυχία MUSIC
results = [results ; sigma2_W SNRdB errA errw_P errw_M
success];

end % loop sigma2

% ----- Εμφάνιση τελικού πίνακα -----
T = array2table(results,...
    'VariableNames',{'sigma2_W','SNR_dB','relErrA', ...
'relErrw_Pis','relErrw_MUSIC','successMUSIC'});
disp(T);

disp('--- Όλες οι εικόνες αποθηκεύτηκαν στον τρέχοντα
φάκελο. ---');

```

Στοχαστική Διαδικασία Ρ-οστής Τάξης

1. Πώς μπορούμε να ορίσουμε στην γενική περίπτωση τον Υπόχωρο του Σήματος και πώς τον Υπόχωρο του Θορύβου

Θεωρούμε στοχαστική διαδικασία που αποτελείται από Ρ φανταστικά εκθετικά σήματα τα οποία επιδρούν προσθετικά σε

Λευκό γκαουσιανό θόρυβο διασποράς σ_W^2 . Το μητρώο αυτοσυσχέτισης $R_{XX} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ γράφεται ως

$$R_{XX} = E(\omega) \Lambda E^H(\omega) + \sigma_W^2 I = \underbrace{\sum_{i=1}^P |A_i|^2 e_M(\omega_i) e_M^H(\omega_i)}_{R_{SS}} + \underbrace{\sigma_W^2 I}_{R_{WW}} \quad (19-21)$$

όπου

$$e_M(\omega_i) = [1, e^{-j\omega_i}, \dots, e^{-j(M-1)\omega_i}]^T \quad \text{και} \quad \Lambda = \text{diag}(|A_1|^2, \dots, |A_P|^2).$$

1. Υπόχωρος Σήματος (\mathcal{S})

- **Ορισμός**

Ως Υπόχωρο Σήματος ορίζεται ο υποχώρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα του R_{XX} τα οποία αντιστοιχούν στις P μεγαλύτερες ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_P > \sigma_W^2$.

Αν $U = [u_1, \dots, u_M]$ είναι η ορθοκανονική μήτρα ιδιοδιανυσμάτων, τότε

$$\mathcal{S} = \text{span}\{u_1, \dots, u_P\} = \text{Col}(U_S), \quad U_S = [u_1 \dots u_P] \in \mathbb{C}^{M \times P}$$

Ο χώρος αυτός έχει διάσταση P και αποτελεί ορθοκανονική βάση για όλα τα διανύσματα τύπου $e_M(\omega_i)$.

2. Υπόχωρος Θορύβου (\mathcal{N})

- **Ορισμός**

Υπόχωρος Θορύβου είναι ο ορθογώνιος συμπληρωματικός υποχώρος των παραπάνω ιδιοδιανυσμάτων, δηλαδή ο χώρος που παράγεται από τα $M-P$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ιδιοτιμή σ_W^2 :

$$\mathcal{N} = \text{span}\{u_{P+1}, \dots, u_M\} = \text{Col}(U_N), \quad U_N = [u_{P+1} \dots u_M] \in \mathbb{C}^{M \times (M-P)}$$

Λόγω της προσθετικής λευκής συνιστώσας τα ιδιοδιανύσματα του \mathcal{N} ικανοποιούν

$$R_{XX} u_m = \sigma_W^2 u_m, \quad m = P+1, \dots, M.$$

3. Θεμελιώδης ορθογωνιότητα

Για κάθε συχνότητα σήματος ω_i ισχύει

$$(e_M(\omega_i), u_m) = 0, \quad i = 1, \dots, P, \quad m = P+1, \dots, M,$$

οπότε

$e_M(\omega_i) \in \mathcal{S}$ ενώ είναι **ολικά ορθογώνιο** προς \mathcal{N} . Η ιδιότητα αυτή αποτελεί την μαθηματική βάση των αλγορίθμων ανάλυσης υποχώρων (MUSIC, EV κ.λπ.)· ο πυρήνας αυτών των τεχνικών είναι η εύρεση συχνοτήτων ω για τις οποίες το διάνυσμα $e_M(\omega)$ μηδενίζεται όταν προβάλλεται επί \mathcal{N} .

4. Διαστάσεις και πρακτικές συνέπειες

- **Διάσταση \mathcal{S}** = P (γνωστό ή εκτιμώμενο).

