



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

## Τεχνητή Νοημοσύνη και Μηχανική Μάθηση

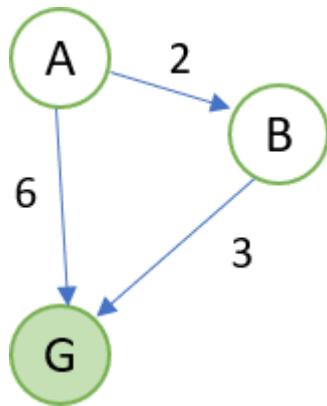
Επίλυση προβλημάτων

Παραδείγματα

## Ευριστική αναζήτηση

### Παράδειγμα 1

Έστω το γράφημα μεταβάσεων που φαίνεται στο σχήμα ( $G$  είναι η τελική κατάσταση). Σε κάθε ακμή αναγράφεται το κόστος μετάβασης. Ορίζουμε τέσσερις περιπτώσεις ευριστικών συναρτήσεων  $h_1, h_2, h_3$  και  $h_4$ , καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί σε μια γραμμή του πίνακα.



Περίπτωση	$h_i(A)$	$h_i(B)$	$h_i(G)$
$h_1$	4	1	0
$h_2$	5	4	0
$h_3$	6	3	0
$h_4$	5	2	0

- Είναι οι συναρτήσεις αποδεκτές;
- Υπάρχει κάποια αποδεκτή συνάρτηση που είναι καλύτερη από τις υπόλοιπες;

### Λύση

i) Συμβολίζουμε με  $a(n)$  το ελάχιστο κόστος μονοπατιού από μια κατάσταση  $n$  έως την τελική κατάσταση  $G$ . Είναι

$$a(A) = 2 + 3 = 5, \quad a(B) = 3 \quad \text{και} \quad a(G) = 0.$$

Για να είναι η  $h(n)$  αποδεκτή θα πρέπει  $h(n) \leq a(n)$  για κάθε κατάσταση  $n$ .

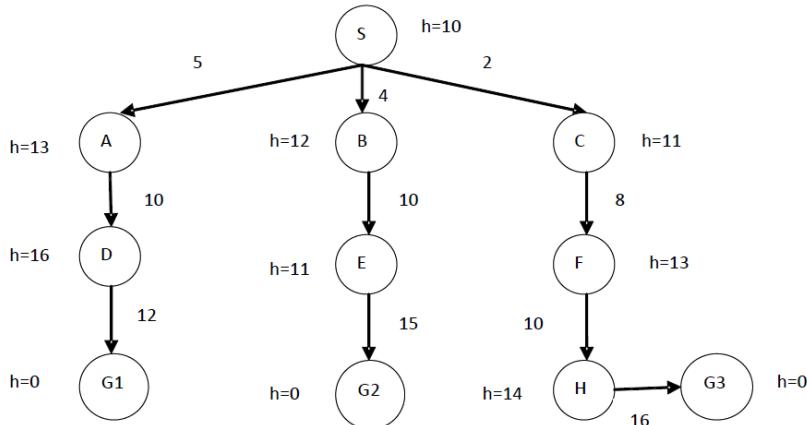
Συνεπώς:

- η  $h_1(n)$  είναι αποδεκτή
- η  $h_2(n)$  δεν είναι αποδεκτή (διότι  $h_2(B) > a(B)$ )
- η  $h_3(n)$  δεν είναι αποδεκτή (διότι  $h_3(A) > a(A)$ )
- η  $h_4(n)$  είναι αποδεκτή.

ii) Από τις παραπάνω δύο αποδεκτές ευριστικές συναρτήσεις  $h_1(n)$  και  $h_4(n)$ , καλύτερη είναι η  $h_4(n)$  διότι δίνει καλύτερη εκτίμηση του  $a(n)$  (μεγαλύτερες τιμές) και για τις δύο καταστάσεις  $A$  και  $B$ .

## Παράδειγμα 2

Θεωρήστε το γράφο μεταβάσεων του παρακάτω σχήματος όπου  $S$  είναι η αρχική κατάσταση και  $G1, G2, G3$  οι τρεις τελικές καταστάσεις. Πάνω στις ακμές αναγράφεται το κόστος μετάβασης μεταξύ δύο καταστάσεων και δίπλα σε κάθε κόμβο περιγράφεται το κόστος που αντιστοιχεί σε μια ευριστική συνάρτηση  $h(n)$ .



- Εφαρμόστε αναζήτηση  $A^*$ . Γράψτε στο τέλος το μονοπάτι (λύση) που βρήκατε.
- Εφαρμόστε αναζήτηση ομοιόμορφου κόστους. Γράψτε στο τέλος το μονοπάτι (λύση) που βρήκατε.
- Η αναζήτηση  $A^*$  οδηγεί στην βέλτιστη λύση; Εάν όχι, για ποιον λόγο συμβαίνει αυτό;

Σημειώσεις:

1) Σε κάθε περίπτωση, γράψτε αναλυτικά τα βήματα αναζήτησης στον παρακάτω πίνακα. Το μέτωπο αναζήτησης γράφεται με την μορφή: όνομα\_κόμβου(συνολικό κόστος, όνομα\_γονέα). Παρακάτω έχουν συμπληρωθεί τα πρώτα βήματα για την αναζήτηση  $A^*$ .

