

ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΑΜΨΗΣ, ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΡΕΨΗΣ ΔΟΚΟΥ
Κάμψη – Διάτμηση Timoshenko,
Κάμψη Euler – Bernoulli,
Ελαστική Θεωρία Διάτμησης,
Ανομοιόμορφη Στρέψη,
Ανομοιόμορφη Στρέψη με 2γενείς Παραμορφώσεις
ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΕΒΛΩΣΗΣ

Σύνταξη: Γκέσος Παύλος (ΣΣΕ 2002)

Καθηγητής: Σαπουντζάκης Ευάγγελος

Βοηθός: Λαγαρός Νικόλαος

Περιεχόμενα

1.	Θεωρία Ελαστικότητας.....	1
α.	Τανυστής Τάσεων.....	1
(1)	Συνθήκες Ισορροπίας.....	1
β.	Τανυστής των Παραμορφώσεων.....	1
(1)	Εξισώσεις Συμβιβαστού.....	2
γ.	Σχέσεις Τάσεων – Παραμορφώσεων.....	3
δ.	Οριακές Συνθήκες.....	3
(1)	Οριακή Συνθήκη Neumann.....	4
(α)	Παραδείγματα.....	4
(β)	Σχέσεις των Beltrami – Michel.....	4
(2)	Οριακή Συνθήκη Dirichlet.....	4
(α)	Παραδείγματα.....	4
(β)	Σχέσεις του Lamé.....	5
(3)	Μικτή Οριακή Συνθήκη.....	5
(4)	Οριακή Συνθήκη Cauchy.....	5
(α)	Παραδείγματα.....	5
ε.	Πυκνότητα Ελαστικής Ενέργειας Παραμόρφωσης.....	5
2.	Θεωρίες Κάμψης – Διάτμησης.....	7
α.	Τεχνική Θεωρία Timoshenko.....	7
(1)	Παραδοχές.....	7
(2)	Μετατοπίσεις.....	8
(3)	Παραμορφώσεις.....	8
(4)	Τάσεις.....	8
(α)	Ορθές Τάσεις.....	8
(β)	Διατμητικές Τάσεις.....	9
(5)	Εξισώσεις Ισορροπίας.....	10
(α)	Εσωτερική Ελαστική Ενέργεια.....	10
1/	Ελαστική Ενέργεια λόγω Κάμψης.....	11
2/	Ελαστική Ενέργεια λόγω Διάτμησης.....	11
(β)	Εξωτερική Ελαστική Ενέργεια.....	11
(γ)	Ολική Δυναμική Ενέργεια.....	11
(δ)	Τελικές Εξισώσεις.....	11
β.	Τεχνική Θεωρία Euler - Bernoulli.....	12
(1)	Παραδοχές.....	12
(2)	Μετατοπίσεις.....	12
(3)	Εξισώσεις Ισορροπίας.....	12
γ.	Τεχνική Θεωρία Διάτμησης.....	12
δ.	Ελαστική Θεωρία Ομοιόμορφης Διάτμησης.....	12
(1)	Τέμνουσα στον Άξονα z.....	14
(2)	Τέμνουσα στον Άξονα y.....	14
ε.	Κέντρο Διάτμησης.....	15
(1)	Προσδιορισμός του ΚΔ ως Κέντρο Τέμνουσας Δύναμης.....	15
(α)	Παρατηρήσεις.....	15
στ.	Υπολογισμός Συντελεστών Διατμητικής Παραμόρφωσης.....	16
3.	Θεωρίες Στρέψης – Στρέβλωσης.....	17
α.	Ιστορικό Θεωριών Στρέψης.....	17
(1)	Θεωρία Coulomb.....	17
(2)	Ομοιόμορφη Στρέψη (Στρέψη Saint Venant).....	17
(3)	Ανομοιόμορφη Στρέψη.....	18
(4)	Ανομοιόμορφη Στρέψη με Επιρροή Δευτερογενών Στρεπτικών Παραμορφώσεων.....	19
β.	Ανομοιόμορφη Στρέψη με Επιρροή Δευτερογενών Στρεπτικών Παραμορφώσεων.....	19
(1)	Παραδοχές.....	19
(2)	Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις.....	20

(α)	Μετατοπίσεις.....	20
(β)	Παραμορφώσεις.....	20
(γ)	Τάσεις.....	21
(3)	Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης.....	21
(α)	Ασυνέπεια.....	22
(4)	Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες.....	23
(α)	Εντατικά Μεγέθη.....	23
(β)	Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες.....	25
1/	Σύγκριση με την Κλασική Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης.....	25
(5)	Διόρθωση Κατανομής Στρεπτικών Διατμητικών Τάσεων.....	26
(α)	Δευτερογενείς Τάσεις.....	26
(β)	Δευτερογενείς Μετατοπίσεις.....	26
(γ)	Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης.....	27
(δ)	Στρεπτικός Διορθωτικός Συντελεστής Διάτμησης.....	27
(6)	Αλγόριθμος Επίλυσης.....	28
γ.	Ανομοιόμορφη Στρέψη.....	29
(1)	Παραδοχές.....	29
(2)	Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις.....	29
(3)	Συνάρτηση Στρέβλωσης.....	30
(α)	Προσδιορισμός Κέντρου Συστροφής και Σταθεράς Μετατόπισης.....	31
(β)	Μετασχηματισμός Συνάρτησης Στρέβλωσης στο Syz Σύστημα.....	32
(γ)	Συνθήκες Ύπαρξης Λύσης για τις Συναρτήσεις Στρέβλωσης.....	32
(δ)	Πεδιακές Μετακινήσεις.....	32
(4)	Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες.....	33
(α)	Εντατικά Μεγέθη.....	33
(β)	Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες.....	33
1/	Σύγκριση με την Θεωρία Ομοιόμορφης Στρέψης Saint Venant.....	33
(5)	Αλγόριθμος Επίλυσης.....	34
4.	Μητρώο Δυσκαμψίας και Επικόμβια Φορτία 3D Δοκού.....	35
α.	Θεωρία Αξονικής Παραμόρφωσης.....	36
β.	Θεωρία Κάμψης – Διάτμησης.....	36
(1)	Θεωρία Euler – Bernoulli.....	36
(2)	Θεωρία Timoshenko.....	37
γ.	Θεωρία Στρέψης – Στρέβλωσης.....	38
(1)	Θεωρία Ομοιόμορφης Στρέψης (Saint Venant).....	38
(2)	Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης.....	39
(3)	Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης με Δευτερογενείς Στρεπτικές Παραμορφώσεις... ..	40
5.	Μετάδοση Στρέβλωσης.....	42
α.	Κόμβοι όπου Συντρέχουν Μέλη Λεπτότοιχων Διατομών.....	42
(1)	Κόμβοι με Συνέχεια Πελμάτων.....	44
(2)	Κόμβοι με Συνέχεια Κορμού.....	44
(3)	Κόμβοι με Διαγώνιο Έλασμα Δυσκαμψίας.....	45
(α)	Με Άκαμπτο στο Επίπεδό του Έλασμα Δυσκαμψίας.....	45
(β)	Με Εύκαμπτο στο Επίπεδό του Έλασμα Δυσκαμψίας.....	45
(γ)	Γεωμετρία του Κόμβου.....	46
(δ)	Στρεπτικές Ροπές σε Πέλματα Μελών και Έλασμα Δυσκαμψίας.....	47
1/	Κάμψη Κορμού Δοκού στο Επίπεδο της Διατομής I.....	47
(ε)	Σχέση Διρρόπων και Βαθμών Ελευθερίας Στρέβλωσης.....	47
(4)	Κόμβοι με Διαμόρφωση Κιβωτίου.....	48
β.	Εφαρμογή στη Μητρική Στατική.....	49
6.	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	52
α.	Σύγκριση Θεωριών Κάμψης.....	52
(1)	Κάμψη Euler – Bernoulli.....	52
(2)	Κάμψη – Διάτμηση Timoshenko.....	52
(3)	Συγκριτικά Γραφήματα.....	52
β.	Σύγκριση Θεωριών Στρέψης.....	53

(1)	Ανομοιόμορφη Στρέψη με Δευτερογενείς Στρεπτικές Παραμορφώσεις.....	53
(2)	Ανομοιόμορφη Στρέψη.....	54
(3)	Ομοιόμορφη Στρέψη.....	54
(4)	Συγκριτικά Γραφήματα.....	55

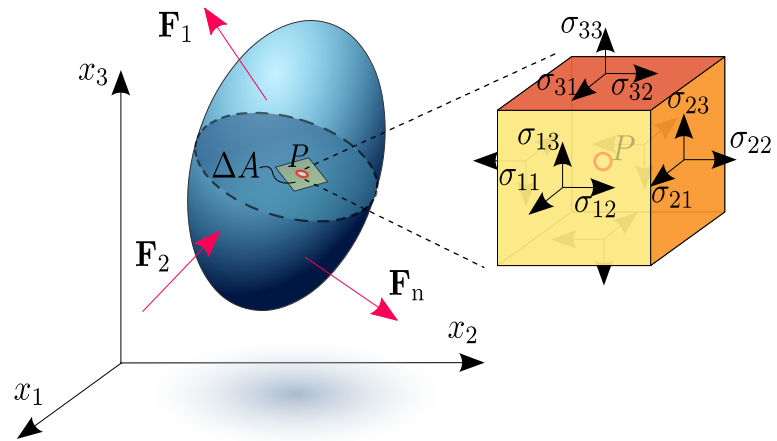
1. Θεωρία Ελαστικότητας

α. Τανυστής Τάσεων

Ο τανυστής των τάσεων (Σχ. 1.1) ενός καρτεσιανού στοιχειώδους όγκου είναι ο πίνακας με τα 3 διανύσματα τάσεων των εδρών του στοιχειώδους κύβου από τις οποίες διέρχονται οι θετικοί καρτεσιανοί ημιάξονες

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{sym} \quad \text{Ο πίνακας αυ-}$$

τός είναι συμμετρικός όπως έχει αποδείξει ο Cauchy χρησιμοποιώντας τις 3 εξισώσεις ισορροπίας ροπών στους 3 άξονες.



Σχ. 1.1. Ο τανυστής των τάσεων

Η τάση $\vec{\sigma}_n$ σε μια πλάγια τομή του στοιχειώδους όγκου, με κανονικό (κάθετο στην επιφάνεια και μοναδιαίο) διάνυσμα \vec{n} είναι

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma] \cdot \vec{n} \quad (1.1)$$

Ο τανυστής των τάσεων $[\sigma']$ σε ένα άλλο σύστημα αξόνων που προσδιορίζεται από τον τανυστή $[R]$ (όχι απαραίτητα συμμετρικός) είναι:

$$[\sigma'] = [R] \cdot [\sigma] \cdot [R]^T \quad (1.2)$$

(1) Συνθήκες Ισορροπίας

Για να ισορροπεί ένα στοιχειώδες τμήμα όγκου πρέπει να ισχύει η εξίσωση του Navier:

$$\vec{F} + \vec{\nabla} \cdot [\sigma] = \vec{0} \quad (1.3)$$

όπου \vec{F} οι δυνάμεις πεδίου στον όγκο (π.χ. βαρύτητα) που συνήθως είναι αμελητέες.

Βαθμωτά, για κάθε άξονα, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$F_j + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{για κάθε } j=1,2,3 \quad (1.4)$$

β. Τανυστής των Παραμορφώσεων

Η σχέση παραμορφώσεων με τις πεδιακές μετατοπίσεις είναι:

$$[\varepsilon] = \frac{\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T}{2} \quad (1.5)$$

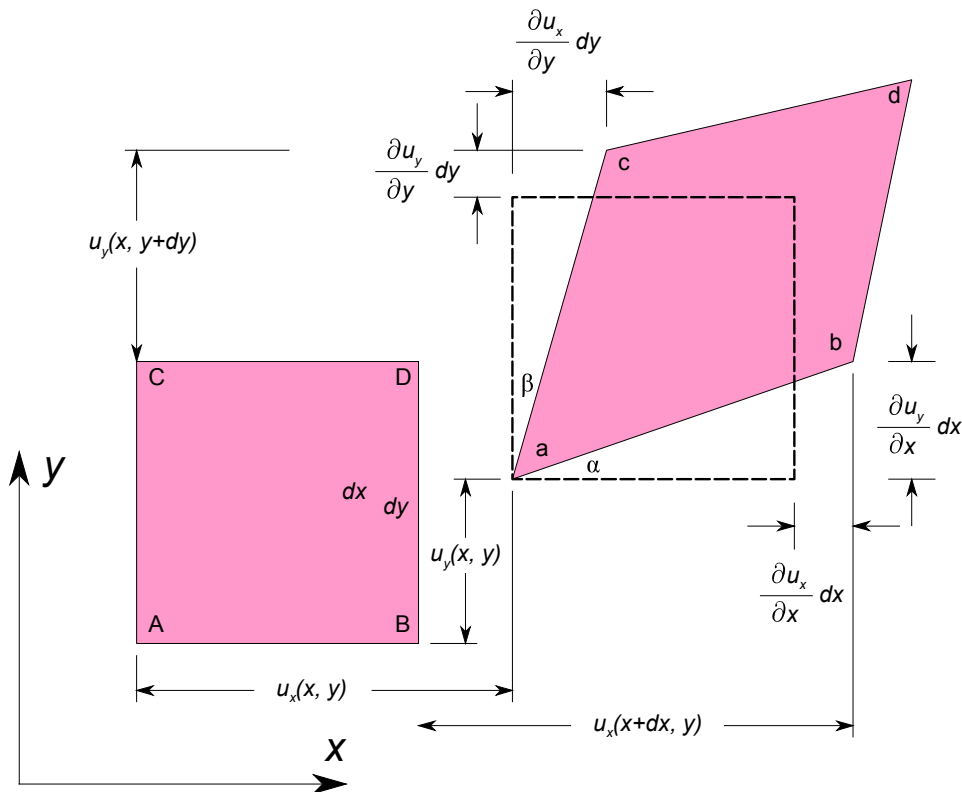
όπου $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ οι 3 συναρτήσεις των πεδιακών μετατοπίσεων σε ένα συνεχές μέσο. Είναι προφανές ότι ο τανυστής των παραμορφώσεων είναι επίσης συμμετρικός.

Βαθμωτά η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \right) \quad \text{για κάθε } i, j=1,2,3 \quad (1.6)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\gamma_{ij} = 2 \cdot \varepsilon_{ij} \text{ για κάθε } i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (1.7)$$



Σχ. 1.2. 2D παραμόρφωση υλικού

(1) Εξισώσεις Συμβιβαστού

Τους όρους ε_{ij} του τανυστή παραμορφώσεων ε , τους συνδέουν κάποιες σχέσεις οι οποίες εξασφαλίζουν ότι οι παραμορφώσεις δεν διαταράσσουν τη συνέχεια του υλικού. Αν αυτές οι σχέσεις δεν ίσχυαν θα είχαμε λύση του υλικού.

Η μαθηματική διατύπωση της συνέχειας διατυπώθηκε από τον St. Venant με τις παρακάτω 81 εξισώσεις:

$$[0]_{3 \times 3 \times 3 \times 3} = (\nabla \nabla [\varepsilon])^{T[1,2,3,4]} - (\nabla \nabla [\varepsilon])^{T[2,3,4,1]} + (\nabla \nabla [\varepsilon])^{T[3,4,1,2]} - (\nabla \nabla [\varepsilon])^{T[4,1,2,3]} \quad (1.8)$$

Επειδή πρόκειται για τανυστές 4ου βαθμού, η αναστροφή τους απαιτεί τους δείκτες στους οποίους γίνεται η αναστροφή.

Βαθμωτά η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \cdot \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \cdot \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \cdot \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \cdot \partial x_k} \text{ για κάθε } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

Οι περισσότερες από τις 81 αυτές τις σχέσεις απαλείφονται είτε από την αξιοποίηση της συμμετρίας του τανυστή είτε επειδή κάποιες είναι ταυτοτικές. Μετά την απαλοιφή αυτή παραμένουν μόνο έξι εξισώσεις:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \cdot \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} \text{ για κάθε } i = 1, 2, 3 \quad j = i + 1 \quad (1.10.a)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_k \cdot \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l \cdot \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \cdot \partial x_i} \text{ για κάθε } i = 1, 2, 3 \quad k = i + 1 \quad l = i - 1 \quad (1.10.β)$$

γ. Σχέσεις Τάσεων – Παραμορφώσεων

Υποθέτοντας γραμμικά ελαστικό υλικό, κάθε συνιστώσα της τάσης σε έναν στοιχειώδες όγκο είναι συνάρτηση και των 9 συνιστωσών του τανυστή παραμορφώσεων. Η σχέση αυτή εκφράζεται με το εσωτερικό γινόμενο του Frobenious του ελαστικού τανυστή 4ου βαθμού $[C]$ επί τις παραμορφώσεις.

$$[\sigma]_{3 \times 3} = [C]_{3 \times 3 \times 3 \times 3} : [\varepsilon]_{3 \times 3} \quad (1.11)$$

Αξιοποιώντας τις συμμετρίες του τανυστή τάσεων και του τανυστή παραμορφώσεων η παραπάνω σχέση μπορεί να αποδοθεί μόλις με 21 διαφορετικούς συντελεστές αντί για 81. Με το μετασχηματισμό του τανυστή τάσεων και παραμορφώσεων σε τανυστή πρώτης τάξεως και του C στον τανυστή δευτέρας τάξεως E, ο παραπάνω τύπος μετατρέπεται σε

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

sym

Για ισότροπα υλικά ο τανυστής C είναι:

$$[E] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

sym

όπου G η σταθερά διάτμησης, ν ο λόγος Poisson και $E = 2G(1+\nu)$ η σταθερά ελαστικότητας. $\mu = G$ και $\lambda = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}$ οι σταθερές του Lamé.

Η σχέση τάσεων – παραμορφώσεων δηλαδή μας δίνει 6 εξισώσεις.

δ. Οριακές Συνθήκες

Έχουμε 15 διαφορεικές εξισώσεις:

- 3 εξισώσεις ισορροπίας τάσεων
 - 6 εξισώσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων
 - 6 εξισώσεις σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων
- και 15 αγνώστους:
- 6 συνιστώσες τάσεων
 - 6 συνιστώσες παραμορφώσεων
 - 3 συνιστώσες μετατοπίσεων

Ωστόσο η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων θα δώσει γενικές λύσεις. Για την εξεύρεση πλήρους λύσης απαιτούνται επιπλέον σχέσεις, οι συνοριακές συνθήκες που συνήθως τις προσδιορίζουν οι στηρίξεις ή οι φορτίσεις.

Ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, μπορούμε απαλείφοντας κάποιους αγνώστους να μειώσουμε το συνολικό αριθμό των διαφορικών εξισώσεων.

Οι συνοριακές συνθήκες εκφράζονται με τα 3 θεμελιώδη προβλήματα της θεωρίας ελαστικότητας.

(1) Οριακή Συνθήκη Neumann

Σε μια διαφορική εξίσωση η οριακή συνθήκη Neumann καθορίζει την τιμή που παίρνει η κανονική παράγωγος της λύσης στο όριο.

Στο όριο Γ γνωρίζουμε τις τάσεις οι οποίες σχετίζονται με τις παραγώγους των μετατοπίσεων. Χρησιμοποιούμε για οριακή συνθήκη τη σχέση (1.1).

(α) Παραδείγματα

Για την απλή διαφορική εξίσωση της μορφής $y'' + y = 0$ οι οριακές συνθήκες Neumann στα όρια $[\alpha, \beta]$ θα είναι $y'(\alpha) = A$ και $y'(\beta) = B$ όπου A, B δοσμένοι αριθμοί.

Για την μερική διαφορική εξίσωση της μορφής $\nabla^2 y + y = 0$ η οριακή συνθήκη Neumann στο πεδίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ θα είναι $\frac{\partial y}{\partial n}(x) = f(x)$ για $\forall x \in \partial\Omega$ όπου \vec{n} είναι το εξωστρεφές κανονικό διάνυσμα του ορίου $\partial\Omega$ και f μια βαθμωτή συνάρτηση. Υπενθυμίζεται ότι η κανονική παράγωγος είναι $\frac{\partial y}{\partial n}(x) = \vec{\nabla} y(x) \cdot \vec{n}(x)$.

(β) Σχέσεις των Beltrami – Michel

Για ισότροπα υλικά ισχύουν οι παρακάτω δύο σχέσεις, οι οποίες είναι αντίστροφες μεταξύ τους:

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - 3 \frac{\nu}{E} p \cdot [I] \quad (1.14.\alpha)$$

$$[\sigma] = 2\mu \cdot [\varepsilon] + \lambda \cdot \theta \cdot [I] \quad (1.14.\beta)$$

όπου $p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$, μ και λ οι σταθερές του Lamé και $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \nabla \cdot \vec{u}$ η ανηγμένη διόγκωση.

Στην περίπτωση που είναι γνωστές οι 6 συνιστώσες των τάσεων χρησιμοποιούμε τις 6 εξισώσεις συμβιβαστού (1.8) [ή (1.10)] σε συνδυασμό με τη σχέση (1.14.β) και τη σχέση (1.1) οπότε προκύπτουν οι 6 εξισώσεις των Beltrami – Michel:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = -2 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\nu}{1-\nu} \nabla \cdot \vec{F} \quad \text{για κάθε } i=1,2,3 \quad (1.15.\alpha)$$

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{για κάθε } i=1,2,3 \quad j=i+1 \quad (1.15.\beta)$$

οι οποίες για σταθερές δυνάμεις όγκου γράφονται:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{για κάθε } i, j=1,2,3 \quad (1.16)$$

(2) Οριακή Συνθήκη Dirichlet

Σε μια διαφορική εξίσωση η οριακή συνθήκη Dirichlet καθορίζει την τιμή που παίρνει η λύση στο όριο.

Στο όριο Γ γνωρίζουμε τις μετατοπίσεις \vec{u}_0 οπότε έχουμε τη σχέση $\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}_0$.

(α) Παραδείγματα

Για την απλή διαφορική εξίσωση της μορφής $y'' + y = 0$ οι οριακές συνθήκες Dirichlet στα όρια $[\alpha, \beta]$ θα είναι $y(\alpha) = A$ και $y(\beta) = B$ όπου A, B δοσμένοι αριθμοί.

Για την μερική διαφορική εξίσωση της μορφής $\nabla^2 y + y = 0$ η οριακή συνθήκη Dirichlet στο πεδίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ θα είναι $y(x) = f(x)$ για $\forall x \in \partial \Omega$ όπου f μια βαθμωτή συνάρτηση.

(β) Σχέσεις του Lamé

Στην περίπτωση που είναι γνωστές οι μετατοπίσεις χρησιμοποιούμε τις 3 εξισώσεις ισορροπίας (1.3) σε συνδυασμό με την σχέση (1.14.β) και την σχέση (1.5) οπότε προκύπτουν οι 3 εξισώσεις του Lamé οι οποίες αποκαλούνται και εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσει των μετατοπίσεων:

$$\vec{F} + \mu \cdot \nabla \cdot \nabla \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \cdot (\nabla \vec{u})^T = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + G \cdot \nabla^2 \vec{u} + \frac{G}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \vec{u} = \vec{0} \quad (1.17)$$

(3) Μικτή Οριακή Συνθήκη

Το πρόβλημα στο υποσύνολο Γ_1 είναι πρόβλημα Dirichlet και στο υποσύνολο Γ_2 είναι πρόβλημα Neumann (Σχ. 1.3). Προκύπτουν οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες από τα δύο προηγούμενα προβλήματα.

(4) Οριακή Συνθήκη Cauchy

Η οριακή συνθήκη Cauchy δεν αποτελεί θεμελιώδες πρόβλημα συνοριακών συνθηκών της θεωρίας ελαστικότητας, ωστόσο εμφανίζεται σε πολλά προβλήματα συνοριακών συνθηκών και γι' αυτό αναφέρεται.

Σε μια διαφορική εξίσωση η οριακή συνθήκη Cauchy καθορίζει μια σχέση 1ου βαθμού μεταξύ της λύσης και τις μερικής παραγώγου της λύσης στο όριο.

(α) Παραδείγματα

Για την απλή διαφορική εξίσωση της μορφής $y'' + y = 0$ οι οριακές συνθήκες Cauchy στα όρια $[\alpha, \beta]$ θα είναι $\alpha_1 \cdot y(\alpha) + \alpha_2 \cdot y'(\alpha) = \alpha_3$ και $\beta_1 \cdot y(\beta) + \beta_2 \cdot y'(\beta) = \beta_3$ όπου α_i, β_i δοσμένοι αριθμοί.

Για την μερική διαφορική εξίσωση της μορφής $\nabla^2 \varphi + \varphi = 0$ όπου τα όρια προσδιορίζονται από τις παραμετρικές σχέσεις $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(s, t) \\ v(s, t) \\ w(s, t) \end{bmatrix}$, η οριακή συνθήκη Cauchy θα είναι

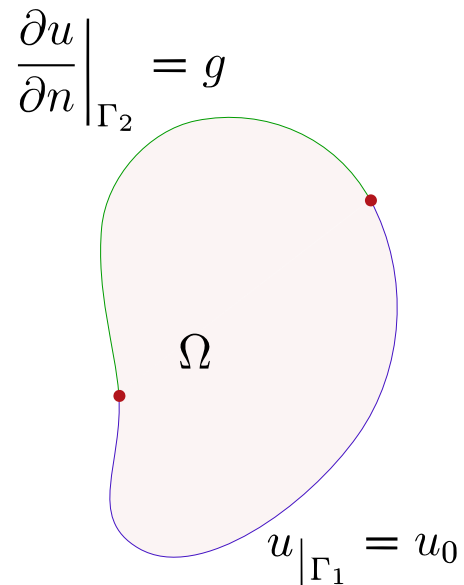
$\alpha(s, t) \cdot \varphi(s, t) + \beta(s, t) \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial n} = f(s, t)$ για κάθε s, t που ορίζουν το όριο. Οι συναρτήσεις α, β, f δίνονται στο όριο.

ε. Πυκνότητα Ελαστικής Ενέργειας Παραμόρφωσης

Η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης στη μονάδα του όγκου (πυκνότητα ενεργείας) δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} [\sigma]_{3 \times 3} : [\varepsilon]_{3 \times 3} = \frac{1}{2} ([C]_{3 \times 3 \times 3 \times 3} : [\varepsilon]_{3 \times 3}) : [\varepsilon]_{3 \times 3} \quad (1.18)$$

Διανυσματικά γράφεται ως εξής:



Σχ. 1.3. Μικτή Οριακή Συνθήκη
Πράσινο: Οριακή Συνθήκη Neumann
Μπλε: Οριακή Συνθήκη Dirichlet

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης σε ολόκληρο τον όγκο του υλικού είναι:

$$E = \int_V U(x, y, z) dV \quad (1.20)$$

2. Θεωρίες Κάμψης – Διάτμησης

Ο τρόπος αντιμετώπισης των προβλημάτων από την Τεχνική Θεωρία Κάμψης είναι διαφορετικός από εκείνον της μαθηματικής Θεωρίας της Ελαστικότητας. Αρχικά κάνει ορισμένες απλουστευτικές παραδοχές για να ορίσει το πεδίο των μετακινήσεων και σε αντίθεση με τη Θεωρία Ελαστικότητας, δεν υπάρχουν εξισώσεις συμβιβαστού διότι αυτές υποκαθίστανται από ένα απλουστευμένο πεδίο μετακινήσεων, το οποίο όμως είναι κινηματικά αποδεκτό. Η επιτυχής εκλογή του πεδίου των μετακινήσεων καθορίζει την ακρίβεια της λύσης.

Είναι αξιοσημείωτο ότι στα πλαίσια της Τεχνικής Θεωρίας οι εξισώσεις ισορροπίας δεν εφαρμόζονται σ' ένα απειροστό στοιχείο (ισορροπία τάσεων), αλλά σε τμήμα της δοκού πεπερασμένων διαστάσεων (ισορροπία εντατικών μεγεθών).

Στα πλαίσια της προαναφερθείσης μεθοδολογίας αναπτύχθηκαν δυο διαφορετικές θεωρίες καμπτόμενων δοκών.