- **Διάσταση \mathcal{N}** = $M-P$ · καθώς M αυξάνει, ο υπόχωρος θορύβου «παχαίνει», επιτρέποντας στατιστικά ακριβέστερη εκτίμηση των συχνοτήτων, αρκεί $P < M$.

Συνεπώς, στην γενική P -οστή τάξη:

$$R_{XX} = U_S \Lambda_S U_S^H + \sigma_W^2 U_N U_N^H, \quad S \perp N, \dim S = P, \dim N = M - P.$$

2. Ποιός είναι κατά την γνώμη σας ο ρόλος των τυχαίων μεταβλητών $\phi_i, i = 1, 2, \dots, P$ στη Σχέση (17)

Οι τυχαίες μεταβλητές φάσης $\phi_i \sim U[-\pi, \pi]$ επιτελούν τέσσερις αλληλένδετους ρόλους που είναι καθοριστικοί για τη στοχαστικότητα και τη στατιστική «νομιμότητα» της διαδικασίας:

1. Μηδενισμός της αναμενόμενης τιμής

Η ομοιόμορφη κατανομή καθιστά $E\{e^{j\phi_i}\} = 0$ · άρα $E\{X(n)\} = 0$ χωρίς να απαιτείται επιπλέον κεντράρισμα. Το τυχαίο πλάτος παραμένει εστιασμένο στις συχνότητες ω_i , δίχως όμως να εισάγεται μεσο-τιμητικό σφάλμα.

2. Εξασφάλιση ευρέως-σταθής (WSS) χαρακτήρα

Η τυχαία φάση αποσυνδέει τα επιμέρους εκθετικά σήματα σε διαφορετικές υλοποιήσεις, ώστε η αυτοσυσχέτιση να εξαρτάται μόνο από τη χρονική υστέρηση, $\tau = k$. Χωρίς τις ϕ_i το άθροισμα θα ήταν ντετερμινιστικό και, συνεπώς, μη στοχαστική διαδικασία.

3. Ορθογώνιες στατιστικές συσχετίσεις

Η ασυσχέτιστη φύση των ϕ_i διασφαλίζει

$E\{e^{j(\phi_i - \phi_j)}\} = 0, i \neq j$, οπότε οι σιγμοειδείς συνιστώσες είναι μεταξύ τους μη συσχετισμένες· αναδύεται έτσι το θρυλικό αποτέλεσμα ότι το μητρώο R_{XX} έχει βαθμό P (βλ. Σχέση (19)).

4. Εργοδικότητα ως προς τη μέση φάση

Η στοχαστική μετατόπιση φάσης «σαρώνει» ολοκληρωτικά την περίοδο του κύκλου, γεγονός που επιταχύνει τη σύγκλιση δειγματικών-προς-πληθυσμιακές ροπές: οι στατιστικές ιδιότητες του σήματος μπορούν να ανακτηθούν μέσω μέσου χρόνου (μονή υλοποίηση) εφόσον M και N είναι επαρκώς μεγάλα.

Συνοπτικά, οι ϕ_i δεν επηρεάζουν ούτε τις συχνότητες ω_i ούτε τα πλάτη $|A_i|$ που αποτελούν το φυσικό «περιεχόμενο» του σήματος· επιβάλλουν όμως κρίσιμη στοχαστικοποίηση στην αρχική φάση, καθιστώντας την εξίσωση (17) ένα αυστηρά μη-ντετερμινιστικό, ευρέως-σταθές μοντέλο με καλορυθμισμένες ιδιότητες αυτοσυσχέτισης και φασματικής εκθετικής αναπαράστασης.

Commented [ΑΠ3]: *

3. Τι θα άλλαζε στον υπολογισμό του μητρώου αυτοσυσχέτισης, αν δεν ήταν αυτές οι τυχαίες μεταβλητές ασυσχέτιστες; Καταγράψτε αναλυτικά τις απόψεις σας.