2) Σε περίπτωση καταστάσεων με ίδιο κόστος χρησιμοποιήστε αλφαριθμητική προτεραιότητα.

### Λύση

- Στην αναζήτηση  $A^*$  επεκτείνεται ο κόμβος του μετώπου αναζήτησης με το μικρότερο κόστος  $f(n) = g(n) + h(n)$ . Η εφαρμογή του  $A^*$  δίνει

Μέτωπο αναζήτησης	Επιλογή
$S(10,-)$	$S$
$A(18,S), B(16,S), C(13,S)$	$C$
$A(18,S), B(16,S), F(23,C)$	$B$
$A(18,S), E(25,B), F(23,C)$	$A$
$D(31,A), E(25,B), F(23,C)$	$F$
$D(31,A), E(25,B), H(34,F)$	$E$
$D(31,A), G2(29,E), H(34,F)$	$G2$ Λύση

Συνεπώς το μονοπάτι που προκύπτει είναι το  $S \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G2$  με κόστος 29.

- Στην αναζήτηση ομοιόμορφου κόστους επεκτείνεται ο κόμβος του μετώπου αναζήτησης με το μικρότερο  $g(n)$  που αντιστοιχεί στο κόστος μονοπατιού από την αρχική κατάσταση έως τον κόμβο  $n$ . Η εφαρμογή αναζήτησης ομοιόμορφου κόστους δίνει

Μέτωπο αναζήτησης	Επιλογή
S(0,-)	S
A(5,S), B(4,S), C(2,S)	C
A(5,S), B(4,S), F(10,C)	B
A(5,S), F(10,B), E(14,B)	A
F(10,A), E(14,B), D(15,A)	F
E(14,B), D(15,A), H(20,F)	E
D(15,A), H(20,F), G2(29,E)	D
H(20,F), G2(29,E), G1(27,D)	H
G2(29,E), G1(27,D), G3(36,H)	G1 Λύση

Συνεπώς το μονοπάτι που προκύπτει είναι το S -> A -> D -> G1 με κόστος 27.

iii) Όχι, η αναζήτηση  $A^*$  δεν οδήγησε στη βέλτιστη λύση (η λύση από την μέθοδο ομοιόμορφου κόστους δίνει χαμηλότερο κόστος 27 έναντι 29). Αυτό οφείλεται στο ότι η ευριστική συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε στην  $A^*$  δεν είναι αποδεκτή διότι υπερεκτιμά το κόστος  $h(n)$ . Για παράδειγμα  $h(D) = 16$ , ενώ το κόστος του D από την τελική κατάσταση G1 είναι 12.

### Παράδειγμα 3

Ο υπολογισμός του κόστους σε ένα αλγόριθμο ευριστικής αναζήτησης δίνεται από την σχέση

$$f(n) = (2 - w)g(n) + wh(n)$$

Θεωρήστε ότι η  $g(n)$  δίνει το κόστος μονοπατιού από την αρχική κατάσταση έως τον κόμβο  $n$  και ότι η ευριστική συνάρτηση  $h(n)$  είναι αποδεκτή.

i) Δώστε την μορφή της  $f(n)$  και ονοματίστε το είδους της αναζήτηση που πραγματοποιείται όταν

- $w = 0$
- $w = 1$
- $w = 2$

ii) Για ποιες τιμές του  $w$  ο αλγόριθμος είναι εγγυημένα βέλτιστος;

### Λύση

i) Για  $w = 0$  είναι  $f(n) = 2g(n)$  οπότε πραγματοποιείται αναζήτηση ομοιόμορφου κόστους. Ο παράγοντας 2 δεν επηρεάζει τη διάταξη των κόμβων.

Για  $w = 1$  είναι  $f(n) = g(n) + h(n)$  οπότε πραγματοποιείται αναζήτηση  $A^*$ .

Για  $w = 2$  είναι  $f(n) = 2h(n)$  οπότε πραγματοποιείται αναζήτηση πρώτα στο καλύτερο. Ο παράγοντας 2 δεν επηρεάζει τη διάταξη των κόμβων.

ii) Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως:

$$f(n) = (2 - w) \left( g(n) + \left( \frac{w}{2 - w} \right) h(n) \right)$$

η οποία συμπεριφέρεται σαν την  $A^*$  με ευριστική συνάρτηση  $\left(\frac{w}{2-w}\right)h(n)$ . Για  $0 \leq w \leq 1$ , η συνάρτηση  $\left(\frac{w}{2-w}\right)h(n)$  είναι πάντα θετική και επίσης μικρότερη από την  $h(n)$ . Συνεπώς, εάν η  $h(n)$  είναι παραδεκτή τότε και η συνάρτηση  $\left(\frac{w}{2-w}\right)h(n)$  είναι παραδεκτή. Οπότε γι' αυτές τις τιμές του  $w$  ο αλγόριθμος είναι εγγυημένα βέλτιστος.