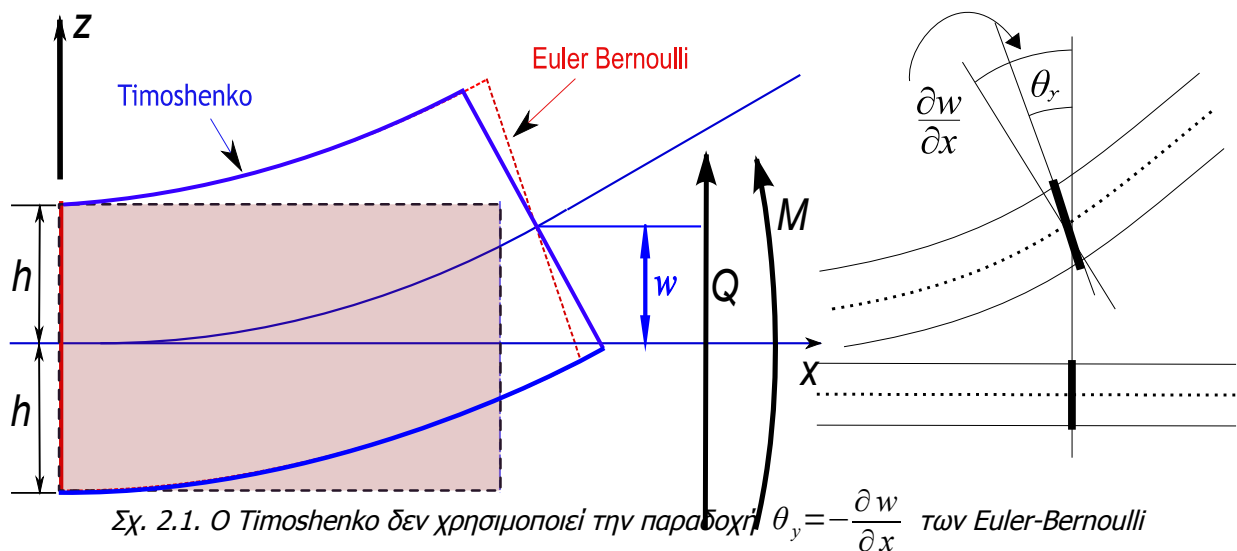
Η θεωρία των Euler – Bernoulli και η θεωρία Timoshenko της οποίας η πρώτη αποτελεί ειδική περίπτωση. Παρακάτω αναπτύσσεται η θεωρία Timoshenko και γίνεται αναφορά στις διαφοροποιήσεις με την θεωρία Euler – Bernoulli.

α. Τεχνική Θεωρία Timoshenko

Θεωρούμε μια ευθύγραμμη πρισματική δοκό μήκους L στον x άξονα, πλάτους b στον y άξονα και ύψους h στον z άξονα. Ο άξονας x διέρχεται από τα κέντρα βάρους όλων των διατομών της δοκού.

Θεωρούμε ότι η δοκός φορτίζεται με τα κατανεμημένα φορτία δυνάμεων $q_y(x)$, $q_z(x)$ και ροπών $m_y(x)$, $m_z(x)$. Τα επίπεδα των φορτίων δυνάμεων διέρχονται από το κέντρο διάτμησης της διατομής προκειμένου να μην προκαλούν στρέψη.

(1) Παραδοχές



1. Διατομές που πριν την κάμψη ήταν επίπεδες παραμένουν επίπεδες.
2. Η δοκός αποτελείται από ανεξάρτητες, διαμήκεις ίνες.
3. Η μετατόπιση $w(x)$ εκφράζει τη συνολική βύθιση (βέλος) του κεντροβαρικού άξονα στη θέση x και εξαρτάται μόνο από τη θέση x .
4. Οι τάσεις που αναπτύσσονται σε μια διατομή της δοκού είναι ανεξάρτητες από τον ειδικό τρόπο φόρτισης της δοκού και εξαρτώνται μόνο από τις τιμές των εντατικών μεγεθών διατομής N , Q , M στην υπό εξέταση διατομή της δοκού.

5. Η δοκός είναι ευθύγραμμη, σταθερής διατομής.
6. Οι διαστάσεις της διατομής της δοκού είναι μικρές συγκρινόμενες με το μήκος της.
7. Το υλικό της δοκού είναι ομογενές, ισότροπο, συνεχές, γραμμικά ελαστικό.
8. Οι παραμορφώσεις της δοκού θεωρούνται μικρές και συνεπώς ισχύει ο γενικευμένος καταστατικός νόμος του Hooke, βάσει του οποίου οι σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων είναι γραμμικές.
9. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται.
10. Η κατανομή των τάσεων στα άκρα της δοκού είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.

(2) Μετατοπίσεις

Για την απλοποίηση θα λάβουμε ότι η κάμψη συμβαίνει μόνο στο επίπεδο x-z και εφόσον οι κάμψεις στους δύο άξονες y, z είναι αποπλεγμένες μπορούμε στο τέλος να τις προσθέσουμε.

Θεωρούμε το πεδίο των μετακινήσεων ως [24]:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \cdot \theta_y(x) \\ 0 \\ w(x) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Όπου $\theta_y(x)$ η στροφή της διατομής και $w(x)$ το βέλος κάμψης της δοκού.

(3) Παραμορφώσεις

Οι παραμορφώσεις και οι τάσεις υπολογίζονται κατά τα γνωστά από τη θεωρία ελαστικότητας. Ο Timoshenko λαμβάνει υπόψη του διατμητικές παραμορφώσεις:

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial x} + \theta_y(x) \quad (2.2)$$

(4) Τάσεις

(α) Ορθές Τάσεις

Επειδή η διατομή παραμένει επίπεδη, η μετατόπιση w ικανοποιεί την εξίσωση του επιπέδου:

$$w = \frac{\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z}{E} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\alpha + \beta \cdot y + \gamma \cdot z}{E} \Rightarrow \sigma_{xx} = \alpha + \beta \cdot y + \gamma \cdot z \quad (2.3)$$

Οι σταθερές α, β, γ θα υπολογιστούν από τα εντατικά μεγέθη:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \Rightarrow N = \alpha \cdot A + \beta \cdot S_z + \gamma \cdot S_y \quad (2.4.α)$$

$$M_y = \int_A z \cdot \sigma_{xx} dA \Rightarrow M_y = \beta \cdot I_{yz} + \gamma \cdot I_{yy} \quad (2.4.β)$$

$$M_z = - \int_A y \cdot \sigma_{xx} dA \Rightarrow M_z = -(\beta \cdot I_{zz} + \gamma \cdot I_{yz}) \quad (2.4.γ)$$

όπου S_y, S_z οι στατικές ροπές, I_{yy}, I_{zz} οι ροπές αδρανείας και I_{yz} το γινόμενο αδρανείας της διατομής.

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (2.4) με αγνώστους τους α, β, γ και αντικαθιστώντας στη σχέση (2.3) προκύπτει τελικά η τάση:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{I_{yy} \cdot M_z \cdot S_z + I_{yz} \cdot M_y \cdot S_z - I_{yz} \cdot M_z \cdot S_y - I_{zz} \cdot M_y \cdot S_y}{A \cdot (I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2)} + \frac{M_y \cdot I_{yz} + M_z \cdot I_{yy}}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y \cdot I_{zz} + M_z \cdot I_{yz}}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \cdot z \quad (2.5)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύστημα αξόνων είναι κύριο (άρα $I_{yz}=0$) και κεντροβαρικό (άρα $S_y=S_z=0$) η σχέση (2.5) γράφεται:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_{zz}} \cdot y + \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot z \quad (2.6)$$

Ωστόσο εμείς λάβαμε ότι $M_z=N=0$ άρα:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot z \quad (2.7)$$

(β) Διατμητικές Τάσεις

Από τη σχέση (2.2) προκύπτει ότι:

$$\tau_{xz}(x) = G \cdot \gamma_{xz}(x) = G \cdot (w'(x) + \theta_y(x)) \quad (2.8)$$

δηλαδή ότι η διατμητική τάση εξαρτάται μόνο από τη θέση x της διατομής, ενώ μέσα στην ίδια διατομή παραμένει σταθερή (άρα δεν προκαλείται καμία στρέβλωση της διατομής κάτι που αποτελεί και παραδοχή του Timoshenko). Η θεώρηση αυτή αποτελεί ασυνέπεια καθώς από τη σχέση (1.1) στο όριο της διατομής, οι τάσεις μηδενίζονται. Άρα η κατανομή τους μέσα στη διατομή δεν είναι σταθερή άρα συνυπάρχει και στρέβλωση.

Η τέμνουσα δύναμη ορίζεται ως:

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad (2.9)$$

και επειδή απαιτείται διόρθωση της διατμητικής τάσης, χρησιμοποιούμε έναν “διορθωτικό” συντελεστή $1/\alpha_z$:

$$Q_z = \frac{1}{\alpha_z} \cdot \int_A \tau_{xz} dA = \frac{A}{\alpha_z} \cdot \tau_{xz} = A_{sz} \cdot \tau_{xz} \quad (2.10)$$

Συνεπώς στη θεωρία Timoshenko κάνουμε την εξής παραδοχή:

Η τέμνουσα δύναμη σε μια διατομή ισούται με το γινόμενο της μέγιστης διατμητικής τάσης που αναπτύσσεται στο επίπεδό της επί μια πλασματική επιφάνεια διατομής A_{sz} μικρότερη της πραγματικής.

Ο διορθωτικός συντελεστής α_z ονομάζεται συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης και το γινόμενο $G \cdot A_{sz}$ ονομάζεται διατμητική δυσκαμψία κατά Timoshenko.

Ο προσδιορισμός του συντελεστή διατμητικής παραμόρφωσης βασίζεται στην ενεργειακή θεώρηση. Η πυκνότητα τροπικής ενέργειας λόγω της τ_{xz} δίνεται από τον τύπο:

$$e = \int_0^{\tau_{xz}} \tau_{xz} d\gamma_{xz} = \int_0^{\tau_{xz}} \tau_{xz} d\left(\frac{\tau_{xz}}{G}\right) = \frac{\tau_{xz}^2}{2G} \quad (2.11)$$

και η γραμμική πυκνότητα ελαστικής ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα μήκους) είναι:

$$E_L = \int_A e dA = \frac{1}{2G} \int_A \tau_{xz}^2 dA \quad (2.12)$$

Από τη σχέση (2.10) και την (2.12) προκύπτει:

$$E_L = \frac{1}{2G} \int_A \tau_{xz}^2 dA = \alpha_z \frac{Q_z^2}{2 \cdot G \cdot A_{sz}} \quad (2.13)$$

και από την εξίσωση των σχέσεων (2.12) και (2.13) έχουμε:

$$\int_A \tau_{xz}^2 dA = \alpha_z \frac{Q_z^2}{A_{sz}} \quad (2.14)$$

Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις πραγματικές συνάρτηση κατανομής των διατμητικών τάσεων στη διατομή $f_{ij}(y, z)$ τότε με τη μέθοδο της επαλληλίας διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy}(x, y, z) \\ \tau_{xz}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_y(x) \\ Q_z(x) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} f_{yy}(y, z) & f_{yz}(y, z) \\ f_{zy}(y, z) & f_{zz}(y, z) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Όπου $Q_i(x)$ η μεταβολή των συνιστωσών των διατμητικών τάσεων κατά μήκος της δοκού, η οποία οφείλεται στη μεταβολή του εσωτερικού εντατικού μεγέθους της τέμνουσας στον άξονα i. $f_{ij}(y, z)$ η συνάρτηση κατανομής της συνιστώσας j της διατμητικής τάσης σε μια διατομή x στο επίπεδο της οποίας αναπτύσσεται τέμνουσα $Q_i(x)$.

Αντικαθιστώντας τις διατμητικές τάσεις της σχέσης (2.15) στη γραμμική πυκνότητα ενέργειας της δοκού έχουμε:

$$\begin{aligned} E_L &= \int_A \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2 \cdot G} dA \Rightarrow \\ E_L &= \frac{Q_y^2 \left(A \int_A (f_{yy}^2 + f_{yz}^2) dA \right) + Q_z^2 \left(A \int_A (f_{zy}^2 + f_{zz}^2) dA \right) + Q_y \cdot Q_z \left(A \int_A (f_{yy} \cdot f_{zy} + f_{yz} \cdot f_{zz}) dA \right)}{2 \cdot G \cdot A} \Rightarrow \\ E_L &= \frac{a_y \cdot Q_y^2 + a_z \cdot Q_z^2 + a_{yz} \cdot Q_y \cdot Q_z}{2 \cdot G \cdot A} \end{aligned} \quad (2.16)$$

όπου είναι εμφανές ότι:

$$\alpha_y = A \int_A (f_{yy}^2 + f_{yz}^2) dA \quad (2.17.α)$$

$$\alpha_z = A \int_A (f_{zy}^2 + f_{zz}^2) dA \quad (2.17.β)$$

$$\alpha_{yz} = A \int_A (f_{yy} \cdot f_{zy} + f_{yz} \cdot f_{zz}) dA \quad (2.17.γ)$$

Αποδεικνύεται ότι οι συνιστώσες α_y , α_z , α_{yz} αποτελούν συνιστώσες επιπέδου τανυστή 2ας τάξης, οπότε υπάρχει ένα κύριο σύστημα συντεταγμένων του οποίου οι άξονες ονομάζονται κύριοι άξονες διάτμησης για το οποίο $\alpha_{yz} = \alpha_{zy} = 0$.

Οι κύριοι άξονες διάτμησης δεν συμπίπτουν με τους κύριους καμπτικούς άξονες παρά μόνο όταν η διατομή έχει απλή ή διπλή συμμετρία.

Η μεθοδολογία υπολογισμού των 3 αυτών συνιστωσών αναλύεται στο τμήμα (2.στ. Υπολογισμός Συντελεστών Διατμητικής Παραμόρφωσης).

(5) Εξισώσεις Ισορροπίας

Για την εξαγωγή των εξισώσεων θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα περί την ακρότατη τιμή δυναμικής ενέργειας (αρχή Langrange - Dirichlet) σύμφωνα με το οποίο σε μια θέση ευσταθούς ισορροπίας η ολική δυναμική ενέργεια εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

Δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα εσωτερικής και εξωτερικής ενέργειας.

(α) Εσωτερική Ελαστική Ενέργεια

Η εσωτερική ελαστική ενέργεια οφείλεται κατά ένα μέρος στην κάμψη και κατά ένα άλλο στην διάτμηση.

1/ Ελαστική Ενέργεια λόγω Κάμψης

Η πυκνότητα τροπικής ενέργειας είναι:

$$e_b = \int_0^{\sigma_{xx}} \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} = \int_0^{\sigma_{xx}} E \cdot \varepsilon_{xx} d\varepsilon_{xx} = \frac{E \cdot \varepsilon_{xx}^2}{2} = \frac{E \cdot z^2 \cdot \theta_y'(x)^2}{2} \quad (2.18)$$

και η ενέργεια σε όλο τον όγκο της δοκού:

$$E_b = \int_V e_b dV = \int_L \frac{E \cdot I_{yy} \cdot \theta_y'(x)^2}{2} dL \quad (2.19)$$

2/ Ελαστική Ενέργεια λόγω Διάτμησης

Η πυκνότητα τροπικής ενέργειας είναι:

$$e_s = \int_0^{\tau_{xz}} \tau_{xz} d\gamma_{xz} = \int_0^{\tau_{xz}} G \cdot \gamma_{xz} d\gamma_{xz} = \frac{G \cdot \gamma_{xz}^2}{2} = \frac{G}{2} \cdot (\theta_y(x) + w'(x))^2 \quad (2.20)$$

και η ενέργεια σε όλο τον όγκο της δοκού:

$$E_s = \int_V e_s dV = \int_L \frac{G \cdot A_{sz}}{2} \cdot (\theta_y(x) + w'(x))^2 dL \quad (2.21)$$

(β) Εξωτερική Ελαστική Ενέργεια

Η εξωτερική ελαστική ενέργεια οφείλεται στο κατανεμημένο φορτίο δύναμης και το βέλος κάμψης καθώς και στο κατανεμημένο φορτίο ροπής και στη στροφή.

$$V = \int_L q_z(x) \cdot w(x) dL + \int_L m_y(x) \cdot (\theta_y(x) + w'(x)) dL \quad (2.22)$$

(γ) Ολική Δυναμική Ενέργεια

Η ολική δυναμική ενέργεια είναι:

$$V = \int_L \left(\frac{E \cdot I_{yy} \cdot \theta_y'(x)^2}{2} + \frac{G \cdot A_{sz} (\theta_y(x) + w'(x))^2}{2} + q_z(x) \cdot w(x) + m_y(x) \cdot (\theta_y(x) + w'(x)) \right) dL \quad (2.23)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα αποτελεί ένα συναρτησιακό της μορφής:

$$V = \int_L f(x, \theta_y'(x), \theta_y(x), w'(x), w(x)) dL \quad (2.24)$$

Η απαίτηση ελαχιστοποίησης του παραπάνω ολοκληρώματος οδηγεί στις διαφορικές εξισώσεις Euler - Lagrange του Λογισμού των Μεταβολών:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_y'} \right) = 0 \quad (2.25.α)$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial w'} \right) = 0 \quad (2.25.β)$$

(δ) Τελικές Εξισώσεις

Από τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις της δοκού Timoshenko:

$$E \cdot I_{yy} \cdot \theta_y''(x) - G \cdot A_{sz} (\theta_y(x) + w'(x)) + m_y(x) = 0 \quad (2.26.α)$$

$$G \cdot A_{sz} (\theta_y'(x) + w''(x)) + q_z(x) = 0 \quad (2.26.β)$$

Τα εντατικά μεγέθη της δοκού είναι:

$$M_y(x) = E \cdot I_{yy} \cdot \theta_y'(x) \quad (2.27.\alpha)$$

$$Q_z(x) = G \cdot A_{sz} \cdot [\theta_y(x) + w'(x)] \quad (2.27.\beta)$$

β. Τεχνική Θεωρία Euler - Bernoulli

(1) Παραδοχές

Η θεωρία Euler – Bernoulli έχει μια επιπλέον παραδοχή από αυτές που αναφέρθηκαν στη θεωρία Timoshenko (2.α.(1)):

— Διατομές που πριν την κάμψη ήταν κάθετες στον άξονα x της δοκού παραμένουν κάθετες σε αυτόν και μετά την κάμψη (Σχ. 2.1).

(2) Μετατοπίσεις

Η θεωρία Euler – Bernoulli δεν λαμβάνει υπόψη της διατμητικές παραμορφώσεις:

$$\gamma_{xz} = 0 \Rightarrow \theta_y(x) = -\frac{\partial w(x)}{\partial x} \quad \theta_z(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad (2.28)$$

Θεωρούμε το πεδίο των μετακινήσεων ως:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \frac{\partial v(x)}{\partial x} - z \frac{\partial w(x)}{\partial x} \\ v(x) \\ w(x) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Όπου $w(x)$ το βέλος κάμψης της δοκού.

Εφαρμόζοντας ότι και στη θεωρία Timoshenko, αλλά αγνοώντας κάθε διατμητική παραμόρφωση, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση της δοκού.

(3) Εξισώσεις Ισορροπίας

Η διαφορική εξίσωση της δοκού Euler-Bernoulli είναι (και για τους 2 άξονες είναι η ίδια):

$$E \cdot I_{yy} \cdot w''''(x) = p_z(x) \quad (2.30)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$w(x) = \int \int \int \int p_z(x) (dx)^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (2.31)$$

Οι σταθερές C_i προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες της δοκού.

Τα εντατικά μεγέθη της δοκού είναι για ροπή στον άξονα Y:

$$M_y(x) = -E \cdot I_{yy} \cdot w'''(x) \quad (2.32.\alpha)$$

$$Q_z(x) = -E \cdot I_{yy} \cdot w''''(x) \quad (2.32.\beta)$$

και για ροπή στον άξονα Z:

$$M_z(x) = E \cdot I_{zz} \cdot w'''(x) \quad (2.33.\alpha)$$

$$Q_y(x) = -E \cdot I_{zz} \cdot w''''(x) \quad (2.33.\beta)$$

γ. Τεχνική Θεωρία Διάτμησης

Δεν αναπτύσσεται.

δ. Ελαστική Θεωρία Ομοιόμορφης Διάτμησης

Στην παράγραφο αυτή αναλύεται μια μέθοδος επίλυσης του προβλήματος διάτμησης η οποία

ακολουθεί της αρχής της ακριβούς ελαστικής θεωρίας.

Θεωρούμε μια ευθύγραμμη δοκό μήκους L από γραμμικά ελαστικό υλικό με σταθερές G, ν . Η διατομή της δοκού είναι τυχούσας μορφής. Το εξωτερικό σύνορό της ορίζεται από την καμπύλη Γ_1 ενώ τυχόντα εσωτερικά σύνορα (τρύπες) ορίζονται από τις καμπύλες Γ_i για $K=2, \dots, n$. Το υλικό είναι ομογενές ισότροπο. Το σύστημα αξόνων είναι κεντροβαρικό αλλά όχι απαραίτητα κύριο.

Πρέπει να βρούμε ένα πεδίο τάσεων που να ικανοποιεί:

- Τις εξισώσεις ισορροπίας (1.4).
- Τις εξισώσεις Beltrami-Michell (1.16).
- Τις συνοριακές συνθήκες (1.1).

Από τις εξισώσεις ισορροπίας τάσεων (1.4) φαίνεται (άξονες y, z) ότι οι τ_{xy}, τ_{xz} είναι ανεξάρτητες του x . Στην εξίσωση ισορροπίας (1.4) στον άξονα x χρησιμοποιούμε την σ_{xx} από τη σχέση (2.5) με $S_y = S_z = 0$ και χωρίς αξονικές, η οποία αφού ληφθεί υπόψη ότι:

$$M_y'(x) = Q_z(x) \quad (2.34.\alpha)$$

$$M_z'(x) = -Q_y(x) \quad (2.34.\beta)$$

$$Q_z'(x) = -q_z(x) \quad (2.34.\gamma)$$

$$Q_y'(x) = -q_y(x) \quad (2.34.\delta)$$

ξαναγράφεται ως:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_y(x) \cdot I_{yz} + M_z(x) \cdot I_{yy}}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y(x) \cdot I_{zz} + M_z(x) \cdot I_{yz}}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \cdot z \quad (2.35.\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{Q_z(x) \cdot I_{yz} - Q_y(x) \cdot I_{yy}}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \cdot y + \frac{Q_z(x) \cdot I_{zz} - Q_y(x) \cdot I_{yz}}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \cdot z \quad (2.35.\beta)$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση (1.4) της ισορροπίας στον άξονα x , μια φορά κατά y και μια κατά z και προκύπτουν οι παρακάτω δύο σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y \partial z} \quad (2.36.\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial z} \quad (2.36.\beta)$$

Τις σχέσεις αυτές τις χρησιμοποιούμε στις εξισώσεις Beltrami – Michel (1.16) (2 από τις 6 σχέσεις δεν είναι ταυτότητες) οι οποίες είναι:

$$(1+\nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} \quad (2.37.\alpha)$$

$$(1+\nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} \quad (2.37.\beta)$$

και μετά την αντικατάσταση (α με α και β με β) γίνονται:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{\nu+1} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} \quad (2.38.\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{\nu+1} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial z} \quad (2.38.\beta)$$

Οι συναρτήσεις των διατμητικών τάσεων $\tau_{xy}(y, z)$, $\tau_{xz}(y, z)$ αποτελούν λύση το προβλήματος μόνο αν ικανοποιούν τις εξισώσεις (2.38).

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας μπορούμε να υπολογίσουμε τις κατανομές των διατμητικών τάσεων πρώτα για $Q_y(x)=0$ και μετά για $Q_z(x)=0$ και οι τελικές κατανομές να προκύψουν από την επαλληλία των 2 φορτίσεων.

(1) Τέμνουσα στον Άξονα z

Για την πρώτη περίπτωση οι σχέσεις (2.38) γράφονται:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = -\frac{\nu}{\nu+1} \frac{Q_z(x) \cdot I_{yz}}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (2.39.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{\nu+1} \frac{Q_z(x) \cdot I_{zz}}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (2.39.b)$$

Εισάγουμε μια άγνωστη τασική συνάρτηση $\Phi(y, z)$ με την οποία θα εκφράσουμε κατάλληλα τις διατμητικές τάσεις ώστε να επαληθεύουν ταυτοτικά τις σχέσεις (2.39). Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των διατμητικών της σχέσης (2.40) στις σχέσεις (2.39) πράγματι επαληθεύονται ταυτοτικά.

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z) = -\frac{Q_z(x)}{B} \left(\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial y} - d_y \right) \quad (2.40.a)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(y, z) = -\frac{Q_z(x)}{B} \left(\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial z} - d_z \right) \quad (2.40.b)$$

$$\text{όπου } B = 2(1+\nu) \cdot (I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2) \text{ και } \vec{d} = \begin{bmatrix} d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \left(I_{zz} \cdot y \cdot z - I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \\ -\nu \left(I_{zz} \frac{y^2 - z^2}{2} + I_{yz} \cdot y \cdot z \right) \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας τις διατμητικές τάσεις των σχέσεων (2.40) και την ορθή τάση της σχέσης (2.35.b) στην εξίσωση ισορροπίας (1.4) κατά x προκύπτει η διαφορική εξίσωση Poisson για τη συνιστώσα των διατμητικών τάσεων:

$$\nabla^2 \Phi(y, z) = 2(I_{yz} \cdot y - I_{zz} \cdot z) \text{ σε κάθε διατομή } \Omega \quad (2.41)$$

Το κανονικό διάνυσμα της επιφάνειας της δοκού είναι $\vec{n} = [0 \quad \cos \varphi \quad \sin \varphi]^T$. Οι επιφάνειες της δοκού είναι αφόρτιστες. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.40) στη σχέση (1.1) για τον άξονα των x (οι άλλες είναι ταυτοτητές) έχουμε:

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx} \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z = \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{d} \text{ στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (2.42)$$

(2) Τέμνουσα στον Άξονα y

Αντίστοιχα για $Q_z(x)=0$ είναι:

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z) = \frac{Q_y(x)}{B} \left(\frac{\partial \Theta(y, z)}{\partial y} - e_y \right) \quad (2.43.a)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(y, z) = \frac{Q_y(x)}{B} \left(\frac{\partial \Theta(y, z)}{\partial z} - e_z \right) \quad (2.43.b)$$

$$\text{όπου } B=2(1+\nu)\cdot(I_{yy}\cdot I_{zz}-I_{yz}^2) \text{ και } \vec{e}=\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \nu\left(I_{yy}\frac{y^2-z^2}{2}-I_{yz}\cdot y\cdot z\right) \\ \nu\left(I_{yy}\cdot y\cdot z+I_{yz}\frac{y^2-z^2}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

$$\nabla^2 \Theta(y, z)=2(I_{yz}\cdot z-I_{zz}\cdot y) \text{ σε κάθε διατομή } \Omega \quad (2.44)$$

$$\sigma_{xn}=\sigma_{xx}\cdot 0+\tau_{xy}\cdot n_y+\tau_{xz}\cdot n_z=\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial \vec{n}}=\vec{n}\cdot\vec{e} \text{ στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (2.45)$$

Η επίλυση των 2 προβλημάτων πραγματοποιείται με αριθμητική ανάλυση. Προκύπτουν οι λύσεις των συναρτήσεων $\Phi(y, z)$ και $\Theta(y, z)$ οπότε με επαλληλία των 2 φορτίσεων προκύπτουν οι κατανομές των διατμητικών τάσεων $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{xz}(x, y, z)$.

Εφόσον υπολογίστηκαν οι διατμητικές τάσεις μπορεί πλέον να προσδιοριστεί το κέντρο διάτμησης.

ε. Κέντρο Διάτμησης

Το Κέντρο Διάτμησης είναι το σημείο από το οποίο, εάν διέρχεται ο άξονας της εξωτερικής φόρτισης, τότε η ροπή των διατμητικών τάσεων της διατομής, είναι ίση με τη ροπή της εξωτερικής φόρτισης, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Σε κάθε άλλη περίπτωση το εξωτερικό φορτίο αναγκάζει τη διατομή σε μετατόπιση και στροφή προκειμένου να επιτευχθεί ισορροπία.

Για τον προσδιορισμό της εντατικής κατάστασης ενός ραβδόμορφου στοιχείου γίνεται αναγωγή των φορτίων στο κέντρο βάρους για τον υπολογισμό των ορθών τάσεων (από κάμψη ή/και αξονική δύναμη), ενώ για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων (από στρέψη ή/και διάτμηση) γίνεται αναγωγή στο κέντρο της τέμνουσας δύναμης.