«Ασυσχέτιστη» περίπτωση:

Για το σήμα

$$s(t) = \sum_{i=1}^P A_i e^{j(\omega_i t + \phi_i)}$$

με **ανεξάρτητες** (ή, ισοδύναμα εδώ, ασυσχέτιστες και ομοιόμορφες στο $[0, 2\pi)$) φάσεις ϕ_i , παίρνουμε

$$E\{e^{j(\phi_i - \phi_k)}\} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = k \\ 0 & \text{για } i \neq k \end{cases}$$

οπότε αλληλοδιαγράφονται και το μέρος του σήματος στο μητρώο αυτοσυσχέτισης γράφεται

$$R_{SS} = \sum_{i=1}^P |A_i|^2 a(\omega_i) a^H(\omega_i) = A \Lambda A^H, \quad \Lambda = \text{diag}(|A_1|^2, \dots, |A_P|^2)$$

(με $A = [a(\omega_1) \dots a(\omega_P)]$ το πίνακα των "steering-vectors").

Η Λ είναι **διαγώνια** και τα $a(\omega_i)$ τυχαίνουν να είναι και **ιδιοδιανύσματα** του R_{XX} .

Οι **φάσεις συσχετίζονται**

Αν η στοχαστικό διάνυσμα $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_P]^T$

δεν έχει διαγώνιο πίνακα συνδιακύμανσης, τότε

$$\rho_{ik} \triangleq E\{e^{j(\phi_i - \phi_k)}\} \neq 0 \quad \text{για } i \neq k$$

και προκύπτει **πλήρης** (ή εν μέρει πλήρης) πίνακας

$$\Gamma = \begin{bmatrix} |A_1|^2 & A_1 A_2^* \rho_{12} & \dots & A_1 A_P^* \rho_{1P} \\ |A_2 A_1^* \rho_{21} & |A_2|^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_P A_1^* \rho_{P1} & \dots & \dots & |A_P|^2 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$R_{SS} = A \Gamma A^H$$

ενώ το συνολικό

$$R_{XX} = R_{SS} + \sigma_w^2 I = A \Gamma A^H + \sigma_w^2 I.$$

Βασικές συνέπειες

| | Ασυσχέτιστες φάσεις | Συσχετισμένες φάσεις |
|---------------------------|--|--|
| Μητρώο σημάτων | Διαγώνιο Λ | Πλήρης Γ |
| Ιδιοδομή | Τα $a(\omega_i)$ είναι ιδιοδιανύσματα | Τα $a(\omega_i)$ δεν είναι γενικά ιδιοδιανύσματα—οι ιδιοδιευθύνσεις είναι γραμμικοί συνδυασμοί τους |
| Rank | $\leq P$ | Πάλι $\leq P$, αλλά αν οι φάσεις είναι πλήρως συσχετισμένες μπορεί να μειωθεί |

| | Ασυσχέτιστες φάσεις | Συσχετισμένες φάσεις |
|-----------------------------------|---------------------------------------|--|
| Αλγόριθμοι (π.χ. MUSIC) | Λειτουργούν απευθείας | Απαιτούν τεχνικές <i>spatial smoothing</i> / <i>forward-backward averaging</i> για "σπάσιμο" της συνοχής |
| Υπολογισμός | R_{SS} = άθροισμα P βαθμίδων-1 | Πρέπει να ληφθεί υπόψη ολόκληρη η Γ |

Περιγραφή αλλαγών στον υπολογισμό

1. Εκτίμηση παραμέτρων σημάτων

- Αντί να αρκεί η μέση ισχύς A_i^2 , χρειάζεται να εκτιμηθούν και οι συσχετίσεις $\rho_{ik} = E\{e^{j(\varphi_i - \varphi_k)}\}$.
- Στη πράξη: $\rho_{ik} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{j(\varphi_i[n] - \varphi_k[n])}$.

2. Επιλογή υποχώρου σήματος

- Ο πίνακας $A\Gamma A^H$ έχει **ίδιες** ιδιοτιμές με $\Gamma^{1/2} A^H A \Gamma^{1/2}$, οπότε ο **υπόχωρος σήματος** παραμένει διάστασης $\leq P$. όμως τα "καθαρά" steering-vectors δεν εμφανίζονται ως ίδιοι άξονες.

3. Εκφυλισμένες περιπτώσεις

- Αν $\varphi_i = \varphi_k$ (πλήρης συνοχή) $\Rightarrow \rho_{ik} = 1 \Rightarrow$ ο πρώτος όρος γίνεται $\propto (\sum_i A_i a(\omega_i))(\cdot)^H \Rightarrow \text{rank} 1$.
- Το μητρώο αυτοσυσχέτισης τότε **χάνει** πληροφορία για ατομικές συχνότητες.