## Παράδειγμα 4

Ο υπολογισμός του κόστους σε ένα αλγόριθμο ευριστικής αναζήτησης δίνεται από την σχέση

$$f(n) = wg(n) + (1 - w)h(n), \text{ με } 0 \leq w \leq 1$$

Θεωρήστε ότι η  $g(n)$  δίνει το κόστος μονοπατιού από την αρχική κατάσταση έως τον κόμβο  $n$  και ότι η ευριστική συνάρτηση  $h(n)$  είναι αποδεκτή.

Βρείτε εάν η  $f(n)$  είναι βέλτιστη για

- $w = 0$
- $w = 0.5$
- $w = 1$

### Λύση

i) Για  $w = 0$  είναι  $f(n) = h(n)$  οπότε πραγματοποιείται άπληστη αναζήτηση πρώτα ο καλύτερος, συνεπώς δεν είναι βέλτιστη. Για  $w = 0.5$  είναι  $f(n) = 0.5g(n) + 0.5h(n)$  οπότε πραγματοποιείται αναζήτηση A\* που είναι βέλτιστη (ο παράγοντας 0.5 δεν επηρεάζει τη διάταξη των κόμβων). Για  $w = 1$  είναι  $f(n) = g(n)$  οπότε πραγματοποιείται αναζήτηση ομοιόμορφου κόστους που είναι βέλτιστη.

## Παράδειγμα 5

Έστω δύο αποδεκτές ευριστικές συναρτήσεις  $h_1(n)$  και  $h_2(n)$  για κάποιο πρόβλημα αναζήτησης. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h_3(n) = \frac{h_1(n) + h_2(n)}{2}$  είναι αποδεκτή ευριστική συνάρτηση.

### Λύση

Έστω ότι με  $\alpha(n)$  συμβολίζουμε το ελάχιστο κόστος μονοπατιού από μια κατάσταση  $n$  έως την τελική κατάσταση. Αφού οι  $h_1(n)$  και  $h_2(n)$  είναι αποδεκτές τότε για κάθε  $n$  ισχύει:

$$h_1(n) \leq \alpha(n) \Rightarrow 0.5 h_1(n) \leq 0.5\alpha(n)$$

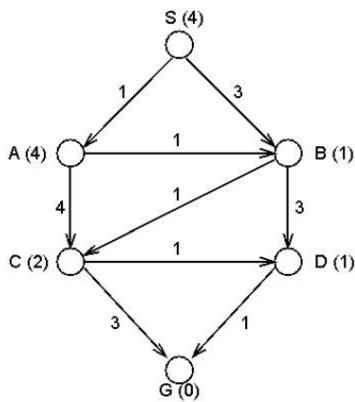
και

$$h_2(n) \leq \alpha(n) \Rightarrow 0.5 h_2(n) \leq 0.5\alpha(n)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι  $h_3(n) = 0.5(h_1(n) + h_2(n)) \leq \alpha(n)$ . Συνεπώς, η  $h_3(n)$  είναι αποδεκτή.

## Παράδειγμα 6

Θεωρήστε τον γράφο μεταβάσεων του παρακάτω σχήματος. Το ζητούμενο είναι να μεταβούμε από τον αρχικό κόμβο S στον κόμβο-στόχο G. Οι αριθμοί δίπλα στις ακμές, είναι τα κόστη μετάβασης μεταξύ των κόμβων. Ο αριθμός δίπλα σε ένα κόμβο είναι η τιμή μίας ευριστικής συνάρτησης που επιστρέφει μία εκτίμηση της απόστασης του κόμβου από τον κόμβο-στόχο.



- i) Είναι η ευριστική συνάρτηση αποδεκτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- ii) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω  $h(n)$  η αναζήτηση  $A^*$  και η αναζήτηση ομοιόμορφου κόστους δίνουν ίδιο κόστος λύσης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

### Λύση

- i) Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται για κάθε κόμβο το μήκος της ελάχιστης απόστασης  $a(n)$  προς τον κόμβο-στόχο  $G$  και η αντίστοιχη τιμή της ευριστικής συνάρτησης  $h(n)$ .

κόμβος	$h(n)$	$a(n)$
S	4	5
A	4	4
B	1	3
C	2	2
D	1	1
G	0	0

Συνεπώς, για όλους τους κόμβους  $n$  η ευριστική συνάρτηση  $h(n)$  δεν υπερεκτιμά το πραγματικό κόστος  $a(n)$ . Συνεπώς, η ευριστική συνάρτηση  $h(n)$  είναι αποδεκτή.

- ii) Αφού η ευριστική συνάρτηση  $h(n)$  είναι αποδεκτή τότε η αναζήτηση  $A^*$  είναι βέλτιστη όπως και η αναζήτηση ομοιόμορφου κόστους. Άρα και οι δύο μέθοδοι θα δώσουν λύση με το ίδιο ελάχιστο κόστος.