Ο Weber[29] απέδειξε ότι το κέντρο διάτμησης ταυτίζεται με το κέντρο συστροφής. Κέντρο συστροφής καλείται το σημείο περιστροφής μια διατομής, ως στερεός δίσκος, υπό στρεπτική φόρτιση. Σε περίπτωση που οι διαμήκεις ορθές τάσεις και οι διατμητικές παραμορφώσεις που αναπτύσσονται λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης δεν είναι επαρκώς μικρές, το κέντρο διάτμησης δεν ταυτίζεται με το κέντρο συστροφής. Το κέντρο συστροφής σε αυτή την περίπτωση προσδιορίζεται στο υποκεφάλαιο (3.γ.(3)(α). Προσδιορισμός Κέντρου Συστροφής και Σταθεράς Μετατόπισης).

Η θέση του ΚΔ εξαρτάται αποκλειστικά από το γεωμετρικό σχήμα της διατομής.

Το πρόβλημα του κέντρου διάτμησης παρατηρήθηκε αρχικά από τον Bach[1][2] κατά την πειραματική εξέταση δοκών σχήματος U. Η εισαγωγή του όρου και η θεωρητική ερμηνεία έγινε από τον Maillart[23].

(1) Προσδιορισμός του ΚΔ ως Κέντρο Τέμνουσας Δύναμης

Για να αποκλεισθεί η δυνατότητα στροφής των διατομών πρέπει η εξωτερική φόρτιση να διέρχεται από το Κέντρο Διάτμησης $M(y_M, z_M)$. Τότε η ροπή των τεμνουσών δυνάμεων ως προς τυχόν σημείο του επιπέδου της διατομής είναι ίση με τη ροπή των διατμητικών τάσεων.

$$Q_z\cdot y_M-Q_y\cdot z_M=\int_A (\tau_{xz}\cdot y-\tau_{xy}\cdot z)dA \quad (2.46)$$

όπου x ο διαμήκης άξονας της ράβδου.

Οι συντεταγμένες y_M , z_M υπολογίζονται θέτοντας αντίστοιχα Q_y και Q_z ίσο με μηδέν.

Οι διατμητικές τ_{xz} , τ_{xy} λαμβάνονται αντίστοιχα από τη σχέση (2.40) για $Q_y=0$ και τη σχέση (2.43) για $Q_z=0$.

(α) Παρατηρήσεις

Σε διατομές με έναν άξονα συμμετρίας το ΚΔ βρίσκεται πάντοτε επί του άξονα αυτού.

Σε διατομές διπλής συμμετρίας ή αντισυμμετρικές (π.χ. μορφής Ζ) το ΚΔ συμπίπτει με το ΚΒ της διατομής.

στ. Υπολογισμός Συντελεστών Διατμητικής Παραμόρφωσης

Χρησιμοποιώντας τις διατμητικές τάσεις από τις σχέσεις (2.40) και (2.43) στις σχέσεις (2.15), από τη σχέση (2.17) έχουμε:

$$\alpha_y = A \int_A (f_{yy}^2 + f_{zy}^2) dA = \frac{A}{B^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_y \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_z \right)^2 \right] dA = \frac{A}{B^2} \int_A (\vec{\nabla} \Theta - \vec{e})^2 dA \quad (2.47.\alpha)$$

$$\alpha_z = A \int_A (f_{yz}^2 + f_{zz}^2) dA = \frac{A}{B^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_y \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_z \right)^2 \right] dA = \frac{A}{B^2} \int_A (\vec{\nabla} \Phi - \vec{d})^2 dA \quad (2.47.\beta)$$

$$\alpha_{yz} = 2 \cdot A \int_A (f_{yy} \cdot f_{yz} + f_{zy} \cdot f_{zz}) dA \Rightarrow$$

$$\alpha_{yz} = 2 \frac{A}{B^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_y \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_y \right) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_z \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_z \right) \right] dA \Rightarrow \quad (2.47.\gamma)$$

$$\alpha_{yz} = 2 \frac{A}{B^2} \int_A [(\vec{\nabla} \Theta - \vec{e}) \cdot (\vec{\nabla} \Phi - \vec{d})] dA$$

Τα Φ , Θ , d , e , B έχουν ήδη προσδιοριστεί στο τμήμα (2.δ. Ελαστική Θεωρία Ομοιόμορφης Διάτμησης).

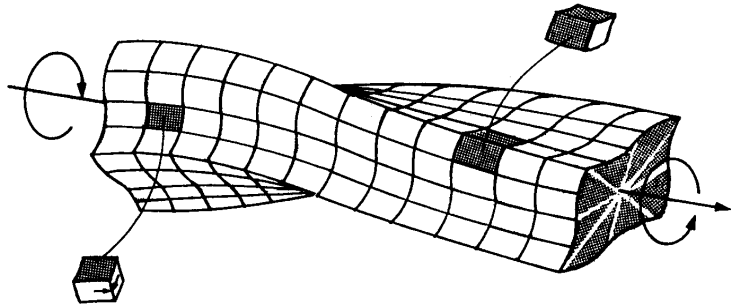
3. Θεωρίες Στρέψης – Στρέβλωσης

α. Ιστορικό Θεωριών Στρέψης

Οι κυριότερες θεωρίες στρέψης είναι οι παρακάτω.

(1) Θεωρία Coulomb

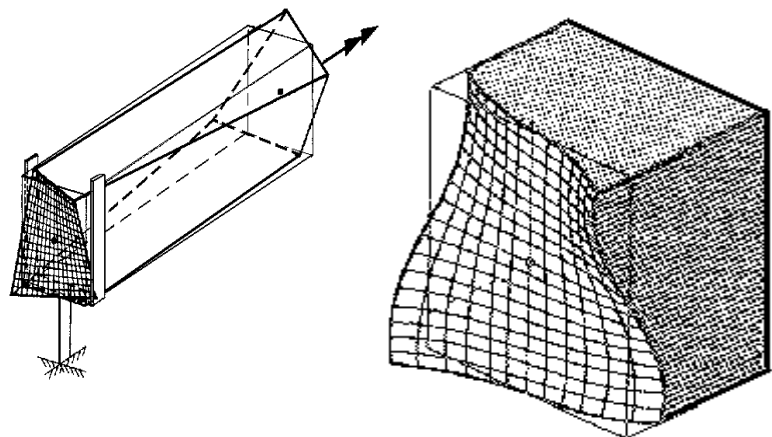
Η θεωρία της στρέψης ξεκίνησε από τον Coulomb[5], ο οποίος μελέτησε την περίπτωση ράβδου με κυκλική διατομή. Η λύση Coulomb στηρίχθηκε στην παραδοχή ότι επίπεδες διατομές στην απαραμόρφωτη κατάσταση παραμένουν επίπεδες και κατά τη παραμορφωμένη κατάσταση. Η υπόθεση αυτή είναι ακριβής μόνο για την περίπτωση κυκλικών ή κυκλικών δακτυλιοειδών διατομών.



Σχ. 3.1. Στρέψη δοκού μη κυκλικής διατομής

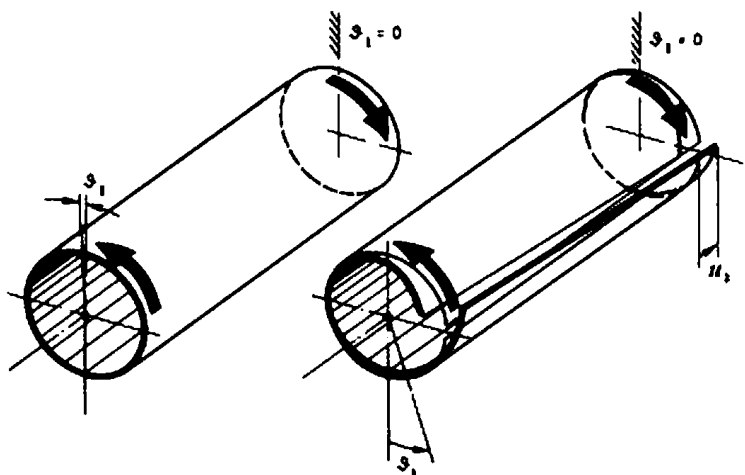
(2) Ομοιόμορφη Στρέψη (Στρέψη Saint Venant)

Η θεωρία στρέψης ράβδων τυχούσας διατομής (Σχ. 3.1) δόθηκε από το Γάλλο μηχανικό Saint Venant, ο οποίος έθεσε πρώτος τα θεμέλια της κλασσικής θεωρίας της στρέψης. Ο Saint Venant[19] βασιζόμενος στην αντίστοιχη θεωρία Coulomb εισήγαγε ορισμένες τροποποιήσεις προκειμένου να επιλύσει το πρόβλημα στρέψης που αφορούσε μη κυκλικές διατομές τυχούσας μορφής. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι όταν μια ράβδος μη κυκλικής διατομής υπόκειται σε στρέψη, μια εγκάρσια διατομή η οποία ήταν επίπεδη πριν από τη στρέψη, δεν παραμένει επίπεδη και μετά τη στρέψη. Η διατομή αυτή υπό την επίδραση στρεπτικής καταπόνησης υπόκειται σε στρέβλωση.



Σχ. 3.2. Ομοιόμορφη στρέψη, όπου η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται από τις συνθήκες στήριξης και η στρεπτική ροπή είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου

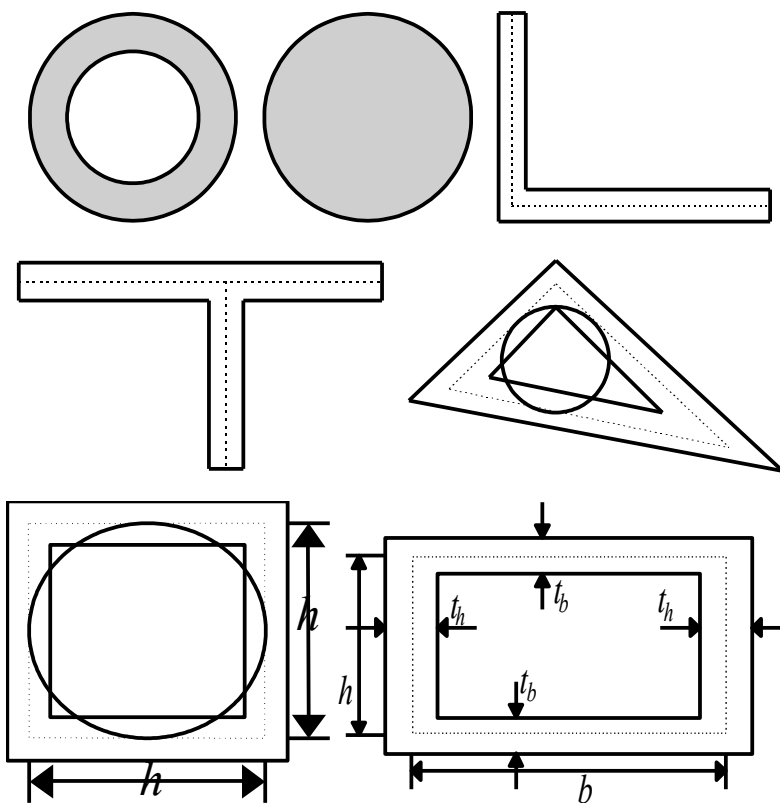
Σύμφωνα με τη θεωρία του Saint Venant η στρέβλωση των διατομών, λόγω της στρεπτικής έντασης, μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεμπόδιστα (Σχ. 3.2, Σχ. 3.3). Αυτό το είδος της στρέψης ονομάζεται ομοιόμορφη στρέψη ή στρέψη Saint Venant. Στην ομοιόμορφη στρέψη η ελευθέρως αναπτυσσόμενη στρέβλωση είναι ίδια για κάθε διατομή κατά μήκος της ράβδου. Αυτό σημαίνει ότι οι διαμήκεις ίνες υφίστανται διαμήκεις μετατοπίσεις και όχι παραμορφώσεις με αποτέλεσμα να μην αναπτύσσονται διαμήκεις ορθές τάσεις.



Σχ. 3.3. Στρέβλωση ανοικτής λεπτότοιχης διατομής.

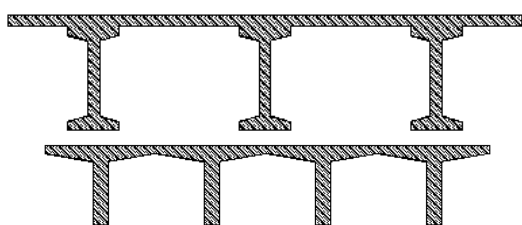
(3) Ανομοιόμορφη Στρέψη

Γενικά, η στρέβλωση στρεφόμενων διατομών παρεμποδίζεται είτε λόγω συνθηκών στήριξης (π.χ. η στρέβλωση μιας ακραίας διατομής παρεμποδίζεται λόγω πάκτωσης αυτής σε μια εγκάρσια, μετωπική πλάκα), είτε λόγω συνθηκών φόρτισης (μεταβολή δηλαδή της στρεπτικής ροπής κατά μήκος της ράβδου όπως στις περιπτώσεις π.χ. συγκεντρωμένου ή κατανεμημένου στρεπτικού φορτίου)[13].



Σχ. 3.4. Διατομές οι οποίες δεν εμφανίζουν φαινόμενα στρέβλωσης

μοιόμορφη στρέψη η στρεπτική ροπή αναλαμβάνεται κατά ένα ποσοστό από την κλειστή ροή των διατμητικών τάσεων Saint Venant (πρωτογενείς διατμητικές τάσεις τ^P) και κατά το υπόλοιπο ποσοστό από τις στρεπτικές διατμητικές τάσεις στρέβλωσης (δευτερογενείς διατμητικές τάσεις τ^S), οι οποίες ασκούνται στο επίπεδο της διατομής. Επομένως για τη ολική στρεπτική ροπή M_t που ασκείται σε μια διατομή ισχύει $M_t = M_t^P + M_t^S$ όπου M_t^P η πρωτογενής στρεπτική ροπή που εξισορροπείται με την ανάπτυξη των διατμητικών τάσεων Saint Venant (τ^P) και M_t^S η δευτερογενής στρεπτική ροπή που εξισορροπείται με την ανάπτυξη των διατμητικών τάσεων στρέβλωσης (τ^S).



Σχ. 3.5. Διατομή μορφής πλακοδοκού με μικρή στρεπτική αντίσταση και έντονη στρέβλωση (δοκοί μονολιθικά συνδεδεμένοι με την φερόμενη πλάκα)

Αυτή η στρέψη ονομάζεται ανομοιόμορφη. Εάν η στρέβλωση παρεμποδίζεται, τότε οι διαμήκεις μετατοπίσεις μεταβάλλονται κατά μήκος της ράβδου με αποτέλεσμα την ανάπτυξη διαμήκων ορθών τάσεων σ_{xx} , οι οποίες είναι ανάλογες της στρέβλωσης και επομένως μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Αυτό σημαίνει ότι η συστολή θ' που στην στρέψη Saint Venant ήταν σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού, πλέον δεν είναι. Η στρέβλωση είναι ανάλογη της συστολής.

Λόγω της μεταβολής των ορθών τάσεων θα αναπτυχθούν, για λόγους ισορροπίας πρόσθετες διατμητικές τάσεις κατά τη διαμήκη διεύθυνση και άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy (συμμετρία του τανυστή των τάσεων $\tau_{ij} = \tau_{ji}$), και επάνω στο επίπεδο της διατομής. Οι διατμητικές αυτές τάσεις ονομάζονται τάσεις στρέβλωσης (τ^S) (Σχ. 3.9). Συνεπώς στην ανο-

μοιόμορφη στρέψη η στρεπτική ροπή αναλαμβάνεται από πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις καθορίζεται από τη γεωμετρία της διατομής. Σε διατομές με μικρή αντίσταση στρέβλωσης (Σχ. 3.4), μπορεί να εφαρμοστεί με ικανοποιητική ακρίβεια η θεωρία Saint Venant. Επιπλέον η θεωρία Saint Venant μπορεί να εφαρμοστεί και σε θέσεις μακριά από τα σημεία εμποδισμού της στρέβλωσης.

Όταν οι διατομές εμφανίζουν μεγάλη αντίσταση στρέβλωσης (Σχ. 3.5), είναι μεγάλης σημασίας ο προσδιορισμός των ορθών και διατμητικών τάσεων στρέβλωσης και ο συνυπολογισμός αυτών με τις αντίστοιχες τάσεις που προέρχονται από άλλα είδη φόρτισης (ορθές και διατμητικές τάσεις από καμπτοδιατμη-

τάσεις που προέρχονται από άλλα είδη φόρτισης (ορθές και διατμητικές τάσεις από καμπτοδιατμη-

τική καταπόνηση, διατμητικές τάσεις ομοιόμορφης στρέψης, κ.λ.π.). Οι τάσεις στρέβλωσης (σ_{xx} , τ^S) είναι τάσεις φόρτισης και όχι καταναγκασμού. Επομένως με την πάροδο του χρόνου και την επερχόμενη ρηγμάτωση ή διαρροή του υλικού, οι τάσεις αυτές δε μειώνονται αλλά ανακατανέμονται. Λόγω της δυνατότητας ανακατανομής οι τάσεις στρέβλωσης δε θα πρέπει να αγνοούνται στα πλαίσια μιας σωστής και ασφαλούς στατικής ανάλυσης, διότι μπορεί να αναδειχθούν καθοριστικής σημασίας για τη διαστασιολόγηση του φορέα.

(4) Ανομοιόμορφη Στρέψη με Επιρροή Δευτερογενών Στρεπτικών Παραμορφώσεων

Στη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης η στρέβλωση είναι ανάλογη της συστροφής θ' [27]. Αυτό έχει συνέπεια να λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι πρωτογενείς διατμητικές και οι ορθές τάσεις στην καθολική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου ενώ οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις υπολογίζονται μετά την επίλυσή της. Όμως η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι σημαντική σε κλειστές λεπτότοιχες διατομές[18][15], όπου οι διατμητικές τάσεις λαμβάνουν υψηλές τιμές λόγω της ιδιαίτερης γεωμετρίας της διατομής.

Η επιρροή αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψιν με υιοθέτηση νέου κινηματικού μεγέθους που δίδει τη στρέβλωση της διατομής πλέον μη ανάλογη με τη συστροφή θ' .

Η θεώρηση αυτή παρουσιάζει πλήρη αναλογία με τη μη γραμμική θεωρία καμπτόμενων ράβδων Timoshenko[24][15][17][18]. Συνεπώς, παραβιάζει κι αυτή την τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής δευτερογενών διατμητικών τάσεων που προκύπτει. Τούτο έχει ως αποτέλεσμα την ανάγκη διόρθωσης της δευτερογενούς στρεπτικής αντίστασης με τη χρήση κατάλληλου διορθωτικού συντελεστή διάτμησης, ο οποίος υπολογίζεται με ενεργειακή προσέγγιση[22][9][12][10]. Η συγκεκριμένη προσέγγιση οδηγεί στη σύζευξη στρεπτικών και καμπτικών καταπονήσεων ράβδων τυχούσας διατομής. Στην περίπτωση που η διατομή είναι διπλά συμμετρική, αποδεικνύεται ότι στρεπτικές και καμπτικές καταπονήσεις αποξευγνύονται[22][12]. Έτσι, το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά από αυτό της καμπτοδιατμητικής καταπόνησης.

β. Ανομοιόμορφη Στρέψη με Επιρροή Δευτερογενών Στρεπτικών Παραμορφώσεων

(1) Παραδοχές

1. Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.
2. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται.
3. Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.
4. Η διατομή της ράβδου είναι διπλά συμμετρική. Στην περίπτωση όπου η διατομή έχει έναν ή κανέναν άξονα συμμετρίας, η στρεπτική και καμπτοδιατμητική καταπόνηση είναι συζευγμένες και πρέπει να μελετηθούν μαζί. Όταν η διατομή διαθέτει δύο άξονες συμμετρίας, τότε η στρεπτική καταπόνηση μπορεί να μελετηθεί αυτόνομα.
5. Στη ράβδο δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) κάποιος άξονας περιστροφής. Η ράβδος μπορεί να στραφεί ελεύθερα μετά την άσκηση σε αυτήν του στρεπτικού φορτίου και αποδεικνύεται ότι ο άξονας περιστροφής ταυτίζεται με τον άξονα που διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο των διατομών. Η (κατασκευαστική) επιβολή οποιουδήποτε άλλου άξονα περιστροφής οδηγεί αναπόφευκτα στην ανάπτυξη καμπτοδιατμητικής έντασης πέρα από τη στρεπτική.
6. Η στρέβλωση της ράβδου είναι ανάλογη της πρωτογενούς σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους (ή ανεξάρτητης παράμετρου στρέβλωσης). Επειδή η στρέβλωση των διατομών δεν λαμβάνεται ανάλογη της συνολικής σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους, η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι δυνατόν να ληφθεί υπόψιν στην καθολική ισορροπία της ράβδου.

7. Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του.

8. Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.

9. Η κατανομή των τάσεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.

(2) Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις

(α) Μετατοπίσεις

Θεωρούμε δοκό που ικανοποιεί τις παραπάνω παραδοχές και υποβάλλεται σε κατανεμημένο στρεπτικό φορτίο $m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w(x)$. Ο άξονας x του τρισσορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων διέρχεται από τα κέντρα συστροφής (που είναι και κέντρα βάρους λόγω διπλής συμμετρίας) των διατομών, ενώ η αρχή του ($x=0$) είναι στο αριστερό άκρο της δοκού.

Οι πεδιακές μετατοπίσεις της δοκού σε σχέση με το κέντρο διάτμησης - συστροφής S , που προκύπτουν από στρέψη κατά γωνία $\theta(x)$ γύρω από το S , είναι:

$$u(x, y, z) = \eta(x) \cdot \Phi_S^P(y, z) \quad (3.1.α)$$

$$\begin{bmatrix} v(x, z) \\ w(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta(x) & -\sin \theta(x) \\ \sin \theta(x) & \cos \theta(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta(x) \\ \theta(x) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \cdot \theta(x) \\ y \cdot \theta(x) \end{bmatrix} \quad (3.1.β)$$

όπου $\eta(x)$ μια ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης η οποία είναι

$$\eta(x) = \theta^P(x) \text{ στην παρούσα θεωρία} \quad (3.2.α)$$

$$\eta(x) = \theta'(x) \text{ στην κλασική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης} \quad (3.2.β)$$

$$\eta(x) = \theta'(x) = c \text{ στη θεωρία στρέψης Saint Venant} \quad (3.2.γ)$$

$$\eta(x) = 0 \text{ στη θεωρία στρέψης Coulomb} \quad (3.2.δ)$$

Η Φ_S^P είναι η συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το κέντρο συστροφής S .

Η φυσική σημασία της παραμέτρου $\eta(x)$ έχει να κάνει με την εναλλακτική διατύπωση με την οποία θα περιγραφεί η επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδου. Σύμφωνα με αυτήν, οι μετατοπίσεις της ράβδου και η γωνία στροφής της διατομής διασπώνται σε πρωτογενές (δείκτης P) και δευτερογενές (δείκτης S) μέρος

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^P \\ v^P \\ w^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^S \\ v^S \\ w^S \end{bmatrix} \quad \theta = \theta^P + \theta^S \quad (3.3.α,β)$$

Και αντίστοιχα

$$\begin{bmatrix} u^P(x, y, z) \\ v^P(x, z) \\ w^P(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^P(x) \cdot \Phi_S^P(y, z) \\ -z \cdot \theta^P(x) \\ y \cdot \theta^P(x) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u^S \\ v^S(x, z) \\ w^S(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \cdot \theta^S(x) \\ y \cdot \theta^S(x) \end{bmatrix} \quad (3.4.α,β)$$

(β) Παραμορφώσεις

Αξιοποιώντας τη σχέση (1.6) δεδομένης της παραδοχής 8, προκύπτει ο τανυστής των παραμορφώσεων

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \theta^{P''}(x) \cdot \Phi_s^P(y, z) & \text{sym} \\ \frac{1}{2} \left(\theta^{P'}(x) \frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial y} - z \cdot \theta'(x) \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\theta^{P'}(x) \frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial z} + y \cdot \theta'(x) \right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Οι ε_{xy} και ε_{xz} με χρήση της παράγωγου της σχέσης (3.4.α,β) μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \underbrace{\theta'(x) \left(\frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενής}} - \underbrace{\theta^{S'}(x) \frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial y}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.6.α)$$

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \underbrace{\theta'(x) \left(\frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενής}} - \underbrace{\theta^{S'}(x) \frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial z}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.6.β)$$

(γ) Τάσεις

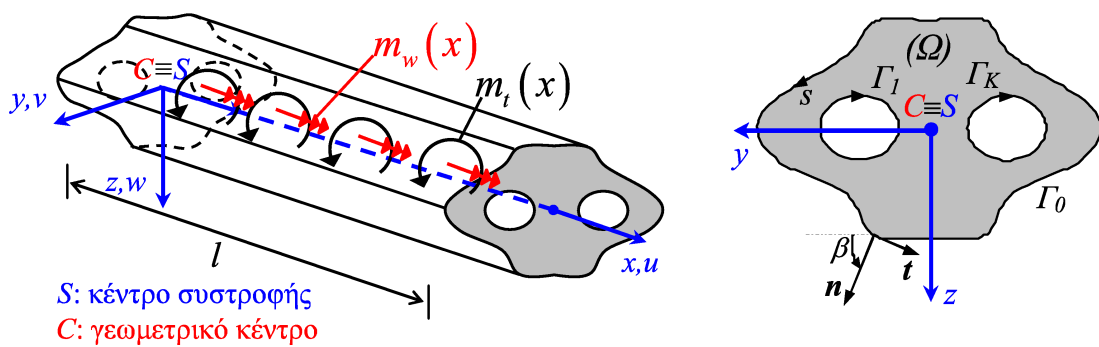
Οι τάσεις για γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό, θεωρώντας ότι $\nu=0$, είναι:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \theta^{P''}(x) \cdot \Phi_s^P(y, z) \quad (3.7.α)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \underbrace{\theta'(x) \left(\frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενής}} - \underbrace{G \cdot \theta^{S'}(x) \frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial y}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.7.β)$$

$$\tau_{xz} = \gamma_{xz} = G \cdot \underbrace{\theta'(x) \left(\frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενής}} - \underbrace{G \cdot \theta^{S'}(x) \frac{\partial \Phi_s^P(y, z)}{\partial z}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.7.γ)$$

(3) Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης



Σχ. 3.6. Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα στρεπτική φόρτιση με διατομή διπλά συμμετρικού σχήματος. Το κέντρο συστροφής και το κέντρο βάρους συμπίπτουν.

Από τη σχέση ισορροπίας τάσεων (1.4) για τον άξονα x και απουσία δυνάμεων όγκου έχουμε:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

Προκειμένου να ικανοποιηθεί αυτή η εξίσωση απαιτούμε το μηδενισμό των όρων που προέρχονται από πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (3.9.α) όσο και αυτών που προέρχονται από την ορθή

τάση και τις δευτερογενείς διατμητικές (3.9.β):

$$\frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} = 0 \quad (3.9.α)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} = 0 \quad (3.9.β)$$

Επιπρόσθετα για το όριο της διατομής (Σχ. 3.6) αντικαθιστώντας τις τάσεις από τις σχέσεις (3.7) στη σχέση (1.1), όπου το διάνυσμα \vec{n} είναι το κανονικό εξωστρεφές διάνυσμα του ορίου της διατομής έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Rightarrow \tau_{xn} = \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \Rightarrow$$

$$\tau_{xn} = \underbrace{G \cdot \theta'(x) \left(\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial n(y, z)} - z \cdot n_y(y, z) - y \cdot n_z(y, z) \right)}_{\text{πρωτογενής}} - \underbrace{G \cdot \theta^S(x) \frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial n(y, z)}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.10.α)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xt} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -n_z \\ n_y \end{bmatrix} \Rightarrow \tau_{xt} = -\tau_{xy} \cdot n_z + \tau_{xz} \cdot n_y \Rightarrow$$

$$\tau_{xt} = \underbrace{G \cdot \theta'(x) \left(\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial t(y, z)} + y \cdot n_y(y, z) + z \cdot n_z(y, z) \right)}_{\text{πρωτογενής}} - \underbrace{G \cdot \theta^S(x) \frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial t(y, z)}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.10.β)$$

Η επίλυση δίνεται ως ένα πρόβλημα Neumann στην εξίσωση Laplace.

Για όλη την επιφάνεια της διατομής: αντικαθιστώντας τις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις από τις σχέσεις (3.7) στη σχέση (3.9.α) προκύπτει η σχέση (3.11.α).