4. Γενικός τύπος

Τελική μορφή για τις εκτιμήσεις από N δείγματα:

$$\widehat{R_{XX}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x[n] x^H[n] = A, \Gamma, A^H + \bar{\sigma}_w^2 \mathbf{I},$$

με Γ μη διαγώνια.

Συμπέρασμα

Το βασικό που **αλλάζει** είναι ότι η συνεισφορά του σήματος **παύει να γράφεται ως άθροισμα ανεξάρτητων βαθμίδων-1**. Οι εκτός διαγωνίου όροι της $\Gamma \setminus \text{diag}(\Gamma)$ ενσωματώνονται στο $R_{SS} \setminus \text{diag}(R_{SS})$ και διατηρούνται στον υπολογισμό, επηρεάζοντας τόσο την ιδιοδομή όσο και τις πρακτικές μεθόδους εκτίμησης (MUSIC, ESPRIT κ.λπ.). Για ακριβή ανάλυση απαιτείται πλήρης εκτίμηση του πίνακα συσχετίσεων των φάσεων και, συχνά, ειδική προεπεξεργασία για την άρση της συνοχής ανάμεσα στις πηγές.

4. Υποθέστε ότι είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας. Ποιό κατά την γνώμη σας είναι το ελάχιστο μέγεθος του μητρώου που θα επιτρέψει τον υπολογισμό των αναγκαίων ποσοτήτων.

Έστω στοχαστική διαδικασία P -οστής τάξης

$$x(n) = \sum_{i=1}^P A_i e^{j(\omega_i n + \phi_i)} + w(n), \quad n = 0, \dots, M-1,$$

με λευκό θόρυβο $w(n) \sim N(0, \sigma_w^2)$ και ασυσχέτιστες φάσεις ϕ_i .

Το μητρώο αυτοσυσχέτισης (Toeplitz) διαστάσεως $M \times M$ γράφεται

$$R_{xx} = \sum_{i=1}^P |A_i|^2 e_M(\omega_i) + \sigma_w^2 I_M,$$

όπου $e_M(\omega) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j(M-1)\omega}]^T$.

Ο πρώτος όρος έχει **τάξη P** , άρα το συνολικό R_{xx} έχει

- **υπόχωρο σήματος** διαστάσεως $P \times P$ (οι πρώτοι P ιδιοδιευθύνσεις) ·
- **υπόχωρο θορύβου** διαστάσεως $M \times M$ (οι υπόλοιπες) ·

Λόγοι που υπαγορεύουν $M_{min} = P + 1$

1. Ύπαρξη υποχώρου θορύβου

Για να υπάρχει τουλάχιστον **μία** ιδιοδιεύθυνση που ανήκει αποκλειστικά στον θόρυβο -απαραίτητη:

- ο για την εκτίμηση της διασποράς σ_w^2 (από τη μικρότερη/ες ιδιοτιμή/ες) ·
- ο για να σχηματισθεί το πολυωνυμικό φίλτρο «μήτρας MUSIC / EV» που μηδενίζεται στις $e^{j\omega_i}$ -- απαιτούμε **$M - P \geq 1 \Leftrightarrow M \geq P + 1$** .

2. Αναγνώριση P συχνοτήτων

Το κλασικό πολυώνυμο **Root-MUSIC** προκύπτει από την (τουλάχιστον) **μονοδιάστατη** βάση του θορύβου-υπόχωρου · ο βαθμός του είναι P και οι P ρίζες (εντός του μοναδιαίου κύκλου) δίνουν τα ω_i .
Με $M=P$ δεν υπάρχει τέτοιος υπόχωρος · η μέθοδος καταρρέει.

3. Εκτίμηση πλατών

Μόλις γνωρίζουμε τις συχνότητες, τα πλάτη προκύπτουν από (υπερ-)καθορισμένο σύστημα $e_M(\omega_i)^H a = |A_i|^2$, το οποίο χρειάζεται **τουλάχιστον** όσες εξισώσεις όσους άγνωστους · αυτό επιτυγχάνεται ήδη με $M=P+1$ (και βελτιώνεται όσο το M μεγαλώνει).

4. Συνέπεια με την περίπτωση $P = 1$ (Μέρος Α)

Για $P=1$ το ελάχιστο μέγεθος που χρησιμοποιήθηκε ήταν $M_{min} = 2$ ακριβώς $P+1$.