Για το όριο της διατομής: εξισώνοντας με μηδέν την πρωτογενή διατμητική τάση $\tau_{xn}^P = 0$ από τη σχέση (3.10.α), προκύπτει η σχέση (3.11.β).

$$\nabla^2 \Phi_S^P(y, z) = 0 \text{ στο } \Omega \text{ (όλη η διατομή)} \quad (3.11.α)$$

$$\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial n(y, z)} = z \cdot n_y(y, z) - y \cdot n_z(y, z) \text{ στο } \Gamma \text{ (όριο διατομής)} \quad (3.11.β)$$

με την επιπλέον απαίτηση να μην έχουμε εφελκυσμό ή θλίψη κατά μήκος της δοκού:

$$\int_{\Omega} \Phi_S^P d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει η σταθερά μετατόπισης της βασικής συνάρτησης στρέβλωσης. Η θεωρία αναφέρεται πιο γενικευμένα (προσδιορίζεται και το κέντρο συστροφής που για την παρούσα θεωρία είναι η τομή των αξόνων συμμετρίας) στο υποκεφάλαιο (3.γ.(3)(α). Προσδιορισμός Κέντρου Συστροφής και Σταθεράς Μετατόπισης).

(α) Ασυνέπεια

Η σχέση ισορροπίας τάσεων (1.4) για τον άξονα x και απουσία δυνάμεων όγκου και η σχέση συνοριακής συνθήκης (1.1) στα όρια της διατομής είναι:

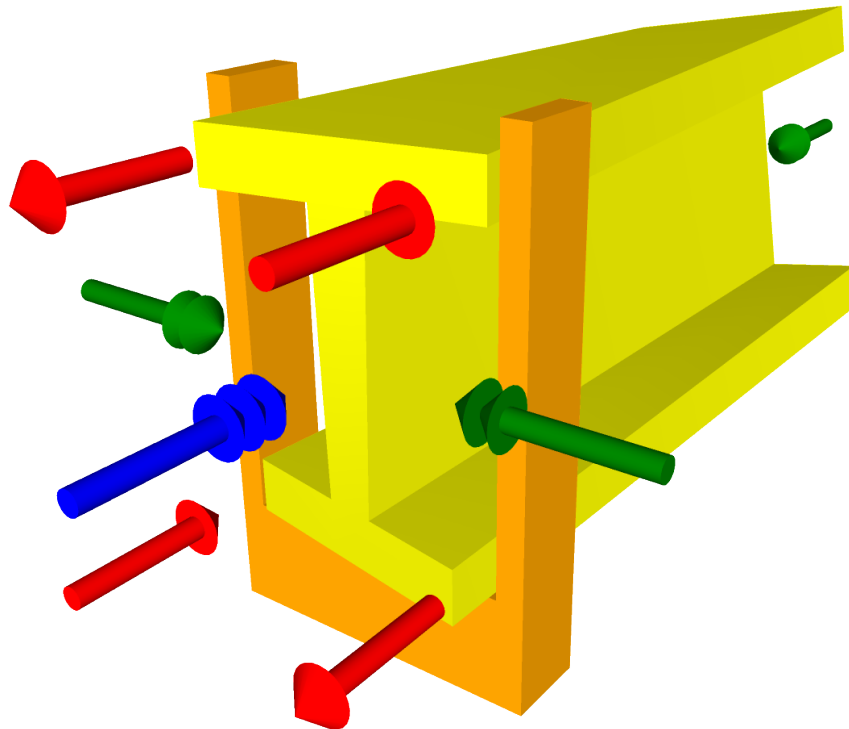
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \text{ στο } \Omega \quad (3.13.α)$$

$$\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = t_x \text{ στο } \Gamma \quad (3.13.β)$$

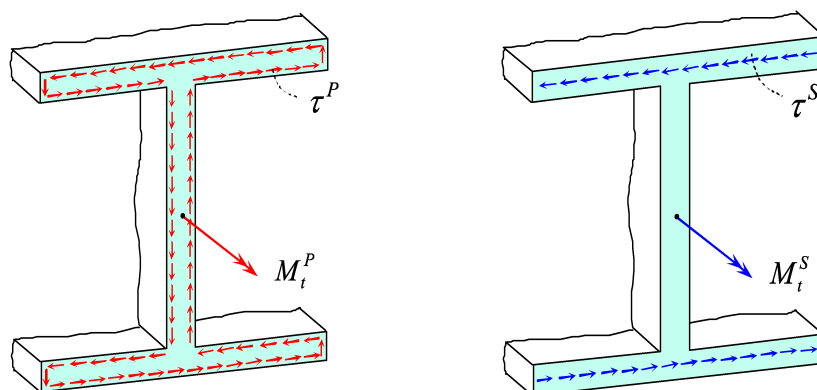
Αντικαθιστώντας τις τάσεις από τις σχέσεις (3.7) στις σχέσεις (3.13) διαπιστώνουμε όμως ότι δεν επαληθεύονται εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Το γεγονός αυτό είναι ανάλογο της θεωρίας καμπτόμενης δοκού Timoshenko οπότε αντιστοίχως κι εδώ θα εισαχθεί ένας στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης [17][22][9][10][20] ο οποίος θα υπολογιστεί στο υποκεφάλαιο (3.β.(5)). Διόρθωση Κατανομής Στρεπτικών Διατμητικών Τάσεων).

(4) Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες

(α) Εντατικά Μεγέθη



Σχ. 3.7. Η στρέψη της δοκού δημιουργεί στρέβλωση η οποία ισοδυναμεί με δύο ζεύγη δυνάμεων (κόκκινα βέλη) δηλαδή δύο ροπές (πράσινα δικάφαλα βέλη) δηλαδή ένα δίρροπο στρέβλωσης (μπλε τρικέφαλο βέλος).



Σχ. 3.8. Διανομή πρωτογενών (αριστερά) και δευτερογενών (δεξιά) διατμητικών τάσεων και αντίστοιχων προκύπτουσων στρεπτικών ροπών.

Η στρεπτική ροπή προκύπτει ολοκληρώνοντας τις διατμητικές τάσεις της διατομής:

$$M_t = \int_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) d\Omega \Rightarrow$$

$$M_t = \underbrace{\int_{\Omega} \left[\tau_{xy} \left(\frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\int_{\Omega} \left(-\tau_{xy} \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz} \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.14)$$

η δεύτερη σχέση απλοποιείται στην πρώτη με απλές πράξεις. Επιλέχθηκε όμως έτσι προκειμένου να διασπάσουμε τη στρεπτική ροπή σε πρωτογενή και δευτερογενή κατά τα πρότυπα των διατμητικών παραμορφώσεων των σχέσεων (3.6), (3.7) (Σχ. 3.8):

$$M_t = M_t^P + M_t^S \quad (3.15.α)$$

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy}^P \left(\frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left(\frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (3.15.β)$$

$$M_t^S = - \int_{\Omega} \left(\tau_{xy}^S \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^S \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.15.γ)$$

Η σχέση (3.15.δ) δίνει ένα νέο εντατικό μέγεθος που ονομάζεται δίρροπο στρέβλωσης (Σχ. 3.7). Η ανάγκη θεώρησής του προκύπτει από το γεγονός ότι για $M_y = M_z = N = 0$ υπάρχουν ορθές τάσεις σ_{xx} στη διατομή, η ελαστική ενέργεια των οποίων ειδάλλως θα αγνοούνταν.

$$M_w = - \int_{\Omega} \Phi_S^P \cdot \sigma_{xx} d\Omega \quad (3.15.δ)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Gauss - Green ισχύει για πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (αντίστοιχα και για δευτερογενείς):

$$\int_{\Omega} \tau_{xy}^P \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} d\Omega = - \int_{\Omega} \Phi_S^P \frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_{xy}^P \cdot n_y \cdot \Phi_S^P ds \quad (3.16.α)$$

$$\int_{\Omega} \tau_{xz}^P \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} d\Omega = - \int_{\Omega} \Phi_S^P \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_{xz}^P \cdot n_z \cdot \Phi_S^P ds \quad (3.16.β)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις διατμητικών τάσεων - κινηματικών μεγεθών (3.7) στις σχέσεις (3.16) και αυτές στις σχέσεις (3.15) λαμβάνουμε:

$$M_t^P = G I_t^P \theta'(x) \quad (3.17.α)$$

$$M_t^S = G I_t^S \theta^{S'}(x) \quad (3.17.β)$$

$$M_w = - E C_S \theta^{P''}(x) \quad (3.17.γ)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές I_t^P (πρωτογενής στρεπτική σταθερά), I_t^S (δευτερογενής στρεπτική σταθερά) και C_S (σταθερά στρέβλωσης) δίνονται ως:

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.18.α)$$

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (3.18.β)$$

$$C_S = \int_{\Omega} \left(\Phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (3.18.γ)$$

Στη σχέση (3.18.β) εισάγεται ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής k_x κατά τα πρότυπα του διορθωτικού συντελεστή της θεωρίας δοκού Timoshenko. Ο συντελεστής αυτός πρέπει να είναι

πάντα $k_x \leq 1$. Στην περίπτωση που η σταθερά I_t^S δεν διορθωθεί εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των διατμητικών τάσεων λαμβάνουμε $k_x = 1$. Ο k_x θα υπολογιστεί στο υποκεφάλαιο (3.β.(5). Διόρθωση Κατανομής Στρεπτικών Διατμητικών Τάσεων). Η διατύπωση αυτή [7][21][6] με τη βοήθεια της σχέσης (3.11.β) δίνει:

$$I_t^S = I_p - I_t^P = k_x \int_{\Omega} \left(-y \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega = k_x \int_{\Gamma} \Phi_S^P \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial n} ds \quad (3.19)$$

(β) Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου διατυπώνονται ως εξής:

$$\frac{dM_t^P}{dx} + \frac{dM_t^S}{dx} = -m_t(x) \quad (3.20.α)$$

$$\frac{dM_w}{dx} - M_t^S = -m_w(x) \quad (3.20.β)$$

και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$$(M_t^P + M_t^S - \bar{M}_t) \delta \theta = 0 \quad (3.21.α)$$

$$(-M_w + \bar{M}_w) \delta(\theta^P)' = 0 \quad (3.21.β)$$

όπου τα μεγέθη m_t (στρεπτική ροπή) και m_w (δύρροπο στρέβλωσης) αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις, οι οποίες δίνονται συναρτήσει των τάσεων του συνόρου ως:

$$m_t(x) = \int_{\Gamma} (-z \cdot \tau_y + y \cdot \tau_z) ds \quad (3.22.α)$$

$$m_w(x) = - \int_{\Gamma} \tau_x \cdot \Phi_S^P ds \quad (3.22.β)$$

Επίσης τα μεγέθη \bar{M}_t και \bar{M}_w αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις στις ακραίες διατομές.

$$\bar{M}_t(0) = - \int_{\Omega} (-z \cdot \tau_y + y \cdot \tau_z) d\Omega \quad \bar{M}_t(L) = \int_{\Omega} (-z \cdot \tau_y + y \cdot \tau_z) d\Omega \quad (3.23.α,β)$$

$$M_w(0) = \int_{\Omega} \tau_x \cdot \Phi_S^P d\Omega \quad M_w(L) = - \int_{\Omega} \tau_x \cdot \Phi_S^P d\Omega \quad (3.23.γ,δ)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (3.17) στις σχέσεις (3.20) και αναδιατυπώνοντας τις συνοριακές συνθήκες (3.21) προκύπτουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$-G(I_t^P + I_t^S) \theta'' + G I_t^S (\theta^P)'' = m_t \quad (3.24.α)$$

$$-E C_S \theta^{P'''} + G I_t^S (\theta^P' - \theta') = -m_w \quad (3.24.β)$$

με οριακές συνθήκες Cauchy:

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \theta^P' = \beta_3 \quad (3.25.α,β)$$

όπου οι συντελεστές α_i , β_i προκύπτουν από τις συνθήκες στήριξης ενώ M_t είναι η στρεπτική ροπή στα άκρα της ράβδου που δίνεται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως:

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S) \theta' - G I_t^S \theta^P' \quad (3.26)$$

1/ Σύγκριση με την Κλασική Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης

Απαλείφοντας τον ένα κινηματικό άγνωστο των σχέσεων (3.24), μπορούμε να κάνουμε μια σύγκριση της θεωρίας με την κλασική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης.

Οι διαφορικές εξισώσεις των σχέσεων (3.24), με απαλοιφή του θ^P γίνονται:

$$\frac{E C_s}{\kappa} \theta'''' - G I_t^P \theta'' = m_t - \frac{E C_s}{G I_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t' + m_w' \quad (3.27)$$

όπου κ είναι μια βοηθητική σταθερά που ορίζεται ως:

$$\kappa = \frac{I_t^S}{I_t^P + I_t^S} = \frac{I_t^S}{I_p} \quad (3.28)$$

Η σύγκριση γίνεται μεταξύ των διαφορικών εξισώσεων των σχέσεων (3.27) και (3.70).

Μετά από πράξεις, οι συνοριακές συνθήκες των σχέσεων (3.25.α,β) συνεχίζουν να ισχύουν αν σε αυτές τεθούν:

$$M_t = G I_t^P \theta' - \frac{E C_s}{\kappa} \theta''' - \frac{E C_s}{G I_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t' + m_w \quad (3.29)$$

$$M_w = -\frac{E C_s}{\kappa} \theta'' - \frac{E C_s}{G I_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t \quad (3.30)$$

$$\theta^P = \theta' + \frac{E C_s}{G I_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa^2} \theta''' + \frac{E C_s}{(G I_t^P)^2} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^2 m_t' - \frac{1}{G I_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_w \quad (3.31)$$

Οι δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις αγνοούνται για $\kappa=1$ (π.χ. ανοικτές λεπτότοιχες διατομές) ενώ όσο το κ πλησιάζει το 0 γίνονται πιο έντονες (κλειστές λεπτότοιχες διατομές) [15] [18][20]. Ισχύει $0 < \kappa \leq 1$.

(5) Διόρθωση Κατανομής Στρεπτικών Διατμητικών Τάσεων

(α) Δευτερογενείς Τάσεις

Η επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας της ράβδου απαιτεί προσδιορισμό του συντελεστή k_x [Σχέση (3.18.β)]. Ο υπολογισμός βασίζεται σε ενεργειακή θεώρηση [10][20] σύμφωνα με την οποία εξισώνεται η ακριβής έκφραση της ελαστικής ενέργειας διάτμησης με την αντίστοιχη προσεγγιστική. Θα πρέπει να προσδιοριστεί ικανοποιητική κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων η οποία να μην παραβιάζει τις σχέσεις (3.13). Για να το πετύχουμε αυτό κρατάμε αναλλοίωτες τις πρωτογενείς τάσεις των σχέσεων (3.7) και τροποποιούμε μόνο τις δευτερογενείς:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \theta^P''(x) \cdot \Phi_S^P(y, z) \quad (3.32.α)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G \cdot \theta'(x) \left(\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\left[G \cdot \theta^S'(x) \frac{I_t^S}{C_s} - \frac{m_w}{C_s} \right] \frac{\partial \Phi_S^S(x, y, z)}{\partial y}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.32.β)$$

$$\tau_{xz} = \gamma_{xz} = \underbrace{G \cdot \theta'(x) \left(\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\left[G \cdot \theta^S'(x) \frac{I_t^S}{C_s} - \frac{m_w}{C_s} \right] \frac{\partial \Phi_S^S(x, y, z)}{\partial z}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.32.γ)$$

όπου $\Phi_S^S(x, y, z)$ η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης η οποία θα προσδιοριστεί με εφαρμογή των εξισώσεων (3.13).

(β) Δευτερογενείς Μετατοπίσεις

Προκειμένου να προκύψουν αυτές οι δευτερογενείς τάσεις, απαιτείται τροποποίηση της διαμήκους δευτερογενούς πεδιακής μετατόπισης της σχέσης (3.4.α,β) η οποία αρχικά είχε τεθεί 0.

$$u^S(x, y, z) = \left(\theta^S(x) \frac{I_t^S}{C_s} - \frac{m_w}{G \cdot C_s} \right) \Phi_S^S(x, y, z) \quad (3.33)$$

Ο λόγος που δεν εφαρμόστηκε αυτό το πεδίο μετατοπίσεων εξ αρχής, είναι επειδή θα διατυ-

πώνονταν θεωρία ανάλογη με τη θεωρία διάτμησης 3ης τάξης[28].

(γ) Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης προκύπτει ως ένα πρόβλημα Neumann στην εξίσωση Poisson.

Αντικαθιστώντας τις τάσεις (3.32) στις σχέσεις ισορροπίας τάσεων (3.13) και λαμβάνοντας υπόψη την καθολική εξίσωση ισορροπίας (3.24.β) προκύπτει για την Φ_S^S :

$$\nabla^2 \Phi_S^S(x, y, z) = \Phi_S^P(y, z) \text{ στο } \Omega \quad (3.34.α)$$

$$\frac{\partial \Phi_S^S(x, y, z)}{\partial n(y, z)} = \frac{C_S \cdot t_x(y, z)}{G \cdot I_t^S \cdot \theta^S(x) - m_w(x)} \text{ στο } \Gamma \quad (3.34.β)$$

Για να υπολογίσουμε ένα στρεπτικό συντελεστή που δεν εξαρτάται από τη φόρτιση, εκμηδενίζουμε τις φορτίσεις t_x και m_w οπότε από τις παρακάτω σχέσεις προκύπτει δισδιάστατη συνάρτηση δευτερογενούς στρέβλωσης:

$$\nabla^2 \Phi_S^S(y, z) = \Phi_S^P(y, z) \text{ στο } \Omega \quad (3.35.α)$$

$$\frac{\partial \Phi_S^S(y, z)}{\partial n(y, z)} = 0 \text{ στο } \Gamma \quad (3.35.β)$$

με την επιπλέον απαίτηση να μην έχουμε εφελκυσμό ή θλίψη κατά μήκος της δοκού:

$$\int_{\Omega} \Phi_S^S d\Omega = 0 \quad (3.36)$$

(δ) Στρεπτικός Διορθωτικός Συντελεστής Διάτμησης

Η ελαστική ενέργεια [Σχέσεις (1.19), (1.20)] λόγω διάτμησης κατά μήκος της ράβδου δίδεται ως:

$$U = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{(\tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S)^2 + (\tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S)^2}{2G} d\Omega = U_P + U_S + U_{PS} \quad (3.37)$$

όπου:

$$U_P = \int_{\Omega} \frac{(\tau_{xy}^P)^2 + (\tau_{xz}^P)^2}{2G} d\Omega \quad (3.38.α)$$

$$U_S = \int_{\Omega} \frac{(\tau_{xy}^S)^2 + (\tau_{xz}^S)^2}{2G} d\Omega \quad (3.38.β)$$

$$U_{PS} = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + \tau_{xz}^P \tau_{xz}^S}{G} d\Omega \quad (3.38.γ)$$

Η προσεγγιστική έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης θα δοθεί από την κατανομή των τάσεων των σχέσεων (3.7) ενώ η ακριβής έκφραση από την κατανομή των τάσεων των σχέσεων (3.32). Και για τις δύο περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι $U_{PS} = 0$ και εφόσον οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις είναι ίσες $U_{approximate, P} = U_{exact, P}$. Άρα η εξίσωση ενεργειών οδηγεί στη σχέση:

$$U_{approximate, S} = U_{exact, S} \quad (3.39)$$

Η μη ικανοποιητική κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων των σχέσεων (3.7), με τη βοήθεια της εξίσωσης (3.17.β) διαμορφώνεται σε:

$$\tau_{xy}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial y} \quad \tau_{xy}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \Phi_S^P}{\partial z} \quad (3.40.α,β)$$

ενώ η ικανοποιητική κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων των σχέσεων (3.32),

με τη βοήθεια της εξίσωσης (3.17.β) διαμορφώνεται σε:

$$\tau_{xy}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \Phi_S^S}{\partial y} \quad \tau_{xy}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \Phi_S^S}{\partial z} \quad (3.41.α,β)$$

Η έκφραση (3.38.β) της ελαστικής ενέργειας από την προσεγγιστική κατανομή διατμητικών τάσεων (3.40.α,β) σε συνδυασμό με τη σχέση (3.18.β) είναι[10]:

$$U_{approximate,S} = \frac{(M_t^S)^2}{2 \cdot G \cdot I_t^S} \quad (3.42)$$

Η έκφραση (3.38.β) της ελαστικής ενέργειας από την ακριβή κατανομή διατμητικών τάσεων (3.41.α,β) είναι:

$$U_{exact,S} = I_\phi \frac{1}{2G} \left(\frac{M_t^S}{I_t^S} \right)^2 \quad (3.43)$$

όπου I_ϕ γεωμετρική σταθερά (αριστερό σκέλος) που με τη βοήθεια των σχέσεων (3.35) μπορεί να απαλλαγεί από τα διαφορικά της (δεξί σκέλος).

$$I_\phi = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \Phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega = - \int_\Omega \Phi_S^S \Phi_S^P d\Omega \quad (3.44)$$

Εξισώνοντας (3.39) τις ενέργειες των σχέσεων (3.42) και (3.43) και αξιοποιώντας τη σχέση (3.18.β) προκύπτει ο στρεπτικός συντελεστής:

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_p - I_t^P) I_\phi} \quad (3.45)$$

Η δευτερογενής στρεπτική σταθερά μπορεί να υπολογιστεί από την πρωτογενή με τη σχέση:

$$I_t^S = \kappa_x \cdot I_t^P = \kappa_x (I_p - I_t^P) \quad (3.46)$$

όπου:

$$\kappa_x = \frac{C_S^2}{I_t^P I_\phi} \quad (3.47)$$

Η ενεργειακή θεώρηση για τον υπολογισμό του διορθωτικού συντελεστή διάτμησης οδηγεί στη σύζευξη καμπτοδιατμητικών και στρεπτικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών. Η στρέψη (σε περίπτωση που λαμβάνονται υπόψη διατμητικές παραμορφώσεις) αποζηυγνύεται από την καμπτο-διατμητική ένταση όταν έχουμε δοκούς με διατομή διπλής συμμετρίας[12][22].

(6) Αλγόριθμος Επίλυσης

— Ορισμός συστήματος αναφοράς Syz στη διατομή της ράβδου που διέρχεται από το κέντρο συστροφής, το οποίο για διπλά συμμετρικές διατομές είναι το κέντρο βάρους της διατομής δηλαδή το σημείο τομής των αξόνων συμμετρίας.

— Υπολογισμός της βασικής πρωτογενής συνάρτησης στρέβλωσης $\hat{\Phi}_S^P(y, z)$ από την επίλυση των σχέσεων (3.11).

— Υπολογισμός εμβαδού διατομής $A = \int_\Omega d\Omega$ και ροπής στρέβλωσης $\hat{R}_S^P = \int_\Omega \hat{\Phi}_S^P d\Omega$.

— Υπολογισμός της σταθεράς $\hat{c} = -\frac{\hat{R}_S^P}{A}$ [Σχέσεις (3.52)].

— Υπολογισμός της κύριας πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\Phi_S^P(y, z)$ με τη σχέση $\Phi_S^P(y, z) = \hat{\Phi}_S^P(y, z) + \hat{c}$.

— Υπολογισμός της βασικής δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\hat{\Phi}_S^S(y, z)$ από την επίλυση των σχέσεων (3.35).

— Υπολογισμός της κύριας δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\Phi_S^S(y, z)$ με τη σχέση $\Phi_S^S(y, z) = \hat{\Phi}_S^S(y, z) - \frac{1}{A} \int_{\Omega} \hat{\Phi}_S^S(y, z) d\Omega$.

— Υπολογισμός της πολικής ροπής αδρανείας $I_p = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega$, της πρωτογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^P (3.18.α), της σταθεράς στρέβλωσης C_S (3.18.γ), της σταθεράς I_{ϕ} (3.44), του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή k_x (3.45) και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S (3.46). Αν η σταθερά I_t^S δεν διορθωθεί εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων, τότε στη σχέση (3.46) τίθεται $k_x = 0$.

— Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας της ράβδου (3.24), (3.25.α,β) και υπολογισμός της γωνίας στροφής $\theta(x)$ και της πρωτογενούς συστροφής $\theta^P(x)$ καθώς και των εντατικών μεγεθών M_t (3.15.α), M_t^P (3.17.α), M_t^S (3.17.β) και M_w (3.17.γ).

— Υπολογισμός του τανυστή των πρωτογενών και δευτερογενών τάσεων, σε κάθε σημείο της δοκού από τις σχέσεις (3.32). Η συνολική διατμητική τάση στο Ω είναι $\tau_{xn} = \sqrt{(\tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S)^2 + (\tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S)^2}$. Η πρωτογενής και δευτερογενής διατμητική τάση στο σύνορο Γ από τη σχέση (3.10.β), εναλλακτικά $\tau_{xt}^S = G \frac{\partial \Phi_S^S}{\partial t}$ ενώ η συνολική είναι $\tau_{xt} = \tau_{xt}^P + \tau_{xt}^S$.

— Υπολογισμός των μετατοπίσεων κάθε σημείου της δοκού από τις σχέσεις (3.1).

γ. Ανομοιόμορφη Στρέψη

Η κλασική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης θα αναπτυχθεί σε αντιπαράβολή με τη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων.

(1) Παραδοχές

Ισχύουν οι παραδοχές (3.β.(1)) με εξαίρεση την παραδοχή 4: η ράβδος δεν απαιτείται να είναι διπλά συμμετρική.

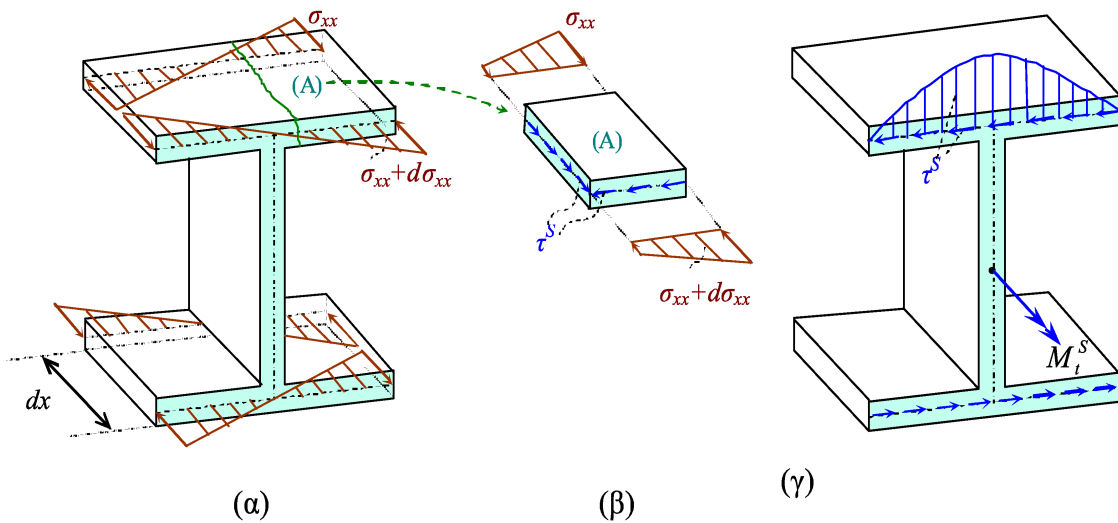
(2) Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις

Για τις μετατοπίσεις ισχύουν οι σχέσεις (3.1) σε συνδυασμό με την (3.2.β).

Για τις παραμορφώσεις και τις τάσεις ισχύουν οι σχέσεις (3.6) και (3.7) αντίστοιχα, αλλά μόνο το πρωτογενές σκέλος (και αντί για $\Phi_S^P(y, z)$ γίνεται χρήση του $\Phi_S(y, z)$).