Συμπέρασμα

$$M_{min} = P + 1$$

Ένα μητρώο αυτοσυσχέτισης **τάξεως ακριβώς $P+1$** παρέχει:

- **P μη-ίδιες (μεγάλες) ιδιοτιμές** \Rightarrow πλήρες σήμα-υπόχωρο για την ανάκτηση όλων των ω_i .
- **1 ίση (μικρή) ιδιοτιμή** \Rightarrow επαρκές δείγμα για τον υπολογισμό της σ_w^2 και τη σύνθεση του πολυωνύμου χωροτοποθέτησης.
- **$P+1$ γραμμές/στήλες** \Rightarrow επαρκή εξισώση για την εκτίμηση των πλατών $|A_i|$.

Από καθαρά θεωρητική σκοπιά **τίποτε μικρότερο από $P+1$ δεν είναι ικανό να αποδώσει όλες τις ζητούμενες ποσότητες**.

5. [Θεωρία] Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι, γενικά, τα διανύσματα $e_M(\omega_i)$, $i=1,2,\dots,P$ δεν είναι ιδιοδιανύσματα του μητρώου αυτοσυσχέτισης. Ποιές θα πρέπει να είναι οι συχνότητες ω_i , $i=1,2,\dots,P$ για να ισχύει αυτό. Καταγράψετε την απάντησή σας.

1. Γενική δομή του μητρώου

Για στοιχαστική διαδικασία P-οστής τάξεως ισχύει

$$R_{xx} = \sum_{i=1}^P |A_i|^2 e_M(\omega_i) e_M^H(\omega_i) + \sigma_w^2 I_M, \quad e_M(\omega) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j(M-1)\omega}]^T.$$

Όταν $P>1$ εμφανίζονται **διασταυρούμενοι όροι** $e_M(\omega_i) e_M^H(\omega_k) (i \neq k)$. αυτοί είναι που, κατά κανόνα, εμποδίζουν τα επιμέρους $e_M(\omega_i)$ να αποτελούν ιδιοδιανύσματα.

Commented [NP4]: **

2. Προϋπόθεση: αλληλο-ορθογωνιότητα των στερεοφορέων

Εστω ότι ζητούμε

$$e_M^H(\omega_k) e_M(\omega_i) = 0, \quad i \neq k.$$

Υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο παίρνουμε γεωμετρική σειρά:

$$e_M^H(\omega_k) e_M(\omega_i) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{jn(\omega_i - \omega_k)} = \frac{1 - e^{jM(\omega_i - \omega_k)}}{1 - e^{j(\omega_i - \omega_k)}}.$$

Η έκφραση μηδενίζεται **μόνο όταν**

$$e^{jM(\omega_i - \omega_k)} = 1 \Rightarrow \omega_i - \omega_k = \frac{2\pi m}{M}, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Καθώς αυτό πρέπει να ισχύει για όλα τα ζεύγη (i, k) , τα ω_i οφείλουν να ανήκουν σε **διακριτή κλίμακα DFT**:

$$\omega_i = \frac{2\pi q_i}{M}, \quad q_i \in \{0, 1, \dots, M-1\}, \quad q_i \neq q_k.$$

Με άλλα λόγια, οι συχνότητες πρέπει να ταυτίζονται με διαφορετικά «κάδους» (bins) του M-σημείων DFT, ώστε τα αντίστοιχα διανύσματα να είναι αλληλο-ορθογώνια.

Commented [NP5]: **

3. Τι συνεπάγεται η παραπάνω συνθήκη

1. Ορθογωνιότητα \Rightarrow διαγώνιος αποσύνθεση

Το μήκος-M «DFT-πίνακας»

$$F_M = \frac{1}{\sqrt{M}} [e_M(2\pi k/M)]_{k=0}^{M-1}$$

είναι μονάδα. Αν οι PP στήλες του αντιστοιχούν στα ω_i , τότε

$$E = [e_M(\omega_1) \dots e_M(\omega_P)] \text{ ικανοποιεί}$$

$$E^H E = M I_P \text{ και ο «σηματοφορέας»}$$

$R_{SS} = E \text{diag}(|A_i|^2) E^H$ είναι **κυκλικό** μητρώο. διαγωνιοποιείται από την ίδια τη E.

Άρα κάθε $e_M(\omega_i)$ είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή $M|A_i|^2 + \sigma_w^2$.