Αντικαθιστώντας τις πρωτογενείς τάσεις της σχέσης (3.7) στις εξισώσεις ισορροπίας τάσεων (1.4), αυτές δεν επαληθεύονται για τους άξονες y, z και αυτό αποτελεί ασυνέπεια της θεωρίας. Επίσης κατά τον άξονα x προκύπτει ότι η $\Phi_S(y, z)$ εξαρτάται κι από το x κάτι το οποίο εξ ορισμού δεν ισχύει. Θεωρούμε ότι οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στη διατομή διασπώνται σε πρωτογενείς και δευτερογενείς που προέρχονται από τη στρέβλωση. Η διάσπαση των τάσεων δικαιολογείται από την ισορροπία των ορθών τάσεων από στρέβλωση σε στοιχειώδες τμήμα της διατομής (Σχ. 3.9). Έτσι, σε ράβδο υποβαλλόμενη σε ανομοιόμορφη στρέψη αναπτύσσονται ορθές τάσεις σ_{xx} οι οποίες είναι ανάλογες με τη στρέβλωση και μεταβάλλονται κατά μήκος της ράβδου (Σχ. 3.9). Εξετάζοντας την τομή Α (Σχ. 3.9.β) παρατηρούμε ότι η στοιχειώδης μεταβολή $d\sigma_{xx}$ εξισορροπείται μόνο από από διατμητικές τάσεις κατά μήκος της τομής Α και οι οποίες (θεώρημα Cauchy) οδηγούν στην ανάπτυξη δευτερογενών διατμητικών τάσεων στο επίπεδο της διατομής. Ανακεφαλαιώνοντας, οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις προκύπτουν από τη θεωρία St Venant με τη διαφορά ότι η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους δεν είναι σταθερή, οι ορθές τάσεις από στρέβλωση προκύπτουν από τις πρωτογενείς παραμορφώσεις και οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις προκύπτουν από την

ισορροπία των διαμήκων ορθών τάσεων στρέβλωσης.



Σχ. 3.9. Ορθές (α) και διατμητικές (β) τάσεις, λόγω στρέβλωσης

Οι τάσεις ξαναγράφονται:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \theta''(x) \cdot \Phi_S^P(y, z) \quad (3.48.α)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \theta'(x) \left(\underbrace{\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial y}}_{\text{πρωτογενής}} - z \right) - G \underbrace{\frac{\partial \Phi_S^S(y, z)}{\partial y}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.48.β)$$

$$\tau_{xz} = \gamma_{xz} = G \cdot \theta'(x) \left(\underbrace{\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial z} + y}_{\text{πρωτογενής}} \right) - G \underbrace{\frac{\partial \Phi_S^S(y, z)}{\partial z}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.48.γ)$$

(3) Συνάρτηση Στρέβλωσης

Με τον ίδιο τρόπο όπως στο υποκεφάλαιο (3.β.(3). Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης) για το όριο της διατομής (Σχ. 3.6) αντικαθιστώντας τις τάσεις από τις σχέσεις (3.48) στη σχέση (1.1), όπου το διάνυσμα \vec{n} είναι το κανονικό εξωστρεφές διάνυσμα του ορίου της διατομής έχουμε κατ' αντίστοιχο τρόπο με τις σχέσεις (3.10):

$$\tau_{xn} = G \cdot \theta'(x) \left(\underbrace{\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial n(y, z)} - z \cdot n_y(y, z) - y \cdot n_z(y, z)}_{\text{πρωτογενής}} \right) - G \underbrace{\frac{\partial \Phi_S^S(y, z)}{\partial n(y, z)}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.49.α)$$

$$\tau_{xt} = G \cdot \theta'(x) \left(\underbrace{\frac{\partial \Phi_S^P(y, z)}{\partial t(y, z)} + y \cdot n_y(y, z) + z \cdot n_z(y, z)}_{\text{πρωτογενής}} \right) - G \underbrace{\frac{\partial \Phi_S^S(y, z)}{\partial t(y, z)}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.49.β)$$

Για την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης ισχύουν οι σχέσεις (3.11) καθώς το πρωτογενές κομμάτι των τάσεων είναι ίδιο στις δύο θεωρίες.

Για τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης η επίλυση δίνεται ως ένα πρόβλημα Neumann στην εξίσωση Poisson.

Για όλη την επιφάνεια της διατομής: αντικαθιστώντας τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις από τις σχέσεις (3.48) στη σχέση (3.9.β) προκύπτει η σχέση (3.50.α).

Για το όριο της διατομής: εξισώνοντας με μηδέν την δευτερογενή διατμητική τάση $\tau_{xn}^S = 0$ από τη σχέση (3.49.α), προκύπτει η σχέση (3.50.β).

$$\nabla^2 \Phi_s^S(x, y, z) = -\frac{E \cdot \theta'''(x)}{G} \Phi_s^P(y, z) \text{ στο } \Omega \text{ (όλη η διατομή)} \quad (3.50.\alpha)$$

$$\frac{\partial \Phi_s^S(x, y, z)}{\partial n(y, z)} = 0 \text{ στο } \Gamma \text{ (όριο διατομής)} \quad (3.50.\beta)$$

(α) Προσδιορισμός Κέντρου Συστροφής και Σταθεράς Μετατόπισης

Στην κλασική θεωρία ανομοιομορφης στρέψης δεν έχουμε διπλά συμμετρική διατομή με αποτέλεσμα το κέντρο συστροφής να μην είναι από την αρχή γνωστό.

Σε ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $O \bar{y} \bar{z}$ οι συντεταγμένες του κέντρου συστροφής είναι \bar{y}^S, \bar{z}^S . Η στρέβλωση σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων είναι $\Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z})$. Η πρωτογενής κύρια συνάρτηση στρέβλωσης $\Phi_s^P(y, z)$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων Syz, προσδιορίζεται σύμφωνα με το μετασχηματισμό Marguerre[13] με μια στροφή και μια μετατόπιση \bar{c} της $\Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z})$:

$$\Phi_s^P(y, z) = \Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z}) - \bar{y} \cdot \bar{z}^S + \bar{z} \cdot \bar{y}^S + \bar{c} \quad (3.51)$$

Το κέντρο συστροφής και ο σταθερός όρος \bar{c} μπορούν τα προσδιοριστούν ενεργειακά από τη απαίτηση ελαχιστοποίησης του έργου παραμόρφωσης των ορθών τάσεων στρέβλωσης. Μπορούν επίσης να προσδιοριστούν από τις συνθήκες ισορροπίας για τις ορθές τάσεις στρέβλωσης. Θα πρέπει δηλαδή να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (στο δεξί σκέλος έχουμε αντικαταστήσει με τις σχέσεις (3.51) και (3.48.α)):

$$N = \int_{\Omega} \sigma_{xx} d\Omega = 0 \Rightarrow S_{\bar{y}} \cdot \bar{y}^S - S_{\bar{z}} \cdot \bar{z}^S + A \cdot \bar{c} = -R_S^P \quad (3.52.\alpha)$$

$$M_y = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \cdot z d\Omega = 0 \Rightarrow I_{\bar{y}\bar{y}} \cdot \bar{y}^S + I_{\bar{y}\bar{z}} \cdot \bar{z}^S + S_{\bar{y}} \cdot \bar{c} = -R_y^P \quad (3.52.\beta)$$

$$M_z = -\int_{\Omega} \sigma_{xx} \cdot y d\Omega = 0 \Rightarrow I_{\bar{y}\bar{z}} \cdot \bar{y}^S + I_{\bar{z}\bar{z}} \cdot \bar{z}^S - S_{\bar{z}} \cdot \bar{c} = R_z^P \quad (3.52.\gamma)$$

όπου

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad S_{\bar{y}} = \int_{\Omega} \bar{z} d\Omega \quad S_{\bar{z}} = \int_{\Omega} \bar{y} d\Omega \quad (3.53.\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_{\Omega} \bar{z}^2 d\Omega \quad I_{\bar{z}\bar{z}} = \int_{\Omega} \bar{y}^2 d\Omega \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = -\int_{\Omega} \bar{y} \cdot \bar{z} d\Omega \quad (3.53.\delta, \epsilon, \sigma\tau)$$

$$R_S^P = \int_{\Omega} \Phi_0^P d\Omega \quad R_y^P = \int_{\Omega} \bar{z} \cdot \Phi_0^P d\Omega \quad R_z^P = \int_{\Omega} \bar{y} \cdot \Phi_0^P d\Omega \quad (3.53.\zeta, \eta, \theta)$$

Από το σύστημα 3×3 των σχέσεων (3.52) προκύπτουν οι συντεταγμένες του κέντρου συστροφής \bar{y}^S, \bar{z}^S και η σταθερά μετατόπισης \bar{c} για την κύρια πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης.

Η σταθερά μετατόπισης που συνδέει τη βασική δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\Phi}_s^S$ με την κύρια δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης Φ_s^S , αναφερόμενες και οι δύο ως προς το κέντρο συστροφής S είναι:

$$\hat{\Phi}_s^S = \Phi_s^S + c^S \quad (3.54)$$

Η σχέση αυτή επαληθεύει τις εξισώσεις (3.50) και η σταθερά c^S προκύπτει από την παρακάτω απαίτηση:

$$\int_{\Omega} \Phi_s^S d\Omega = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} (\hat{\Phi}_s^S - c^S) d\Omega = 0 \Rightarrow c^S = \frac{1}{A} \int_{\Omega} \hat{\Phi}_s^S d\Omega \quad (3.55)$$

και η σχέση (3.54) ξαναγράφεται:

$$\Phi_s^S = \hat{\Phi}_s^S - \frac{1}{A} \int_{\Omega} \hat{\Phi}_s^S d\Omega \quad (3.56)$$

(β) Μετασχηματισμός Συνάρτησης Στρέβλωσης στο Syz Σύστημα

Ο μετασχηματισμός μεταξύ των δύο συστημάτων $O \bar{y} \bar{z}$ και Syz γίνεται με τις σχέσεις:

$$y = \bar{y} - \bar{y}^S \quad z = \bar{z} - \bar{z}^S \quad (3.57.α,β)$$

Η σχέση (3.51) γίνεται:

$$\Phi_s^P(y, z) = \Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z}) - (y + \bar{y}^S) \bar{z}^S + (z + \bar{z}^S) \bar{y}^S + \bar{c} \quad (3.58)$$

οπότε προκύπτει:

$$\nabla^2 \Phi_s^P(y, z) = \nabla^2 \Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z}) \quad (3.59)$$

Ισχύει:

$$\frac{\partial \Phi_s^P}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_s^P}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi_s^P}{\partial z} n_z = \frac{\partial \Phi_s^P}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi_s^P}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} n_z \quad (3.60)$$

Άρα για την $\Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z})$ αξιοποιώντας τις σχέσεις (3.59) και (3.11.α) προκύπτει η σχέση (3.61.α).

Επίσης αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.60), (3.57.α,β) και (3.58) στη συνοριακή συνθήκη Neumann (3.11.β) προκύπτει η σχέση (3.61.β):

$$\nabla^2 \Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z}) = 0 \text{ στο } \Omega \quad (3.61.α)$$

$$\frac{\partial \Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z})}{\partial n(\bar{y}, \bar{z})} = \bar{z} \cdot n_y(\bar{y}, \bar{z}) - \bar{y} \cdot n_z(\bar{y}, \bar{z}) \text{ στο } \Gamma \quad (3.61.β)$$

(γ) Συνθήκες Ύπαρξης Λύσης για τις Συναρτήσεις Στρέβλωσης

Από τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων, για να έχουν λύση οι σχέσεις (3.11) και (3.50) πρέπει να ισχύει

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_s^P}{\partial n} ds = 0 \quad (3.62.α)$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial (\Phi_s^S - \Phi_s^{S,P})}{\partial n} ds = 0 \quad (3.62.β)$$

όπου $\Phi_s^{S,P}$ μερική λύση της διαφορικής (3.50.α) [8]. Η λύση καθενός από τα δύο προβλήματα προκύπτει συναρτήσει μιας αυθαίρετης σταθεράς που δεν προσδιορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας τη συνοριακή συνθήκη (3.11.β) στη σχέση (3.62.α) έχουμε:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_s^P}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma} (z \cdot n_y - y \cdot n_z) ds = \oint_{\Gamma} (y dy + z dz) \quad (3.63)$$

Ο τύπος του Gauss στο επίπεδο είναι:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz dy = \oint_{\Gamma} (Q dy + P dz) \quad (3.64)$$

οπότε για $Q = y$ και $P = z$ λαμβάνουμε:

$$\oint_{\Gamma} (y dy + z dz) = 0 \quad (3.65)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.62.α), (3.63) και (3.65) προκύπτει ότι υπάρχει λύση για την πρωτογενή κύρια συνάρτηση στρέβλωσης. Το ίδιο προκύπτει και για τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης με τη σχέση (3.62.β).

(δ) Πεδιακές Μετακινήσεις

Οι πεδιακές μετακινήσεις διαμορφώνονται σε:

$$\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, z) \\ w(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta'(x) \cdot \Phi_S^P(y, z) + \Phi_S^S(x, y, z) \\ -z \cdot \theta(x) \\ y \cdot \theta(x) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

(4) Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες

(α) Εντατικά Μεγέθη

Υπολογίζονται όπως στο υποκεφάλαιο (3.β.(4)(α). Εντατικά Μεγέθη) και κατ' αναλογία με τις σχέσεις (3.17):

$$M_t^P = G I_t \theta'(x) \quad (3.67.α)$$

$$M_t^S = -E C_S \theta'''(x) \quad (3.67.β)$$

$$M_w = -E C_S \theta'''(x) \quad (3.67.γ)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές I_t (στρεπτική σταθερά) και C_S (σταθερά στρέβλωσης) δίνονται από τις σχέσεις (3.18.α) και (3.18.γ) αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι για τη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ισχύει:

$$\frac{dM_w}{dx} = M_t^S \quad (3.68)$$

(β) Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες

Η διαφορική εξίσωση ισορροπίας στοιχειώδους τμήματος της ράβδου διατυπώνονται ως εξής:

$$M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx - M_t + m_t dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_t}{\partial x} = -m_t \quad (3.69)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (3.67) στη σχέση (3.69) προκύπτει η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού:

$$-G \cdot I_t \cdot \theta''' + E \cdot C_S \cdot \theta'''' = m_t \quad (3.70)$$

με οριακές συνθήκες Cauchy:

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \theta' = \beta_3 \quad (3.71.α,β)$$

όπου οι συντελεστές α_i , β_i προκύπτουν από τις συνθήκες στήριξης ενώ M_t είναι η στρεπτική ροπή στα άκρα της ράβδου.

1/ Σύγκριση με την Θεωρία Ομοιόμορφης Στρέψης Saint Venant

Στη θεωρία ομοιόμορφης στρέψης $\theta''(x)=0$ άρα η διαφορική εξίσωση 4ης τάξεως (3.70) και η αντίστοιχη 3ης τάξεως με βάση τις σχέσεις (3.69) και (3.67) γράφονται:

$$m_t = 0 \quad M_t = G \cdot I_t \cdot \theta'(x) = \text{σταθερή} \quad (3.72.α,β)$$

απ' όπου εξαγεται και η γωνία συστροφής $\theta'(x) = \text{σταθερή}$.

Ορίζεται μέγεθος ε που καλείται συντελεστής στρεπτικής αποσβέσεως:

$$\varepsilon = L \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot C_S}} \quad (3.73)$$

Όσο μικρότερη είναι η τιμή του τόσο πιο ανομοιόμορφη είναι η στρέψη.

Σύμφωνα με τους Ramm και Hofmann[16]:

— Για $\varepsilon \leq 1$ αναπτύσσονται κυρίως δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση (ανομοιόμορφη στρέψη).

— Για $1 < \varepsilon \leq 15$ αναπτύσσονται πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση (ανομοιόμορφη στρέψη).

— Για $\varepsilon > 15$ αναπτύσσονται κυρίως πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (ομοιόμορφη στρέψη).

(5) Αλγόριθμος Επίλυσης

— Υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\Phi_0^P(\bar{y}, \bar{z})$ ως προς αυθαίρετο σύστημα αναφοράς $O_{\bar{y}\bar{z}}$ από τις σχέσεις (3.61), μιας και οι συντεταγμένες του κέντρου συστροφής S δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές.

— Υπολογισμός ως προς το σύστημα $O_{\bar{y}\bar{z}}$ των ολοκληρωμάτων των σχέσεων (3.53).

— Προσδιορισμός του κέντρου συστροφής (\bar{y}^S, \bar{z}^S) και της σταθεράς μετατόπισης \bar{c} της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, από τις σχέσεις (3.52).

— Μετασχηματισμός του συστήματος $O_{\bar{y}\bar{z}}$ στο σύστημα Syz με κέντρο το κέντρο συστροφής και υπολογισμός της κύριας πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης από τις σχέσεις (3.57.α,β) και (3.58).

— Υπολογισμός της στρεπτικής σταθεράς I_t και της σταθεράς στρέβλωσης C_S από τις σχέσεις (3.18.α) και (3.18.γ) αντίστοιχα.

— Υπολογισμός της $\theta(x)$ με επίλυση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου από τις σχέσεις (3.70) και (3.71.α,β) και υπολογισμός των εντατικών μεγεθών M_t , M_t^P , M_t^S και M_w από τις σχέσεις (3.67) και (3.15.α).

— Υπολογισμός της βασικής δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\hat{\Phi}_S^S(x, y, z)$ από την επίλυση των σχέσεων (3.50).

— Υπολογισμός της κύριας δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\Phi_S^S(x, y, z)$ με τη σχέση (3.56).

— Υπολογισμός του τανυστή των πρωτογενών και δευτερογενών τάσεων, σε κάθε σημείο της δοκού από τις σχέσεις (3.48). Η συνολική διατμητική τάση στο Ω είναι $\tau_{xn} = \sqrt{(\tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S)^2 + (\tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S)^2}$. Η διατμητική τάση στο σύνορο Γ δίνεται από τη σχέση (3.49.β).

— Υπολογισμός των μετατοπίσεων κάθε σημείου της δοκού από τις σχέσεις (3.66).

4. Μητρώο Δυσκαμψίας και Επικόμβια Φορτία 3D Δοκού



Σχ. 4.1. Σύμβαση προσήμων (Ισορροπία στοιχειώδους τμήματος της δοκού).

Με κόκκινο: άξονας X. Με πράσινο: άξονας Y. Με μπλέ: άξονας Z.

Με ένα κεφάλι: Δυνάμεις. Με δύο κεφάλια: Ροπές. Με τρία κεφάλια: Δίρροπα Στρέβλωσης

Το κλασικό μητρώο δυσκαμψίας 3d δοκού δημιουργείται από τη θεωρία κάμψης Euler – Bernoulli και από τη θεωρία στρέψης Saint Venant. Αποτελείται από 12×12 στοιχεία. 3 για μεταφορικές παραμορφώσεις και 3 για στροφικές παραμορφώσεις για καθένα από τους 2 κόμβους της δοκού.

Εκτός του μητρώου 12×12 υπάρχει και το διευρυμένο που περιλαμβάνει την παραμόρφωση της στρέβλωσης. Η στρέβλωση απαιτεί έναν επιπλέον όρο για κάθε κόμβο δηλαδή συνολικά το μητρώο δυσκαμψίας απαρτίζεται από 14×14 στοιχεία.

Στα επόμενα υποκεφάλαια θα εξαχθούν για κάθε μια από τις προαναφερθείσες θεωρίες κάμψης, διάτμησης, στρέψης και στρέβλωσης οι όροι του μητρώου δυσκαμψίας και του ισοδύναμου διανύσματος επικόμβιων δράσεων.

Η κυρίαρχη σχέση της Στατικής Γραμμικά Ελαστικής Ανάλυσης είναι:

$$\vec{P} = [K] \cdot \vec{\delta} - \vec{P}_0 \quad (4.1)$$

όπου \vec{P} τα εντατικά μεγέθη στους κόμβους, $[K]$ το μητρώο δυσκαμψίας, $\vec{\delta}$ οι επικόμβιες μετατοπίσεις και \vec{P}_0 το ισοδύναμο διάνυσμα επικόμβιων δράσεων.

Οι όροι του μητρώου δυσκαμψίας προκύπτουν μηδενίζοντας όλες τις επικόμβιες μετατοπίσεις εκτός από μια κάθε φορά που την θέτουμε ίση με ένα. Επίσης η ράβδος δεν καταπονείται από κανένα εξωτερικό φορτίο σε αυτή την φάση. Από τα εντατικά μεγέθη που εμφανίζονται στους κόμβους προκύπτει κάθε φορά, μια στήλη στοιχείων του μητρώου δυσκαμψίας (ή μια σειρά, λόγω συμμετρίας). Δηλαδή ισχύει:

$$\vec{P}_0 = \vec{0} \text{ και } \vec{K}_i = \vec{P} \text{ για κάθε } \delta_i = 1 \text{ και } \delta_j = 0 \text{ όπου } i = 1, 2, 3, \dots, j \neq i \quad (4.2)$$

Οι όροι του ισοδύναμου διανύσματος επικόμβιων δράσεων προκύπτουν μηδενίζοντας όλες τις επικόμβιες μετατοπίσεις. Η ράβδος αυτή τη φορά καταπονείται από τα εξωτερικά της φορτία. Τα εντατικά μεγέθη που εμφανίζονται στους κόμβους αποτελούν τις επικόμβιες δράσεις. Δηλαδή ισχύει:

$$\vec{P}_0 = \vec{P} \text{ και } \vec{\delta} = \vec{0} \quad (4.3)$$

Για να μετατραπούν τα εντατικά μεγέθη στους κόμβους που προκύπτουν από τη λύση των διαφορικών εξισώσεων του εκάστοτε προβλήματος σε επικόμβιες ισοδύναμες δράσεις χρησιμοποιείται η σύμβαση προσήμων του (Σχ. 4.1).

Οι όροι του διανύσματος ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων είναι:

$$\vec{P}_0 = [P_1^X \ P_2^Z \ P_3^Y \ M_4^T \ M_5^Y \ M_6^Z \ M_7^T \ P_8^X \ P_9^Z \ P_{10}^Y \ M_{11}^T \ M_{12}^Y \ M_{13}^Z \ M_{14}^T]^T \quad (4.4)$$

Με δείκτη X συμβολίζονται οι αξονικές παραμορφώσεις της δοκού (εφελκυσμός – θλίψη). Με

δείκτη Z η κάμψη στον άξονα Z και με Y η κάμψη στον άξονα Y. Τέλος με T συμβολίζονται οι όροι της στρέψης και στρέβλωσης. Με P συμβολίζονται τα φορτία και με M οι ροπές και τα δίρροπα στρέβλωσης.

Οι όροι του μητρώου δυσκαμψίας έχουν ως εξής:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{1,1}^X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{1,8}^X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & K_{2,2}^Z & 0 & 0 & 0 & K_{2,6}^Z & 0 & 0 & K_{2,9}^Z & 0 & 0 & 0 & K_{2,13}^Z & 0 \\ & & K_{3,3}^Y & 0 & K_{3,5}^Y & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{3,10}^Y & 0 & K_{3,12}^Y & 0 & 0 \\ & & & K_{4,4}^T & 0 & 0 & K_{4,7}^T & 0 & 0 & 0 & K_{4,11}^T & 0 & 0 & K_{4,14}^T \\ & & & & K_{5,5}^Y & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{5,10}^Y & 0 & K_{5,12}^Y & 0 & 0 \\ & & & & & K_{6,6}^Z & 0 & 0 & K_{6,9}^Z & 0 & 0 & 0 & K_{6,13}^Z & 0 \\ & & & & & & K_{7,7}^T & 0 & 0 & 0 & K_{7,11}^T & 0 & 0 & K_{7,14}^T \\ & & & & & & & K_{8,8}^X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & K_{9,9}^Z & 0 & 0 & 0 & K_{9,13}^Z & 0 \\ & & & & & & & & & K_{10,10}^Y & 0 & K_{10,12}^Y & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & K_{11,11}^T & 0 & 0 & K_{11,14}^T \\ & & & & & & & & & & & K_{12,12}^Y & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & K_{13,13}^Z & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & K_{14,14}^T \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

sym

α. Θεωρία Αξονικής Παραμόρφωσης

Από τη σχέση:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow P = \frac{E \cdot A}{L} \Delta L \quad (4.6)$$

για $\Delta L = \pm 1$ προκύπτουν οι όροι της αξονικής παραμόρφωσης που είναι:

$$K_{1,1}^X = K_{8,8}^X = -K_{1,8}^X = \frac{E \cdot A}{L} \quad (4.7)$$

β. Θεωρία Κάμψης – Διάτμησης

Προκειμένου να αποσυμπλεχθούν οι κάμψεις σε δύο διαφορετικούς άξονες, γίνεται ο υπολογισμός των σταθερών k στους κύριους άξονες τις δοκού. Η πραγματική κατάσταση θα προκύψει με στροφή αξόνων του μητρώου δυσκαμψίας και των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων. Η επίλυση θα γίνει μόνο για ροπή στον άξονα y. Οι όροι του k είναι ίδιοι ή αντίθετοι για τον άξονα z.

(1) Θεωρία Euler – Bernoulli

Επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση (2.30) για ροπή στον άξονα y, με τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

— Για $w(0)=1$, $w(L)=-w'(0)=-w'(L)=0$:

$$K_{3,3}^Y = -Q_z(0) = \frac{12 E I_{yy}}{L^3} \quad (4.8.a)$$

$$K_{5,3}^Y = M_y(0) = -\frac{6 E I_{yy}}{L^2} \quad (4.8.β)$$

$$K_{10,3}^Y = Q_z(L) = -K_{3,3}^Y \quad (4.8.γ)$$

$$K_{12,3}^Y = -M_y(L) = K_{5,3}^Y \quad (4.8.δ)$$

— Για $-w'(0)=1$, $w(0)=w(L)=-w'(L)=0$:

$$K_{5,5}^Y = M_y(0) = \frac{4EI_{yy}}{L} \quad (4.8.ε)$$

$$K_{10,5}^Y = Q_z(L) = -K_{5,3}^Y \quad (4.8.στ)$$

$$K_{12,5}^Y = -M_y(L) = \frac{2EI_{yy}}{L} \quad (4.8.ζ)$$

— Για $w(L)=1$, $w(0)=-w'(0)=-w'(L)=0$:

$$K_{10,10}^Y = Q_z(L) = K_{3,3}^Y \quad (4.8.η)$$

$$K_{12,10}^Y = -M_y(L) = -K_{5,3}^Y \quad (4.8.θ)$$

— Για $-w'(L)=1$, $w(0)=-w'(0)=w(L)=0$:

$$K_{12,12}^Y = -M_y(L) = K_{5,5}^Y \quad (4.8.ι)$$

— Για $p_z(x)=1$, $w(0)=-w'(0)=w(L)=-w'(L)=0$ (για διαφορετικά $p_z(x)$ πρέπει να λυθεί η διαφορική εξίσωση):

$$P_3^Y = -[-Q_z(0)] = \frac{L}{2} \quad (4.9.α)$$

$$M_5^Y = -[M_y(0)] = -\frac{L^2}{12} \quad (4.9.β)$$

$$P_{10}^Y = -[Q_z(L)] = P_3^Y \quad (4.9.γ)$$

$$M_{12}^Y = -[-M_y(L)] = -M_5^Y \quad (4.9.δ)$$

Τα μητρώα δυσκαμψίας και οι ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις για ροπή στον άξονα Y και Z αντιστοιχά είναι:

$$[K^Y] = \frac{EI_{yy}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ & & 12 & 6L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad [K^Z] = \frac{EI_{zz}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.10.α)$$

$$\vec{P}_0^Y = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & -\frac{L^2}{12} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{12} \end{bmatrix} \text{ για } p_z(x)=1 \quad \vec{P}_0^Z = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & \frac{L^2}{12} & \frac{L}{2} & -\frac{L^2}{12} \end{bmatrix} \text{ για } p_y(x)=1 \quad (4.10.β)$$

(2) Θεωρία Timoshenko

Επιλύοντας τις διαφορικές εξισώσεις (2.26) για ροπή στον άξονα y, με τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

— Για $w(0)=1$, $w(L)=\theta_y(0)=\theta_y(L)=0$:

$$K_{3,3}^Y = -Q_z(0) = \frac{12AGEI_{yy}}{AGL^3 + 12a_zLEI_{yy}} \quad (4.11.α)$$

$$K_{5,3}^Y = M_y(0) = -\frac{6AGEI_{yy}}{AGL^2 + 12a_zEI_{yy}} \quad (4.11.β)$$

$$K_{10,3}^Y = Q_z(L) = -K_{3,3}^Y \quad (4.11.γ)$$

$$K_{12,3}^Y = -M_y(L) = K_{5,3}^Y \quad (4.11.δ)$$

— Για $\theta_y(0)=1$, $w(0)=w(L)=\theta_y(L)=0$:

$$K_{5,5}^Y = M_y(0) = \frac{4EI_{yy}(AGL^2 + 3a_zEI_{yy})}{AGL^3 + 12a_zLEI_{yy}} \quad (4.11.ε)$$

$$K_{10,5}^Y = Q_z(L) = -K_{5,3}^Y \quad (4.11.στ)$$

$$K_{12,5}^Y = -M_y(L) = \frac{2EI_{yy}(AGL^2 - 6a_zEI_{yy})}{AGL^3 + 12a_zLEI_{yy}} \quad (4.11.ζ)$$

— Για $w(L)=1$, $w(0)=\theta_y(0)=\theta_y(L)=0$:

$$K_{10,10}^Y = Q_z(L) = K_{3,3}^Y \quad (4.11.η)$$

$$K_{12,10}^Y = -M_y(L) = -K_{5,3}^Y \quad (4.11.θ)$$

— Για $\theta_y(L)=1$, $w(0)=\theta_y(0)=w(L)=0$:

$$K_{12,12}^Y = -M_y(L) = K_{5,5}^Y \quad (4.11.ι)$$

— Για $p_z(x)=1$, $w(0)=\theta_y(0)=w(L)=\theta_y(L)=0$ οι ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις είναι ίδιες με αυτές των σχέσεων (4.9) της θεωρίας Euler – Bernoulli (για διαφορετικά $p_z(x)$ πρέπει να λυθεί η διαφορική εξίσωση).

— Για $m_y(x)=1$, $w(0)=\theta_y(0)=w(L)=\theta_y(L)=0$ (για διαφορετικά $m_y(x)$ πρέπει να λυθεί η διαφορική εξίσωση):

$$P_3^Y = -[-Q_z(0)] = \frac{AGL^2}{AGL^2 + 12a_zEI_{yy}} \quad (4.12.α)$$

$$M_5^Y = -[M_y(0)] = \frac{6a_zLEI_{yy}}{AGL^2 + 12a_zEI_{yy}} \quad (4.12.β)$$

$$P_{10}^Y = -[Q_z(L)] = -P_3^Y \quad (4.12.γ)$$

$$M_{12}^Y = -[-M_y(L)] = M_5^Y \quad (4.12.δ)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας και οι ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις για ροπή στον άξονα Z προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο που προκύπτουν και στη θεωρία Euler – Bernoulli (4.10).

γ. Θεωρία Στρέψης – Στρέβλωσης

(1) Θεωρία Ομοιόμορφης Στρέψης (Saint Venant)

Η ομοιόμορφη στρέψη έχει την ίδια διαφορική εξίσωση (3.70) με την ανομοιόμορφη στρέψη με τον περιορισμό ότι $\theta''(x)=0 \Leftrightarrow m_t=0$. Ο περιορισμός αυτός μηδενίζει την στρέβλωση και κανονικά θα έπρεπε το μητρώο δυσκαμψίας δοκού με ομοιόμορφη στρέψη να είναι 12×12 (αντί για 14×14) επειδή οι αντίστοιχοι όροι της στρέβλωσης είναι όλοι μηδέν και το μητρώο δεν θα αντιστρέφεται. Εδώ θα διατηρηθεί 14×14 για ομοιομορφία και για να επιλυθεί το στατικό πρόβλημα θα παγιωθεί η στρέβλωση για να μην συμμετέχει στην αντιστροφική πίνακα.

$$K_{7,4}^T = K_{14,4}^T = K_{7,7}^T = K_{11,7}^T = K_{14,7}^T = K_{14,11}^T = K_{14,14}^T = 0 \quad (4.13.α)$$

— Για $\theta(0)=1$, $\theta(L)=0$:

$$K_{4,4}^T = -M_t(0) = \frac{G I_t}{L} \quad (4.14.α)$$

$$K_{11,4}^T = M_t(L) = -K_{4,4}^T \quad (4.14.β)$$

— Για $\theta(0)=1$, $\theta(L)=0$:

$$K_{11,11}^T = M_t(L) = K_{4,4}^T \quad (4.14.γ)$$

Επειδή $m_t=0$ δεν έχουμε ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις.

(2) Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης

Επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση (3.70) με τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

— Για $\theta(0)=1$, $\theta(L)=\theta'(0)=\theta'(L)=0$:

$$K_{4,4}^T = -M_t(0) = \frac{b^2}{L - 2 \frac{\tanh(d)}{c}} \quad (4.15.α)$$

$$K_{7,4}^T = M_w(0) = \frac{b^2}{c L \coth(d) - 2} \quad (4.15.β)$$

$$K_{11,4}^T = M_t(L) = -K_{4,4}^T \quad (4.15.γ)$$

$$K_{14,4}^T = -M_w(L) = K_{7,4}^T \quad (4.15.δ)$$

— Για $\theta'(0)=1$, $\theta(0)=\theta(L)=\theta'(L)=0$:

$$K_{7,7}^T = M_w(0) = \frac{a b^2 L (g^2 + 1) - a^2 b (g^2 - 1)}{f} \quad (4.15.ε)$$

$$K_{11,7}^T = M_t(L) = -K_{7,4}^T \quad (4.15.στ)$$

$$K_{14,7}^T = -M_w(L) = \frac{-2 a b^2 L g + a^2 b (g^2 - 1)}{f} \quad (4.15.ζ)$$

— Για $\theta(L)=1$, $\theta(0)=\theta'(0)=\theta'(L)=0$:

$$K_{11,11}^T = M_t(L) = K_{4,4}^T \quad (4.15.η)$$

$$K_{14,11}^T = -M_w(L) = -K_{7,4}^T \quad (4.15.θ)$$

— Για $\theta'(L)=1$, $\theta(0)=\theta'(0)=\theta(L)=0$:

$$K_{14,14}^T = -M_w(L) = K_{7,7}^T \quad (4.15.ι)$$

— Για $m_t(x)=1$, $\theta(0)=\theta'(0)=\theta(L)=\theta'(L)=0$ (για διαφορετικά $m_t(x)$ πρέπει να λυθεί η διαφορική εξίσωση):

$$M_4^T = -[-M_t(0)] = \frac{L}{2} \quad (4.16.α)$$

$$M_7^T = -[M_w(0)] = \frac{L \coth(d)}{2c} - \frac{1}{c^2} \quad (4.16.β)$$

$$M_{11}^T = -[M_t(L)] = M_4^T \quad (4.16.γ)$$

$$M_{14}^T = -[-M_w(L)] = -M_7^T \quad (4.16.δ)$$

όπου:

$$a = \sqrt{E C_s} \quad b = \sqrt{G I_t} \quad c = \frac{b}{a} \quad (4.17.α,β,γ)$$

$$d = \frac{c L}{2} \quad g = e^{2d} \quad f = b L (g^2 - 1) - 2 a (g - 1)^2 \quad (4.17.δ,ε,στ)$$

(3) Θεωρία Ανομοιομόρφης Στρέψης με Δευτερογενείς Στρεπτικές Παραμορφώσεις

Επιλύοντας το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3.24) με τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

— Για $\theta(0)=1$, $\theta(L)=\theta^P'(0)=\theta^P'(L)=0$:

$$K_{4,4}^T = -M_t(0) = \frac{b^2}{L - \frac{2 a \tanh(d)}{b c}} \quad (4.18.α)$$

$$K_{7,4}^T = M_w(0) = \frac{b^2}{\frac{b c L \coth(d)}{a} - 2} \quad (4.18.β)$$

$$K_{11,4}^T = M_t(L) = -K_{4,4}^T \quad (4.18.γ)$$

$$K_{14,4}^T = -M_w(L) = K_{7,4}^T \quad (4.18.δ)$$

— Για $\theta^P'(0)=1$, $\theta(0)=\theta(L)=\theta^P'(L)=0$:

$$K_{7,7}^T = M_w(0) = \frac{a b^2 c L (g^2 + 1) - a^2 b (g^2 - 1)}{b c^2 L (g^2 - 1) - 2 a c (g - 1)^2} \quad (4.18.ε)$$

$$K_{11,7}^T = M_t(L) = -K_{7,4}^T \quad (4.18.στ)$$

$$K_{14,7}^T = -M_w(L) = \frac{2 a^2 b \cosh(d) - a b^2 c L \operatorname{csch}(d)}{2 b c^2 L \cosh(d) - 4 a c \sinh(d)} \quad (4.18.ζ)$$

— Για $\theta(L)=1$, $\theta(0)=\theta^P'(0)=\theta^P'(L)=0$:

$$K_{11,11}^T = M_t(L) = K_{4,4}^T \quad (4.18.η)$$

$$K_{14,11}^T = -M_w(L) = -K_{7,4}^T \quad (4.18.θ)$$

— Για $\theta^P'(L)=1$, $\theta(0)=\theta^P'(0)=\theta(L)=0$:

$$K_{14,14}^T = -M_w(L) = K_{7,7}^T \quad (4.18.ι)$$

— Για $m_t(x)=1$, $\theta(0)=\theta^P'(0)=\theta(L)=\theta^P'(L)=0$ (για διαφορετικά $m_t(x)$ πρέπει να λυθεί η διαφορική εξίσωση):

$$M_4^T = -[-M_t(0)] = \frac{L}{2} \quad (4.19.α)$$

$$M_7^T = -[M_w(0)] = \frac{a L \coth(d)}{2 b c} - \frac{E C_s}{b^2} \quad (4.19.β)$$

$$M_{11}^T = -[M_t(L)] = M_4^T \quad (4.19.γ)$$

$$M_{14}^T = -[-M_w(L)] = -M_7^T \quad (4.19.δ)$$

— Για $m_w(x)=1$, $\theta(0)=\theta^P'(0)=\theta(L)=\theta^P'(L)=0$ (για διαφορετικά $m_w(x)$ πρέπει να λυθεί

η διαφορική εξίσωση):

$$M_4^T = -[-M_t(0)] = \frac{1}{I_t^S} \frac{b c I_t^S L (g+1) - 2 a c^2 (g-1)}{b c L (g+1) - 2 a (g-1)} \quad (4.20.α)$$

$$M_7^T = -[M_w(0)] = \frac{I_t^P a L}{2 a - b c L \coth(d)} \quad (4.20.β)$$

$$M_{11}^T = -[M_t(L)] = -M_4^T \quad (4.20.γ)$$

$$M_{14}^T = -[-M_w(L)] = M_7^T \quad (4.20.δ)$$

όπου:

$$a = \sqrt{E C_S I_t^S} \quad b = \sqrt{G I_t^P} \quad c = \sqrt{I_t^P + I_t^S} \quad (4.21.α,β,γ)$$

$$d = \frac{b I_t^S L}{2 a c} \quad g = e^{2d} \quad (4.21.δ,ε)$$

5. Μετάδοση Στρέβλωσης

Κατά την Στατική Γραμμικά Ελαστική Ανάλυση ενός φορέα, οι κόμβοι συνήθως αντιμετωπίζονται ως στερεά σώματα. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση ένας κόμβος μπορεί να υποστεί στροφή ή μετατόπιση στερεού σώματος, δίχως όμως να παραμορφώνεται.

Στην περίπτωση της στρέβλωσης είναι αδύνατο να αντιμετωπιστεί ο κόμβος ως στερεό σώμα. Η στροφή και η μετατόπιση ενός στερεού σώματος, από μόνες τους δεν μπορούν να προσομοιώσουν τα φαινόμενα της στρέβλωσης που εμφανίζονται στα άκρα των δοκών.

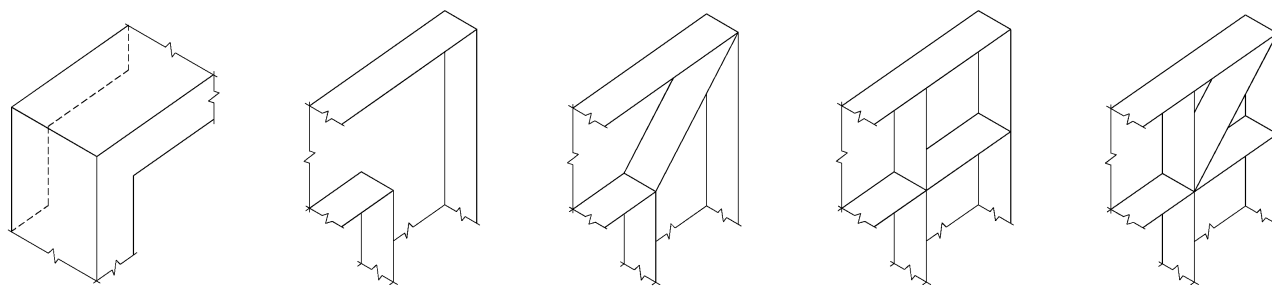
Εφόσον η στρέβλωση εξαναγκάζει σε παραμόρφωση τον κόμβο, είναι προφανές ότι σε αντίθεση με τη στροφή και τη μετατόπιση, η διαμόρφωση του κόμβου παίζει ρόλο στη μετάδοση της στρέβλωσης[3][11][14][26].

Λόγω της παραμόρφωσης του κόμβου η μετάδοση στρέβλωσης μεταξύ στοιχείων δυσκαμψίας μπορεί να πραγματοποιηθεί εξ ολοκλήρου, μόνο κατά ένα μέρος ή και καθόλου. Στην πλέον γενική μορφή τα εντατικά μεγέθη στα άκρα όλων των δοκών που συντρέχουν σε έναν κόμβο είναι γραμμικός συνδυασμός όλων των βαθμών ελευθερίας στα άκρα όλων των παραπάνω δοκών. Αυτό κατά τη στατική ανάλυση επιτυγχάνεται μητρικά με χρήση στοιχείου κόμβου (εναλλακτικά λέγεται στοιχείο σύνδεσης – link element), ένα για κάθε κόμβο. Στην ειδική περίπτωση που οι δοκοί καταλήγουν με γωνίες 180° ή 90° στον κόμβο, οι βαθμοί ελευθερίας στροφών κάμψης και στρέψης αποζευγνύονται οπότε το στοιχείο κόμβου συνδέει τα εντατικά μεγέθη ροπής στρέψης και δίρροπου στρέβλωσης στα άκρα δοκού που καταλήγει σε κόμβο, είναι γραμμικός συνδυασμός της γωνίας στρέψης και της στρέβλωσης όλων των δοκών που καταλήγουν στον ίδιο κόμβο. Πολλοί ερευνητές έχουν απλοποιήσει περισσότερο τις σχέσεις αυτές για ειδικές διαμορφώσεις κόμβων.

Στην ειδική περίπτωση που ο κόμβος αντιμετωπίζεται ως στερεό σώμα, λειτουργεί ως παγίωση της στρέβλωσης άρα δεν υπάρχει μετάδοση στρέβλωσης.

Για παραμορφώσιμους κόμβους οι Yang και MacGuire[30] προκειμένου να προσομοιώσουν μερική παγίωση στρέβλωσης εισήγαγαν στον κόμβο ένα ελατήριο στρέβλωσης για κάθε μέλος, των οποίων η σταθερά εξαρτάται από τη συστροφή του αντίστοιχου μέλους. Δηλαδή για το άκρο i ενός μέλους $M_w^i = k_i \cdot \theta'_i$. Έπειτα εξάλειψαν τους βαθμούς ελευθερίας της στρέβλωσης με συμπύκνωση. Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και σε κόμβους όπου συντρέχουν δοκοί λεπτότοιχων διατομών. Το πρόβλημά της είναι η δυσκολία υπολογισμού της σταθεράς του ελατηρίου στρέβλωσης.

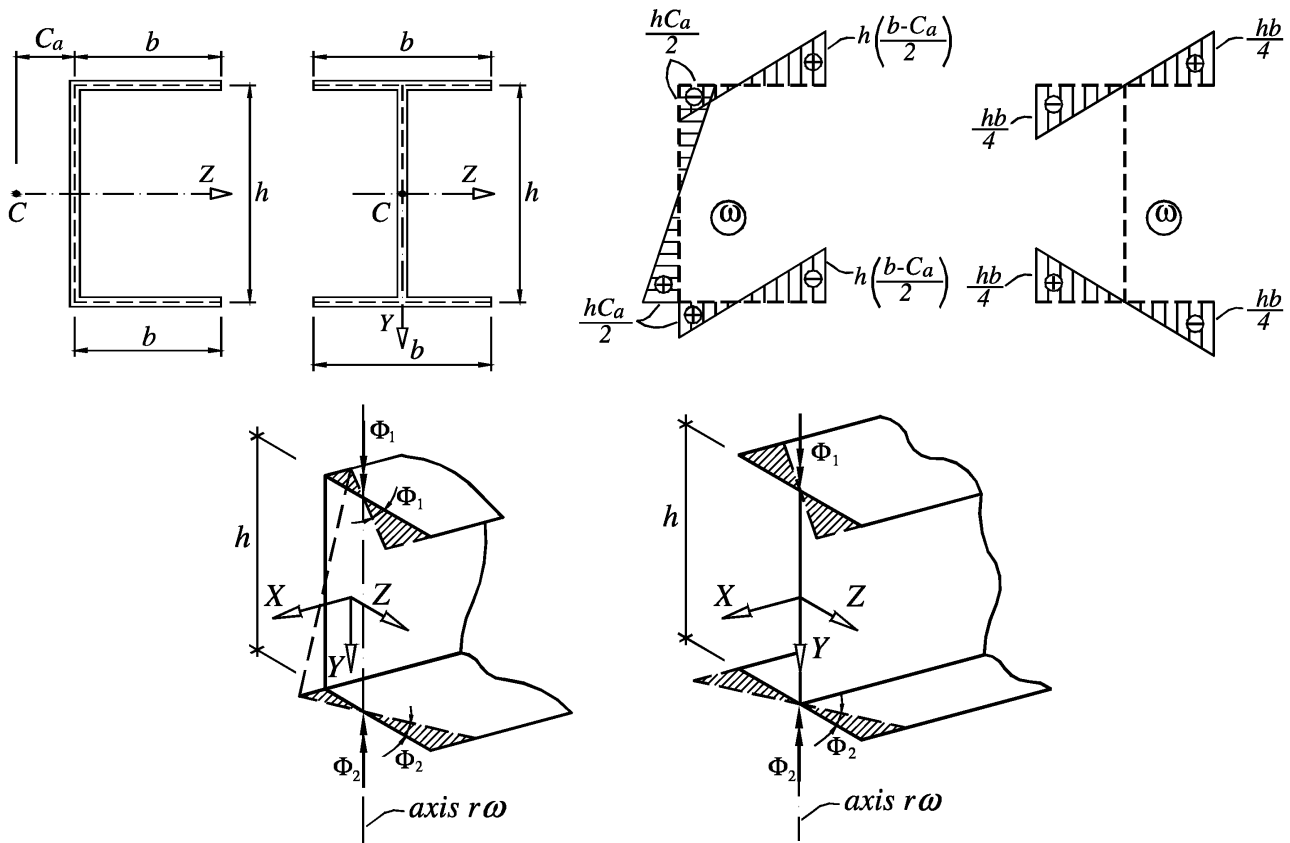
α. Κόμβοι όπου Συντρέχουν Μέλη Λεπτότοιχων Διατομών



Σχ. 5.1. Διαμορφώσεις κόμβων μελών διατομής C (παρόμοιες είναι και για διατομές I).

Από αριστερά προς τα δεξιά: με συνέχεια πελμάτων, με συνέχεια κορμού, με διαγώνιο έλασμα δυσκαμψίας, με κιβωτιοειδή διαμόρφωση και κιβωτιοειδής με διαγώνιο έλασμα δυσκαμψίας.

Με κόμβους όπου συντρέχουν μέλη λεπτότοιχων διατομών έχουν ασχοληθεί αρκετοί ερευνητές. Αυτό γιατί όλες οι τυποποιημένες μεταλλικές διατομές (I, C, L) μπορούν με ικανοποιητική ακρίβεια να θεωρηθούν λεπτότοιχες.



Σχ. 5.2. Διατομές I, C. πάνω: διατομές κάτω: Στρέβλωση και γωνία στρέβλωσης

Οι περισσότερες δημοσιεύσεις για μετάδοση στρέβλωσης σε κόμβους όπου συντρέχουν μέλη λεπτότοιχων διατομών I, C, L κάνουν την παραδοχή ότι η εγκάρσια κάμψη του κορμού της διατομής απαγορεύεται. Στην περίπτωση αυτή η μετάδοση της στρέβλωσης είναι πλήρης, δηλαδή έχει ίσες απόλυτες τιμές στα άκρα των μελών. Σε αντίθετη περίπτωση η μετάδοση της στρέβλωσης δεν είναι πλήρης.

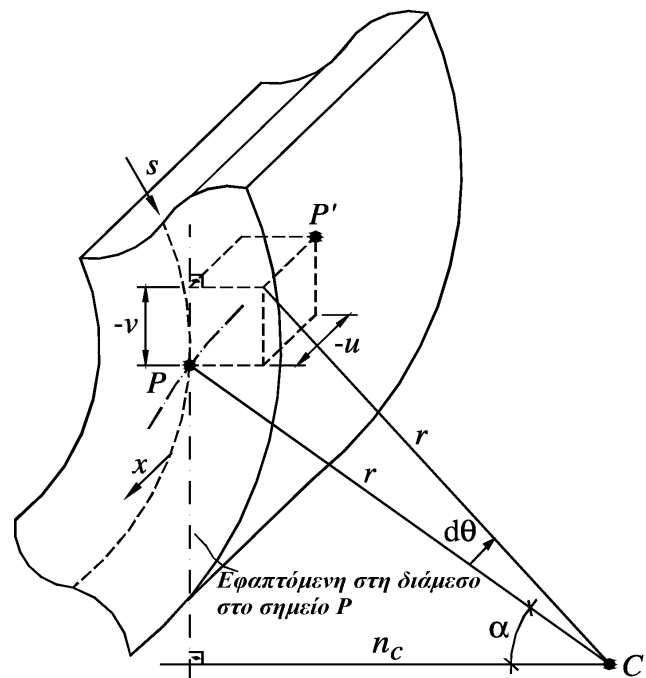
Στο (Σχ. 5.3) γίνεται εμφανές ότι σε λεπτότοιχες διατομές, για στροφή $d\theta$ γύρω από το κέντρο συστροφής C, μετατοπίζει ένα σημείο P που βρίσκεται στην ουδέτερη γραμμή (διάμεσο) της διατομής, σε μια νέα θέση P'. Για μικρές μετατοπίσεις ισχύει

$$-\frac{v}{r \cdot \theta} = \frac{n_c}{r} \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial x} = n_c \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{όπου } v \text{ η μετατόπιση κατά μήκος του άξονα της ουδέτερης γραμμής } s, r \text{ η απόσταση μεταξύ του σημείου P και C και } n_c \text{ η απόσταση του σημείου C από την εφαπτόμενη στην ουδέτερη γραμμή, στο σημείο P. Υιοθετώντας την παραδοχή του Vlasov για μηδενική διατμητική παραμόρφωση σε μεμβράνη προκύπτει:}$$

ση κατά μήκος του άξονα της ουδέτερης γραμμής s , r η απόσταση μεταξύ του σημείου P και C και n_c η απόσταση του σημείου C από την εφαπτόμενη στην ουδέτερη γραμμή, στο σημείο P. Υιοθετώντας την παραδοχή του Vlasov για μηδενική διατμητική παραμόρφωση σε μεμβράνη προκύπτει:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} = -n_c \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (5.1)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση κατά μήκος της ουδέτερης γραμμής μεταξύ των



Σχ. 5.3. Μετατοπίσεις σημείου P διατομής υποβαλλόμενης σε στρέψη

σημείων $s=0$ και $s=P$ προκύπτει η μετατόπιση στρέβλωσης u_P του σημείου P.

$$u_P = \frac{\partial \theta}{\partial x} \int_0^P n ds = \theta'(x) \omega_P \quad (5.2)$$

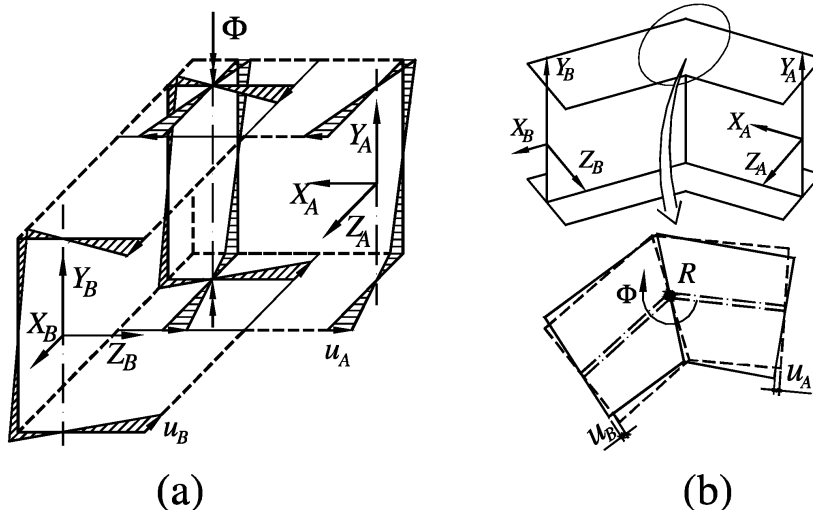
όπου ω_P είναι το εμβαδόν διατομής (συντεταγμένη) που προσδιορίζει το σημείο P.

Στο (Σχ. 5.2), h είναι το ύψος του κορμού, b το πλάτος των πελμάτων και C_a η απόσταση του ουδέτερου άξονα του κορμού από το κέντρο συστροφής C. Τα πέλματα (οι ουδέτερες γραμμές τους) στρέφονται κατά γωνία Φ_1 και Φ_2 , στο επίπεδο των πελμάτων, ίσες και αντίθετες. Για μικρές μετατοπίσεις ισχύει για διατομές C και I:

$$\Phi_1^C(x) = \left[h \frac{b - C_a}{2} \theta'(x) + h \frac{C_a}{2} \theta'(x) \right] \frac{1}{b} = \frac{h}{2} \theta'(x) \quad (5.3.a)$$

$$\Phi_1^I(x) = h \frac{b}{4} \theta'(x) \frac{2}{b} = \frac{h}{2} \theta'(x) \quad (5.3.β)$$

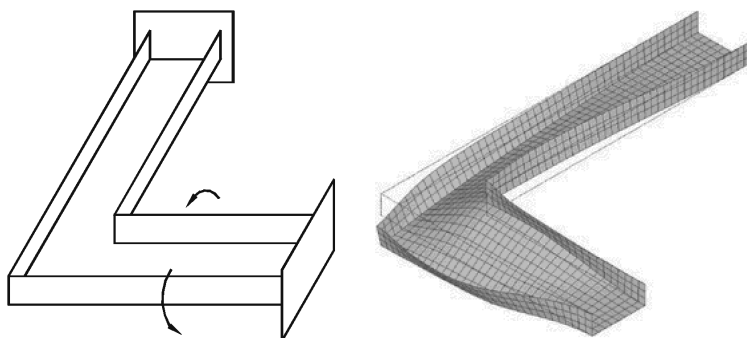
(1) Κόμβοι με Συνέχεια Πελμάτων



Σχ. 5.4. Πλήρης και κανονική μετάδοση στρέβλωσης.
a. Στρέβλωση διατομής C με στροφή πελμάτων κατά Φ .
b. Κινηματική διατομής I πλήρους και κανονικής στρέβλωσης.

Όταν τα πέλματα δύο συνδεδεμένων μελών βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, έχουμε συνέχεια πελμάτων. Αν οι διατομές των δύο μελών είναι ίδιες τότε έχουμε ακριβώς ίδιες συστροφές κατ' απόλυτη τιμή και πρόσημο[4]. Αυτού του είδους η μετάδοση στρέβλωσης είναι πλήρης (ισότητα απολύτων τιμών στρέβλωσης των δύο μελών στον κόμβο) και κανονική (ίδια πρόσημα), δηλαδή $\theta_A' = \theta_B'$. Οι μετατοπίσεις που προκύπτουν από τη στρέβλωση σε κάθε πέγμα ξεχωριστά, μπορούν να προσομοιωθούν από μια στροφή γύρω από έναν άξονα R, παράλληλο στον άξονα Y_A και Y_B .

(2) Κόμβοι με Συνέχεια Κορμού



Σχ. 5.5. Προσομοίωση με στοιχεία κελύφους ενός εύκαμπτου κόμβου όπου καταλήγουν δύο δοκοί διατομής C

Δοκοί I ή C συνδεδεμένοι με συνέχεια κορμού, δίχως ελάσματα δυσκαμψίας, παρουσιάζουν τοπικές παραμορφώσεις στις ακραίες διατομές που περιλαμβάνουν και εγκάρσια κάμψη κορμού και πελμάτων (Σχ. 5.5). Για το λόγο αυτό η μετάδοση της στρέβλωσης δεν θεωρείται πλήρης καθώς μέρος της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης απορροφάται σε αυτές τις δευτερεύουσες παραμορφώσεις.