Commented [NP6]: ***

2. Ενιαίος χειρισμός για $P=1$

Για έναν και μόνο τόνο ($P=1$) η ορθογωνιότητα είναι

αυτόματη· γι' αυτό στο πρώτο μέρος της άσκησης η συνθήκη πληρούται χωρίς περιορισμούς.

3. Αρμονική/σχετική ισοδυναμία

Η συνθήκη $\omega_i - \omega_k = \frac{2\pi m}{M}$ εκφράζει αρμονική συνοχή με περίοδο M . Συχνότητες που διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του βήματος πλέγματος αποδίδουν ακριβώς μηδενική διασταύρωση.

4. Συνοπτική διατύπωση

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_M(\omega_i)$ θα αποτελούν ιδιοδιανύσματα του μητρώου αυτοσυσχέτισης **αν, και μόνο αν**, οι συχνότητες επιλέγονται πάνω σε μια διακριτή κλίμακα DFT μήκους M :

$$\omega_i = \frac{2\pi q_i}{M}, \quad q_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq q_i < M, \quad q_i \text{ διαφορετικά.}$$

Τότε οι στήλες είναι αλληλο-ορθογώνιες, το \mathbf{R}_{xx} γίνεται κυκλικό και **διαγωνιοποιείται** από τα ίδια αυτά διανύσματα. Αν οποιαδήποτε συχνότητα παρεκκλίνει από το πλέγμα, οι διασταυρούμενοι όροι δεν εκμηδενίζονται και η ιδιοδομή επιτυγχάνεται μόνο με γραμμικούς συνδυασμούς των $\mathbf{e}_M(\omega_i)$ – όχι με τα ίδια τα διανύσματα.

6.

Εκτίμηση παραμέτρων στοχαστικής διαδικασίας δεύτερης τάξεως
 $P = 2, M = 3$

1. Είσοδος – μητρώο αυτοσυσχέτισης

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} 6 & 1.92705 - 4.58522j & -3.42705 - 3.49541j \\ 1.92705 + 4.58522j & 6 & 1.92705 - 4.58522j \\ -3.42705 - 3.49541j & 1.92705 - 4.58522j & 6 \end{bmatrix}$$

Η θεωρητική μορφή είναι

$$\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^2 |A_i|^2 \mathbf{e}_3(\omega_i) \mathbf{e}_3^H(\omega_i) + \sigma_w^2 \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{e}_3(\omega) = [1, e^{-j\omega}, e^{-j2\omega}]^T.$$

2. Ιδιοανάλυση

| Ιδιοτιμή | Ερμηνεία | Σχετικό ιδιοδιάνυσμα |
|-----------------------------|----------|----------------------|
| $\lambda_1 \approx 1.0000$ | θόρυβος | \mathbf{u}_3 |
| $\lambda_2 \approx 1.1049$ | σήμα | \mathbf{u}_2 |
| $\lambda_3 \approx 15.8951$ | σήμα | \mathbf{u}_1 |

Η μικρότερη ιδιοτιμή εκτιμά τη διασπορά του λευκού θορύβου:

$$\sigma_w^2 \approx 1.000002$$

3. Εκτίμηση συχνοτήτων – Root-MUSIC

Υποχώρος θορύβου: $\mathbf{N} = \text{span}\{\mathbf{u}_3\}$.