Προκειμένου να απαγορευτούν αυτές οι δευτερεύουσες παραμορ-

φώσεις χρησιμοποιούνται ελάσματα δυσκαμψίας, άκαμπτα στο επίπεδό τους. Τέτοια ελάσματα εμφανίζονται στις 3 δεξιά διαμορφώσεις κόμβων του Σχ. 5.1 με διαγώνια ή κιβωτιοειδή ελάσματα.

(3) Κόμβοι με Διαγώνιο Έλασμα Δυσκαμψίας

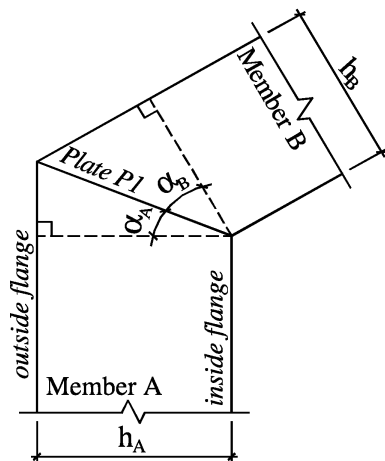
(α) Με Άκαμπτο στο Επίπεδό του Έλασμα Δυσκαμψίας

Ο Camotim[4] κάνει την παραδοχή ότι το διαγώνιο έλασμα δεν κάμπτεται στο επίπεδό του.

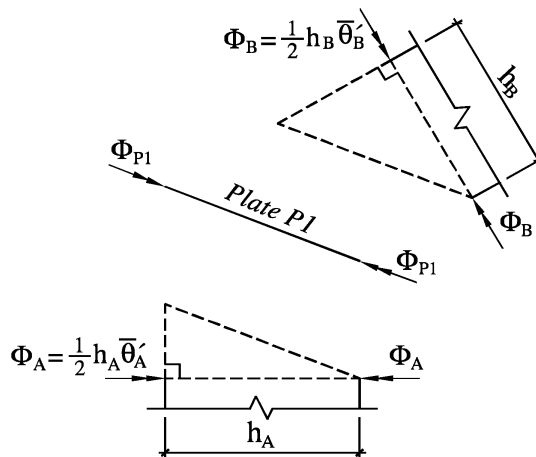
Σκοπός είναι (Σχ. 5.6.α) να βρεθεί πως η στρέβλωση του μέλους A μεταφέρεται στο μέλος B διαμέσω του κόμβου ο οποίος περιλαμβάνει ένα έλασμα δυσκαμψίας P1.

Τα ύψη των κορμών των δύο μελών σχετίζονται με τη σχέση

$\frac{h_A}{\cos \alpha_A} = \frac{h_B}{\cos \alpha_B}$ και οι γωνίες της στρέβλωσης με τη σχέση $\Phi_{Pl} = \frac{\Phi_A}{\cos \alpha_A} = \frac{\Phi_B}{\cos \alpha_B}$. Με αντικατάσταση από τη σχέση (5.3) προκύπτει $\theta_A' = \theta_B'$ δηλαδή η μετάδοση στρέβλωσης είναι πλήρης και κανονική.



α. Γεωμετρία κόμβου



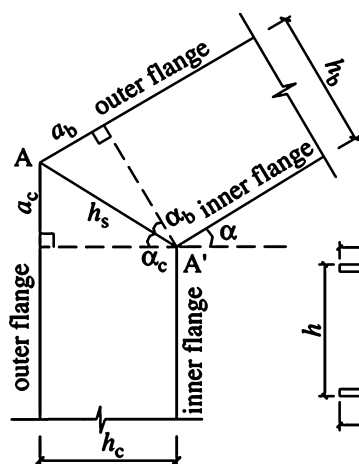
β. Μετάδοση στρέβλωσης

Σχ. 5.6. Κόμβος με διαγώνιο έλασμα δυσκαμψίας

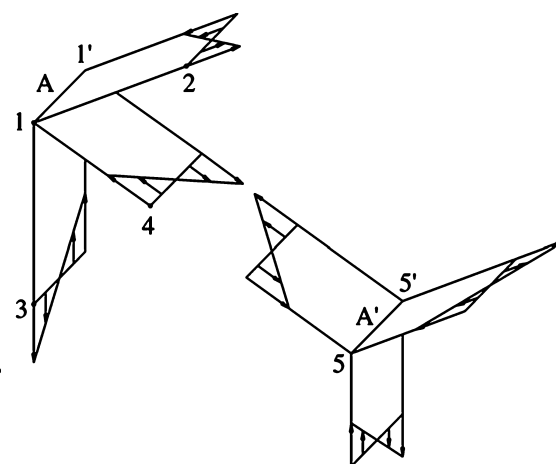
(β) Με Εύκαμπτο στο Επίπεδό του Έλασμα Δυσκαμψίας

Οι Tong και Zhang[25] λαμβάνουν υπόψη τους την παραμόρφωση του ελάσματος δυσκαμψίας. Θεωρούν ότι υπόκειται σε καθαρή κάμψη και εκτός από τη μετάδοση της στρέβλωσης ασχολούνται και με την μετάδοση του διρρόπου στρέβλωσης. Παράλληλα λαμβάνουν υπόψη τους την κάμψη των κορμών των μελών στο επίπεδο της διατομής των μελών (distortion).

Στο (Σχ. 5.7) φαίνεται ένας κόμβος με διαγώνιο έλασμα δυσκαμψίας. Στην εξωτερική γωνία A, δύο ελάσματα πελμάτων και ένα έλασμα δυσκαμψίας συναντώνται. Στις ακμές των πελμάτων 1-2 και 1-3 έχουμε εφελκυστικές τάσεις για την ισορροπία των οποίων απαιτούνται θλιπτικές τάσεις στην ακμή



α. Γεωμετρία κόμβου

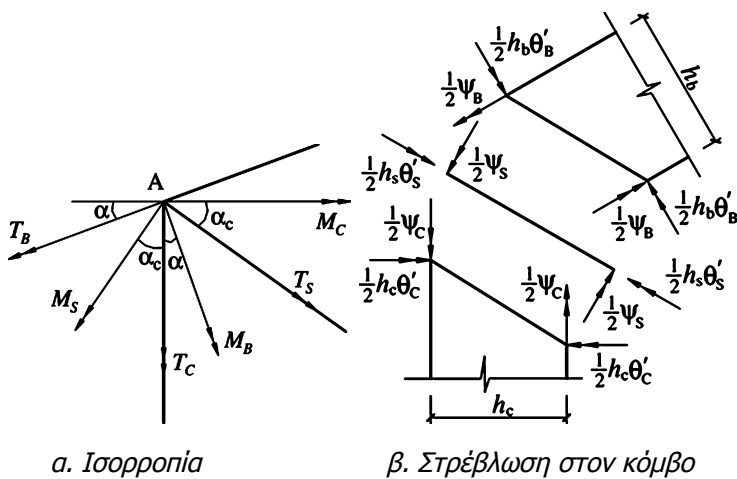


β. Κατανομή των τάσεων

Σχ. 5.7. Κόμβος με διαγώνιο έλασμα δυσκαμψίας

1-4 του ελάσματος. Επίσης υφίσταται ισορροπία ροπών στη γωνία A. Ίσα και αντίθετα τα μεγέθη στην εσωτερική γωνία A'. Από την κατανομή των τάσεων στο (Σχ. 5.7.β) προκύπτει ότι το διαγώνιο έλασμα υπόκειται σε καθαρή κάμψη. Γίνεται η παραδοχή ότι στα άκρα του διαγωνίου ελάσματος οι

ροπές είναι ίσες και οι στροφές των ακμών 1-1' και 5-5' είναι ίσες και αντίθετες.



α. Ισορροπία

β. Στρέβλωση στον κόμβο

Σχ. 5.8. Κόμβος με διαγώνιο έλασμα δυσκαμψίας

Οι δείκτες c,b,s αναφέρονται στο υποστυλώμα (column), δοκό (beam) και έλασμα δυσκαμψίας (stiffener) αντίστοιχα, ενώ οι δείκτες C,B,S αναφέρονται σε μεγέθη που εμφανίζονται από τα αντίστοιχα μέλη στον κόμβο.

Στην εξωτερική γωνία A η ισορροπία ροπών εμφανίζεται στο (Σχ. 5.8.α), όπου M καμπτικές ροπές και T στρεπτικές ροπές του εξωτερικού πέλματος των δοκών και του ελάσματος δυσκαμψίας. Στο (Σχ. 5.8.β) φαίνεται η γωνία στροφής του ελάσματος δυσκαμψίας στο επίπεδο του (γωνία στρέβλωσης) και η γωνία παραμόρφωσης της διατομής του κορμού των μελών (γωνία παραμόρφωσης της διατομής στο επίπεδο της).

Σύμφωνα με τη σχέση (5.3) οι γωνίες στρέβλωσης υποστυλώματος και δοκού στον κόμβο είναι $\frac{h_c}{2} \theta'_C$ και $\frac{h_b}{2} \theta'_B$. Οι στρεπτικές γωνίες των εξωτερικών πελμάτων είναι $\frac{1}{2} \Psi_C$ και $\frac{1}{2} \Psi_B$ που αποτελούν επίσης και γωνίες παραμόρφωσης στο επίπεδο της διατομής (distortion) του κορμού της διατομής. $\frac{1}{2} \Psi_S$ είναι η καμπτική γωνία του ελάσματος δυσκαμψίας στο επίπεδό του και $\frac{h_s}{2} \theta'_S$ η στρεπτική γωνία του. Όλα τα μεγέθη της εξωτερικής γωνίας του κόμβου είναι ίσα και αντίθετα με την εσωτερική. Αυτό σημαίνει ότι μόνο μια γωνία χρειάζεται να μελετηθεί.

(γ) Γεωμετρία του Κόμβου

Οι εξωτερικές πλευρές a_c και a_b του κόμβου (Σχ. 5.7.α) και οι αντίστοιχες γωνίες είναι:

$$\text{πλευρά } a_c = \frac{h_b - h_c \sin a}{\cos a} \text{ και γωνία } a_c = \arctan \frac{a_c}{h_c} \quad (5.4.α)$$

$$\text{πλευρά } a_b = \frac{h_b - h_c \sin a}{\cos a} \text{ και γωνία } b_c = \arctan \frac{b_c}{h_c} \quad (5.4.β)$$

Το μήκος του ελάσματος δυσκαμψίας είναι:

$$h_s = \frac{h_c}{\cos a_c} = \frac{h_b}{\cos a_b} \quad (5.5)$$

Από το συμβιβαστό των παραμορφώσεων (Σχ. 5.8.β) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$h_c \cdot \theta'_C = h_s \cdot \theta'_S \cdot \cos a_c - \Psi_S \cdot \sin a_c \quad (5.6.α)$$

$$\Psi_C = h_s \cdot \theta'_S \cdot \sin a_c + \Psi_S \cdot \cos a_c \quad (5.6.β)$$

$$h_b \cdot \theta'_B = h_s \cdot \theta'_S \cdot \cos a_b + \Psi_S \cdot \sin a_b \quad (5.6.γ)$$

$$\Psi_B = -h_s \cdot \theta'_S \cdot \sin a_b + \Psi_S \cdot \cos a_b \quad (5.6.δ)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτουν η στρέβλωση του ελάσματος δυσκαμψίας και οι γωνίες κάμψης των κορμών των μελών, στο επίπεδο της διατομής.

$$\Psi_S = \frac{h_c \cdot \cos a_b \cdot (\theta'_B - \theta'_C)}{\sin (a_b + a_c)} \quad (5.7.α)$$

$$\theta_s' = \frac{\theta_c' \cdot \cos a_c \cdot \sin a_b + \theta_B' \cdot \cos a_b \cdot \sin a_c}{\sin(a_b + a_c)} \quad (5.7.\beta)$$

$$\psi_c = \frac{h_b \cdot \theta_B' - h_c \cdot \theta_c' \cdot \cos(a_b + a_c)}{\sin(a_b + a_c)} \quad (5.7.\gamma)$$

$$\psi_B = \frac{h_b \cdot \theta_B' - h_c \cdot \theta_c' \cdot \cos(a_b + a_c)}{\sin(a_b + a_c)} \quad (5.7.\delta)$$

(δ) Στρεπτικές Ροπές σε Πέλματα Μελών και Έλασμα Δυσκαμψίας

Γίνεται η παραδοχή ότι η συστροφή του ελάσματος δυσκαμψίας είναι σταθερή, ισχύει δηλαδή η θεωρία Saint Venant. Η στρεπτική ροπή στο έλασμα δυσκαμψίας θα είναι:

$$T_s = G \cdot I_s' \cdot \theta_s' \quad (5.8)$$

Κατά τη στρέψη του ελάσματος δυσκαμψίας, αυτό επειδή είναι κολλημένο με τους κορμούς των μελών, παρουσιάζει πολύ μεγάλη στρεπτική αντίσταση η οποία είναι:

$$I_s' = I_s + \frac{1}{3} \chi (h_c \cdot t_{wc}^3 + h_b \cdot t_{wb}^3) \quad (5.9)$$

όπου $I_s = \frac{1}{3} b_s \cdot t_s^3$ η στρεπτική αντίσταση Saint Venant μόνο του ελάσματος δυσκαμψίας (χωρίς να είναι κολλημένο στους κορμούς των μελών), b_s και t_s πλάτος και πάχος του ελάσματος δυσκαμψίας, t_{wc} και t_{wb} τα πάχη των κορμών των αντίστοιχων μελών και χ ένας διορθωτικός συντελεστής ίσος με $\chi = \frac{3 \cos a}{2 \cos a_c \cos a_b}$.

1/ Κάμψη Κορμού Δοκού στο Επίπεδο της Διατομής I

Δοκός με γωνία κάμψης στο επίπεδο της διατομής ψ_0 , διαθέτει ελαστική ενέργεια ανά μονάδα μήκους:

$$W = \frac{1}{4} G I \psi'^2 + \frac{D_w}{2h} \psi^2 \quad (5.10)$$

όπου I η στρεπτική σταθερά του Saint Venant για ένα πέλμα και $D_w = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$ η καμπτική δυσκαμψία του κορμού.

Η αντίστοιχη εξίσωση Euler και η λύση της για οριακές συνθήκες $\psi(0) = \psi_0$ και $\psi(-\infty) = 0$ είναι:

$$\psi'' - k_\psi^2 \psi = 0 \Rightarrow \psi = A \cosh(k_\psi x) + B \sinh(k_\psi x) \Rightarrow \psi = \psi_0 \cosh(k_\psi x) + \psi_0 \sinh(k_\psi x) \quad (5.11)$$

$$\text{όπου } k_\psi = \sqrt{\frac{2 D_w}{G I h}}.$$

Η στρεπτική ροπή του πέλματος για $x=0$ είναι:

$$T = \frac{1}{2} G I \psi' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 G I D_w}{h}} \psi_0 \quad (5.12)$$

οπότε αντίστοιχα προκύπτουν οι στρεπτικές ροπές των πελμάτων των μελών C,B.

(ε) Σχέση Διρρόπων και Βαθμών Ελευθερίας Στρέβλωσης

Το έλασμα δυσκαμψίας υπόκειται σε καθαρή κάμψη και αν I_s η ροπή αδρανείας του, η ροπή κάμψης είναι:

$$M_s = E I_s \frac{\Psi_s}{h_s} \quad (5.13)$$

Η ισορροπία ροπών στην εξωτερική γωνία (Σχ. 5.8.α) απαιτεί:

$$M_C - T_B \cos a - M_s \sin a_c + T_s \cos a_c + M_B \sin a = 0 \quad (\text{οριζόντια}) \quad (5.14.α)$$

$$T_C + T_B \sin a + M_s \cos a_c + T_s \sin a_c + M_B \cos a = 0 \quad (\text{κατακόρυφα}) \quad (5.14.β)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$M_C = \frac{M_s \cos a_b + T_C \sin a + T_B - T_s \sin a_b}{\cos a} \quad (5.15.α)$$

$$M_B = \frac{-M_s \cos a_c - T_C - T_B \sin a - T_s \sin a_c}{\cos a} \quad (5.15.β)$$

Τα δίρροπα στρέβλωσης (αριστερό σκέλος) με αντικατάσταση από τις εξισώσεις (5.8), (5.12) και (5.15) προκύπτουν (δεξί σκέλος):

$$B_C = M_C h_c = -\alpha_1 \theta_C' + \alpha_2 \theta_B' \quad (5.16.α)$$

$$B_B = M_B h_b = \alpha_2 \theta_C' - \alpha_3 \theta_B' \quad (5.16.β)$$

όπου:

$$\alpha_1 = h_c \frac{E I_s \cos^2 a_b \cos a_c + \sqrt{\frac{G I_c D_{wc} h_c}{2}} \sin^2 a + h_c \sqrt{\frac{G I_b D_{wb}}{2 h_b}} + G I_s' \cos a_c \sin^2 a_b}{\cos^2 a} \quad (5.17.α)$$

$$\alpha_2 = h_c \cos a_b \cos a_c \frac{E I_s \cos a_b \cos a_c + h_s \sin a \left(\sqrt{\frac{G I_c D_{wc}}{2 h_c}} + \sqrt{\frac{G I_b D_{wb}}{2 h_b}} \right) - G I_s' \sin a_b \sin a_c}{\cos^2 a} \quad (5.17.β)$$

$$\alpha_3 = h_b \frac{E I_s \cos^2 a_c \cos a_b + \sqrt{\frac{G I_b D_{wb} h_b}{2}} \sin^2 a + h_b \sqrt{\frac{G I_c D_{wc}}{2 h_c}} + G I_s' \cos a_b \sin^2 a_c}{\cos^2 a} \quad (5.17.γ)$$

Ενώ για άκαμπτο στο επίπεδό του έλασμα δυσκαμψίας έχουμε πλήρη και κανονική μετάδοση στρέβλωσης με αποτέλεσμα ο ένας βαθμός ελευθερίας να απαλείφεται, σύμφωνα με τους Tong, Zhang η μετάδοση στρέβλωσης δια μέσω κόμβου με διαγώνιο έλασμα δυσκαμψίας εξαρτάται από τη συστροφή και των δύο μελών που συντρέχουν στον κόμβο.

(4) Κόμβοι με Διαμόρφωση Κιβωτίου

Στη διαμόρφωση αυτή τα ελάσματα δυσκαμψίας αποτελούν προεκτάσεις των πελμάτων των μελών που καταλήγουν στον κόμβο (Σχ. 5.9.β). Τα 4 ελάσματα δυσκαμψίας παραμένουν απαράμορφωτα στο επίπεδό τους. Απέναντι ελάσματα (P1-P3 και P2-P4), υπόκεινται σε στροφή στερεού σώματος αντίθετη μεταξύ τους.

Σύμφωνα με το (Σχ. 5.9.γ):

$$\Phi_{P1} = \frac{\Phi_A}{\cos a} = \frac{h_1 \theta_A'}{2 \cos a} \quad \Phi_{P2} = -\frac{h_2}{h_1} \Phi_{P1} \quad (5.18.α)$$

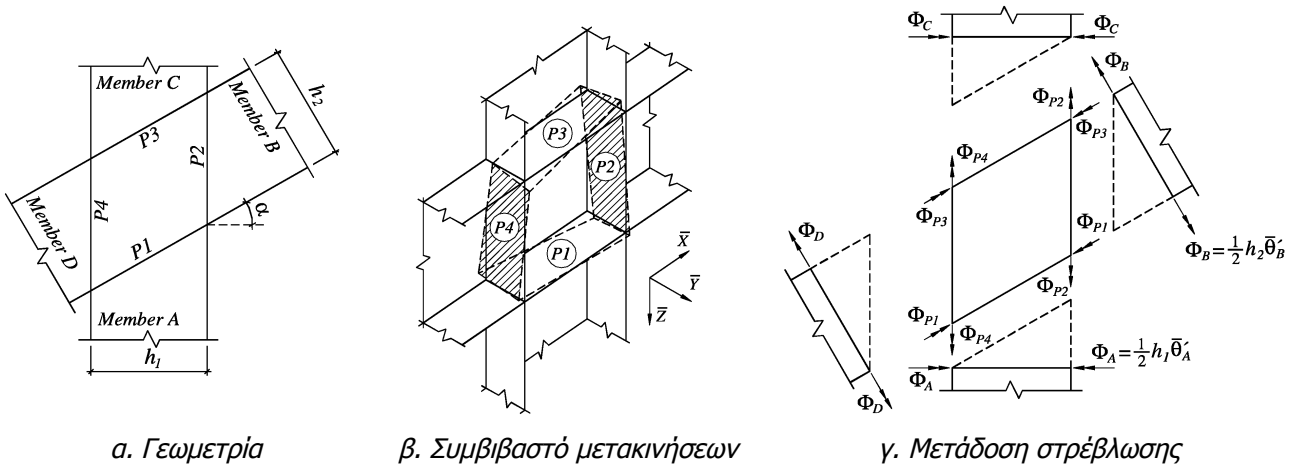
$$\Phi_{P3} = -\frac{h_1}{h_2} \Phi_{P2} \quad \Phi_{P4} = -\frac{h_2}{h_1} \Phi_{P3} \quad (5.18.β)$$

και

$$\Phi_B = \frac{h_2 \theta_B'}{2} = \Phi_{P2} \cos \alpha = -\Phi_A \quad (5.19.\alpha)$$

$$\Phi_C = \frac{h_1 \theta_C'}{2} = \Phi_{P3} \cos \alpha = \Phi_A \quad (5.19.\beta)$$

$$\Phi_D = \frac{h_2 \theta_D'}{2} = \Phi_{P4} \cos \alpha = \Phi_B \quad (5.19.\gamma)$$



β. Συμβιβαστό μετακινήσεων

γ. Μετάδοση στρέβλωσης

Σχ. 5.9. Κόμβος με διαμόρφωση κιβωτίου

Από τις σχέσεις (5.19) γίνεται προφανές ότι:

$$\theta_A' = -\theta_B' = \theta_C' = -\theta_D' \quad (5.20)$$

Άρα για τα απέναντι μέλη (A-C, B-D), η μετάδοση στρέβλωσης είναι πλήρης και κανονική. Σύμφωνα με το (Σχ. 5.9.β) αυτό σημαίνει ότι οι στρεπτικές γωνίες απέναντι μελών είναι αντίρροπες. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί τα ελάσματα δυσκαμψίας ενώνουν τα δύο μέλη σαν να είναι συνεχόμενα. Για τα γειτονικά μέλη (A-B, B-C, C-D, D-A) η μετάδοση στρέβλωσης είναι πλήρης και αντίθετη. Αυτό σημαίνει ότι οι στρεπτικές γωνίες γειτονικών μελών είναι ομόρροπες.

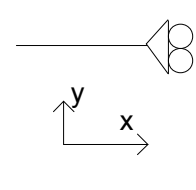
Εξετάζοντας το συμβιβαστό των μετακινήσεων στο (Σχ. 5.9.β), διαπιστώνεται ότι εφόσον τα 4 ελάσματα δυσκαμψίας εκτρέπονται αντίρροπα στον άξονα y, η πλάκα του κορμού που περικλείεται μεταξύ των ελασμάτων παύει να είναι επίπεδη. Αυτή η δευτερεύουσα παραμόρφωση δεν προκαλεί μη πλήρη μετάδοση στρέβλωσης διότι η προϋπόθεση για πλήρη μετάδοση στρέβλωσης είναι να μην υπάρχει παραμόρφωση της διατομής στο επίπεδό της σε κάθε άκρο των συντρέχοντων στον κόμβο μελών. Η μη παραμόρφωση αυτή επιτυγχάνεται με τα 4 ελάσματα δυσκαμψίας στους 4 κορμούς των συντρέχοντων μελών.

Στην περίπτωση που η παραμόρφωση στην πλάκα του κορμού απαγορευτεί με ένα επιπλέον διαγώνιο έλασμα δυσκαμψίας, η μετάδοση στρέβλωσης είναι αδύνατη.

β. Εφαρμογή στη Μητρική Στατική

Όπως προαναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, η μετάδοση στρέβλωσης που εμπλέκει πολλούς βαθμούς ελευθερίας (από διαφορετικά ή και το ίδιο μέλος) υλοποιείται με στοιχείο κόμβου. Το στοιχείο κόμβου είναι το πλέον γενικό και μπορεί να προσομοιώσει όλες τις περιπτώσεις μη πλήρους μετάδοσης στρέβλωσης.

Στην ειδική περίπτωση που ο κόμβος αντιμετωπίζεται ως στερεό σώμα, λειτουργεί ως παγίωση της στρέβλωσης άρα δεν υπάρχει μετάδοση στρέβλωσης.



Σχ. 5.10. Απαλειφή B.E.

Στην περίπτωση που έχουμε πλήρη μετάδοση στρέβλωσης, δηλαδή $\theta_A' = \pm \theta_B'$, η σχέση των βαθμών ελευθερίας εξαναγκάζεται είτε με πολλαπλασιαστές Lagrange, είτε με μέθοδο προστί-

μου. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και η παρακάτω αλγεβρική μέθοδος:

Θα χρησιμοποιηθεί παράδειγμα από την κλασσική στατική για λόγους εξοικείωσης (Σχ. 5.10). Στον κόμβο συντρέχουν δύο κάθετοι δοκοί οι οποίοι συνδέονται με κύλιση. Η δοκός C είναι η κατακόρυφη και η B η οριζόντια. Οι βαθμοί ελευθερίας στα άκρα των δοκών είναι τρεις για κάθε δοκό. Ισχύει στον κόμβο η παρακάτω μητρωική σχέση:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ P_C^x + N \\ P_C^y \\ M_C \\ -N \\ P_B^y \\ M_B \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a & b & c & d & e & f & \cdots \\ \cdots & b & g & h & i & j & k & \cdots \\ \cdots & c & h & l & m & o & p & \cdots \\ \cdots & d & i & m & q & r & s & \cdots \\ \cdots & e & j & o & r & t & u & \cdots \\ \cdots & f & k & p & s & u & v & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_C \\ y_C \\ \theta_C \\ x_B \\ y_B \\ \theta_B \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Υπάρχει επιπρόσθετα και ο περιορισμός $x_C = x_B$, ο οποίος εξαναγκάζει να υπάρχουν εσωτερικές αντιδράσεις N στο φορέα, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ P_C^x - N \\ P_C^y \\ M_C \\ N \\ P_B^y \\ M_B \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a+d & b & c & d & e & f & \cdots \\ \cdots & b+i & g & h & i & j & k & \cdots \\ \cdots & c+m & h & l & m & o & p & \cdots \\ \cdots & d+q & i & m & q & r & s & \cdots \\ \cdots & e+r & j & o & r & t & u & \cdots \\ \cdots & f+s & k & p & s & u & v & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_C \\ y_C \\ \theta_C \\ 0 \\ y_B \\ \theta_B \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας προσωρινά μόνο έχασε τη συμμετρία του. Μετά την απαλοιφή του βαθμού ελευθερίας ακολουθεί η απαλοιφή των εσωτερικών αντιδράσεων, οπότε το μητρώο δυσκαμψίας θα ξαναποκτήσει τη συμμετρία του.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ P_C^x \\ P_C^y \\ M_C \\ N \\ P_B^y \\ M_B \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a+2d+q & b+i & c+m & d+q & e+r & f+s & \cdots \\ \cdots & b+i & g & h & i & j & k & \cdots \\ \cdots & c+m & h & l & m & o & p & \cdots \\ \cdots & d+q & i & m & q & r & s & \cdots \\ \cdots & e+r & j & o & r & t & u & \cdots \\ \cdots & f+s & k & p & s & u & v & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_C \\ y_C \\ \theta_C \\ 0 \\ y_B \\ \theta_B \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Ο πίνακας έγινε ξανά συμμετρικός. Μπορούμε να τον υποβαθμίσουμε σε 5×5 :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ P_C^x \\ P_C^y \\ M_C \\ P_B^y \\ M_B \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a+2d+q & b+i & c+m & e+r & f+s & \cdots \\ \cdots & b+i & g & h & j & k & \cdots \\ \cdots & c+m & h & l & o & p & \cdots \\ \cdots & e+r & j & o & t & u & \cdots \\ \cdots & f+s & k & p & u & v & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_C \\ y_C \\ \theta_C \\ y_B \\ \theta_B \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εσωτερική αντίδραση στην κύλιση χρησιμοποιούμε την

(5.23) ειδώλλως χρησιμοποιούμε την (5.24).