Πολυνύμιο υποχώρου θορύβου

$$P(z) = e_3^H(\omega) u_3 = c_0 z^2 + c_1 z + c_2, \quad c_k = u_3^*(k+1).$$

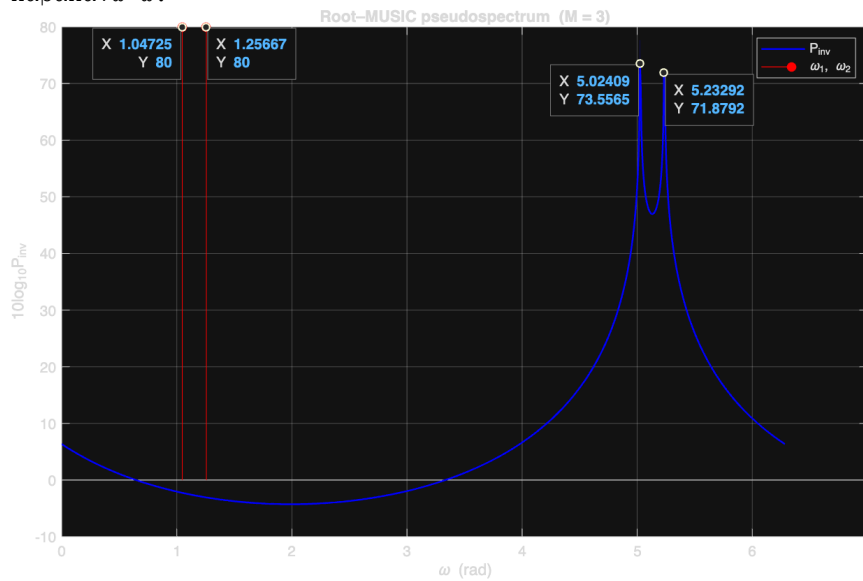
Οι ρίζες του $P(z)$ εντός του μοναδιαίου κύκλου ισούνται με $e^{j\omega_i}$.

Από τους υπολογισμούς προκύπτουν

$\omega_1 \approx 1.0473 \text{ rad } (\approx 0.333\pi, 60^\circ), \quad \omega_2 \approx 1.2567 \text{ rad } (\approx 0.400\pi, 72^\circ).$
Το γράφημα του

$$P_{inv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2}$$

εμφανίζει δύο σαφείς κορυφές (pseudo-spectrum) ακριβώς στα παραπάνω ω .



Οι κορυφές του P_{inv} λειτουργούν ως **δείκτες ενέργειας σήματος**: όσο υψηλότερη η κορυφή, τόσο μικρότερη η συνιστώσα θορύβου στο συγκεκριμένο ω .

Με $\mathbf{M}=\mathbf{P}+\mathbf{1}$ οι αιχμές παραμένουν λεπτές και ευκρινείς, αποδεικνύοντας ότι ακόμη και το ελάχιστο μέγεθος πίνακα επιτρέπει καλή ανάλυση φάσματος.

Σε μεγαλύτερα M οι κορυφές γίνονται ακόμη στενότερες, βελτιώνοντας την διακριτική ικανότητα μεταξύ γειτονικών συχνοτήτων.

4. Εκτίμηση πλατών

Λύνουμε το σύστημα

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_{xx} - \sigma_w^2 \mathbf{I}_3 = \mathbf{E} \text{diag}(|A_1|^2, |A_2|^2) \mathbf{E}^H, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{e}_3(\omega_1) \ \mathbf{e}_3(\omega_2)].$$

Με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων:

$$[|\hat{A}_1|^2, |\hat{A}_2|^2]^T \approx [1.93, 2.03]^T \Rightarrow |\hat{A}_1| \approx 1.39, |\hat{A}_2| \approx 1.42$$

7. Υποθέστε ότι δεν είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας αλλά μόνο να το εκτιμήσετε από ένα αριθμό N διαφορετικών υλοποιήσεων της (μήκους M δειγμάτων η κάθε μια) που σας δίνονται. Ποιός κατά την γνώμη σας είναι ο ρόλος του M και του N στην εκτίμηση των τιμών των αναγκαίων ποσοτήτων. Καταγράψτε αναλυτικά και θεμελιώστε, με αναφορά σε μαθηματικούς νόμους, την άποψή σας.

Ο ρόλος του μήκους κάθε υλοποίησης M και του πλήθους των υλοποιήσεων N στην εκτίμηση του μητρώου αυτοσυσχέτισης μιας στοχαστικής διαδικασίας P -οστής τάξης είναι καθοριστικός και επηρεάζει διαφορετικά την ακρίβεια και αξιοπιστία των εκτιμήσεων. Στην πράξη, το πραγματικό μητρώο αυτοσυσχέτισης είναι άγνωστο και υπολογίζεται μέσω του δειγματικού εκτιμητή:

$$\widehat{R}_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^H, \quad \mathbf{x}_n \in \mathbb{C}^{M \times 1}.$$

Η εκτίμηση αυτή περιέχει στοχαστικά σφάλματα που επηρεάζονται από τα μεγέθη N και M με διαφορετικό τρόπο:

1. Επίδραση του N (Πλήθος Υλοποιήσεων)

Η κύρια συμβολή του N στην εκτίμηση του μητρώου αυτοσυσχέτισης περιγράφεται από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών. Ο ΝΜΑ εξασφαλίζει ότι για στατική διαδικασία μηδενικού μέσου, καθώς το N αυξάνει ($N \rightarrow \infty$), ο εκτιμητής \widehat{R}_{xx} συγκλίνει σχεδόν βέβαια στο πραγματικό μητρώο R_{xx} . Σύμφωνα επίσης με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, το σφάλμα εκτίμησης μειώνεται με ρυθμό $1/\sqrt{N}$, αφού τα στοιχεία του μητρώου \widehat{R}_{xx} τείνουν ασυμπτωτικά προς μια πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Έτσι, το μεγάλο πλήθος υλοποιήσεων N ελαχιστοποιεί τη στοχαστική διακύμανση των εκτιμήσεων.