6. Αριθμητικά Αποτελέσματα

α. Σύγκριση Θεωριών Κάμψης



Σχ. 6.1. Σύγκριση θεωριών κάμψης σε πρόβολο

Στο ελεύθερο άκρο της προβόλου του (Σχ. 6.1) ασκείται μοναδιαίο φορτίο P . Η δοκός είναι τύπου I με πλάτος κορμού και πελμάτων $h=b=0.3\text{ m}$ και πάχος κορμού και πελμάτων $t_f=t_w=0.02\text{ m}$. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δοκού είναι μήκος L , διατομή $A=0.0172\text{ m}^2$ και ροπή αδρανείας $I_{yy}=265\cdot 10^{-6}\text{ m}^4$. Τα μηχανικά χαρακτηριστικά της δοκού είναι $E=210\text{ GPa}$, $\nu=0.3$,

$$G=\frac{E}{2(\nu+1)}=80.77\text{ GPa}.$$

Ο συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης Timoshenko για τη δοκό αυτή είναι $\alpha_z=3.373$.

Τα κατανεμημένα φορτία τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών είναι μηδενικά $q_z(x)=m_y(x)=0$. Οι συνοριακές συνθήκες είναι $w(0)=0$, $\theta_y(0)=0$, $M_y(L)=0$, $Q_z(L)=P$.

(1) Κάμψη Euler – Bernoulli

Για τη θεωρία κάμψης Euler – Bernoulli, αξιοποιώντας τις (2.31), (2.32) και τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες, προκύπτουν:

$$w(L)=P\frac{L^3}{3EI_{yy}}=5.99\cdot 10^{-9}L^3 \quad (6.1.\alpha)$$

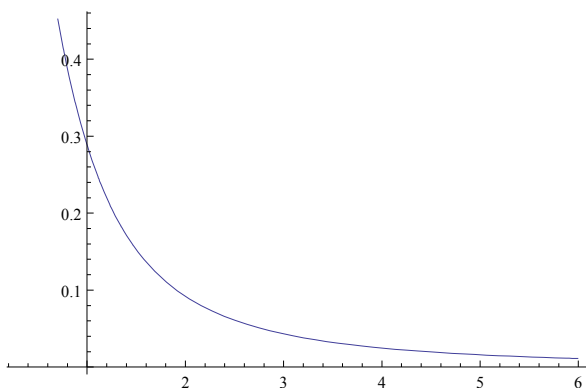
$$\theta_y(L)=-w'(L)=-P\frac{L^2}{2EI_{yy}}=-8.985\cdot 10^{-9}L^2 \quad (6.1.\beta)$$

(2) Κάμψη – Διάτμηση Timoshenko

Για τη θεωρία κάμψης – διάτμησης Timoshenko, αξιοποιώντας τις (2.26), (2.27) και τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες, προκύπτουν:

$$w(L)=P\left(\frac{a_zL}{GA}+\frac{L^3}{3EI_{yy}}\right)=2.428\cdot 10^{-9}L+5.99\cdot 10^{-9}L^3 \quad (6.2.\alpha)$$

$$\theta_y(L)=-P\frac{L^2}{2EI_{yy}}=-8.985\cdot 10^{-9}L^2 \quad (6.2.\beta)$$



Σχ. 6.2. $\frac{w-\hat{w}}{w}$ για το ελεύθερο άκρο της προβόλου συναρτήσεως του μήκους L (m)

(3) Συγκριτικά Γραφήματα

Για το συγκεκριμένο φορέα η καμπτική γωνία στο ελεύθερο άκρο τόσο κατά Euler – Bernoulli όσο και κατά Timoshenko είναι ακριβώς η ίδια.

Η ποσοστιαία μεταβολή του βέλους κάμψης Euler – Bernoulli (με καπελάκι) σε σχέση με το βέλος κάμψης Timoshenko $\frac{w-\hat{w}}{w}$ στο ελεύθερο

άκρο της προβόλου δίνεται στο γράφημα του (Σχ. 6.2) συναρτήσεως του μήκους L της προβόλου. Για μήκος δοκού παρόμοιο με τις διαστάσεις της διατομής η ποσοστιαία μεταβολή των δύο θεωριών είναι πάνω από 50%. Για μήκος δοκού 2m η ποσοστιαία

μεταβολή είναι 9% ενώ από τα 4m και πάνω πέφτει κάτω από το 3%.

Οι διατμητικές παραμορφώσεις κοντά στα φορτία (δηλαδή για μικρά L) γίνονται πιο έντονες με αποτέλεσμα να επηρεάζεται το βέλος κάμψης Timoshenko.

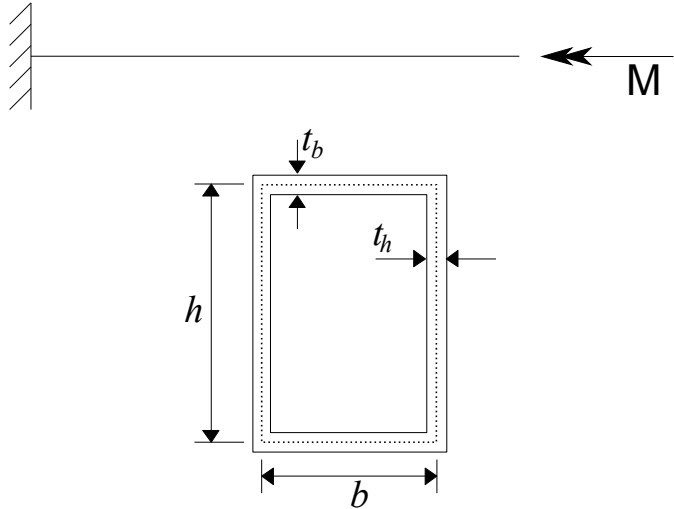
Διαπιστώνεται από το γράφημα (Σχ. 6.2) ότι η δοκός Timoshenko είναι πιο εύκαμπτη από την δοκό Euler – Bernoulli, κάτι που όσο αυξάνεται το μήκος της δοκού αμβλύνεται.

β. Σύγκριση Θεωριών Στρέψης

Στο ελεύθερο άκρο της προβόλου του (Σχ. 6.3) ασκείται μοναδιαία στρεπτική ροπή M . Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δοκού είναι μήκος L , και για τη διατομή $h=1.6\text{ m}$, $b=1\text{ m}$, $t_b=4\text{ cm}$ και $t_h=5\text{ cm}$. Τα μηχανικά χαρακτηριστικά της δοκού είναι $E=210\text{ GPa}$, $\nu=0.3$,

$$G = \frac{E}{2(\nu+1)} = 80.77\text{ GPa}.$$

Τα κατανομημένα φορτία στρεπτικών ροπών και διρρόπων στρέβλωσης είναι μηδενικά $m_x(x)=m_w(x)=0$.



Σχ. 6.3. Σύγκριση θεωριών στρέψης σε πρόβολο

(1) Ανομοιόμορφη

Στρέψη με Δευτερογενείς Στρεπτικές Παραμορφώσεις

Για τη θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης με Δευτερογενείς Στρεπτικές Παραμορφώσεις οι σταθερές είναι $I_t^P=0.089824\text{ m}^4$, $I_t^S=0.001107\text{ m}^4$ και $C_s=0.000193\text{ m}^6$. Αξιοποιώντας τις (3.24), (3.17) και τις συνοριακές συνθήκες $\theta_x(0)=0$, $\theta_x'(0)=0$, $M_t^P(L)+M_t^S(L)=M$, $M_w(L)=0$, προκύπτουν:

$$\theta_x(L)=M \left[\frac{L}{G I_t^P} - \sqrt{\frac{E C_s I_t^S}{(G I_t^P)^3 (I_t^P + I_t^S)}} \tanh \left(\sqrt{\frac{G I_t^P I_t^S}{E C_s (I_t^P + I_t^S)}} L \right) \right] \Rightarrow \quad (6.3.\alpha)$$

$$\theta_x(L) = -1.13669 \cdot 10^{-12} + \frac{1}{4.39873 \cdot 10^{11} (1 + e^{2.95244 L})} + 1.37834 \cdot 10^{-10} L$$

$$\theta_x'(L)=M \frac{1 - \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{G I_t^P I_t^S}{E C_s (I_t^P + I_t^S)}} L \right)}{G I_t^P} = 1.37834 \cdot 10^{-10} - 1.37834 \cdot 10^{-10} \operatorname{sech} (1.47622 L) \quad (6.3.\beta)$$

$$M_w(0) = -M \sqrt{\frac{E C_s I_t^S}{G I_t^P (I_t^P + I_t^S)}} \tanh \left(\sqrt{\frac{G I_t^P I_t^S}{E C_s (I_t^P + I_t^S)}} L \right) = -0.00824679 \tanh (1.47622 L) \quad (6.3.\gamma)$$

$$M_t^S(0) = M \frac{I_t^S}{I_t^P + I_t^S} = 0.0121741 \quad (6.3.\delta)$$

$$M_t^S(L) = M \frac{I_t^S}{I_t^P + I_t^S} \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{G I_t^P I_t^S}{E C_s (I_t^P + I_t^S)}} L \right) \Rightarrow \quad (6.3.\epsilon)$$

$$M_t^S(L) = 1.73472 \cdot 10^{-18} - \frac{1}{2.47159 \cdot 10^{17} (1 + e^{2.95244 L})} + 0.0121741 \operatorname{sech} (1.47622 L)$$

Η δευτερογενής στρεπτική ροπή M_t^S στην πάκτωση της προβόλου αποτελεί το 1.2% της συνολικής στρεπτικής ροπής. Στο ελεύθερο άκρο της προβόλου στο γράφημα του (Σχ. 6.4, αριστερά) δίνεται η σχέση της με την συνολική ροπή συναρτήσει του μήκους L της προβόλου. Αποτελεί πολύ μικρό ποσοστό της συνολικής στρεπτικής ροπής γιατί στο άκρο η στρέβλωση είναι ελεύθερη οπότε οι ορθές τάσεις από στρέβλωση είναι μικρές. Όσο μειώνεται το μήκος η επιρροή της παγίωσης στρέβλωσης στην πάκτωση γίνεται πιο έντονη.

(2) Ανομοιόμορφη Στρέψη

Για τη θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης οι σταθερές παραμένουν ίδιες. Αξιοποιώντας τις (3.70), (3.67) και τις συνοριακές συνθήκες $\theta_x(0)=0$, $\theta_x'(0)=0$, $M_t^P(L)+M_t^S(L)=M$, $M_w(L)=0$, προκύπτουν:

$$\theta_x(L)=M \left[\frac{L}{GI_t} - \sqrt{\frac{EC_s}{(GI_t)^3}} \tanh \left(\sqrt{\frac{GI_t}{EC_s}} L \right) \right] \Rightarrow \quad (6.4.\alpha)$$

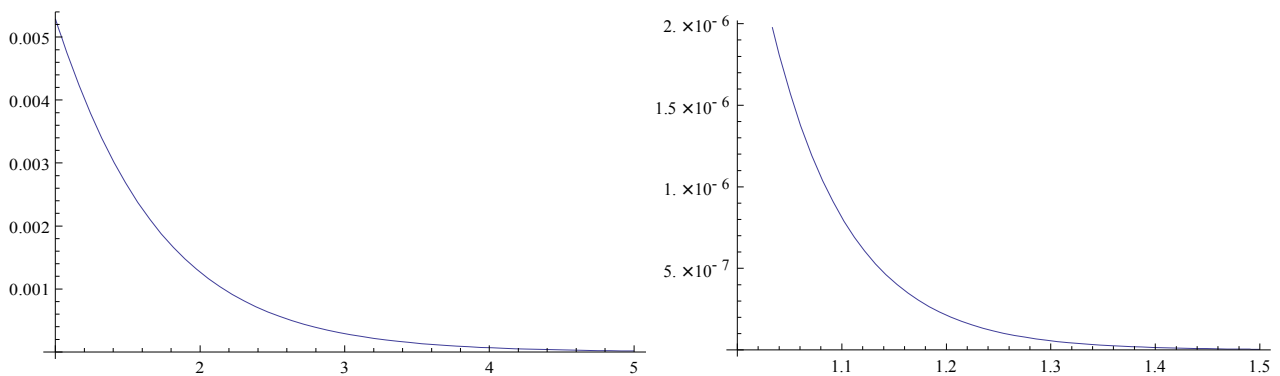
$$\theta_x(L) = -1.03021 \cdot 10^{-11} + \frac{1}{4.85339 \cdot 10^{10} (1 + e^{26.7586 L})} + 1.37834 \cdot 10^{-10} L$$

$$\theta_x'(L) = M \frac{1 - \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{GI_t}{EC_s}} L \right)}{GI_t} = 1.37834 \cdot 10^{-10} [1 - \operatorname{sech}(13.3793 L)] \quad (6.4.\beta)$$

$$M_w(0) = -M \sqrt{\frac{EC_s}{GI_t}} \tanh \left(\sqrt{\frac{GI_t}{EC_s}} L \right) = -0.0747424 + \frac{1}{6.68964 (1 + e^{26.7586 L})} \quad (6.4.\gamma)$$

$$M_t^S(0) = 1 \quad (6.4.\delta)$$

$$M_t^S(L) = M \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{GI_t}{EC_s}} L \right) = \frac{2 e^{13.3793 L}}{1 + e^{26.7586 L}} \quad (6.4.\epsilon)$$



Σχ. 6.4. Ποσοστό % της M_t^S επί της M_t στο ελεύθερο άκρο της προβόλου συναρτήσει του μήκους L (m)
Αριστερά: Με 2γενείς παραμορφώσεις, Δεξιά: Απλή ανομοιόμορφη στρέψη

Η δευτερογενής στρεπτική ροπή M_t^S στην πάκτωση της προβόλου αποτελεί το 100% της συνολικής στρεπτικής ροπής κι αυτό επειδή η στρέβλωση μηδενίζεται, άρα και η πρωτογενής στρεπτική ροπή. Στο ελεύθερο άκρο της προβόλου, στο γράφημα του (Σχ. 6.4, δεξιά) δίνεται η σχέση της M_t^S με την συνολική ροπή συναρτήσει του μήκους L της προβόλου. Η εξάλειψη της δευτερογενούς ροπής στην κλασική ανομοιόμορφη στρέψη πραγματοποιείται πολύ πιο γρήγορα από αυτή της ανομοιόμορφης στρέψης με δευτερογενείς παραμορφώσεις.

(3) Ομοιόμορφη Στρέψη

Για τη θεωρία Ομοιόμορφης Στρέψης οι σταθερές παραμένουν ίδιες. Αξιοποιώντας την (3.72.α,β) και τη συνοριακή συνθήκη $\theta_x(0)=0$, προκύπτουν:

$$\theta_x(L)=M \frac{L}{GI_t}=1.37834 \cdot 10^{-10} L \quad (6.5.α)$$

$$\theta_x'(0)=\theta_x'(L)=M \frac{1}{GI_t}=1.37834 \cdot 10^{-10} \quad (6.5.β)$$

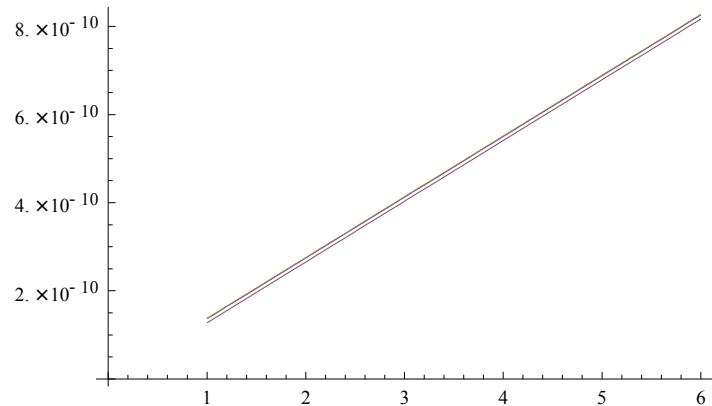
$$M_w(0)=0 \quad (6.5.γ)$$

(4) Συγκριτικά Γραφήματα

Η γωνία στροφής θ_x στο ελεύθερο άκρο της προβόλου δίνεται στο γράφημα του (Σχ. 6.5) συναρτήσει του μήκους L της προβόλου. Και για τις 3 θεωρίες είναι σχεδόν ίδια.

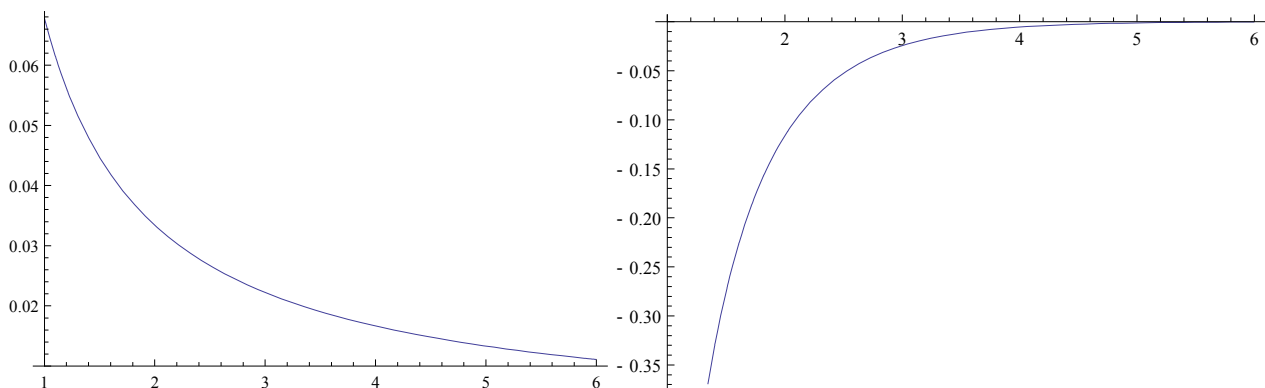
Η ποσοστιαία μεταβολή των γωνιών στροφής της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (με καπελάκι) και ανομοιόμορφης στρέψης με δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις $\frac{\theta_x - \hat{\theta}_x}{\theta_x}$ στο ελεύθερο άκρο

της προβόλου δίνεται στο γράφημα του (Σχ. 6.6, αριστερά) συναρτήσει του μήκους L της προβόλου. Για μήκος δοκού παρόμοιο με τις διαστάσεις της διατομής η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης παρουσιάζει μεγαλύτερη αντίσταση στη στρέψη κατά 6% το οποίο για μεγάλα μήκη δοκού τείνουν στο 1%.



Σχ. 6.5. Γωνίες στρέψης στο ελεύθερο άκρο της προβόλου συναρτήσει του μήκους L (m)

Η ποσοστιαία μεταβολή των συστροφών των δύο θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης $\frac{\theta_x^P - \hat{\theta}_x'}{\theta_x^P}$ στο ελεύθερο άκρο της προβόλου δίνεται στο γράφημα του (Σχ. 6.6, δεξιά) συναρτήσει του μήκους L της προβόλου. Η διαφορά μεταξύ των δύο θεωριών για κοντές δοκούς είναι αρκετά μεγάλη και για το συγκεκριμένο φορέα ξεπερνάει το 35%.



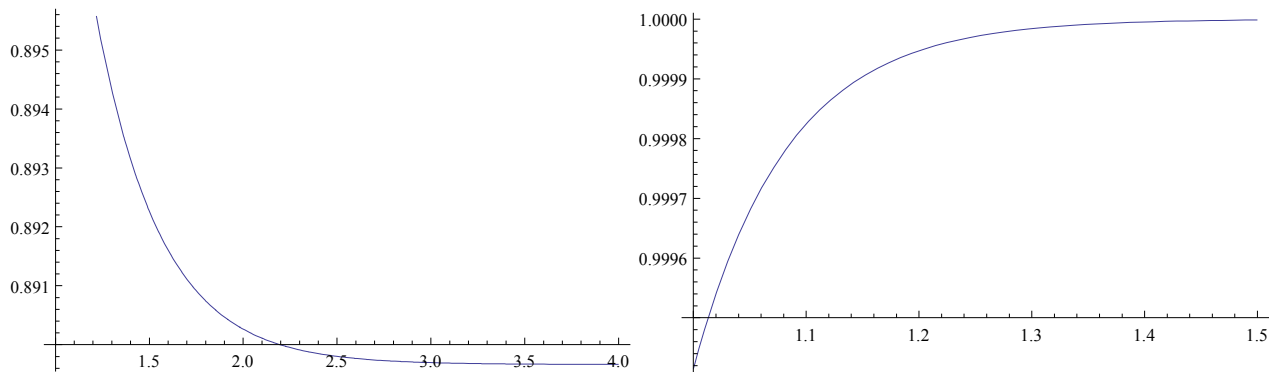
Σχ. 6.6. Για το ελεύθερο άκρο της προβόλου συναρτήσει του μήκους L (m),

$$\text{Αριστερά: } \frac{\theta_x - \hat{\theta}_x}{\theta_x}, \text{ Δεξιά: } \frac{\theta_x^P - \hat{\theta}_x'}{\theta_x^P}$$

Η ποσοστιαία μεταβολή των διρρόπων στρέβλωσης των δύο θεωριών ανομοιόμορφης

στρέψης $\frac{\hat{M}_w - M_w}{\hat{M}_w}$ στο πακτωμένο άκρο της προβόλου δίνεται στο γράφημα του (Σχ. 6.7) συναρτήσεως του μήκους L της προβόλου.

Η ποσοστιαία μεταβολή των δευτερογενών στρεπτικών ροπών των δύο θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης $\frac{M_t^S - \hat{M}_t^S}{M_t^S}$ στο ελεύθερο άκρο της προβόλου δίνεται στο γράφημα του (Σχ. 6.7) συναρτήσεως του μήκους L της προβόλου.



Σχ. 6.7. Συναρτήσεως του μήκους L (m),

Αριστερά: Για το πακτωμένο άκρο της προβόλου $\frac{\hat{M}_w - M_w}{\hat{M}_w}$, Δεξιά: για το ελεύθερο άκρο $\frac{M_t^S - \hat{M}_t^S}{M_t^S}$

Ειδικές Μνείες

Για βοήθεια σε διάφορα θέματα πάνω στη θεωρία Timoshenko, στις Ανομοιόμορφες Στρέψεις και στη Μετάδοση Στρέψης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Υποψήφιο Διδάκτορα του ΕΜΠ, Βασίλειο Τσίπηρα.

Για τη θεωρία Ελαστικότητας έγινε εκτενής χρήση του βιβλίου του Γεώργιου Τσαμασφύρου «Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων Ι» (1990). Επίσης έγινε εκτενής χρήση αντίστοιχων λημμάτων της en.Wikipedia απ' όπου χρησιμοποιήθηκαν και σχήματα.

Για τις θεωρίες Στρέψης έγινε εκτενής χρήση του βιβλίου του Ευάγγελου Σαπουντζάκη «Προβλήματα Ελαστικής Γενικευμένης Θεωρίας Ελαστικών Ισότροπων Ράβδων» (2011) απ' όπου χρησιμοποιήθηκαν και σχήματα.

Για τις θεωρίες Κάμψης και Διάτμησης έγινε χρήση της πτυχιακής εργασίας του Διονύσιου Σπετσιέρη «Επιρροή της Στρέβλωσης και της Διατμητικής Παραμόρφωσης στο Μητρώο Δυσκαμψίας Μέλους Χωρικού Ραβδόμορφου Φορέα» (2005).

Η πτυχιακή γράφτηκε στον κειμενογράφο (ανοικτό λογισμικό) LibreOffice 4. Για τα αριθμητικά πειράματα καθώς και την επαλήθευση των πράξεων και των τύπων χρησιμοποιήθηκε το μαθηματικό περιβάλλον (κλειστό λογισμικό) Wolfram Mathematica 8. Κάποια σχήματα κατασκευάστηκαν ως 3d μοντέλα στο κλειστό λογισμικό 3d γραφικών Trimble Sketchup 8. Κάποια άλλα κατασκευάστηκαν με το ανοικτό λογισμικό σχεδίασης Inkscape.

Βιβλιογραφία

1. **Bach, C.V.** (1909), "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit C-förmigen Querschnitt". Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Band 53, S.1790..
2. **Bach, C.V.** (1910), "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit C-förmigen Querschnitt". Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Band 54, S.382..
3. **Baigent AH, Hancock GJ.** (1982), "Structural analysis of assemblages of thin-walled members". Engineering Structures 1982;4:207–16..
4. **Basaglia, C., Camotim, D. and Silvestre N.** (2011), "Torsion warping transmission at thin-walled frame joints: Kinematics, modelling and structural response". J Constr Steel Res, doi:10.1016/j.jcsr.2011.07.016.
5. **Coulomb, C.A.** (1784), "Recherches theoriques et experimentales sur la force de torsion, et sur l'elasticite des files de metal". Mem. De l'Acad. Roy. Des Sci.229-269.
6. **Gendy, A.S., Saleeb, A.F., Chang, T.Y.P.** (1992), "Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis". Computers & Structures 42. 531-550
7. **Gruttmann, F., Sauer, R. and Wagner, W.** (2000), "Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour". International Journal for Numerical Methods in Engineering 48. 1675-1702
8. **Hsiao, G.C., Wendland, W.L.** (2008), "Boundary Integral Equations". Springer-Verlag, Berlin.
9. **Kim, N.I. and Kim, M.Y.** (2005), "Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects". Thin-Walled Structures, 43. 701-734
10. **Kraus, M.** (2007), "Computerorientierte Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren gewalzter I-Profile". Festschrift Rolf Kindmann, Shaker Verlag, Aachen. 81-98
11. **Krenk S.** (1990), "Constrained lateral buckling of I-beam gable frames". Journal of the Structural Engineering ASCE1990;116(12):3268–84.
12. **Laudiero, F. and Savoia, M.** (1990), "Shear strain effects in flexure and torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section". Thin-Walled Structures, 10(2), 87119.
13. **Marguerre, K.** (1940), "Torsion von Voll- und Hohlquerschnitten". Der Bauingenieur, 21, S. 317-322
14. **Masarira A.** (2002), "The effect of joints on the stability behaviour of steel frame beams". Journal of Constructional Steel Research 2002;58:1375–90.
15. **Murin, J. and Kutis, V.** (2008), "An Effective Finite Element for Torsion of Constant Cross-Sections Including Warping With Secondary Torsion Moment Deformation Effect". Engineering Structures 30. 2716-2723
16. **Ramm, E. und Hofmann, T.J.** (1995), "Stabtragwerke". Der Ingenieurbau: Grundwissen–Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn, Berlin.
17. **Roik, K. und Sedlacek, G.** (1966), "Theorie der Wolbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen-Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelastrten Zugstabes". Der Stahlbau, 35 H.2, 43-52 and H.5, 160.
18. **Rubin, H.** (2005), "Wolbkrafttorsion von Durchlauftragern Mit Konstantem Querschnitt Unter Berücksichtigung Sekundärer Schubverformungen". Stahlbau 74. 826-842
19. **Saint-Venant, B.** (1855), "Memoire sur la torsion des prismes". . 233-560
20. **Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2009), "Secondary Torsional Moment Deformation Effect by BEM". Proceedings of the 10th international conference of Advances in Boundary Element Techniques, Athens, Greece. 81-88
21. **Simo, J.C. and Vu-Quoc, L.** (1991), "A Geometrically-exact rod model incorporating shear

and torsion-warping deformation". International Journal of Solids and Structures 27. 371-393

22. **Slivker, V.** (2007), "Mechanics of Structural Elements". Springer-Verlag, Berlin.

23. **Stojek, D.** (1964), "Zur Schubverformung im Biegebalken". Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 44. 393-396

24. **Timoshenko, S. and Goodier, J.** (1951), "Theory of Elasticity". McGraw-Hill Book Comp, New York, Toronto, London..

25. **Tong, G.S., Yan, X.X., Zhang, L.** (2005), "Warping and bimoment transmission through diagonally stiffened beam-to-column joints". Journal of Constructional Steel Research 61. 749–763

26. **Trahair NS, Chan SL.** (2003), "Out-of-plane advanced analysis of steel structures". Engineering Structures 2003;25:1627–37.

27. **Vlasov, V.** (1963), "Thinalledlasticeams". Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem..

28. **Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee K.H.** (2000), "Shear deformable beams and plates". Elsevier, Oxford.

29. **Weber, C. und Günther, W.** (1958), "Torsionstheorie". Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig..

30. **Yang YB, McGuire W.** (1984), "A procedure for analyzing space frames with partial warping restraint". International Journal for Numerical Methods in Engineering;20:1377–98.