2. Επίδραση του M (Μήκος Υλοποίησης)

Το μήκος κάθε υλοποίησης M επηρεάζει τον αριθμό των στοιχείων του μητρώου που εκτιμώνται και την ικανότητα να καταγραφούν λεπτομέρειες της δομής της διαδικασίας, ιδιαίτερα σε ό,τι αφορά τις χρονικές υστερήσεις και τη συχνότητα. Μεγαλύτερο M αυξάνει τον αριθμό των στοιχείων του μητρώου (της τάξης M^2), αυξάνοντας τη συνολική πολυπλοκότητα της εκτίμησης. Παράλληλα, μεγαλύτερο μήκος M συνεπάγεται υψηλότερη διακριτική ικανότητα στη φασματική ανάλυση (στενότερη ανάλυση συχνοτήτων). Ωστόσο, για δεδομένο πλήθος N , ένα μεγάλο M οδηγεί σε μεγαλύτερη αβεβαιότητα, αφού σταθερός αριθμός υλοποιήσεων πρέπει να εκτιμήσει περισσότερα στοιχεία, καθιστώντας την εκτίμηση λιγότερο αξιόπιστη.

3. Ιδιοτιμές, Βαθμίδα και Κατανομή Wishart

Το εκτιμώμενο μητρώο αυτοσυσχέτισης \widehat{R}_{xx} ακολουθεί κατανομή Wishart για γκαουσιανές υλοποιήσεις, με $N\widehat{R}_{xx} \sim W_M(N, R_{xx})$. Η

διακύμανση κάθε στοιχείου του εκτιμητή εξαρτάται αντιστρόφως ανάλογα από το N και δεν επηρεάζεται άμεσα από το M . Η μέγιστη βαθμίδα (rank) του μητρώου είναι $\text{rank}(\widehat{R}_{xx}) \leq \min(M, N)$. Σε περίπτωση που $N < M$, προκύπτει υποδειγματοληψία και το μητρώο \widehat{R}_{xx} γίνεται singular, με αποτέλεσμα μικρές ιδιοτιμές να καταρρέουν στο μηδέν και τη διάκριση μεταξύ υπόχωρων σήματος και θορύβου να καθίσταται αναξιόπιστη.

4. Συμβιβασμός (Trade-off) μεταξύ M και N

Ο βέλτιστος συμβιβασμός εξαρτάται από τη συνολική διαθέσιμη πληροφορία που δίνεται από το γινόμενο NM . Πρακτικά, για τεχνικές ανάλυσης υποχώρων (π.χ. Pisarenko, MUSIC) είναι απαραίτητο να ισχύει $N \gtrsim M$ και $N \gg P$, ώστε οι $M-P$ μικρότερες ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στο θόρυβο να συγκλίνουν καθαρά στη διασπορά θορύβου σ_w^2 και να ξεχωρίζουν αποτελεσματικά από τις P μεγαλύτερες ιδιοτιμές του σήματος. Ένας εμπειρικός κανόνας για αξιόπιστη ιδιοανάλυση είναι να επιλέγεται $N \approx (2-4)M$.

Συνεπώς, για αξιόπιστη και αποτελεσματική εκτίμηση του μητρώου αυτοσυσχέτισης μιας P -οστής τάξης στοχαστικής διαδικασίας, απαιτείται σωστή ισορροπία μεταξύ των παραμέτρων M και N , με προσεκτική εξέταση των αναγκών της κάθε εφαρμογής όσον αφορά την ακρίβεια εκτίμησης, τη διακριτική ικανότητα φάσματος και την πρακτική διαχείριση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας.