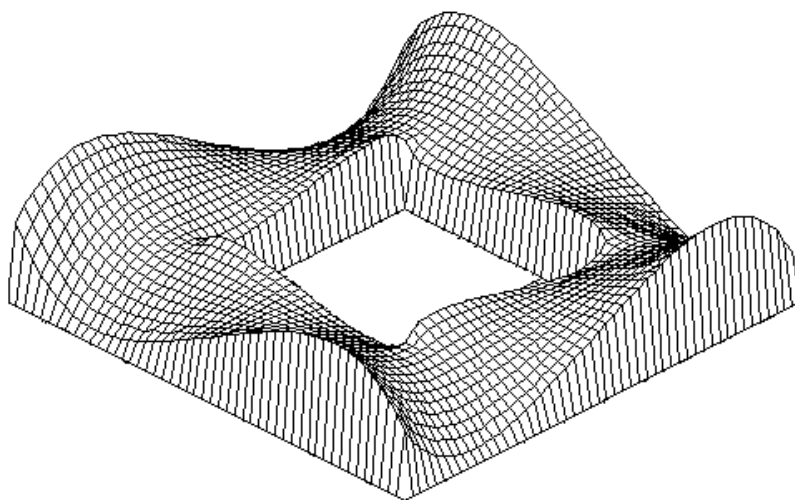




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ **ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ”

ΜΑΘΗΜΑ : Εφαρμοσμένη Ανάλυση Ραβδωτών και Επιφανειακών Φορέων (Α1)



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ **ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΙΣΟΤΡΟΠΩΝ ΡΑΒΔΩΝ**

Ε. Ι. Σαπουντζάκης
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2011

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι σημειώσεις αυτές καλύπτουν μέρος της ύλης του μεταπτυχιακού μαθήματος **“Εφαρμοσμένη Ανάλυση Ραβδωτών και Επιφανειακών Φορέων”**, το οποίο διδάσκεται στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών **“Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση Κατασκευών”**, της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π. Για την κατανόηση της ύλης που παρουσιάζεται θεωρούνται απαραίτητες βασικές γνώσεις του Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών Πολιτικού Μηχανικού, Δομοστατικής Κατεύθυνσης.

Στα τρία πρώτα κεφάλαια αναλύεται το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου. Πιο συγκεκριμένα, στο **πρώτο** κεφάλαιο με βάση το *πεδίο μετατοπίσεων* αναλύεται η ομοιόμορφη διάτμηση ράβδου τυχούσας σταθερής διατομής, χωρίς την εμφάνιση στρεπτικών ροπών, δηλαδή όλα τα διατμητικά φορτία ασκούνται στο κέντρο διατμήσεως της διατομής της ράβδου. Παρουσιάζεται μέθοδος υπολογισμού των διατμητικών τάσεων της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Euler-Bernoulli καθώς και των διορθωτικών συντελεστών διάτμησης της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Timoshenko. Στο **δεύτερο** κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου ομογενούς και σταθερής διατομής με βάση το *πεδίο των τάσεων*. Όπως και στο 1^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται μέθοδος υπολογισμού των διατμητικών τάσεων της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Euler-Bernoulli καθώς και των διορθωτικών συντελεστών διάτμησης της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Timoshenko. Στο **τρίτο** κεφάλαιο για λόγους σύγκρισης παρουσιάζεται η τεχνική θεωρία διάτμησης.

Στα δύο επόμενα κεφάλαια αναλύεται το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου. Πιο συγκεκριμένα, στο **τέταρτο** κεφάλαιο παρουσιάζεται η ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων τυχούσας σταθερής διατομής με δυνάμεις στρεβλώσεως ως γενική περίπτωση και η ανεμπόδιστη στρέψη Saint Venant ως μερική περίπτωση της προηγούμενης. Στο **πέμπτο** κεφάλαιο παρουσιάζεται η ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων.

Τέλος, στα δύο τελευταία κεφάλαια αναλύονται δύο προβλήματα με γεωμετρική μη γραμμικότητα. Πιο συγκεκριμένα, στο **έκτο** κεφάλαιο παρουσιάζεται η γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση ομογενούς δοκού τυχούσας διατομής λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων. Η δοκός υποβάλλεται σε συνδυασμό τυχούσας συγκεντρωμένης ή κατανεμημένης αξονικής, εγκάρσιας, καμπτικής και στρεπτικής φόρτισης, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στις οποίες μπορεί να συμπεριληφθεί η περίπτωση της ελαστικής στήριξης. Στο **έβδομο** κεφάλαιο παρουσιάζεται η ελαστική γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων ασύμμετρης διατομής τυχόντος σχήματος.

Ο συγγραφέας επιθυμεί να εκφράσει και από τη θέση αυτή τις ευχαριστίες του στον υποψήφιο διδάκτορα κ. Β. Τσίπηρα, πολιτικό μηχανικό ΕΜΠ, για την προσεκτική μελέτη των σημειώσεων αυτών και τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις του. Οι σημειώσεις αυτές έχουν ανάγκη περαιτέρω επεξεργασίας από απόψεως γλώσσας και περιεχομένου, πλην όμως οι άμεσες διδακτικές ανάγκες δεν το επέτρεψαν. Έτσι, μελλοντική βελτίωση τους θα βασιστεί και στις υποδείξεις αυτών που θα τις μελετήσουν.

Σεπτέμβριος 2011

Ε. Ι. Σαπουντζάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1	Ομοιόμορφη Διάτμηση Ράβδων – Μέθοδος Μετατοπίσεων.....	5
1.1	Προκαταρκτικές έννοιες και παραδοχές.....	5
1.2	Μετακινήσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	7
1.3	Εξισώσεις ισορροπίας.....	10
1.4	Εντατικά μεγέθη.....	15
1.5	Διατμητικές τάσεις.....	17
1.6	Συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης.....	17
2	Ομοιόμορφη Διάτμηση Ράβδων – Μέθοδος Τάσεων.....	19
2.1	Προκαταρκτικές έννοιες και παραδοχές.....	19
2.2	Εντατικά μεγέθη, ορθές τάσεις.....	20
2.3	Συνιστώσες τάσεως, τασικές συναρτήσεις.....	25
2.4	Συντεταγμένες κέντρου διατμήσεως.....	33
2.5	Συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης.....	34
3	Τεχνική Θεωρία Διάτμησης.....	37
3.1	Βασικές έννοιες και παραδοχές.....	37
3.2	Πρισματική ράβδος τυχούσας διατομής.....	38
3.3	Πρισματική ράβδος με απλά συμμετρική διατομή.....	41
3.4	Εφαρμογές τεχνικής θεωρίας διάτμησης.....	44
3.4.1	Ράβδος ορθογωνικής διατομής.....	44
3.4.2	Ράβδος τριγωνικής διατομής.....	46
3.4.3	Ράβδος ελλειπτικής διατομής.....	48
3.4.4	Ράβδος κυκλικής διατομής.....	50
4	Ανομοιόμορφη Στρέψη Ράβδων	52
4.1	Προκαταρκτικές έννοιες.....	52
4.2	Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	58
4.3	Εντατικά μεγέθη, εξίσωση ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες.....	69
4.4	Βήματα επίλυσης προβλήματος ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου...	79

5	Ανομοιόμορφη Στρέψη Ράβδων με Επιρροή Δευτερογενών Στρεπτικών Παραμορφώσεων	83
5.1	Εισαγωγή - Προκαταρκτικές έννοιες.....	83
5.2	Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	85
5.3	Πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας.....	90
5.4	Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες.....	90
5.5	Στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις.....	95
5.6	Βήματα επίλυσης προβλήματος ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων.....	99
6	Μη Γραμμική Ανάλυση Ράβδων με Επιρροή Διατμητικών Παραμορφώσεων.....	103
6.1	Εισαγωγή - Προκαταρκτικές έννοιες.....	103
6.2	Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	106
6.3	Εντατικά μεγέθη, εξίσωση ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες.....	109
7	Μη Γραμμική Ανομοιόμορφη Στρέψη Ράβδων	121
7.1	Εισαγωγή - Προκαταρκτικές έννοιες.....	121
7.2	Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	123
7.3	Πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης.....	130
7.4	Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες.....	135
7.5	Βήματα επίλυσης προβλήματος μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων συνοριακές.....	140
7.6	Συνοπτική αναφορά των επιρροών της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων.....	145
8	Βιβλιογραφία.....	146

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗ ΡΑΒΔΩΝ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

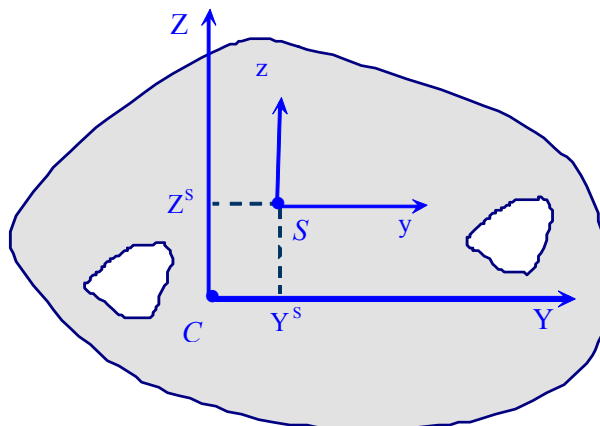
1.1. Προκαταρκτικές έννοιες και παραδοχές

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου τυχούσας και σταθερής διατομής, χωρίς την εμφάνιση στρεπτικών ροπών, δηλαδή όλα τα διατμητικά φορτία ασκούνται στο κέντρο διατμήσεως της διατομής της ράβδου. Παρουσιάζεται μέθοδος υπολογισμού των διατμητικών τάσεων της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Euler-Bernoulli καθώς και των διορθωτικών συντελεστών διάτμησης της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Timoshenko.

Το κέντρο διατμήσεως S είναι σημείο στο επίπεδο της διατομής στο οποίο η ροπή των διατμητικών τάσεων λόγω τέμνουσας έχει μηδενική τιμή, δηλαδή ισχύει

$$Q_z \cdot Y^S - Q_y \cdot Z^S = \int_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot Y - \tau_{xy} \cdot Z) d\Omega \quad (1.1.1)$$

όπου Q_y, Q_z είναι οι τέμνουσες δυνάμεις κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα, $CXYZ$ είναι κεντροβαρικό σύστημα αξόνων, Y^S, Z^S είναι οι συντεταγμένες του κέντρου διατμήσεως S ως προς το κέντρο βάρους C της διατομής και τ_{xy}, τ_{xz} είναι οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στη διατομή. Το αριστερό μέλος της ισότητας (1.1.1) εκφράζει την εξωτερική ροπή και το δεξιό μέλος την εσωτερική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις.



Σχ. 1.1 Θέση του κέντρου διατμήσεως S ως προς το κέντρο βάρους C .

Η θέση του κέντρου διατμήσεως είναι ανεξάρτητη του μεγέθους και του είδους της εξωτερικής φορτίσεως, αλλά εξαρτάται μόνο από το γεωμετρικό σχήμα της διατομής της ράβδου.

- *Αν η διατομή έχει άξονα συμμετρίας, το κέντρο διατμήσεως S βρίσκεται πάνω σε αυτόν.*
- *Αν η διατομή έχει δύο άξονες συμμετρίας, το κέντρο διατμήσεως S ταυτίζεται με το κέντρο βάρους C , δηλαδή το σύστημα συντεταγμένων Syz με αρχή των αξόνων το σημείο S ταυτίζεται με το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων $CXYZ$.*
- *Το κέντρο διατμήσεως ταυτίζεται με το κέντρο συστροφής εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής.*

Παραδοχές ελαστικής θεωρίας διάτμησης

Οι παραδοχές που αφορούν το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου τυχούσας και σταθερής διατομής είναι οι ακόλουθες:

- *Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.*
- *Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, οπότε το σχήμα της διατομής διατηρείται, δηλαδή αγνοείται η παραμόρφωση εντός του επιπέδου της διατομής ($\gamma_{yy} = \gamma_{zz} = \gamma_{yz} = 0$).*

Σε πολύ λεπτότοιχες διατομές η παραδοχή αυτή μπορεί να μην ισχύει, ιδιαίτερα όταν υπάρχουν τοπικές καταπονήσεις. Η παραδοχή της μη αισθητής μεταβολής της μορφής της διατομής αποτελεί προϋπόθεση στους φορείς κιβωτιοειδούς μορφής, ώστε να μπορούν να επιλύονται (όπως συμβαίνει στη μελετητική πρακτική) με τις μεθόδους της στατικής των ραβδωτών φορέων. Η προϋπόθεση αυτή κατά κανόνα πληρούται στις προεντεταμένες κιβωτιοειδείς γέφυρες, με την τοποθέτηση εγκάρσιου δίσκου (διαδοκίδα) στα άκρα ή και στο μέσο (ανάλογα με το άνοιγμα, το πλάτος και το ύψος) του κατασκευαζόμενου φορέα.

- *Το υλικό, από το οποίο αποτελείται η ράβδος, θεωρείται ισότροπο, συνεχές και γραμμικώς ελαστικό, οπότε ισχύουν οι μαθηματικές σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.*
- *Η διατομή μπορεί λόγω διατμητικής παραμόρφωσης να στρεβλώνει ελεύθερα, δηλαδή οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται και ως εκ τούτου είναι ίδιες για κάθε διατομή και ανεξάρτητες από τις διαμήκεις συντεταγμένες.*
- *Η διατομή της ράβδου μετά την παραμόρφωση δεν παραμένει κάθετη στον άξονα αναφοράς, δηλαδή οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις δεν αγνοούνται ($\gamma_{xy} \neq 0, \gamma_{xz} \neq 0$).*

Με τις δύο τελευταίες παραδοχές επιβάλλεται περιορισμός, τόσο στις συνθήκες στήριξης της ράβδου όσο και στη φόρτίσή της, η οποία πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι τέμνουσες δυνάμεις να είναι σταθερές σε κάθε διατομή της ράβδου. (Σε διαφορετική περίπτωση η λύση δεν είναι ακριβής και μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο αρκούντως μακριά από τις

στηρίζεις σύμφωνα με την αρχή του St.Venant). Η συνάρτηση στρεβλώσεως λόγω διάτμησης επηρεάζεται από τις παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής της ράβδου και αποτελεί συνάρτηση μόνο των δύο συντεταγμένων του επιπέδου της διατομής.

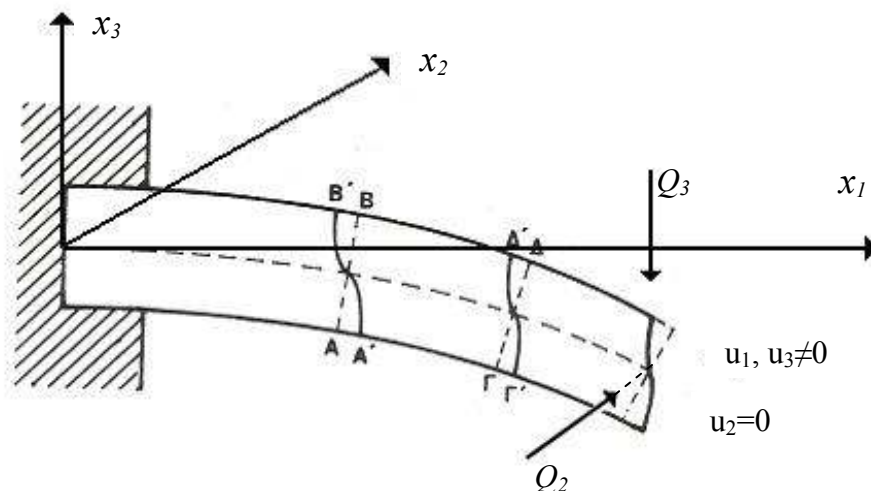
Εξετάζοντας τη διεθνή βιβλιογραφία παρατηρούμε ότι οι περισσότερες αριθμητικές μέθοδοι που έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση του προβλήματος της διάτμησης, αφορούν τη *Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*. Οι Mason και Herrmann (1968), υποθέτοντας το πεδίο των μετατοπίσεων και κάνοντας χρήση της Αρχής της Ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας, ανέπτυξαν τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία για μία ράβδο τυχούσας διατομής και ισότροπου υλικού υποβαλλόμενη σε κάμψη. Αυτή η μέθοδος με χρήση τριγωνικών ή τετραγωνικών πεπερασμένων στοιχείων έχει επίσης εφαρμοσθεί σε ράβδους με ορθοτροπικό υλικό (Tolf 1985), μονοκλινές (Kreuzinger 1969) και ανισότροπο υλικό (Kosmatka 1993,). Αργότερα αναπτύχθηκε λύση με πεπερασμένα στοιχεία για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων (Gruttmann et. al. 1998, 1999) και των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης (Gruttmann and Wagner 2001), διατυπώνοντας όλες τις βασικές εξισώσεις ως προς αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων, χρησιμοποιώντας ισοπαραμετρικές συναρτήσεις στοιχείων και εισάγοντας συνάρτηση τάσεως που ικανοποιούσε τις εξισώσεις ισορροπίας.

Οι συνοριακές ολοκληρωτικές μέθοδοι φαίνεται να αποτελούν εναλλακτικό δυνατό εργαλείο για την επίλυση των προαναφερθέντων προβλημάτων, έχοντας υπόψη ότι οι μέθοδοι με πεπερασμένα στοιχεία απαιτούν να διακριτοποιηθεί ολόκληρο το χωρίο της διατομής με επιφανειακά στοιχεία (τριγωνικά ή τετραγωνικά) και επιπλέον είναι περιορισμένες όσον αφορά το σχήμα των πεπερασμένων στοιχείων. Οι επιλύσεις με *Συνοριακά Στοιχεία* απαιτούν μόνο τη διακριτοποίηση του συνόρου κάνοντας χρήση γραμμικών ή παραβολικών στοιχείων αντί επιφανειακών στοιχείων που εισάγονται στις επιλύσεις με πεπερασμένα στοιχεία. Επιπλέον στις μεθόδους με Συνοριακά Στοιχεία επιτυγχάνεται υψηλή ακρίβεια με μικρό αριθμό γραμμικών στοιχείων. Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τον Sauer (1980), για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων με βάση την ανάλυση του Weber (1924) και αγνοώντας το λόγο του Poisson ν . Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων χρησιμοποιήθηκε επίσης για την εκτίμηση της θέσεως του κέντρου διατμήσεως σε μία τυχούσα διατομή από τον Chou (1993) και για την παρουσίαση της λύσης στο γενικό πρόβλημα κάμψεως σε μία ισότροπη ράβδο με απλά συνεκτικό χωρίο διατομής τυχόντος σχήματος από τους Friedman και Kosmatka (2000). Στην εργασία των Friedman και Kosmatka (2000), η ανάλυση επιτυγχάνεται μόνο ως προς τους κύριους καμπτικούς άξονες της διατομής της ράβδου περιορίζοντας έτσι τη γενικότητά της.

Τέλος το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου τυχούσας και σταθερής διατομής με βάση το πεδίο των μετατοπίσεων διατυπώνεται και επιλύεται με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων στην εργασία των Gruttmann et. al. (1999).

1.2. Μετακινήσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Θεωρούμε ράβδο μήκους L , διατομής τυχόντος σχήματος, η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω , αποτελούμενη από ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και μέτρο διατμήσεως G . Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο φορτίο Q (με συνιστώσες Q_y , Q_z κατά τους άξονες y , z , αντίστοιχα), το οποίο εφαρμόζεται στο κέντρο διατμήσεως της διατομής της, σε απόσταση L από το πακτωμένο άκρο της (βλ. Σχ.1.2).



Σχ. 1.2 Στρέβλωση των διατομών ενός προβόλου λόγω διατμητικών τάσεων.

Το τυχόν σημείο $P(Y,Z)$ της διατομής, λόγω της διατμητικής καταπόνησης που υφίσταται, μετατοπίζεται στη θέση $P'(Y',Z')$. Οι συνιστώσες μετατοπίσεώς του u, v και w κατά τους άξονες X, Y και Z υποθέτουμε ότι είναι αντίστοιχα

$$u = \theta_Y(X) \cdot Z - \theta_Z(X) Y + \phi_c(Y, Z) \quad (1.2.1)$$

$$v = v(X) \quad (1.2.2)$$

$$w = w(X) \quad (1.2.3)$$

όπου αγνοώντας τις διατμητικές παραμορφώσεις

$$\theta_Y(X) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_Z(X) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2.4\alpha, \beta)$$

και $\phi_c(Y, Z)$ η συνάρτηση στρεβλώσεως λόγω διάτμησης ως προς το κέντρο βάρους της διατομής. Η συνάρτηση $\phi_c(Y, Z)$ εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διατομής, δηλαδή αποτελεί παράμετρο αυτής και είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης X . Εκφράζει τη μετατόπιση των σημείων της διατομής της ράβδου κατά τον διαμήκη άξονά της X , δηλαδή τη στρέβλωση, λόγω των αναπτυσσόμενων διατμητικών τάσεων (Σχήμα 1.2).

Από την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας, οι ανηγμένες παραμορφώσεις τυχόντος σημείου P της διατομής, με μετατοπίσεις v, w κατά τους άξονες Y, Z , αντίστοιχα και στρέβλωση u κατά τον άξονα X προκύπτουν ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \theta_Y}{\partial x} Z - \frac{\partial \theta_Z}{\partial x} Y \quad (1.2.5)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.2.6)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2.7)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{I}{2} \left(-\theta_z + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{I}{2} \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \quad (1.2.8)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.2.9)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{I}{2} \left(\theta_y + \frac{\partial \phi_c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{I}{2} \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \quad (1.2.10)$$

Επίσης, η καταστατική εξίσωση τάσεων-παραμορφώσεων στο ισότροπο υλικό της ράβδου δίδεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (1.2.11)$$

όπου

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.2.12)$$

και

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.2.13)$$

είναι η σταθερά του Lamé και το μέτρο διατμήσεως, αντίστοιχα. Αναπτύσσοντας τη μητρική σχέση (1.2.11) προκύπτει

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2G) \varepsilon_{xx} + \lambda (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (1.2.14)$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2G) \varepsilon_{yy} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \quad (1.2.15)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2G) \varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (1.2.16)$$

$$\tau_{xy} = 2G \cdot \varepsilon_{xy} \quad (1.2.17)$$

$$\tau_{yz} = 2G \cdot \varepsilon_{yz} \quad (1.2.18)$$

$$\tau_{xz} = 2G \cdot \varepsilon_{xz} \quad (1.2.19)$$

Αντικαθιστώντας τη σταθερά λ και το μέτρο διατμήσεως G στις τρεις πρώτες εξισώσεις και τα $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ στις τρεις τελευταίες εξισώσεις, προκύπτει

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \varepsilon_{xx} + \nu (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (1.2.20)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (1.2.21)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \quad (1.2.22)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad (1.2.23)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \quad (1.2.24)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (1.2.25)$$

Γνωρίζοντας ότι για τη θεωρία δοκού ισχύει $\nu = 0$ και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.2.5) - (1.2.10) στις σχέσεις (1.2.20) – (1.2.25) λαμβάνουμε

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = E \left(\frac{\partial \theta_Y}{\partial x} Z - \frac{\partial \theta_Z}{\partial x} Y \right) \quad (1.2.26)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (1.2.27)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (1.2.28)$$

$$\tau_{xy} = 2G \cdot \varepsilon_{xy} = G \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \quad (1.2.29)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (1.2.30)$$

$$\tau_{xz} = 2G \cdot \varepsilon_{xz} = G \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \quad (1.2.31)$$

1.3. Εξισώσεις ισορροπίας

Οι εξισώσεις ισορροπίας για τις τάσεις απουσία μαζικών δυνάμεων σύμφωνα με την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας είναι οι ακόλουθες

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (1.3.3)$$

ενώ ισχύει

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.3.4)$$

Από τις εξισώσεις (1.3.1), (1.3.2) και (1.3.3.) με αντικατάσταση των τάσεων λόγω των σχέσεων (1.2.26) - (1.2.31) προκύπτει

$$E(\theta_Y'' \cdot Z - \theta_Z'' \cdot Y) + G \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} = 0 \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (1.3.7)$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο τελευταίες από τις εξισώσεις ισορροπίας ικανοποιούνται εκ ταυτότητος.

Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε από την εξίσωση (1.3.5) να καταλήξουμε σε μία μερική διαφορική εξίσωση στην οποία η μοναδική άγνωστη ποσότητα θα είναι η συνάρτηση στρεβλώσεως ϕ_c , οπότε ο όρος $E(\theta_Y'' \cdot Z - \theta_Z'' \cdot Y)$ θα πρέπει να αντικατασταθεί. Με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.26), οι καμπτικές ροπές μπορούν να γραφούν ως

$$M_Y = \int_{\Omega} \sigma_{xx} Z \cdot d\Omega = E \left(\theta_Y' \int_{\Omega} Z^2 d\Omega - \theta_Z' \int_{\Omega} YZ d\Omega \right) = E(\theta_Y' \cdot I_{YY} - \theta_Z' \cdot I_{YZ}) \quad (1.3.8)$$

$$M_Z = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} Y \cdot d\Omega = -E \left(\theta_Y' \int_{\Omega} YZ d\Omega - \theta_Z' \int_{\Omega} Y^2 d\Omega \right) = E(\theta_Z' \cdot I_{ZZ} - \theta_Y' \cdot I_{YZ}) \quad (1.3.9)$$

όπου

$$I_{YY} = \int_{\Omega} Z^2 d\Omega \quad I_{ZZ} = \int_{\Omega} Y^2 d\Omega \quad I_{YZ} = \int_{\Omega} YZ d\Omega \quad (1.3.10\alpha,\beta,\gamma)$$

είναι οι ροπές και το γινόμενο αδράνειας της διατομής, αντίστοιχα, ενώ οι τέμνουσες δυνάμεις δίδονται από τις σχέσεις

$$Q_y = \int_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega = G \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_c}{\partial y} d\Omega \quad (1.3.11)$$

$$Q_z = \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega = G \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_c}{\partial z} d\Omega \quad (1.3.12)$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (1.3.8) και (1.3.9) λαμβάνουμε

$$Q_z = \frac{\partial M_Y}{\partial x} = E(\theta_Y' \cdot I_{YY} - \theta_Z' \cdot I_{YZ}) \quad (1.3.13)$$

$$Q_y = - \frac{\partial M_Z}{\partial x} = E(\theta_Y' \cdot I_{YZ} - \theta_Z' \cdot I_{ZZ}) \quad (1.3.14)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1.3.8) με I_{ZZ} και τη σχέση (1.3.9) με I_{YZ} και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$M_Y I_{ZZ} + M_Z I_{YZ} = E \theta_Y' (I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2) \quad (1.3.15)$$

Όμοια, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1.3.8) με I_{YZ} και τη σχέση (1.3.9) με I_{YY} και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$M_Y I_{YZ} + M_Z I_{YY} = E \theta_Z' (I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2) \quad (1.3.16)$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (1.3.15) και (1.3.16) ως προς x λαμβάνουμε

$$\frac{\partial M_Y}{\partial x} I_{ZZ} + \frac{\partial M_Z}{\partial x} I_{YZ} = E\theta_Y'' (I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2) \quad (1.3.17)$$

$$\frac{\partial M_Y}{\partial x} I_{YZ} + \frac{\partial M_Z}{\partial x} I_{YY} = E\theta_Z'' (I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2) \quad (1.3.18)$$

ενώ με τη βοήθεια των σχέσεων (1.3.13) και (1.3.14) προκύπτει ότι

$$Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ} = E\theta_Y'' (I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2) \quad (1.3.19)$$

$$Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY} = E\theta_Z'' (I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2) \quad (1.3.20)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1.3.19) με Z και τη σχέση (1.3.20) με Y και αφαιρώντας κατά μέλη λαμβάνουμε

$$(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ})Z + (Q_y I_{YY} - Q_z I_{YZ})Y = E(\theta_Y'' Z - \theta_Z'' Y)(I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2)$$

Η

$$E(\theta_Y'' Z - \theta_Z'' Y) = \frac{(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ})Z + (Q_y I_{YY} - Q_z I_{YZ})Y}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \quad (1.3.21)$$

Θέτοντας

$$D = I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2 \quad (1.3.22)$$

και

$$g(Y, Z) = \frac{1}{D} [(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ})Z + (Q_y I_{YY} - Q_z I_{YZ})Y] \quad (1.3.23)$$

εφόσον οι τέμνουσες Q_y, Q_z , οι ροπές αδράνειας I_{YY}, I_{ZZ} και το γινόμενο αδράνειας I_{YZ} είναι ανεξάρτητα του X , από τη σχέση (1.3.21) εύκολα προκύπτει ότι

$$g(Y, Z) = E(\theta_Y'' Z - \theta_Z'' Y) \quad (1.3.24)$$

Από την πρώτη εξίσωση ισορροπίας (1.3.1), μετά την αντικατάσταση του όρου $E(\theta_Y'' Z - \theta_Z'' Y)$ με τη βοήθεια της σχέσεως (1.3.24) λαμβάνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$g(Y, Z) + G \left(\frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.3.25)$$

ή

$$\nabla^2 \phi_c(Y, Z) = \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} = -\frac{1}{G} g(Y, Z) \quad (1.3.26)$$

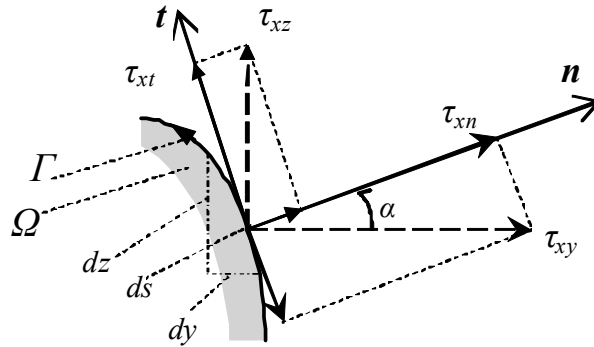
ή θέτοντας

$$f(Y, Z) = -\frac{1}{G} g(Y, Z) \quad (1.3.27)$$

έχουμε

$$\nabla^2 \phi_c(Y, Z) = \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} = f(Y, Z) \quad (1.3.28)$$

Για τη μόρφωση των συνοριακών συνθηκών παρατηρούμε τις διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής (σχήμα 1.3). Διατρέχουμε την καμπύλη του συνόρου της διατομής από το A στο B , δηλαδή έχοντας αριστερά το υλικό της διατομής, οπότε το κάθετο διάνυσμα n στο σύνορο έχει φορά προς το εξωτερικό της διατομής (σχήμα 1.3). Τα συνημίτονα κατευθύνσεως του εξωτερικού κάθετου διανύσματος n στο σύνορο της διατομής είναι



Σχ. 1.3 Διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής

$$n_y = \cos(Y, n) = \frac{dY}{dn} = \frac{dZ}{ds} \quad (1.3.29)$$

$$n_z = \sin(Y, n) = \frac{dZ}{dn} = -\frac{dY}{ds} \quad (1.3.30)$$

Η συνοριακή συνθήκη διαμορφώνεται από το γεγονός ότι οι κάθετες τάσεις στο σύνορο της διατομής της ράβδου είναι μηδενικές, οπότε θα έχουμε

$$\tau_{xn} = \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0 \quad (1.3.31)$$

ή

$$G \frac{\partial \phi_c}{\partial n} = G \frac{\partial \phi_c}{\partial y} n_y + G \frac{\partial \phi_c}{\partial z} n_z = 0 \quad (1.3.32)$$

ή

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial n} = 0 \quad (1.3.33)$$

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα η συνάρτηση στρεβλώσεως λόγω διάτμησης προκύπτει από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος Neumann διαφορικής εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \phi_c(Y, Z) = \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} = f(Y, Z) \quad \text{στο χωρίο } \Omega \quad (1.3.34\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial n} = 0 \quad \text{στο σύνορο } \Gamma \quad (1.3.34\beta)$$

όπου

$$f(Y, Z) = -\frac{I}{GD} \left[(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) Z + (Q_y I_{ZZ} - Q_z I_{YZ}) Y \right] \quad (1.3.34\gamma)$$

και

$$D = I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2 \quad (1.3.34\delta)$$

Για να έχει το πρόβλημα Neumann λύση πρέπει να ισχύει (Hsiao and Wendland 2008)

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial (\phi_c - \phi_c^p)}{\partial n} = 0 \quad (1.3.35)$$

όπου ϕ_c^p είναι μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης Poisson (1.3.34α). Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ανωτέρω συνθήκη ισχύει. Η λύση του προβλήματος Neumann προκύπτει συναρτήσσει μίας αυθαίρετης σταθεράς (μετατόπιση στερεού σώματος κατά X), η οποία δεν μπορεί να προσδιορισθεί από τις συνοριακές συνθήκες του. Ωστόσο στα μεγέθη στα οποία υπεισέρχονται παράγωγοι της λύσεως η σταθερά αυτή δεν έχει επιπτώσεις.

Συμβολίζοντας με c την αυθαίρετη σταθερά μετατοπίσεως στερεού σώματος, η οποία αφορά το προαναφερθέν πρόβλημα Neumann, η συνάρτηση στρεβλώσεως λόγω διάτμησης γράφεται ως

$$\bar{\phi}_c = \phi_c + c \quad (1.3.36)$$

Η ανωτέρω σχέση επαληθεύει την εξίσωση Poisson (1.3.34α) και τη συνοριακή συνθήκη (1.3.34β). Η σταθερά c προσδιορίζεται από την απαίτηση

$$\int_{\Omega} \phi_c d\Omega = 0 \quad (1.3.37)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.3.36) στη σχέση (1.3.37) λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega} (\bar{\phi}_c - c) d\Omega = 0 \quad (1.3.38)$$

ή

$$c = \frac{\int_{\Omega} \bar{\phi}_c d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} = \frac{I}{A} \int_{\Omega} \bar{\phi}_c d\Omega \quad (1.3.39)$$

και επομένως η σχέση (1.3.36) γράφεται ως

$$\phi_c = \bar{\phi}_c - \frac{I}{A} \int_{\Omega} \bar{\phi}_c d\Omega \quad (1.3.40)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία το πρόβλημα της διάτμησης τίθεται ως προς το τυχόν σύστημα αξόνων $O\bar{y}\bar{z}$ του επιπέδου της διατομής, αρχικά προσδιορίζεται η συνάρτηση στρεβλώσεως $\phi_o(\bar{y}, \bar{z})$, την οποία λαμβάνουμε από τη λύση του αντίστοιχου προβλήματος Neumann της διαφορικής εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \phi_o(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{\partial^2 \phi_o}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi_o}{\partial \bar{z}^2} = f(\bar{y}, \bar{z}) \quad \text{στο } \Omega \quad (1.3.41\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_o}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (1.3.41\beta)$$

όπου

$$f(\bar{y}, \bar{z}) = -\frac{I}{GD} \left[(Q_z \lambda_{\bar{y}} - Q_y \lambda_{\bar{y}\bar{z}}) \bar{z} + (Q_y \lambda_{\bar{z}} - Q_z \lambda_{\bar{y}\bar{z}}) \bar{y} \right] \quad (1.3.42\alpha)$$

με

$$D = \lambda_{\bar{y}} \lambda_{\bar{z}} - \lambda_{\bar{y}\bar{z}} \quad (1.3.42\beta)$$

$$\lambda_{\bar{y}} = (\bar{y}^C)^2 A + 2\bar{y}^C S_{\bar{z}} + I_{\bar{z}\bar{z}} \quad (1.3.42\gamma)$$

$$\lambda_{\bar{z}} = (\bar{z}^C)^2 A + 2\bar{z}^C S_{\bar{y}} + I_{\bar{y}\bar{y}} \quad (1.3.42\delta)$$

$$\lambda_{\bar{y}\bar{z}} = \bar{y}^C \bar{z}^C A + \bar{z}^C S_{\bar{z}} + \bar{y}^C S_{\bar{y}} + I_{\bar{y}\bar{z}} \quad (1.3.42\epsilon)$$

όπου $I_{\bar{y}\bar{y}}$, $I_{\bar{z}\bar{z}}$, $I_{\bar{y}\bar{z}}$ είναι οι ροπές και το γινόμενο αδρανείας της διατομής και $S_{\bar{y}}$, $S_{\bar{z}}$ οι στατικές ροπές αδρανείας ως προς τους άξονες \bar{y} , \bar{z} , αντίστοιχα.

1.4. Εντατικά μεγέθη

Οι καμπτικές ροπές M_Y , M_Z προκύπτουν από την ολοκλήρωση στο χωρίο Ω που καταλαμβάνει η διατομή της ράβδου των ορθών τάσεων σ_{xx} , δηλαδή δίδονται από τις σχέσεις

$$M_Y = \int_{\Omega} \sigma_{xx} Z d\Omega \quad (1.4.1)$$

$$M_Z = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} Y d\Omega \quad (1.4.2)$$

Από τις σχέσεις (1.3.19) και (1.3.20) προκύπτει ότι

$$\theta_Y'' = \frac{I}{ED} (Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) \quad (1.4.3)$$

$$\theta_Z'' = \frac{I}{ED} (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) \quad (1.4.4)$$

Με ολοκλήρωση των παραπάνω σχέσεων λαμβάνουμε

$$\theta_Y' = \int_0^L \frac{I}{ED} (Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) dx = \frac{L}{ED} (Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) \quad (1.4.5)$$

$$\theta_Z' = \int_0^L \frac{I}{ED} (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) dx = \frac{L}{ED} (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) \quad (1.4.6)$$

οπότε από τη σχέση (1.2.26) με τη βοήθεια των σχέσεων (1.4.5) και (1.4.6) προκύπτει

$$\sigma_{xx} = E(\theta_Y' Z - \theta_Z' Y) = \frac{L}{D} [(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) Z - (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) Y] \quad (1.4.7)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της ορθής τάσης σ_{xx} από τη σχέση (1.4.7) στη σχέση (1.4.1), η καμπτική ροπή M_Y δίδεται ως

$$M_Y = \int_{\Omega} \frac{L}{D} [(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) Z - (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) Y] Z d\Omega \quad (1.4.8)$$

ή

$$M_Y = \frac{L}{D} \left[(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) \int_{\Omega} Z^2 d\Omega - (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) \int_{\Omega} YZ d\Omega \right] \quad (1.4.9)$$

ή

$$M_Y = \frac{L}{D} [(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) I_{YY} - (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) I_{YZ}] \quad (1.4.10)$$

Όμοια, αντικαθιστώντας την έκφραση της ορθής τάσης σ_{xx} από τη σχέση (1.4.7) στη σχέση (1.4.2), η καμπτική ροπή M_Z δίδεται ως

$$M_Z = - \int_{\Omega} \frac{L}{D} [(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) Z - (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) Y] Y d\Omega \quad (1.4.11)$$

ή

$$M_Z = - \frac{L}{D} \left[(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) \int_{\Omega} YZ d\Omega - (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) \int_{\Omega} Y^2 d\Omega \right] \quad (1.4.12)$$

ή

$$M_Z = - \frac{L}{D} [(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) I_{YZ} - (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) I_{ZZ}] \quad (1.4.13)$$

1.5. Διατμητικές τάσεις

Οι μη μηδενικές ορθές τάσεις σ_{xx} και οι διατμητικές τάσεις τ_{Ω} στο χωρίο Ω της διατομής της ράβδου προκύπτουν αντίστοιχα ως

$$\sigma_{xx} = \frac{L}{D} \left[(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) Z - (Q_z I_{YZ} - Q_y I_{YY}) Y \right] \quad (1.5.1)$$

$$\tau_{\Omega} = \left[(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2 \right]^{1/2} \quad (1.5.2)$$

όπου

$$\tau_{xy} = G \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \quad \tau_{xz} = G \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \quad (1.5.3\alpha, \beta)$$

ενώ οι διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ προκύπτουν ως

$$\tau_{\Gamma} = \left[(\tau_{xn})^2 + (\tau_{xt})^2 \right]^{1/2} \quad (1.5.4)$$

όπου

$$\tau_{xn} = G \frac{\partial \phi_c}{\partial y} n_y + G \frac{\partial \phi_c}{\partial z} n_z \quad (1.5.5)$$

$$\tau_{xt} = -G \frac{\partial \phi_c}{\partial y} n_z + G \frac{\partial \phi_c}{\partial z} n_y \quad (1.5.6)$$

1.6. Συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης

Η ακριβής έκφραση της ελαστικής ενέργειας οφειλόμενης στη διάτμηση δίδεται από τη σχέση

$$U_{exact} = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega \quad (1.6.1)$$

ενώ η προσεγγιστική της έκφραση γράφεται ως

$$U_{appr} = \frac{\alpha_y Q_y^2}{2AG} + \frac{\alpha_z Q_z^2}{2AG} + \frac{\alpha_{yz} Q_y Q_z}{AG} \quad (1.6.2)$$

όπου $\alpha_y, \alpha_z, \alpha_{yz}$ είναι οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης, οι οποίοι εξαρτώνται από το σχήμα της διατομής.

Εξισώνοντας την ακριβή έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης με την προσεγγιστική της έκφραση προκύπτει

$$\frac{\alpha_y Q_y^2}{2AG} + \frac{\alpha_z Q_z^2}{2AG} + \frac{\alpha_{yz} Q_y Q_z}{AG} = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega \quad (1.6.3)$$

Για $Q_y \neq 0$ και $Q_z = 0$, ορίζοντας ως $\phi_{cy}(Y, Z)$ την προκύπτουσα συνάρτηση στρεβλώσεως και μετά την αντικατάσταση των σχέσεων (1.2.29), (1.2.31) στη σχέση (1.6.3) προκύπτει ο συντελεστής α_y ως

$$\alpha_y = \frac{AG^2}{Q_y^2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cy}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cy}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (1.6.4)$$

Για $Q_y = 0$ και $Q_z \neq 0$, ορίζοντας ως $\phi_{cz}(Y, Z)$ την αντίστοιχη συνάρτηση στρεβλώσεως και μετά την αντικατάσταση των σχέσεων (1.2.29), (1.2.31) στη σχέση (1.6.3) προκύπτει ο συντελεστής α_z ως

$$\alpha_z = \frac{AG^2}{Q_z^2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cz}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cz}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (1.6.5)$$

Τέλος, για $Q_y \neq 0$ και $Q_z \neq 0$ ορίζοντας ως $\phi_{cyz}(Y, Z)$ την αντίστοιχη συνάρτηση στρεβλώσεως και μετά την αντικατάσταση των σχέσεων (1.2.29), (1.2.31), (1.6.4) και (1.6.5) στη σχέση (1.6.3) προκύπτει ο συντελεστής α_{yz} ως

$$\begin{aligned} \alpha_{yz} = & \frac{AG^2}{Q^2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cyz}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cyz}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega - \frac{AG^2}{Q^2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cz}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cz}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \\ & - \frac{AG^2}{Q^2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cy}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cy}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.6.4), (1.6.5) και (1.6.6) προσδιορίζουμε τις αντιστάσεις σε διάτμηση της διατομής της ράβδου κατά Timoshenko ως

$$GA_{sy} = \frac{GA}{\alpha_y}, \quad GA_{sz} = \frac{GA}{\alpha_z}, \quad GA_{syz} = \frac{GA}{\alpha_{yz}} \quad (1.6.7\alpha, \beta, \gamma)$$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗ ΡΑΒΔΩΝ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΑΣΕΩΝ

2.1. Προκαταρκτικές έννοιες και παραδοχές

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου ομογενούς και σταθερής διατομής με βάση το πεδίο των τάσεων. Όπως και στο 1^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται μέθοδος υπολογισμού των διατμητικών τάσεων της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Euler-Bernoulli καθώς και των διορθωτικών συντελεστών διάτμησης της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Timoshenko. Η παρούσα ανάλυση βασίζεται στις ίδιες παραδοχές με αυτές που παρουσιάστηκαν στο 1^ο κεφάλαιο (παράγραφος 1.1). Τα γενικά χαρακτηριστικά της διατύπωσης του προβλήματος της διάτμησης με βάση τη μέθοδο του πεδίου τάσεων είναι τα ακόλουθα :

- Όλες οι βασικές εξισώσεις διατυπώνονται ως προς ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο δεν είναι κατά ανάγκη και κύριο.
- Το εξωτερικό, εγκάρσιο φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο διατμήσεως της διατομής της ράβδου έτσι ώστε να μην εμφανίζονται φαινόμενα στρέψης.
- Η μαθηματική διατύπωση των συνιστωσών των διατμητικών τάσεων στο επίπεδο της διατομής επιτυγχάνεται με τη βοήθεια **τασικών συναρτήσεων**, οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας και τις εξισώσεις συμβιβαστού.
- Η διατύπωση του προβλήματος της διάτμησης με βάση το πεδίο των τάσεων εφαρμόζεται και για πολλαπλώς συνεκτικά χωρία χωρίς επιπλέον περιορισμούς.
- Το εσωτερικό έργο εξαιτίας των διατμητικών παραμορφώσεων εκφράζεται με τη βοήθεια των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης, σύμφωνα με τη θεωρία Timoshenko. Η εκτίμηση των συντελεστών αυτών γίνεται με χρήση ενεργειακής μεθόδου αντί της προσέγγισης των Timoshenko (Timoshenko and Goodier 1951) και Cowper (1966), για την οποία μερικοί συγγραφείς (Schramm et. al. 1994, 1997) έχουν αποδείξει ότι δίδει μη ικανοποιητικά αποτελέσματα, ή τις προσεγγίσεις άλλων ερευνητών (Stephen 1980, Hutchinson 2001) στις οποίες οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης λαμβάνουν αρνητικές τιμές.
- Η επιρροή του λόγου Poisson ν λαμβάνεται υπόψη (Στην παρούσα μέθοδο αυτό είναι δυνατό διότι δεν εξετάζονται οι σχέσεις μετακινήσεων – παραμορφώσεων, ενώ ξεκινάμε από τις σχέσεις συμβιβαστού, ισορροπίας και τάσεων –

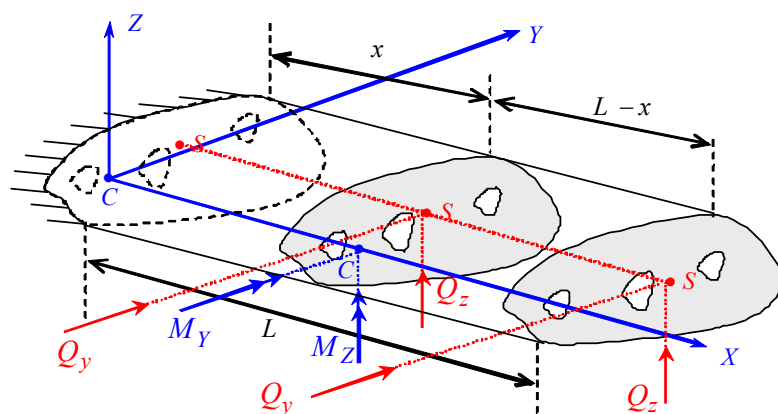
παραμορφώσεων. Στη μέθοδο των μετατοπίσεων ωστόσο, που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ξεκινάμε από τις σχέσεις μετακινήσεων – παραμορφώσεων ενώ υποθέτουμε ότι οι εγκάρσιες μετακινήσεις v, w είναι συναρτήσεις μόνο της διαμήκους συντεταγμένης x).

2.2. Εντατικά μεγέθη, ορθές τάσεις

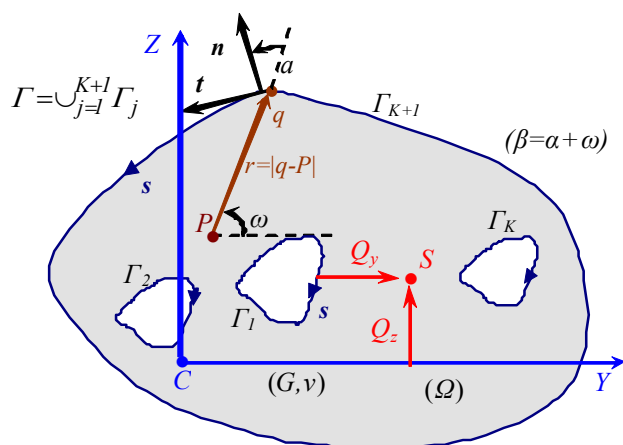
Θεωρούμε πρισματική ράβδο μήκους L με διατομή τυχόντος σχήματος, η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω του επιπέδου Y, Z . Το ένα άκρο της ράβδου είναι πακτωμένο ενώ το άλλο ελεύθερο (Σχ.2.1). Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό.

Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο φορτίο Q , το οποίο εφαρμόζεται στο κέντρο διατήσεως της διατομής της, σε απόσταση L από το πακτωμένο άκρο της. Αν Q_y και Q_z είναι οι συνιστώσες του φορτίου Q κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα, οι καμπτικές ροπές κατά τους άξονες y και z θα δίδονται από τις σχέσεις

$$M_Y = -Q_z (L - x) \quad M_Z = Q_y (L - x) \quad (2.2.1\alpha, \beta)$$



(α)



(C: κέντρο βάρους, S: κέντρο διάτμησης)

(β)

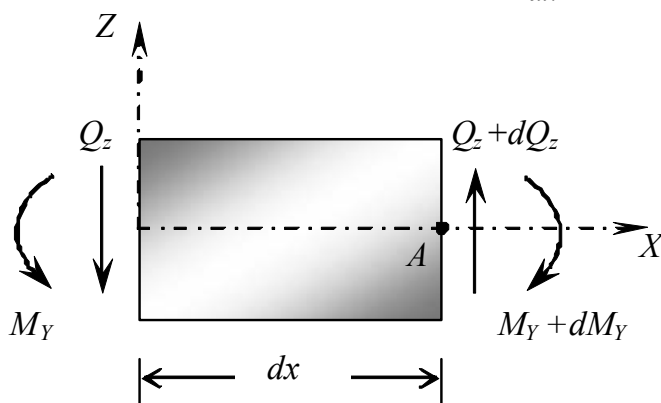
Σχ. 2.1 Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε εγκάρσια φόρτιση (α), με διατομή τυχόντος σχήματος, η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω (β).

Από την ισορροπία δυνάμεων σε στοιχειώδες τμήμα της δοκού κατά τη διεύθυνση Z (Σχ.2.2α) λαμβάνουμε

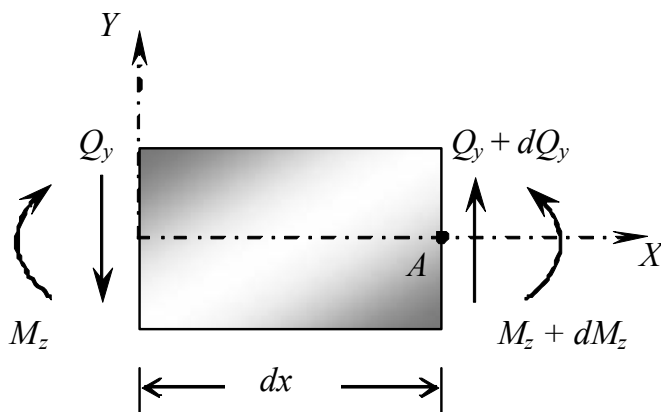
$$Q_z + dQ_z - Q_z = 0 \rightarrow dQ_z = 0 \rightarrow Q_z = \text{σταθερή} \quad (2.2.2)$$

ενώ από την ισορροπία ροπών περί τον άξονα Y , ως προς το σημείο A (Σχ.2.2β) προκύπτει

$$M_Y + dM_Y - M_Y - Q_z dx = 0 \rightarrow Q_z = \frac{dM_Y}{dx} \quad (2.2.3)$$



(α)



(β)

Σχ. 2.2 Όψη (α) και κάτοψη (β) στοιχειώδους τμήματος της ράβδου μήκους dx_1 .

Ομοίως η ισορροπία δυνάμεων κατά τη διεύθυνση Y δίδει

$$Q_y + dQ_y - Q_y = 0 \rightarrow dQ_y = 0 \rightarrow Q_y = \text{σταθερή} \quad (2.2.4)$$

ενώ από την ισορροπία ροπών περί τον άξονα Z λαμβάνουμε

$$-M_Z - dM_Z + M_Z - Q_y dx = 0 \rightarrow Q_y = -\frac{dM_Z}{dx} \quad (2.2.5)$$

Υιοθετώντας την παραδοχή ότι επίπεδες διατομές οι οποίες είναι κάθετες στον διαμήκη άξονα της δοκού πριν την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα και μετά την παραμόρφωση (παραδοχή Euler – Bernoulli), καταλήγουμε με τη βοήθεια των σχημάτων 2.3α και 2.3β στις ακόλουθες γεωμετρικές σχέσεις

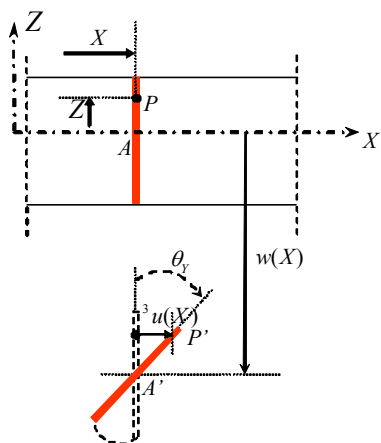
$$\theta_Y = \tan \theta_Y = \frac{u_{\theta_Y}}{Z} \rightarrow u_{\theta_Y} = Z\theta_Y \quad \theta_Z = \tan \theta_Z = -\frac{u_{\theta_Z}}{Y} \rightarrow u_{\theta_Z} = -Y\theta_Z \quad (2.2.6\alpha, \beta)$$

όπου u_{θ_Y} , u_{θ_Z} είναι οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκύπτουν από τις καμπτικές στροφές θ_Y , θ_Z , αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι

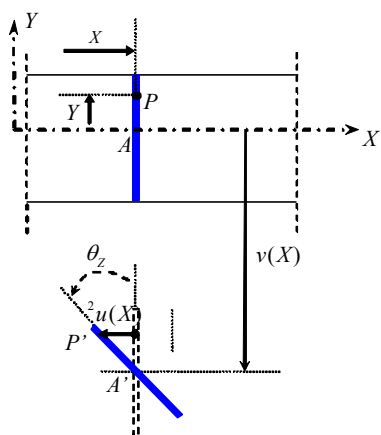
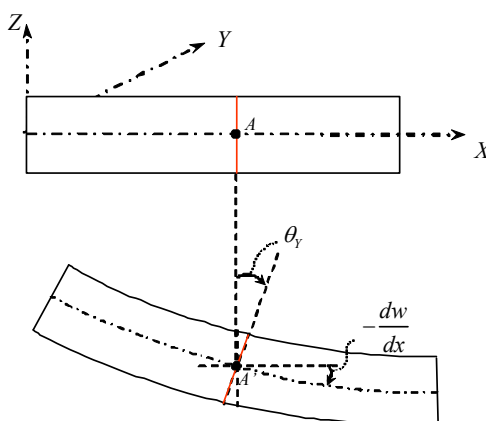
$$\theta_Y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_Z = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.6\gamma, \delta)$$

καταλήγουμε στις σχέσεις

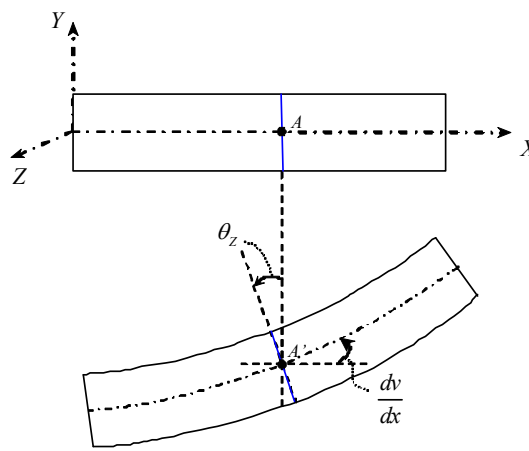
$$u_{\theta_Y} = -Z \frac{\partial w}{\partial x} \quad u_{\theta_Z} = -Y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.6\epsilon, \sigma\tau)$$



(α)



(β)



Σχ. 2.3 Στροφή περί τον άξονα Y (α) και περί τον άξονα Z (β) του στοιχειώδους τμήματος dx της εξεταζόμενης ράβδου.

Η συνολική διαμήκης μετατόπιση προκύπτει ως το άθροισμα των διαμηκών μετατοπίσεων u_{θ_y} και u_{θ_z} λόγω των συγκεντρωμένων φορτίων Q_y και Q_z , αντίστοιχα

$$u = u_{\theta_y} + u_{\theta_z} = -Y \frac{\partial v}{\partial x} - Z \frac{\partial w}{\partial x} = -(Yv' + Zw') \quad (2.2.7)$$

Η διαμήκης ανηγμένη παραμόρφωση επομένως θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -(Yv'' + Zw'') \quad (2.2.8)$$

οπότε η ορθή τάση προκύπτει ως

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -E(Yv'' + Zw'') = -EYv'' - EZw'' \quad (2.2.9)$$

Στην έκφραση της ορθής τάσης σ_{xx} (2.2.9) θα μπορούσαμε να καταλήξουμε χωρίς να υιοθετήσουμε την παραδοχή Euler – Bernoulli, λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων δεν αγνοείται. Έτσι, θεωρώντας έναν επιπλέον όρο στρέβλωσης που να εξαρτάται από τις συντεταγμένες Y, Z προκύπτει ακριβώς η ίδια έκφραση (2.2.9) για την ορθή τάση σ_{xx} .

Οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στο επίπεδο των διατομών δίδονται από τις σχέσεις

$$M_Y = \int_{\Omega} \sigma_{xx} Z \, d\Omega \quad (2.2.10\alpha)$$

$$M_Z = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} Y \, d\Omega \quad (2.2.10\beta)$$

Η σχέση (2.2.10α) με τη βοήθεια της σχέσης (2.2.9) δίδει

$$M_Y = -E \left(w'' \int_{\Omega} Z^2 \, d\Omega + v'' \int_{\Omega} YZ \, d\Omega \right) = -E (w'' I_{YY} + v'' I_{YZ}) \quad (2.2.11\alpha)$$

ή

$$M_Y = -EI_{YY}w'' - EI_{YZ}v'' \quad (2.2.11\beta)$$

Η σχέση (2.2.10β) με τη βοήθεια της σχέσης (2.2.9) δίδει

$$M_Z = E \left(w'' \int_{\Omega} ZY \, d\Omega + v'' \int_{\Omega} Y^2 \, d\Omega \right) = E (w'' I_{YZ} + v'' I_{YY}) \quad (2.2.11\gamma)$$

ή

$$M_Z = EI_{YZ}w'' + EI_{ZZ}v'' \quad (2.2.11\delta)$$

όπου έχει τεθεί

$$I_{YY} = \int_{\Omega} Z^2 d\Omega \quad I_{ZZ} = \int_{\Omega} Y^2 d\Omega \quad I_{YZ} = \int_{\Omega} YZ d\Omega \quad (2.2.11\epsilon)$$

που αποτελούν τις ροπές και το γινόμενο αδράνειας της διατομής ως προς τους άξονες Y , Z . Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (2.2.11β) με I_{YZ} και τη σχέση (2.2.11δ) με I_{YY} λαμβάνουμε τις σχέσεις

$$M_Y I_{YZ} = -EI_{YY} I_{YZ} w'' - EI_{YZ}^2 v'' \quad (2.2.12\alpha)$$

$$M_Z I_{YY} = EI_{YY} I_{YZ} w'' + EI_{YY} I_{ZZ} v'' \quad (2.2.12\beta)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2.2.12α) και (2.2.12β) προκύπτει

$$M_Y I_{YZ} + M_Z I_{YY} = E \left(I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2 \right) v'' \quad (2.2.13\alpha)$$

ή

$$v'' = \frac{M_Y I_{YZ} + M_Z I_{YY}}{E \left(I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2 \right)} \quad (2.2.13\beta)$$

Όμοια, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (2.2.11β) με I_{ZZ} και τη σχέση (2.2.11δ) με I_{YZ} λαμβάνουμε τις σχέσεις

$$M_Y I_{ZZ} = -EI_{YY} I_{ZZ} w'' - EI_{YZ} I_{ZZ} v'' \quad (2.2.14\alpha)$$

$$M_Z I_{YZ} = EI_{YZ}^2 w'' + EI_{YZ} I_{ZZ} v'' \quad (2.2.14\beta)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2.2.14α) και (2.2.14β) λαμβάνουμε

$$M_Y I_{ZZ} + M_Z I_{YZ} = -E \left(I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2 \right) w'' \quad (2.2.15\alpha)$$

ή

$$w'' = -\frac{M_Y I_{ZZ} + M_Z I_{YZ}}{E \left(I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2 \right)} \quad (2.2.15\beta)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.2.9) τα μεγέθη v'' και w'' σύμφωνα με τις σχέσεις (2.2.13β), (2.2.15β) μπορούμε να γράψουμε την ορθή τάση σ_{xx} ως

$$\sigma_{xx} = -\left(\frac{M_Y I_{YZ} + M_Z I_{YY}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \right) Y + \left(\frac{M_Y I_{ZZ} + M_Z I_{YZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \right) Z \quad (2.2.16)$$

Αντικαθιστώντας στην ανωτέρω σχέση τις καμπτικές ροπές από τις σχέσεις (2.2.1α,β) λαμβάνουμε

$$\sigma_{xx} = \frac{L-x}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \left[Q_z (YI_{YZ} - ZI_{ZZ}) + Q_y (ZI_{YZ} - YI_{YY}) \right] \quad (2.2.17)$$

2.3. Συνιστώσες τάσεως, τασικές συναρτήσεις

Ακολουθώντας την υπόθεση του Saint-Venant υποθέτουμε ότι το πεδίο των τάσεων περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(X, Y, Z), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (2.3.1)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας απουσία μαζικών δυνάμεων έχουν τη μορφή

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (2.3.4)$$

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες τάσεως από τις σχέσεις (2.3.1) στις εξισώσεις (2.3.3) και (2.3.4) λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (2.3.6)$$

επομένως οι διατμητικές τάσεις είναι συναρτήσεις μόνο των μεταβλητών Y και Z , δηλαδή είναι ίδιες σε κάθε διατομή της ράβδου.

Για τον προσδιορισμό των κατανομών των διατμητικών αυτών τάσεων θεωρούμε τη ράβδο υποβαλλόμενη ξεχωριστά στα φορτία Q_z και Q_y , οπότε οι συνολικές τάσεις προκύπτουν με επαλληλία των τάσεων που θα προκύψουν από τις προαναφερθείσες φορτίσεις.

- **Ράβδος υποβαλλόμενη μόνο στο φορτίο Q_z :**

Εφόσον $Q_y = 0$ η ορθή τάση σ_{xx} σύμφωνα με τη σχέση (2.2.17) προκύπτει ως

$$\sigma_{xx} = \frac{L-x}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Q_z (YI_{YZ} - ZI_{ZZ}) \quad (2.3.7)$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση ως προς x μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{Q_z}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} (YI_{YZ} - ZI_{ZZ}) \quad (2.3.8)$$

Η πρώτη εξίσωση ισορροπίας για τις τάσεις απουσία μαζικών δυνάμεων (2.3.2), λόγω της (2.3.8), γράφεται ως

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{Q_z}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} (YI_{YZ} - ZI_{ZZ}) \quad (2.3.9)$$

Η καταστατική σχέση παραμορφώσεων-τάσεων για ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό υλικό είναι

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

οπότε έχουμε ότι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} = -\nu \varepsilon_{xx} \quad (2.3.11\alpha, \beta)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = \varepsilon_{xy}(Y, Z), \quad \varepsilon_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} = \varepsilon_{xz}(Y, Z) \quad (2.3.11\gamma, \delta, \varepsilon)$$

Οι εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων είναι οι ακόλουθες

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.3.12\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (2.3.12\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2.3.12\gamma)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} \quad (2.3.13\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \quad (2.3.13\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} \quad (2.3.13\gamma)$$

Σύμφωνα με τις καταστατικές σχέσεις (2.3.11α,β,γ,δ,ε) οι τρεις πρώτες και η πέμπτη από τις εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων ικανοποιούνται εκ ταυτότητος. Από τη σχέση (2.3.13γ) προκύπτει

$$\frac{I}{2G} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -\frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial z} \quad (2.3.14)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3.15)$$

και λόγω της σχέσης (2.3.7) προκύπτει ότι

$$\frac{I+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -\frac{\nu}{E} \frac{Q_z I_{ZZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \quad (2.3.16\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu Q_z I_{ZZ}}{(I+\nu)(I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2)} \quad (2.3.16\beta)$$

Επίσης, από τη σχέση (2.3.13α) προκύπτει ότι

$$\frac{I}{2G} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = -\frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} \quad (2.3.17)$$

Με βάση τις σχέσεις (2.3.15) και (2.3.7) προκύπτει ότι

$$\frac{I+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{E} \frac{Q_z I_{YZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \quad (2.3.18\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu Q_z I_{YZ}}{(1+\nu)(I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2)} \quad (2.3.18\beta)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τασική συνάρτηση $\Phi(Y, Z)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και τρίτης τάξεως, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις συμβιβαστού (2.3.16β) και (2.3.18β). Οι συνιστώσες των διατμητικών τάσεων τ_{xy} , τ_{xz} και οι συνολικές διατμητικές τάσεις τ_x στο χωρίο Ω της διατομής της ράβδου με τη βοήθεια της τασικής αυτής συνάρτησης εκφράζονται ως

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z}{B} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \nu \left(I_{ZZ}YZ - I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} \right) \right] = \frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) \quad (2.3.19\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{B} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nu \left(I_{ZZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YZ}YZ \right) \right] = \frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) \quad (2.3.19\beta)$$

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (2.3.19\gamma)$$

όπου d_Y , d_Z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{d} κατά τους άξονες Y , Z , αντίστοιχα, το οποίο ορίζεται ως

$$\mathbf{d} = d_Y \mathbf{i}_Y + d_Z \mathbf{i}_Z = \left[\nu \left(I_{ZZ}YZ - I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} \right) \right] \mathbf{i}_Y + \left[-\nu \left(I_{ZZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YZ}YZ \right) \right] \mathbf{i}_Z \quad (2.3.20)$$

με \mathbf{i}_Y , \mathbf{i}_Z τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες Y , Z αντίστοιχα και τον συντελεστή B , ο οποίος εξαρτάται από το λόγο του Poisson ν και τη γεωμετρία της διατομής της ράβδου και ορίζεται ως

$$B = 2(1+\nu)(I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2) \quad (2.3.21)$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (2.3.19α) και (2.3.19β) ως προς Y και Z , αντίστοιχα λαμβάνουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{Q_z}{B} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \nu(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \right] \quad (2.3.22\alpha)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Q_z}{B} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \nu(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \right] \quad (2.3.22\beta)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Q_z}{B} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\nu(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \right] \quad (2.3.23\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Q_z}{B} \left[\nabla^2 \Phi + 2\nu(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \right] \quad (2.3.23\beta)$$

Από τις σχέσεις (2.3.9) και (2.3.23β) λαμβάνουμε

$$\frac{Q_z}{B} \left[\nabla^2 \Phi + 2\nu(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \right] = \frac{Q_z}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} (I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \quad (2.3.24)$$

ή αντικαθιστώντας το B από τη σχέση (2.3.21)

$$\frac{Q_z}{2(1+\nu)(I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2)} \left[\nabla^2 \Phi + 2\nu(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \right] = \frac{Q_z}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} (I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \quad (2.3.25\alpha)$$

ή

$$\nabla^2 \Phi + 2\nu(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) = 2(1+\nu)(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \quad (2.3.25\beta)$$

ή

$$\nabla^2 \Phi = 2(I_{YZ}Y - I_{ZZ}Z) \quad (2.3.25\gamma)$$

Η συνοριακή συνθήκη για την τασική συνάρτηση Φ διαμορφώνεται από το γεγονός ότι οι κάθετες τάσεις στο σύνορο της διατομής της ράβδου είναι μηδενικές, οπότε

$$\tau_{xn} = \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0 \quad (2.3.26)$$

όπου $n_y = \cos \beta$, $n_z = \sin \beta$ είναι τα συνημίτονα κατευθύνσεως του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στο σύνορο Γ . Αντικαθιστώντας τις τάσεις τ_{xy} και τ_{xz} από τις σχέσεις (2.3.19α) και (2.3.19β), αντίστοιχα, η συνοριακή συνθήκη (2.3.26) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{Q_z}{B} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \nu \left(I_{ZZ}YZ - I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} \right) \right] n_y + \frac{Q_z}{B} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nu \left(I_{ZZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YZ}YZ \right) \right] n_z = 0 \quad (2.3.27\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} n_z - \nu \left(I_{ZZ}YZ - I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} \right) n_y + \nu \left(I_{ZZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YZ}YZ \right) n_z = 0 \quad (2.3.27\beta)$$

ή

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nu \left(I_{ZZ} YZ - I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} \right) n_y - \nu \left(I_{ZZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YZ} YZ \right) n_z \quad (2.3.27\gamma)$$

ή

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = d_Y n_y + d_Z n_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \quad (2.3.27\delta)$$

Επομένως η τασική συνάρτηση $\Phi(Y, Z)$ υπολογίζεται από το ακόλουθο πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 2(I_{YZ} Y - I_{ZZ} Z) \quad \text{στο χωρίο } \Omega \quad (2.3.28\alpha)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = d_Y n_y + d_Z n_z = \vec{n} \cdot \vec{d} \quad \text{στο σύνορο } \Gamma \quad (2.3.28\beta)$$

• **Ράβδος υποβαλλόμενη μόνο στο φορτίο Q_y :**

Όμοια με τα προηγούμενα, εφόσον $Q_z = 0$ η ορθή τάση σ_{xx} σύμφωνα με τη σχέση (2.2.17) γράφεται ως

$$\sigma_{xx} = \frac{L - x}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Q_y (Z I_{YZ} - Y I_{YY}) \quad (2.3.29)$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση ως προς x_I μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = - \frac{Q_y}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} (Z I_{YZ} - Y I_{YY}) \quad (2.3.30)$$

Η πρώτη εξίσωση ισορροπίας για τις τάσεις απουσία μαζικών δυνάμεων (2.3.2), λόγω της (2.3.30), γράφεται ως

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{Q_y}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} (Z I_{YZ} - Y I_{YY}) \quad (2.3.31)$$

Σύμφωνα με τις καταστατικές σχέσεις (2.3.11α,β,γ,δ,ε) οι τρεις πρώτες και η πέμπτη από τις εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων ικανοποιούνται εκ ταυτότητας. Από τη σχέση (2.3.13γ) προκύπτει

$$\frac{I}{2G} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial z} \quad (2.3.32)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.3.15) και (2.3.28) προκύπτει

$$\frac{I+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{\nu}{E} \frac{Q_y I_{YZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \quad (2.3.33\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = - \frac{\nu Q_y I_{YZ}}{(I+\nu)(I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2)} \quad (2.3.33\beta)$$

Από τη σχέση (2.3.13α) προκύπτει ότι

$$\frac{I}{2G} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} \quad (2.3.34)$$

Λόγω των σχέσεων (2.3.15) και λόγω της σχέσης (2.3.29) προκύπτει ότι

$$\frac{I+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = - \frac{\nu}{E} \frac{Q_y I_{YY}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \quad (2.3.35\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = - \frac{\nu Q_y I_{YY}}{(I+\nu)(I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2)} \quad (2.3.35\beta)$$

Όμοια με την περίπτωση που η ράβδος υποβάλλεται μόνο στο φορτίο Q_z , θεωρούμε τασική συνάρτηση $\Theta(Y, Z)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και τρίτης τάξεως, τέτοια ώστε οι εξισώσεις συμβιβαστού (2.3.16β) και (2.3.18β) να ικανοποιούνται. Με τη βοήθεια της τασικής αυτής συνάρτησης οι συνιστώσες των διατμητικών τάσεων τ_{xy} , τ_{xz} εκφράζονται ως

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y}{B} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial y} - \nu \left(I_{YY} \frac{Y^2 - Z^2}{2} - I_{YZ} YZ \right) \right] = \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_Y \right) \quad (2.3.36\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_y}{B} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \nu \left(I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YY} YZ \right) \right] = \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) \quad (2.3.36\beta)$$

όπου e_Y , e_Z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{e} κατά τους άξονες Y , Z , αντίστοιχα, το οποίο ορίζεται ως

$$\mathbf{e} = e_Y \mathbf{i}_Y + e_Z \mathbf{i}_Z = \left[\nu \left(I_{YY} \frac{Y^2 - Z^2}{2} - I_{YZ} YZ \right) \right] \mathbf{i}_Y + \left[\nu \left(I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YY} YZ \right) \right] \mathbf{i}_Z \quad (2.3.37)$$

και B συντελεστής εξαρτώμενος από το λόγο του Poisson ν και τη γεωμετρία της διατομής της ράβδου και ο οποίος ορίζεται από τη σχέση (2.3.21). Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (2.3.36α) και (2.3.36β) ως προς Y και Z , αντίστοιχα λαμβάνουμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{Q_y}{B} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - \nu (I_{YY}Y - I_{YZ}Z) \right] \quad (2.3.38\alpha)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Q_y}{B} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \nu (I_{YY}Y - I_{YZ}Z) \right] \quad (2.3.38\beta)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Q_y}{B} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - 2\nu (I_{YY}Y - I_{YZ}Z) \right] \quad (2.3.39\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Q_y}{B} \left[\nabla^2 \Theta - 2\nu (I_{YY}Y - I_{YZ}Z) \right] \quad (2.3.39\beta)$$

Από τις σχέσεις (2.3.31) και (2.3.39β) λαμβάνουμε

$$\frac{Q_y}{B} \left[\nabla^2 \Theta - 2\nu (I_{YY}Y - I_{YZ}Z) \right] = \frac{Q_y}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} (I_{YZ}Z - I_{YY}Y) \quad (2.3.40)$$

ή αντικαθιστώντας τον συντελεστή B από τη σχέση (2.3.21)

$$\frac{Q_y}{2(1+\nu)(I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2)} \left[\nabla^2 \Theta - 2\nu (I_{YY}Y - I_{YZ}Z) \right] = \frac{Q_y}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} (I_{YZ}Z - I_{YY}Y) \quad (2.3.41\alpha)$$

ή

$$\nabla^2 \Theta - 2\nu (I_{YY}Y - I_{YZ}Z) = 2(1+\nu)(I_{YZ}Z - I_{YY}Y) \quad (2.3.41\beta)$$

ή

$$\nabla^2 \Theta = 2(I_{YZ}Z - I_{YY}Y) \quad (2.3.41\gamma)$$

Η συνοριακή συνθήκη για την τασική συνάρτηση Θ διαμορφώνεται και πάλι από το γεγονός ότι οι κάθετες τάσεις στο σύνορο της διατομής της ράβδου είναι μηδενικές και εκφράζεται από τη σχέση (2.3.26). Αντικαθιστώντας τις τάσεις τ_{xy} και τ_{xz} από τις σχέσεις (2.3.36α) και (2.3.36β), αντίστοιχα, η συνοριακή συνθήκη (2.3.26) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{Q_y}{B} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial y} - \nu \left(I_{YY} \frac{Y^2 - Z^2}{2} - I_{YZ}YZ \right) \right] n_y + \frac{Q_y}{B} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \nu \left(I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YY}YZ \right) \right] n_z = 0$$

$$(2.3.42\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Theta}{\partial z} n_z - \nu \left(I_{YY} \frac{Y^2 - Z^2}{2} - I_{YZ} YZ \right) n_y - \nu \left(I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YY} YZ \right) n_z = 0 \quad (2.3.42\beta)$$

ή

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = \nu \left(I_{YY} \frac{Y^2 - Z^2}{2} - I_{YZ} YZ \right) n_y + \nu \left(I_{YZ} \frac{Y^2 - Z^2}{2} + I_{YY} YZ \right) n_z \quad (2.3.42\gamma)$$

ή

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = e_Y n_y + e_Z n_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \quad (2.3.42\delta)$$

Επομένως η τασική συνάρτηση $\Theta(Y, Z)$ υπολογίζεται από το ακόλουθο πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \Theta = 2(I_{YZ} Z - I_{YY} Y) \quad \text{στο χωρίο } \Omega \quad (2.3.43\alpha)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = e_Y n_y + e_Z n_z = \underline{n} \cdot \underline{e} \quad \text{στο σύνορο } \Gamma \quad (2.3.43\beta)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας οι συνολικές διατμητικές τάσεις λόγω των σχέσεων (2.3.19α), (2.3.19β) και (2.3.36α), (2.3.36β) προκύπτουν ως

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_Y \right) \quad (2.3.44\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) \quad (2.3.44\beta)$$

2.4. Συντεταγμένες κέντρου διατμήσεως

Όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 2.1, το κέντρο διατμήσεως S είναι το σημείο στο επίπεδο της διατομής για το οποίο η ροπή των διατμητικών τάσεων λόγω τέμνουσας έχει μηδενική τιμή, οπότε οι συντεταγμένες του προσδιορίζονται από τη σχέση

$$Q_z \cdot Y^S - Q_y \cdot Z^S = \int_{\Omega} (\tau_{xz} Y - \tau_{xy} Z) d\Omega \quad (2.4.1)$$

Για $Q_y = 0$ και με αντικατάσταση των τάσεων τ_{xy}, τ_{xz} από τις σχέσεις (2.3.19α) και (2.3.19β) η εξίσωση (2.4.1) δίδει

$$Q_z \cdot y^S = \int_{\Omega} \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) z - \frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) z \right] d\Omega \quad (2.4.2\alpha)$$

ή

$$y^S = \frac{I}{B} \int_{\Omega} \left[Y \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Z \frac{\partial \Phi}{\partial y} - Y d_Z + Z d_Y \right] d\Omega \quad (2.4.2\beta)$$

Για $Q_z = 0$ και με αντικατάσταση των τάσεων τ_{xy}, τ_{xz} από τις σχέσεις (2.3.36α) και (2.3.36β), η εξίσωση (2.4.1) δίδει

$$-Q_y \cdot z^S = \int_{\Omega} \left[\frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) Y - \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Y \right) Z \right] d\Omega \quad (2.4.3\alpha)$$

ή

$$z^S = \frac{I}{B} \int_{\Omega} \left[Z \frac{\partial \Theta}{\partial y} - Y \frac{\partial \Theta}{\partial z} - Z e_Y + Y e_Z \right] d\Omega \quad (2.4.3\beta)$$

2.5. Συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης

Όπως αναφέρθηκε και στο υποκεφάλαιο 1.6, η ακριβής έκφραση της ελαστικής ενέργειας οφειλόμενη στη διάτμηση δίδεται από τη σχέση (1.6.1), ενώ η προσεγγιστική της έκφραση από τη σχέση (1.6.2). Εξισώνοντας και πάλι την ακριβή έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης με την προσεγγιστική της έκφραση προκύπτει η εξίσωση (1.6.3), της οποίας το δεξιό μέλος λόγω των σχέσεων (2.3.44α) και (2.3.44β) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega &= \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_Y \right) \right]^2 d\Omega \\ &+ \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) \right]^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

οπότε η σχέση (1.6.3) γράφεται με τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_y Q_y^2}{2AG} + \frac{\alpha_z Q_z^2}{2AG} + \frac{\alpha_{yz} Q_y Q_z}{AG} &= \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_Y \right) \right]^2 d\Omega \\ &+ \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) \right]^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Γνωρίζοντας ότι το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος \mathbf{a} με τον εαυτό του δίδεται από τη σχέση

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\alpha_Y \mathbf{i}_Y + \alpha_Z \mathbf{i}_Z) \cdot (\alpha_Y \mathbf{i}_Y + \alpha_Z \mathbf{i}_Z) = \alpha_Y^2 + \alpha_Z^2 \quad (2.5.3)$$

όπου α_Y, α_Z είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του διανύσματος \mathbf{a} κατά τους άξονες Y, Z και $\mathbf{i}_Y, \mathbf{i}_Z$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες Y, Z αντίστοιχα.

Επομένως στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.5.2) η ολοκληρωτέα ποσότητα λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_Y \right) \right]^2 + \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) \right]^2 = \\ & = \left\{ \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_Y \right) \right] \mathbf{i}_Y + \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) \right] \mathbf{i}_Z \right\}^2 \end{aligned} \quad (2.5.4\alpha)$$

ή

$$\begin{aligned} & \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_Y \right) \right]^2 + \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) \right]^2 = \\ & = \left\{ \frac{Q_z}{B} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{i}_Y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{i}_Z - (d_Y \mathbf{i}_Y + d_Z \mathbf{i}_Z) \right] + \frac{Q_y}{B} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial y} \mathbf{i}_Y + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \mathbf{i}_Z - (e_Y \mathbf{i}_Y + e_Z \mathbf{i}_Z) \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (2.5.4\beta)$$

ή

$$\begin{aligned} & \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - d_Y \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - e_Y \right) \right]^2 + \left[\frac{Q_z}{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - d_Z \right) + \frac{Q_y}{B} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - e_Z \right) \right]^2 = \\ & = \left[\frac{Q_z}{B} (\nabla \Phi - \mathbf{d}) + \frac{Q_y}{B} (\nabla \Theta - \mathbf{e}) \right]^2 \end{aligned} \quad (2.5.4\gamma)$$

Άρα η εξίσωση (2.5.2) με τη βοήθεια της (2.5.4γ) διαμορφώνεται ως

$$\frac{\alpha_y Q_y^2}{2AG} + \frac{\alpha_z Q_z^2}{2AG} + \frac{\alpha_{yz} Q_y Q_z}{AG} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[\frac{Q_z}{B} (\nabla \Phi - \mathbf{d}) + \frac{Q_y}{B} (\nabla \Theta - \mathbf{e}) \right]^2 d\Omega \quad (2.5.5)$$

Για $Q_y \neq 0$ και $Q_z = 0$, από την εξίσωση (2.5.5) προκύπτει ο συντελεστής α_y ως

$$\alpha_y = \frac{A}{B^2} \int_{\Omega} (\nabla \Theta - \mathbf{e}) \cdot (\nabla \Theta - \mathbf{e}) d\Omega \quad (2.5.6)$$

Για $Q_y = 0$ και $Q_z \neq 0$, από την εξίσωση (2.5.5) προκύπτει ο συντελεστής α_z ως

$$\alpha_z = \frac{A}{B^2} \int_{\Omega} (\nabla \Phi - \mathbf{d}) \cdot (\nabla \Phi - \mathbf{d}) d\Omega \quad (2.5.7)$$

Τέλος, για $Q_y \neq 0$ και $Q_z \neq 0$, από την εξίσωση (2.5.5) μετά την αντικατάσταση των συντελεστών α_y, α_z από τις σχέσεις (2.5.6), (2.5.7), προκύπτει ο συντελεστής α_{yz} ως

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{yz} Q_y Q_z}{A} &= 2 \frac{Q_y Q_z}{B^2} \int [(\nabla \Phi - \mathbf{d}) \cdot (\nabla \Theta - \mathbf{e})] d\Omega \\
&+ \frac{Q_z^2}{B^2} \int_{\Omega} (\nabla \Phi - \mathbf{d})^2 d\Omega + \frac{Q_y^2}{B^2} \int_{\Omega} (\nabla \Theta - \mathbf{e})^2 d\Omega \\
&- \frac{Q_y^2}{B^2} \int_{\Omega} (\nabla \Theta - \mathbf{e})^2 d\Omega - \frac{Q_z^2}{B^2} \int_{\Omega} (\nabla \Phi - \mathbf{d})^2 d\Omega
\end{aligned} \quad (2.5.8)$$

ή απαλείφοντας τους όρους με αντίθετο πρόσημο

$$\alpha_{yz} = 2 \frac{A}{B^2} \int_{\Omega} [(\nabla \Phi - \mathbf{d}) \cdot (\nabla \Theta - \mathbf{e})] d\Omega \quad (2.5.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.5.6), (2.5.7) και (2.5.9) προσδιορίζουμε τις αντιστάσεις σε διάτμηση της διατομής της ράβδου κατά Timoshenko ως

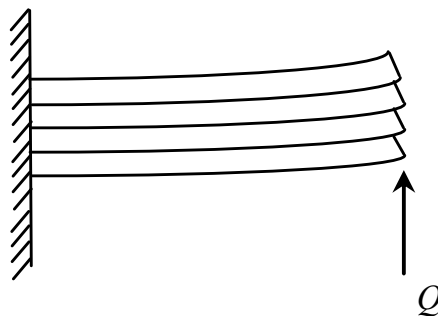
$$GA_{sy} = \frac{GA}{\alpha_y}, \quad GA_{sz} = \frac{GA}{\alpha_z}, \quad GA_{syz} = \frac{GA}{\alpha_{yz}} \quad (2.5.10\alpha, \beta, \gamma)$$

ΤΕΧΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

3.1. Βασικές έννοιες και παραδοχές

Για σταθερή τέμνουσα δύναμη οι ορθές τάσεις σ_{xx} δίδονται από τις ίδιες σχέσεις με αυτές της θεωρίας της καθαρής κάμψης. Στην περίπτωση όμως που η τέμνουσα δύναμη μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου, η χρήση των σχέσεων της καθαρής κάμψης για τον υπολογισμό των ορθών τάσεων σ_{xx} είναι εσφαλμένη και το σχετικό σφάλμα είναι της τάξης του h/L , όπου h είναι η διάσταση της εγκάρσιας τομής κατά το επίπεδο της κάμψης και L το μήκος της ράβδου. Για τιμές του h πολύ μικρές σε σχέση με το μήκος L της ράβδου το σφάλμα είναι πολύ μικρό. Έτσι, στην περίπτωση κατά την οποία $h \ll L$ (πρακτικά $h/L < 1/10$) μπορεί να επεκταθεί η παραδοχή της διατήρησης της επιπεδότητας των διατομών και στην περίπτωση της κάμψης με διάτμηση, οπότε οι αναπτυσσόμενες λόγω κάμψης τάσεις θα εξαρτώνται αποκλειστικά από την καμπτική ροπή. Τονίζεται ότι η παραδοχή της επιπεδότητας των διατομών ισχύει εφόσον οι διατμητικές παραμορφώσεις λόγω τεμνουσών δυνάμεων είναι μικρότερες από τις παραμορφώσεις που προκαλούνται από την καμπύλωση της δοκού κατά την κάμψη.

Στην περίπτωση εμφάνισης διατμητικών τάσεων στο επίπεδο της διατομής τότε αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις και κατά την διαμήκη διεύθυνση της δοκού (θεώρημα Cauchy). Οι διατμητικές αυτές τάσεις προκαλούν τη διαφορική κίνηση των διαμήκων ινών, την κίνηση δηλαδή της μιας σε σχέση με την άλλη. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον πρόβολο του σχήματος 3.1 που αποτελείται από διαδοχικά διαμήκη στρώματα. Κάτω από τη δράση του εγκάρσιου φορτίου Q ο πρόβολος θα καμφθεί και τα διαμήκη στρώματα θα τείνουν να κινηθούν το ένα σε σχέση με το άλλο. Επομένως, στις διαμήκεις ίνες θα εμφανιστούν διατμητικές τάσεις οι οποίες, σύμφωνα με την πρόταση Cauchy, είναι ίσες με τις αντίστοιχες διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στην εγκάρσια διεύθυνση (π.χ. $\tau_{xz} = \tau_{zx}$).



Σχ. 3.1 Ράβδος-πρόβολος υποβαλλόμενος σε εγκάρσιο φορτίο.

Ο πρόβολος του σχήματος 3.1 που φορτίζεται στο άκρο του με τη συγκεντρωμένη δύναμη Q επιλύεται με την ακριβή θεωρία της ελαστικότητας. Εξετάζονται δύο συνθήκες πάκτωσης. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως συνθήκη πάκτωσης ότι ο διαμήκης άξονας της δοκού δεν στρέφεται μετά την παραμόρφωση στο σημείο της πάκτωσης και ότι η πάκτωση περιορίζει την κίνηση του κέντρου βάρους της διατομής της πάκτωσης, τότε η κατακόρυφη μετατόπιση του άξονα της δοκού $w(Z=0, 0 < X < L)$ είναι ίση με

$$w(X, 0) = -\frac{Q_z}{6EI_{YY}}(X^3 - 3L^2X + 2L^3) \quad (3.1.1)$$

Αντίθετα εάν θεωρήσουμε ως συνθήκη πάκτωσης ότι ένα κατακόρυφο στοιχείο στο κέντρο βάρους της διατομής πάκτωσης δεν στρέφεται, τότε η κατακόρυφη μετατόπιση του άξονα της ράβδου δίδεται από τη σχέση

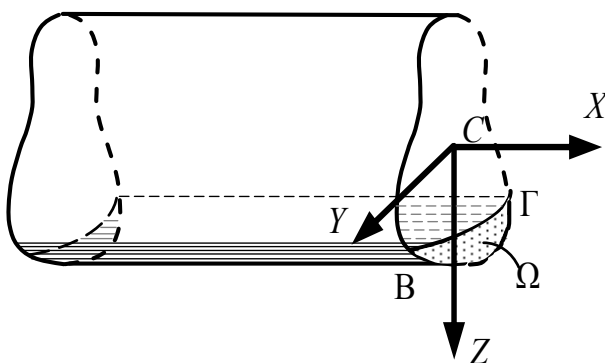
$$w(X, 0) = -\frac{Q_z}{6EI_{YY}}(X^3 - 3L^2X + 2L^3) - \frac{(1+\nu)Q_z h^2}{4EI_{YY}}(L-X) \quad (3.1.2)$$

όπου ν ο λόγος του Poisson και h το ύψος της διατομής της δοκού.

Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη περίπτωση εμφανίζεται στις κατακόρυφες μετατοπίσεις (βέλη κάμψεως) της ράβδου ένας επιπλέον όρος που οφείλεται στην επίδραση της τέμνουσας δύναμης (Τσαμασφύρος 1991).

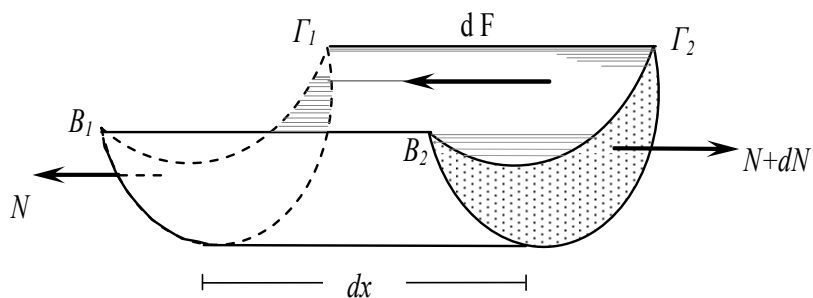
3.2. Πρισματική ράβδος τυχούσας διατομής

Έστω $CXYZ$ το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων της διατομής τυχόντος σχήματος της ράβδου που φαίνεται στο σχήμα 3.2, η οποία καταπονείται σε κάμψη από εγκάρσια φορτία. Θεωρούμε μία διαμήκη τομή της ράβδου, της οποίας το ίχνος στη διατομή είναι η καμπύλη γραμμή $B\Gamma$. Οι διαμήκεις ίνες στην καμπύλη επιφάνεια της τομής που θεωρήσαμε είναι παράλληλες προς το διαμήκη άξονα X . Η γραμμή $B\Gamma$ χωρίζει τη διατομή σε δύο μέρη, από τα οποία το κάτω έστω ότι έχει εμβαδόν A . Αντίστοιχα, η διαμήκης τομή χωρίζει τη δοκό σε δύο μέρη, από τα οποία απομονώνουμε το κάτω μέρος που περιέχεται μεταξύ δύο εγκάρσιων τομών που απέχουν μεταξύ τους dX (Σχ.3.3).



Σχ. 3.2 Ράβδος τυχούσας διατομής υποβαλλόμενη σε εγκάρσια φορτία.

Αν η συνισταμένη των αξονικών δυνάμεων στην αριστερή πλευρά είναι N , στη δεξιά θα είναι $N + dN$. Για να ισορροπούν οι δυνάμεις αυτές πρέπει στην τομή $B_1 B_2 \Gamma_2 \Gamma_1$ να αναπτύσσεται στοιχειώδης διαμήκης δύναμη dF με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα 3.3.



Σχ. 3.3 Στοιχειώδες τμήμα μήκους dx της εξεταζόμενης ράβδου.

Γράφοντας την εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων αυτών έχουμε

$$N + dN - N - dF = 0 \quad (3.2.1\alpha)$$

ή

$$dN = dF = Rdx \quad (3.2.1\beta)$$

όπου R είναι ο ρυθμός μεταβολής της διατμητικής δύναμης F , δηλαδή η ανά μονάδα μήκους μεταβολή της F . Άρα

$$R = \frac{dF}{dx} = \int_{\Omega} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} d\Omega \quad (3.2.2)$$

Στη γενικότερη περίπτωση, κάθε διατομή της ράβδου υποβάλλεται σε έκκεντρη φόρτιση (N, M_Y, M_Z) . Τόσο η αξονική δύναμη N όσο και οι καμπτικές ροπές M_Y, M_Z μεταβάλλονται συναρτήσει του X . Επομένως, η ορθή τάση σ_{xx} σε κάθε σημείο (Y, Z) μίας διατομής με τη βοήθεια της παραδοχής της επιπεδότητας των διατομών δίδεται από τη σχέση

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_Y I_{YZ} - M_Z I_{YY}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Y - \frac{M_Z I_{YZ} - M_Y I_{ZZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Z \quad (3.2.3)$$

Παραγωγίζοντας ως προς x βρίσκουμε

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = \frac{dN}{dx} + \frac{\frac{dM_Y}{dx} I_{YZ} - \frac{dM_Z}{dx} I_{YY}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Y - \frac{\frac{dM_Z}{dx} I_{YZ} - \frac{dM_Y}{dx} I_{ZZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Z \quad (3.2.4)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\frac{dN}{dx} = -q_X(X), \quad \frac{dM_Y}{dx} = Q_Z(x), \quad \frac{dM_Z}{dx} = -Q_Y(x) \quad (3.2.5.α,β,γ)$$

όπου q_X είναι η συνιστώσα του εξωτερικού κατανεμημένου φορτίου $q(X)$ κατά τη διαμήκη διεύθυνση και Q_Y, Q_Z είναι οι συνιστώσες των διατμητικών δυνάμεων κατά τους άξονες Y και Z , αντίστοιχα.

Έτσι, η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = -q_X + \frac{Q_Z I_{YZ} + Q_Y I_{YY}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Y + \frac{Q_Y I_{YZ} + Q_Z I_{ZZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Z \quad (3.2.6)$$

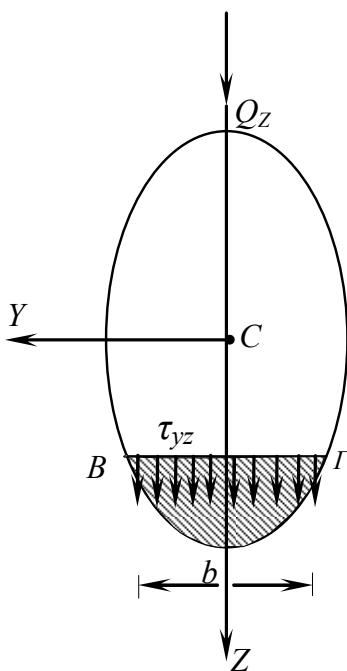
Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.2.6) στη σχέση (3.2.2) προκύπτει

$$R = -q_X + \frac{Q_Z I_{YZ} + Q_Y I_{YY}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \int_{\Omega} Y d\Omega + \frac{Q_Y I_{YZ} + Q_Z I_{ZZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} \int_{\Omega} Z d\Omega \quad (3.2.7α)$$

ή

$$R = -q_X + \frac{Q_Z I_{YZ} + Q_Y I_{YY}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} S_Z + \frac{Q_Y I_{YZ} + Q_Z I_{ZZ}}{I_{YY} I_{ZZ} - I_{YZ}^2} S_Y \quad (3.2.7β)$$

όπου S_Y, S_Z είναι οι στατικές ροπές αδράνειας του τμήματος της διατομής που αποκόπτεται ως προς τους άξονες Y και Z αντίστοιχα, ενώ I_{YY}, I_{ZZ} και I_{YZ} οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας ολόκληρης της διατομής.



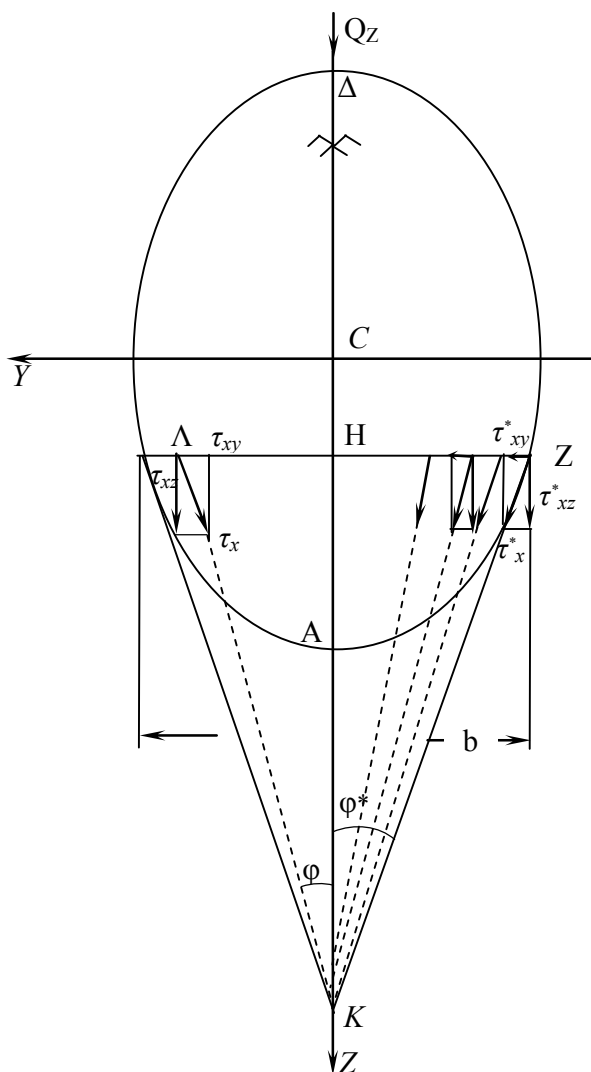
Σχ. 3.4 Διατομή συμμετρική ως προς τον άξονα Z με φορτίο Q_Z .

Η σχέση (3.2.7β) γράφεται με τη μορφή

$$R = -q_X + \frac{I_{YY}S_Z + I_{YZ}S_Y}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Q_Y + \frac{I_{ZZ}S_Y + I_{YZ}S_Z}{I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2} Q_Z \quad (3.2.8)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $q_X = Q_Y = 0$ και ο άξονας Z είναι ο άξονας συμμετρίας της διατομής (σχήμα 3.4) (οπότε $I_{YZ} = 0$), η σχέση (3.2.8) λαμβάνει τη μορφή (Τσαμασφύρος 1991)

$$R = \frac{dF}{dx} = \frac{Q_Z S_Y}{I_{YY}} \quad (3.2.9)$$



Σχ. 3.5 Διατομή με άξονα συμμετρίας τον άξονα Z καταπονούμενη από φορτίο Q_Z .

3.3. Πρισματική ράβδος με απλά συμμετρική διατομή

Σε διατομές με έναν άξονα συμμετρίας Z που καταπονούνται από τέμνουσα δύναμη Q_Z (Σχ.3.5), η διατμητική τάση τ_x που αναπτύσσεται σε αυτές δεν είναι γενικά παράλληλη προς τον άξονα Z , αλλά έχει δύο συνιστώσες τ_{xy} και τ_{xz} .

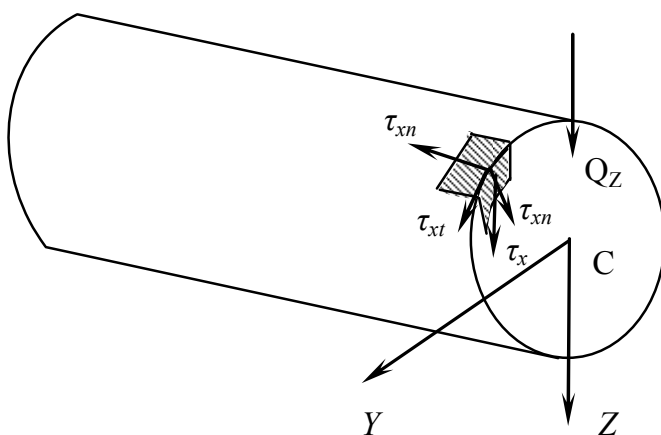
Θεωρούμε τομή EZ παράλληλη προς την ουδέτερη γραμμή Y και κάθετη προς τον άξονα Z . Υποθέτουμε ότι η διατμητική τάση τ_{xz} κατά μήκος αυτής της τομής είναι σταθερή. Η υπόθεση αυτή δικαιολογείται για διατομές μικρού πλάτους. Πράγματι επειδή σε συμμετρικά σημεία της EZ η διατμητική τάση τ_{xz} έχει ίσες τιμές αναζητούμε ένα συμμετρικό διάγραμμα κατανομής κατά μήκος της EZ και επομένως, λόγω της απαίτησης συμμετρίας και του μικρού πλάτους $(EZ)=b$, η κατανομή της τ_{xz} δεν μπορεί να εμφανίζει μεγάλες διακυμάνσεις. Με βάση αυτήν την παραδοχή έχουμε ότι

$$R = \tau_{xz} b \quad (3.3.1)$$

Από τις σχέσεις (3.2.9) και (3.3.1) προκύπτει ότι

$$\tau_{xz} = \frac{Q_Z S_Y}{I_{YY} b} \quad (3.3.2)$$

Στην παραπάνω σχέση τα μόνα μεταβλητά μεγέθη είναι το πλάτος b και η στατική ροπή S_Y του γραμμοσκιασμένου τμήματος EZAE. Έτσι, η διατμητική τάση τ_{xz} μηδενίζεται στα σημεία A και Δ όπου η στατική ροπή μηδενίζεται, ενώ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή κοντά στο κέντρο βάρους της διατομής. Όταν το πλάτος b είναι σταθερό, το μέγιστο της τ_{xz} εμφανίζεται στον άξονα Y που περνάει από το κέντρο βάρους, όπου και η S_Y γίνεται μέγιστη.



Σχ. 3.6 Ραβδος πρισματικής κυκλικής διατομής.

Επιπρόσθετα, στα συνοριακά σημεία της διατομής, π.χ. E και Z, η συνολική διατμητική τάση τ_x^* θα πρέπει να είναι εφαπτόμενη στο περίγραμμα της διατομής. Πράγματι, θεωρώντας απειροστό στοιχείο που εφάπτεται στο σύνορο της διατομής και στο οποίο ενεργεί η διατμητική τάση τ_x^* (Σχ.3.6) και αναλύοντας την τάση τ_x^* σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες τ_{xt} και τ_{xn} κατά την εφαπτομενική και την κάθετη προς αυτή διεύθυνση του περιγράμματος της διατομής, αντίστοιχα, λόγω του θεωρήματος του Cauchy, στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού θα εμφανιστεί διατμητική τάση τ_{xn} . Όμως, είναι γνωστό ότι η παράπλευρη επιφάνεια της δοκού είναι ελεύθερη διατμητικών

τάσεων, δηλαδή $\tau_{xn} = 0$. Έτσι, η τ_x^* θα πρέπει να συμπίπτει με την τ_{xt} , οπότε και θα είναι εφαπτόμενη στο περίγραμμα της διατομής. Αυτό σημαίνει ότι στα σημεία του περιγράμματος αν είναι γνωστή η τ_{xz}^* , τότε η τ_{xy}^* προσδιορίζεται από την κλίση ϕ^* της εφαπτομένης ως προς τον άξονα Z , δηλαδή ισχύει

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xz}^* \tan \phi^* \quad (3.3.3)$$

Επίσης, λόγω συμμετρίας φόρτισης και διατομής, η τ_{xy} θα έχει αντισυμμετρική κατανομή (π.χ. στα σημεία E και Z η τ_{xy} θα έχει αντίθετες τιμές, ενώ στο σημείο H μηδενίζεται). Η απλούστερη κατανομή που μπορεί να υποθεθεί είναι η γραμμική. Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη τ_x των τ_{xz} και τ_{xy} σε οποιοδήποτε σημείο Λ (Σχ.3.5) θα περνάει από το σημείο K , το σημείο δηλαδή όπου τέμνονται οι εφαπτόμενες στα σημεία E και Z . Έτσι έχουμε

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} \tan \phi \quad (3.3.4)$$

όπου ϕ είναι η κλίση της τ_x ως προς τον άξονα Z .

Αν σε διπλά συμμετρική διατομή η τέμνουσα δύναμη Q έχει τυχούσα διεύθυνση, αναλύοντας τη δύναμη αυτή σε δύο συνιστώσες Q_Y και Q_Z υπολογίζονται οι διατμητικές τάσεις που προκαλεί καθεμιά από αυτές ανεξάρτητα (Τσαμασφύρος 1991).

Τέλος, η τεχνική θεωρία διάτμησης λόγω κάμψης, πρισματικών δοκών με πλήρη διατομή βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές (Becker 1965):

- Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.
- Από τις διατμητικές τάσεις μόνο η τ_{xz} είναι ουσιώδης (η παραδοχή αυτή δίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο σε διατομές μικρού πλάτους. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε διατομή ορθογωνική μεγάλου πλάτους, η συγκεκριμένη θεωρία προβλέπει τον μηδενισμό της τ_{xy} , ενώ στην πραγματικότητα η τ_{xy} είναι μεγαλύτερη από την τ_{xz}).
- Το υλικό της ράβδου είναι ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό.
- Η ορθή τάση σ_{xx} και η διατμητική τ_{xz} δεν εξαρτώνται από τη συντεταγμένη Y , και επομένως $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(X, Z)$ και $\tau_{xz} = \tau_{xz}(X, Z)$ (δηλαδή το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως πρόβλημα επίπεδης έντασης και μετά τον υπολογισμό των συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} , τ_{xz} , η συνιστώσα τ_{xy} υπολογίζεται από την απαίτηση της συνοριακής συνθήκης $\tau_{xn} = 0$).

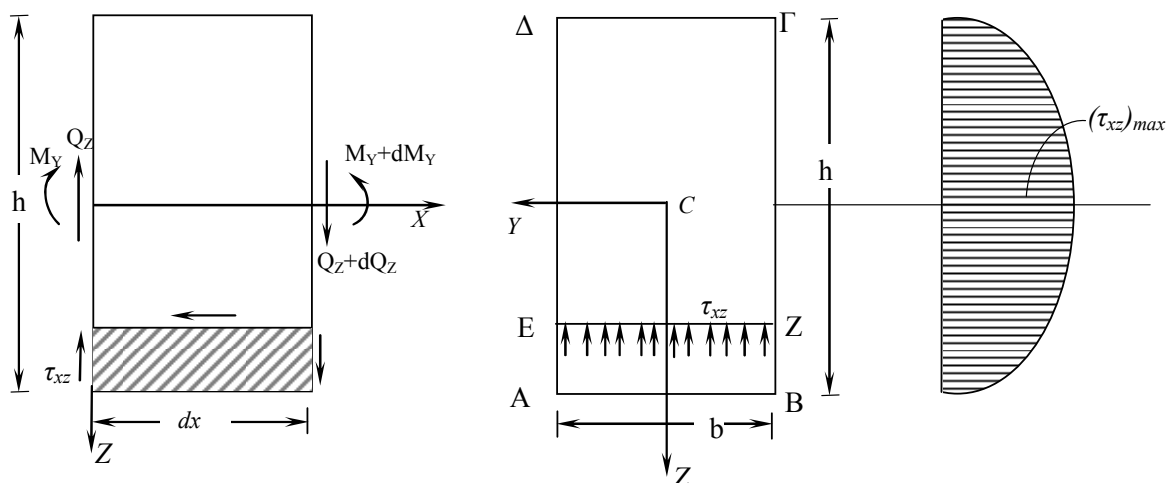
- Η διατομή της ράβδου μετά την παραμόρφωση παραμένει επίπεδη και κάθετη στον άξονα αναφοράς (η παραδοχή αυτή οδηγεί στην έκφραση (3.2.3) της συνιστώσας σ_{xx} της ορθής τάσης).

3.4. Εφαρμογές τεχνικής θεωρίας διάτμησης

3.4.1. Ράβδος ορθογωνικής διατομής

Στην περίπτωση ράβδου με σταθερή ορθογωνική διατομή οι ποσότητες Q_Z , I_{YY} και b είναι σταθερές. Επομένως η διατμητική τάση τ_{xz} μεταβάλλεται ανάλογα με τη στατική ροπή S_Y του αποκοπόμενου τμήματος. Η διατμητική τάση τ_{xz} σε οποιοδήποτε σημείο της τομής EZ δίδεται από τη σχέση

$$\tau_{xz}(Z) = \frac{Q_Z S_Y(Z)}{I_{YY} b} \quad (3.4.1)$$



Σχ. 3.7 Κατανομή διατμητικών τάσεων σε ορθογωνική διατομή ράβδου.

Για ορθογωνική διατομή η στατική ροπή ως προς Y προκύπτει ως ακολούθως

$$S_Y(Z) = \int_{\Omega} Z d\Omega = \int_Z^{h/2} bZ dZ = b \frac{Z^2}{2} \Big|_Z^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - Z^2 \right) \quad (3.4.2\alpha)$$

ή

$$S_Y(Z) = b \left(\frac{h}{2} - Z \right) \frac{I}{2} \left(\frac{h}{2} + Z \right) \quad (3.4.2\beta)$$

ή

$$S_Y(Z) = \frac{bh^2}{8} \left[1 - \left(\frac{Z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (3.4.2\gamma)$$

και εφόσον $I_{YY} = \frac{bh^3}{12}$ η κατανομή της διατμητικής τάσεως τ_{xz} δίδεται από τη σχέση

$$\tau_{xz}(Z) = \frac{Q_Z}{\frac{bh^3}{12}b} \frac{bh^2}{8} \left[1 - \left(\frac{Z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (3.4.3\alpha)$$

ή

$$\tau_{xz}(Z) = \frac{3Q_Z}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2Z}{h} \right)^2 \right] \quad (3.4.3\beta)$$

Μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο της διατμητικής τάσεως τ_{xz} ως προς Z λαμβάνουμε τη συντεταγμένη Z στην οποία παρουσιάζεται η μέγιστη τιμή διατμητικής τάσεως τ_{xz}

$$\frac{d\tau_{xz}}{dZ} = \frac{3Q_Z}{2bh} \left[-2 \left(\frac{2Z}{h} \right) \frac{2}{h} \right] = 0 \quad (3.4.4\alpha)$$

ή

$$Z = 0 \quad (3.4.4\beta)$$

οπότε η μέγιστη τιμή της τ_{xz} προκύπτει ως

$$(\tau_{xz})_{max} = \tau_{xz}(0) = \frac{3Q_Z}{2bh} \quad (3.4.5)$$

και επειδή το εμβαδόν της ορθογωνικής διατομής είναι $A = bh$, αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση λαμβάνουμε

$$(\tau_{xz})_{max} = \frac{3Q_Z}{2A} = \frac{3}{2} \tau_\mu \quad (3.4.6)$$

όπου $\tau_\mu = \frac{Q_Z}{A}$ είναι η μέση διατμητική τάση. Επομένως, η κατανομή της διατμητικής τάσεως τ_{xz} κατά το ύψος της διατομής είναι *παραβολική με μέγιστη τιμή στην ουδέτερη γραμμή* (για $Z = 0$).

Η σχέση (3.3.2) βασίστηκε στην υπόθεση της σταθερής τιμής της διατμητικής τάσεως τ_{xz} κατά μήκος τομής. Η ακριβής λύση όμως του προβλήματος δείχνει ότι η $(\tau_{xz})_{max}$ εμφανίζεται στα άκρα της ουδέτερης γραμμής. Έτσι με βάση την ακριβή θεωρία ισχύει

$$\tau_{max} = (\tau_{xz})_{max} = a \frac{3}{2} \frac{Q_Z}{bh} \quad (3.4.7)$$

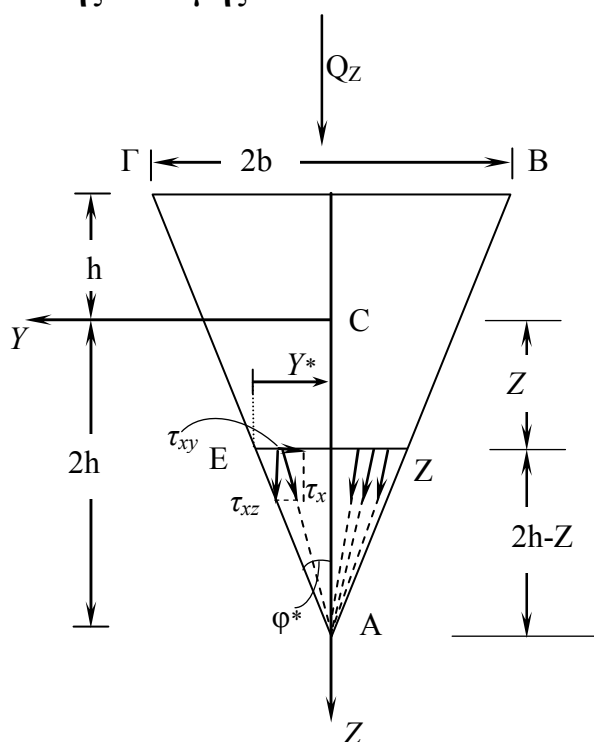
όπου a είναι συντελεστής μεγαλύτερος της μονάδας, εξαρτώμενος από τον λόγο b/h και από τον λόγο του Poisson ν . Μερικές τιμές του συντελεστή a για $\nu = 0.3$ δίδονται στον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 3.1: Τιμές του συντελεστή a για $\nu = 0.3$.

$\frac{b}{h}$	0.5	1.0	2.0	4.0
a	1.033	1.126	1.396	1.988

Από τις τιμές αυτές παρατηρούμε ότι όταν το πλάτος b της διατομής είναι μικρότερο του ύψους της h ($b < h$), οι τιμές της τ_{max} που υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.4.5) και (3.4.7) σχεδόν συμπίπτουν μεταξύ τους, ενώ όταν το πλάτος b της διατομής είναι μεγαλύτερο του ύψους της h ($b > h$) υπάρχει απόκλιση. Μάλιστα στην περίπτωση που $b/h = 4$, η τ_{max} που υπολογίζεται από την ακριβή λύση (3.4.7) είναι σχεδόν διπλάσια από την τ_{max} που υπολογίζεται από τη σχέση (3.4.5).

3.4.2. Ράβδος τριγωνικής διατομής



Σχ. 3.8 Ράβδος σταθερής τριγωνικής διατομής με φόρτιση Q_Z .

Από τη γεωμετρία του σχήματος 3.8 έχουμε ότι

$$\frac{Y^*}{b} = \frac{2h - Z}{3h} \quad (3.4.8.a)$$

ή

$$Y^* = \frac{b(2h-Z)}{3h} \quad (3.4.8.\beta)$$

Η στατική ροπή του τυχόντος αποκοπτόμενου τμήματος AZE της διατομής ABΓ προκύπτει ως

$$S_Y(Z) = \int_{\Omega} Z d\Omega = \int_Z^{2h} 2Y^* Z dZ \quad (3.4.9)$$

και με αντικατάσταση του Y^* από τη σχέση (3.4.8β) λαμβάνουμε

$$S_Y(Z) = \int_{\Omega} Z d\Omega = \int_Z^{2h} \frac{2bZ(2h-Z)}{3h} dZ = \frac{2b}{3h} \left[hZ^2 - \frac{Z^3}{3} \right]_Z^{2h} \quad (3.4.10\alpha)$$

ή

$$S_Y(Z) = \frac{2b}{9h} (h+Z)(2h-Z)^2 \quad (3.4.10\beta)$$

Γνωρίζοντας ότι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Z ολόκληρης της διατομής είναι $I_{YY} = \frac{3bh^3}{2}$ και με τη βοήθεια των σχέσεων (3.3.2) και (3.4.10β), η κατανομή της διατμητικής τάσεως τ_{xz} δίδεται από τη σχέση

$$\tau_{xz} = \frac{Q_Z S_Y(Z)}{b I_{YY}} = \frac{4Q_Z}{27bh^4} (h+Z)(2h-Z)^2 \quad (3.4.11)$$

Στα σημεία E και Z η συνισταμένη διατμητική τάση τ_x^* έχει τη διεύθυνση της EA και EZ, αντίστοιχα. Συμβολίζοντας με τ_{xy}^* και $\tau_{xz}^* = \tau_{xz}$ τις συνιστώσες της τ_x^* στο σημείο E λαμβάνουμε

$$\tau_{xy}^* = -\tau_{xz}^* \tan \phi^* = -\tau_{xz}^* \frac{dY^*}{dZ^*} = -\tau_{xz}^* \frac{b}{3h} \quad (3.4.12)$$

Επειδή όμως η τ_{xy}^* μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος της EZ, δηλαδή ισχύει

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^* \frac{Y}{Y^*} \quad (3.4.13)$$

από τις σχέσεις (3.4.8β), (3.4.11) και (3.4.12) λαμβάνουμε

$$\tau_{xy} = -\frac{4Q_Z}{27bh^4}(h+Z)(2h-Z)Y \quad (3.4.14)$$

Η συνισταμένη διατμητική τάση τ_x σε κάθε σημείο της EZ δίδεται ως

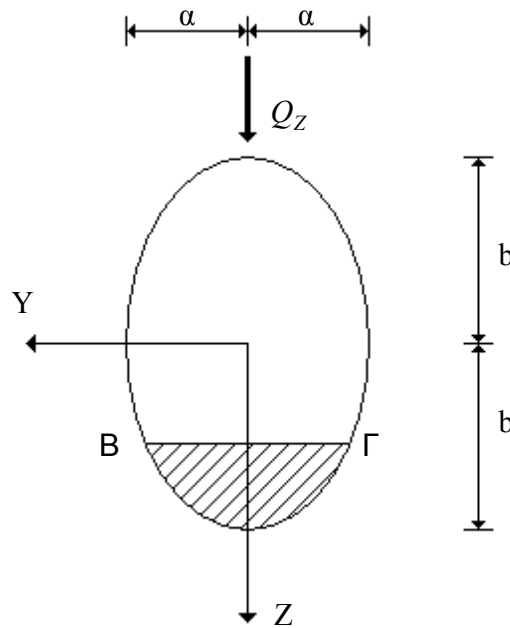
$$\tau_x = \sqrt{(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2} = \frac{4Q_Z}{27bh}(h+Z)(2h-Z)\sqrt{(2h-Z)^2 + Y^2} \quad (3.4.15)$$

3.4.3. Ράβδος ελλειπτικής διατομής

Η εξίσωση του περιγράμματος της ελλειπτικής διατομής του σχήματος 3.9 είναι

$$\frac{Y^{*2}}{a^2} + \frac{Z^{*2}}{b^2} = 1 \quad (3.4.16)$$

από την οποία έχουμε ότι



Σχ. 3.9 Ελλειπτική διατομή πρισματικής ράβδου.

$$Y^* = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - Z^{*2}} \quad (3.4.17)$$

Η στατική ροπή του αποκοπόμενου τμήματος προκύπτει ως

$$S_Y = \int_{\Omega} Z d\Omega = \int_{-b}^b 2Y^* Z dZ \quad (3.4.18)$$

Αντικαθιστώντας το Y^* με τη βοήθεια της σχέσεως (3.4.17) λαμβάνουμε

$$S_Y = \int_{-b}^b 2 \frac{a}{b} Z \sqrt{b^2 - Z^2} dZ = \frac{2a}{b} \int_{-b}^b Z \sqrt{b^2 - Z^2} dZ \quad (3.4.19)$$

Θέτοντας

$$\sqrt{b^2 - Z^2} = \omega \quad (3.4.20\alpha)$$

Οπότε

$$b^2 - Z^2 = \omega^2, \quad Z^2 = b^2 - \omega^2, \quad ZdZ = -\omega d\omega \quad (3.4.20\beta, \gamma, \delta)$$

η στατική ροπή γράφεται ως

$$S_Y = -\frac{2a}{b} \int_{\sqrt{b^2 - Z^2}}^0 \omega^2 d\omega = \frac{2a}{b} \int_0^{\sqrt{b^2 - Z^2}} \omega^2 d\omega = \frac{2a}{b} \frac{\omega^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{b^2 - Z^2}} = \frac{2a}{3b} \left(\sqrt{b^2 - Z^2} \right)^3 \quad (3.4.21\alpha)$$

ή

$$S_Y = \frac{2a}{3b} \left(b^2 - Z^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.4.21\beta)$$

Γνωρίζοντας ότι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Y ολόκληρης της διατομής είναι $I_{YY} = \frac{\pi ab^3}{4}$ και το πλάτος της διατομής είναι $2Y^* = \frac{2a}{b} \sqrt{b^2 - Z^2}$, από τη σχέση (3.3.2) με τη βοήθεια της σχέσεως (3.4.21β), η κατανομή της διατμητικής τάσεως τ_{xz} καθ' ύψος της διατομής προκύπτει ως

$$\tau_{xz}(Z) = \frac{Q_Z}{\frac{\pi ab^3}{4} 2Y^*} \frac{2a}{3b} \left(b^2 - Z^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.4.22\alpha)$$

ή

$$\tau_{xz}(Z) = \frac{4Q_Z}{3\pi ab^3} \left(b^2 - Z^2 \right) \quad (3.4.22\beta)$$

Μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο της διατμητικής τάσεως τ_{xz} ως προς Z λαμβάνουμε τη συντεταγμένη Z στην οποία παρουσιάζεται η μέγιστη τιμή της διατμητικής τάσεως τ_{xz} ως

$$\frac{d\tau_{xz}}{dZ} = \frac{4Q_Z}{3\pi ab^3} (-2Z) = 0 \quad (3.4.23\alpha)$$

ή

$$Z = 0 \quad (3.4.23\beta)$$

οπότε η μέγιστη τιμή της τ_{xz} προκύπτει ως

$$\tau_{max} = (\tau_{xz})_{max} = \frac{4Q_Z}{3\pi ab} \quad (3.4.24)$$

και επειδή το εμβαδόν της έλλειψης είναι $A = \pi ab$ αντικαθιστώντας έχουμε

$$\tau_{max} = (\tau_{xz})_{max} = \frac{4Q_Z}{3A} = \frac{4}{3}\tau_\mu \quad (3.4.25)$$

όπου $\tau_\mu = \frac{Q_Z}{A}$ είναι η μέση διατμητική τάση.

Η συνιστώσα τ_{xy} υπολογίζεται από τις σχέσεις (3.4.12) και (3.4.13) ως

$$\tau_{xy} = -\tau_{xz} \frac{Y}{Y^*} \frac{dY^*}{dZ^*} = \frac{4Q_Z YZ}{3\pi ab^3} \quad (3.4.26)$$

Επομένως η συνολική διατμητική τάση τ_x σε κάθε σημείο της διατομής δίδεται από τη σχέση

$$\tau = \sqrt{(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2} = \frac{4Q_Z}{3\pi ab^3} \sqrt{Y^2 Z^2 + (b^2 - Z^2)^2} \quad (3.4.27)$$

3.4.4. Ράβδος κυκλικής διατομής

Η κυκλική διατομή αποτελεί ειδική περίπτωση της ελλειπτικής, όπου $a = b = R$ όπου R είναι η ακτίνα της κυκλικής διατομής. Συνεπώς από τις σχέσεις της ελλειπτικής διατομής λαμβάνουμε

$$\tau_{xz}(Z) = \frac{4Q_Z}{3\pi R^4} (R^2 - Z^2) \quad (3.4.28)$$

οπότε

$$\tau_{max} = (\tau_{xz})_{max} = \frac{4Q_Z}{3\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q_Z}{A} = \frac{4}{3}\tau_\mu \quad (3.4.29)$$

δηλαδή και στην περίπτωση της κυκλικής διατομής η μέγιστη τιμή της διατμητικής τάσεως τ_{xz} ισούται με τα $\frac{4}{3}$ της μέσης διατμητικής τάσεως, ακριβώς όπως και στην περίπτωση της ελλειπτικής διατομής. Όμοια, για την τάση τ_{xy} προκύπτει

$$\tau_{xy} = \frac{4Q_Z}{3\pi R^4} YZ \quad (3.4.30)$$

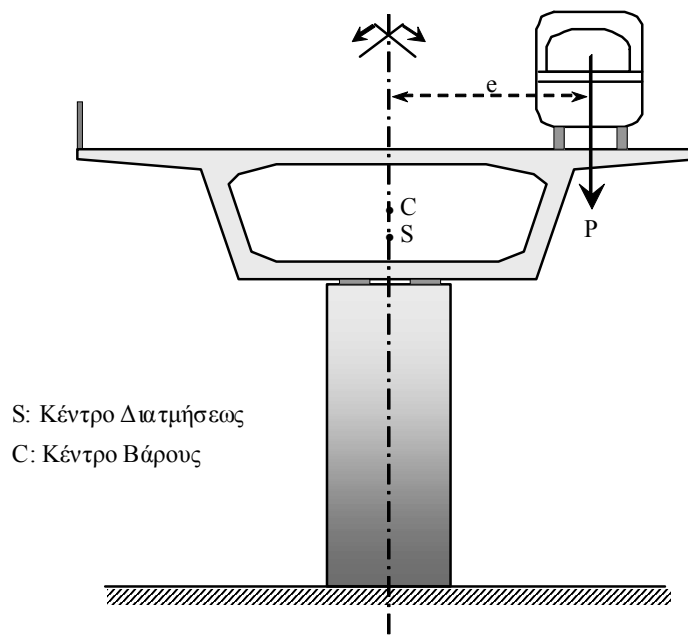
οπότε η συνολική διατμητική τάση δίδεται από τη σχέση

$$\tau = \sqrt{(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2} = \frac{4Q_Z}{3\pi R^4} \sqrt{(R^2 - Z^2)^2 + Y^2 Z^2} \quad (3.4.31)$$

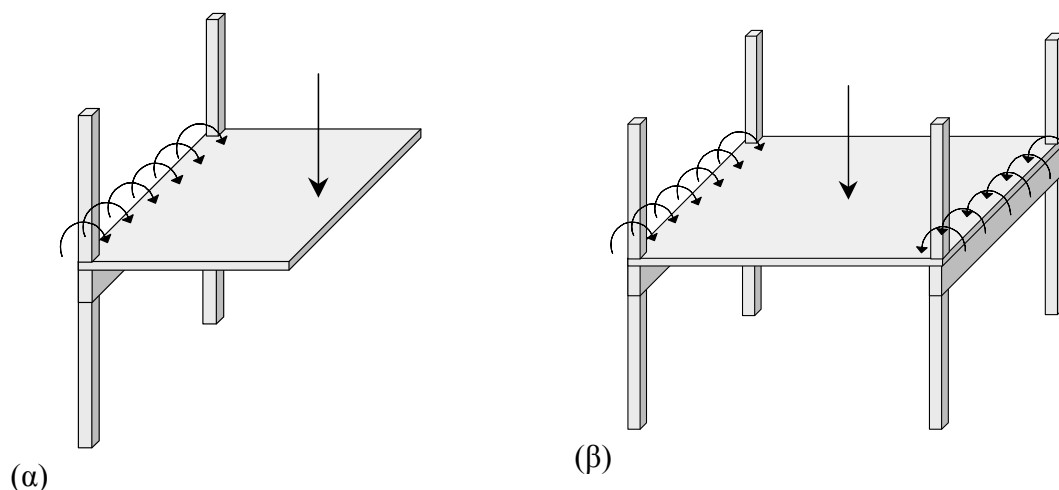
ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΩΝ

4.1. Προκαταρκτικές έννοιες

Στρέψη ράβδου καλείται η φόρτιση εκείνη κατά την οποία ένα ζεύγος δυνάμεων επιδρά σε μια διατομή, έτσι ώστε το επίπεδο του ζεύγους να είναι κάθετο στον άξονα της ράβδου και το ελεύθερο διάνυσμα της ροπής M_t του ζεύγους να έχει τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. Η στρέψη στα ραβδωτά στοιχεία φορέων εμφανίζεται στις περιπτώσεις κατά τις οποίες το επίπεδο της εξωτερικής φορτίσεως δεν διέρχεται από το κέντρο διατμήσεως S (Σχ.4.1), με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις προκαλώντας στρέβλωση των διατομών τους (σχετικά με τον ορισμό του κέντρου διατμήσεως, βλέπε υποκεφάλαιο 4.2).

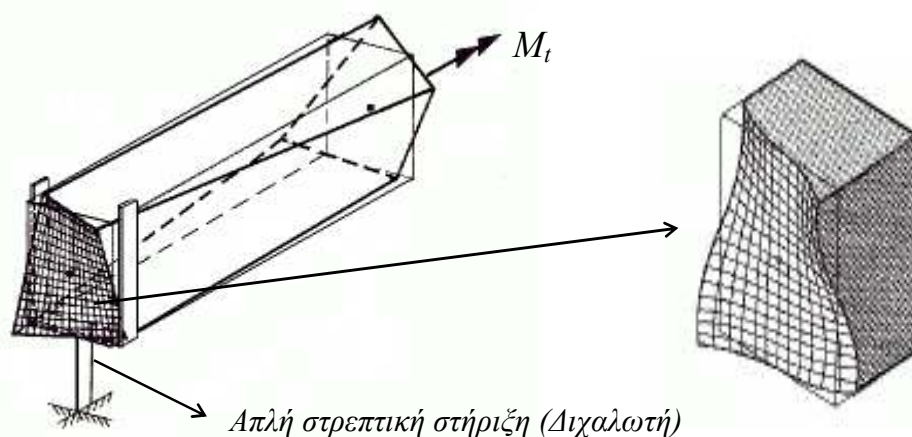


Σχ. 4.1 Ράβδος κιβωτιοειδούς μορφής υποβαλλόμενη σε έκκεντρη ως προς το κέντρο διατμήσεως φόρτιση



Σχ. 4.2 Παραδείγματα άμεσης (α) και έμμεσης (β) στρέψης δοκού

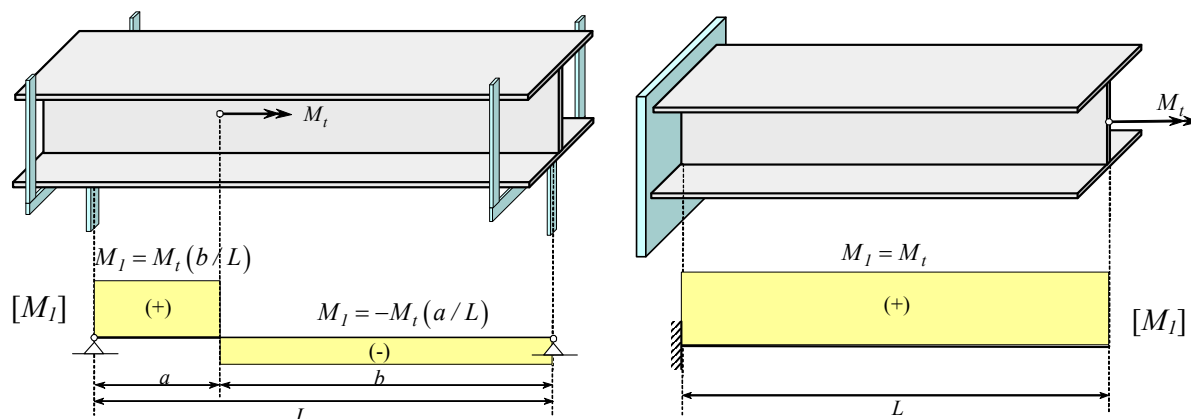
Τη στρέψη ως στατική ένταση μπορούμε να διακρίνουμε σε άμεση και έμμεση στρέψη (Σχ.4.2). Οι στρεπτικές ροπές στην περίπτωση της *άμεσης στρέψεως* είναι απαραίτητες για την ικανοποίηση των συνθηκών ισορροπίας του φορέα (στρέψη ισορροπίας). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι καμπύλοι φορείς με έκκεντρη φόρτιση. Οι στρεπτικές ροπές στην περίπτωση της *έμμεσης στρέψεως* οφείλονται αποκλειστικά σε παρεμπόδιση της γωνιακής παραμόρφωσης της εισαγόμενης από παρακείμενα στοιχεία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ακραία δοκός φορέα μορφής πλακοδοκού, η οποία καταπονείται σε έμμεση στρέψη λόγω της κάμψης της μονολιθικά συνδεδεμένης πλάκας με τη δοκό.



Σχ. 4.3 Ανεμπόδιστη στρέβλωση ορθογωνικής διατομής

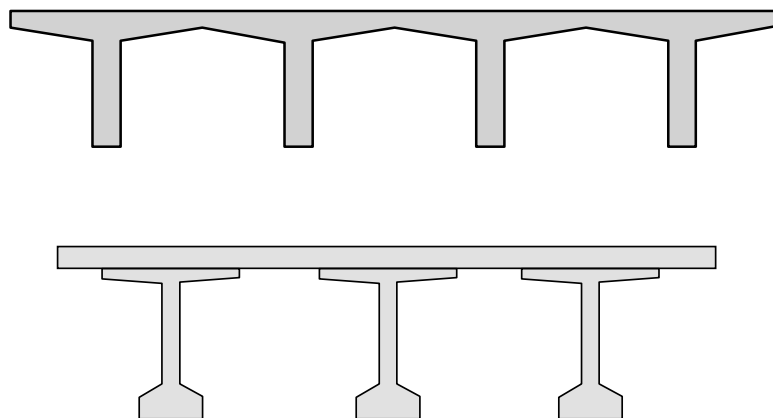
Η ανάπτυξη της θεωρίας στρέψης ξεκίνησε από τον Coulomb (1784), ο οποίος μελέτησε την απλούστερη περίπτωση της ράβδου με κυκλική διατομή. Ο Saint Venant (1855) στηριζόμενος στη θεωρία του Coulomb την οποία τροποποίησε κατάλληλα ώστε να ισχύει και για μη κυκλικές διατομές, απέδειξε ότι *επίπεδη εγκάρσια διατομή ράβδου μη κυκλικής διατομής υποβαλλόμενη σε στρέψη, δεν παραμένει επίπεδη και μετά τη στρέψη*. Πιο συγκεκριμένα, η επιφάνεια της αρχικά επίπεδης διατομής γίνεται στρεβλή. Η

στρέψη κατά Saint Venant, η οποία είναι ομοιόμορφη κατά μήκος της ράβδου καλείται και ελεύθερη, διότι η στρέβλωση της διατομής μπορεί να αναπτυχθεί ανεμπόδιστα.



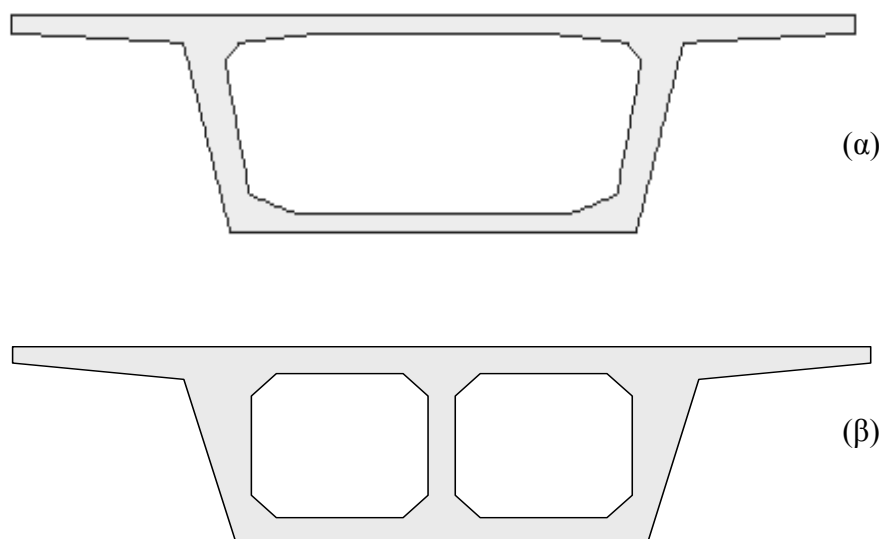
Σχ. 4.4 Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης

Στην περίπτωση στρεπτικά καταπονούμενης ράβδου, κατά την οποία οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση παρεμποδίζονται λόγω φορτίσεως ή συνθηκών στηρίξεως (παρεμποδιζόμενη στρέβλωση διατομής από μετωπική εγκάρσια νεύρωση), η στρέψη είναι ανομοιόμορφη και αναπτύσσονται ορθές τάσεις, οι οποίες είναι ανάλογες της στρεβλώσεως και συνεπώς μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Οι επιπτώσεις της παρεμποδιζόμενης στρεβλώσεως έγιναν αντιληπτές πρώτα από τον Marguerre (1940).



Σχ. 4.5 Διατομές φορέων τεχνικών έργων με έντονη στρέβλωση

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η στρέψη αναφορικά με τον τρόπο ανάληψης των στρεπτικών ροπών από τη διατομή, μπορεί να χαρακτηριστεί ως ανεμπόδιστη στρέψη *Saint Venant* (χαρακτηρίζεται από τη στρεπτική σταθερά I_t της διατομής) και ως παρεμποδιζόμενη στρέψη με δυνάμεις στρέβλωσης (χαρακτηρίζεται από τη σταθερά στρεβλώσεως C_S).



Σχ. 4.6 Διατομή απλού (α) και πολλαπλού (β) κιβωτίου φορέα τεχνικών έργων με μεγάλη στρεπτική αντίσταση.

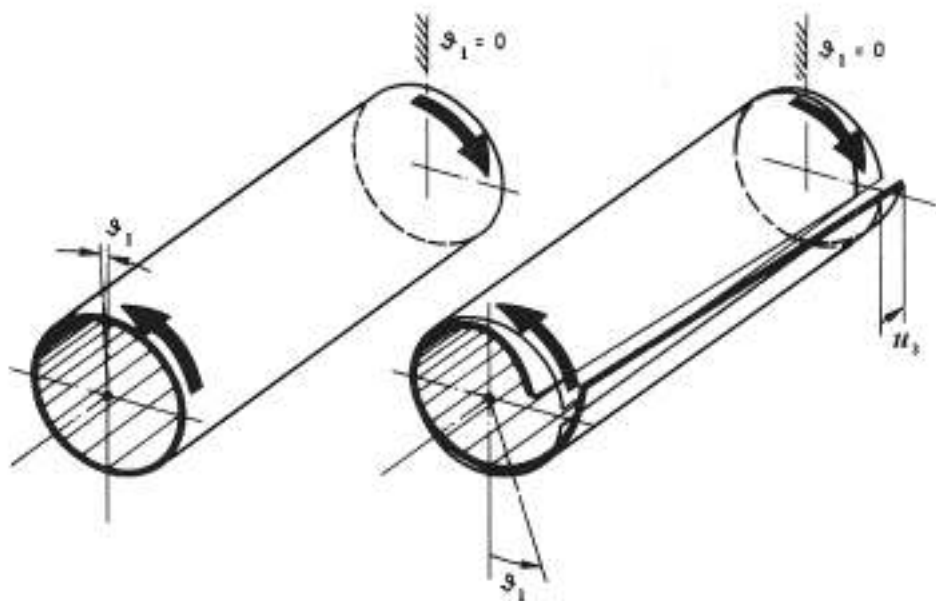
Κατά την ομοιόμορφη ή ανεμπόδιστη στρέψη *Saint Venant* (Σχ.4.3), η ισορροπία εξασφαλίζεται από κλειστή ροή στρεπτικών διατμητικών τάσεων (ροή κατά Bredt). Κατά την ανομοιόμορφη στρέψη με δυνάμεις στρεβλώσεως, όπως προαναφέρθηκε ο φορέας ανθίσταται στις επιβαλλόμενες στρεπτικές ροπές με την ανάπτυξη ορθών τάσεων λόγω παρεμπόδισης της διαμήκου παραμόρφωσης (Σχ.4.4). Η στρέψη με στρέβλωση είναι ιδιαίτερα εμφανής σε φορείς από οπλισμένο ή προεντεταμένο σκυρόδεμα με ανοικτές διατομές που περιλαμβάνουν τουλάχιστον τρεις πλευρές, καθεμία από τις οποίες αποτελείται από τοίχωμα ή κλειστή διατομή (Σχ.4.5). Στις περιπτώσεις αυτές οι τάσεις λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης πρέπει να προσδιορίζονται, διότι μπορεί να είναι σημαντικές. Σε περιπτώσεις απλών ή πολλαπλών κλειστών διατομών (Σχ.4.6), η επιρροή της παρεμπόδισης της στρέβλωσης μπορεί να αγνοηθεί, ιδιαίτερα αν ταυτόχρονα ασκείται σημαντική καμπτική καταπόνηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αντιπαράθεσης των στρεπτικών μετατοπίσεων (Σχ.4.7) αποτελεί η διατομή κλειστού κυκλικού σωλήνα (απουσία στρέβλωσης, μεγάλη στρεπτική αντίσταση) και του ανοικτού κυκλικού σωλήνα ίδιων διαστάσεων (ιδιαίτερα εμφανής στρέβλωση, πολύ μικρή στρεπτική αντίσταση). Το παράδειγμα αυτό γίνεται αντιληπτό αν αναλογιστούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες στη θέση του ανοίγματος επιβάλλουν μηδενική διατμητική τάση, γεγονός που οδηγεί σε μεγάλες διατμητικές τάσεις στη διατομή προκειμένου να αναληφθεί το στρεπτικό φορτίο. Στον κλειστό σωλήνα ωστόσο, οιαδήποτε νοητή τομή θα δώσει διατμητικές τάσεις διάφορες του μηδενός, γεγονός που κάνει τον κλειστό σωλήνα «υπερστατικό» με αποτέλεσμα να δίδει μεγαλύτερη στρεπτική αντίσταση.

Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε την ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψεως με δυνάμεις στρεβλώσεως ως γενική περίπτωση και την ανεμπόδιστη στρέψη *Saint Venant* ως μερική περίπτωση της προηγούμενης. Για να γίνουν κατανοητές οι διαφορές που υπάρχουν, θα περιγραφούν οι παραδοχές και οι βασικές σχέσεις των δύο θεωριών παράλληλα.

Παραδοχές ελαστικής θεωρίας στρέψεως

1. Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.

Στους καμπύλους φορείς η κάμψη και η στρέψη είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με γεωμετρικές σχέσεις. Λύσεις σχετικά με το θέμα δίδονται από τους Becker (1965), Vlassov (1964, 1965), Dabrowski (1968), κ.ά.



Σχ. 4.7 Αντιπαράθεση των στρεπτικών μετατοπίσεων ενός κλειστού και ενός ανοικτού κυκλικού σωλήνα ίδιων διαστάσεων

2. Η ράβδος υπόκειται μόνο σε περιστροφή περί το διαμήκη άξονά της, όπου ο άξονας στροφής μπορεί να τοποθετείται ελεύθερα. Μετατοπίσεις κάθετες στον άξονα της ράβδου (εκτροπή) δεν υπάρχουν.

Στη στρέψη ράβδων όπου επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άξονας στροφής διαφορετικός από αυτόν που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης των διατομών αναφέρεται ο Roik (1978). Η κάμψη της ράβδου με την παραδοχή αυτή θεωρείται ανεξάρτητη καταπόνηση. Τούτο δεν ισχύει όμως και στην περίπτωση που η ράβδος υπολογίζεται με θεωρία δευτέρας τάξεως. Λύσεις σχετικά με το θέμα δίδονται από τους Roik et.al. (1972).

3. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται ($\gamma_{yz} = 0$).

Σε πολύ λεπτότοιχες διατομές μπορεί η παραδοχή αυτή να μην ισχύει, ιδιαίτερα όταν υπάρχουν τοπικές καταπονήσεις. Μια σειρά από λύσεις για τέτοια ειδικά προβλήματα μπορεί να βρεθεί στην βιβλιογραφία, έτσι π.χ. για δοκούς μορφής διπλού ταυ (I) από τους Scheer (1955), Oxford (1963), για λεπτότοιχους φορείς κιβωτιοειδούς μορφής από τους Heilig (1961), Steinle (1970), Dittler (1980), και για λεπτότοιχους καμπύλους σωλήνες από τους Klöppel and Friemann (1963). Η παραδοχή της μη αισθητής μεταβολής της μορφής της διατομής κατά τη συστολή της λόγω στρέψης αποτελεί προϋπόθεση στους φορείς κιβωτιοειδούς μορφής, ώστε να μπορούν να επιλύονται (όπως συμβαίνει κατά κανόνα) με τις μεθόδους της στατικής των ραβδωτών φορέων. Η προϋπόθεση αυτή κατά κανόνα πληρούται στις προεντεταμένες κιβωτιοειδείς γέφυρες, με την τοποθέτηση εγκάρσιας νεύρωσης (διαδοκίδα) στα άκρα ή και στο μέσο (ανάλογα με το άνοιγμα, το πλάτος και το

ύψος) του κατασκευαζόμενου φορέα, σύμφωνα με τους Leonhardt (1980), Weidemaan (1984), Rossner (1988).

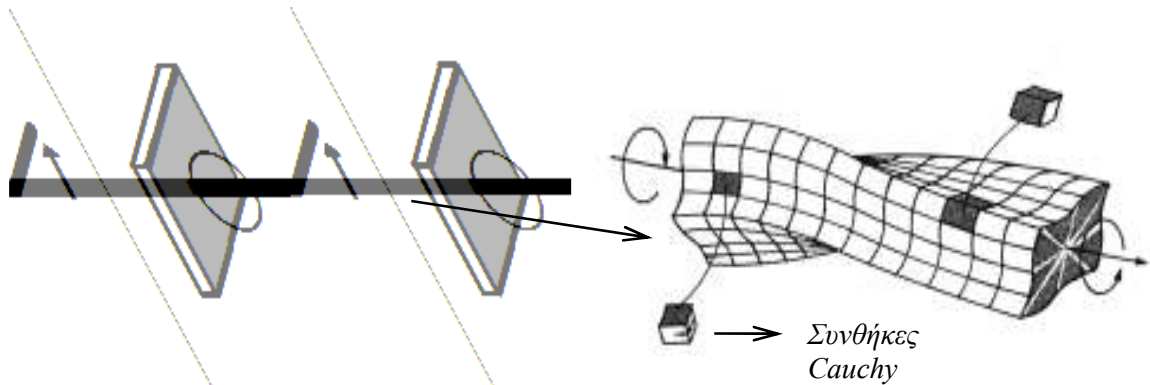
4. *Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.*
Με την παραδοχή αυτή το σχήμα της διατομής της ράβδου είναι ανεξάρτητο της διαμήκους συντεταγμένης. Στη στρέψη ράβδων, όπου το σχήμα των διατομών τους μεταβάλλεται συναρτήσει του μήκους, αναφέρονται οι Lee and Szabo (1967).
5. *Η πρωτογενής (κύρια) στρέβλωση της ράβδου είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους.*
Η αναλογία μεταξύ στρέβλωσης των διατομών της ράβδου και σχετικής γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους αποδείχθηκε ότι ισχύει στην περίπτωση της γραμμικής ομοιόμορφης στρέψης από τον St. Venant. Ο συγκεκριμένος τρόπος στρέβλωσης της διατομής επεκτείνεται και στην παρούσα θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης οδηγώντας σε απλοποίησή της. Η θεώρηση ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης της διατομής, η οποία δεν είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους, καθιστά δυνατή τη διερεύνηση της επιρροής δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων και παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 5.
6. *Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του.*
Στη στρεπτική καταπόνηση με μεγάλες στροφές αναφέρονται οι Kreuzinger (1969), Klöppel and Bilstein (1972) (βλ. επίσης κεφ.7).
7. *Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.*
8. *Η κατανομή των δυνάμεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.*

Ειδικά για την **ανεμπόδιστη ομοιόμορφη στρέψη Saint Venant** ισχύει η πρόσθετη παραδοχή:

9. *Οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται και είναι ίδιες για κάθε διατομή και ανεξάρτητες από τις διαμήκεις συντεταγμένες.*
Με την παραδοχή αυτή επιβάλλεται περιορισμός, τόσο στις συνθήκες στήριξης της ράβδου (διχαλωτή στήριξη, όπως αυτή φαίνεται στο Σχ.4.4) όσο και στη φόρτιση της, η οποία πρέπει να είναι τέτοια ώστε η στρεπτική ροπή M_t να είναι σταθερή σε κάθε διατομή της ράβδου. Ωστόσο, ακόμα και στην περίπτωση κατά την οποία η στρέβλωση παρεμποδίζεται στις στηρίξεις, αν η στρεπτική ροπή M_t είναι σταθερή και το μήκος της ράβδου αρκετά μεγάλο, τότε υπάρχει περιοχή μακριά από τα άκρα της ράβδου, στην οποία η στρέβλωση μπορεί να θεωρηθεί ότι πραγματοποιείται ανεμπόδιστα (Σχ.4.8).

Από την τελευταία παραδοχή είναι φανερό ότι το πεδίο εφαρμογής της ομοιόμορφης στρέψεως είναι πολύ περιορισμένο, αν μάλιστα παρατηρήσουμε ότι η ράβδος του Σχ.4.8, η οποία αποτελεί την άμεση εφαρμογή της ομοιόμορφης στρέψεως αν αντικαταστήσουμε τη στρεπτική στήριξη πάκτωσης με διχαλωτή στήριξη, είναι μηχανισμός. Η διαπίστωση

αυτή οδηγεί εύκολα στην αναγκαιότητα διερεύνησης του προβλήματος της ανομοιόμορφης στρέψεως.



Σχ. 4.8 Ανεμπόδιση στρέβλωση μακριά από τη στήριξη

4.2. Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

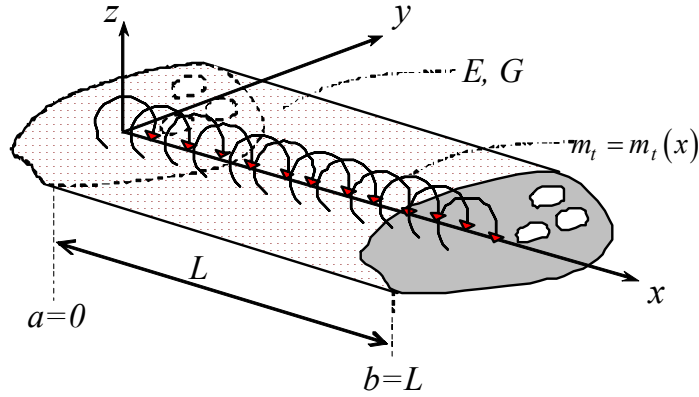
Θεωρούμε ράβδο τυχούσας διατομής, η οποία υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική φόρτιση $m_t = m_t(x)$ περί τον επιμήκη άξονα της x (Σχ.4.9α). Αποτέλεσμα της στρεπτικής αυτής καταπόνησης είναι η στροφή της διατομής της ράβδου ως προς ως προς το κέντρο διατμήσεως S κατά γωνία $\theta_x(x)$. Το κέντρο διατμήσεως S ταυτίζεται με το κέντρο συστροφής της διατομής της ράβδου εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής. Στα επόμενα θεωρούμε ότι στη ράβδο δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άλλος άξονας συστροφής.

Το κέντρο διατμήσεως S είναι το σημείο στο επίπεδο της διατομής, για το οποίο η ροπή των διατμητικών τάσεων λόγω τέμνουσας έχει μηδενική τιμή και επομένως

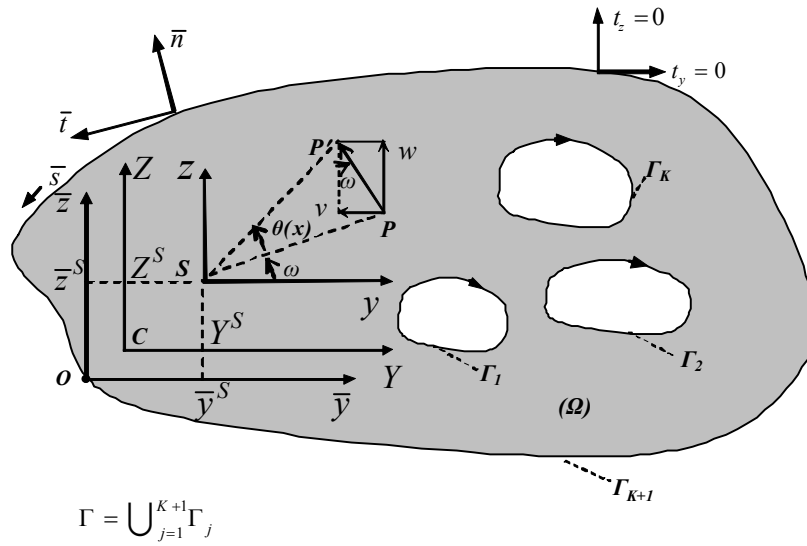
$$Q_z \cdot Y^S - Q_y \cdot Z^S = \int_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot Y - \tau_{xy} \cdot Z) d\Omega \quad (4.2.1)$$

όπου Q_y, Q_z είναι οι τέμνουσες δυνάμεις κατά τους άξονες y, z αντίστοιχα, με CYZ το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων, Y^S, Z^S είναι οι συντεταγμένες του κέντρου διατμήσεως S ως προς το κέντρο βάρους C της διατομής και τ_{xy}, τ_{xz} είναι οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στη διατομή. Η θέση του κέντρου διατμήσεως είναι ανεξάρτητη του μεγέθους και του είδους της εξωτερικής φορτίσεως, αλλά εξαρτάται μόνο από το γεωμετρικό σχήμα της διατομής. Στην περίπτωση κατά την οποία η διατομή έχει άξονα συμμετρίας, το κέντρο διατμήσεως S βρίσκεται πάνω σε αυτόν, ενώ αν η διατομή έχει δύο άξονες συμμετρίας, το κέντρο διατμήσεως ταυτίζεται με το κέντρο βάρους.

Λόγω της προαναφερθείσης στροφής της διατομής ως προς το κέντρο διατμήσεως S κατά γωνία $\theta_x(x)$ για τυχόν σημείο P της διατομής προκύπτουν μετατοπίσεις v και w κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα (Σχ.4.9β), οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις



(α)



(β)

Σχ. 4.9 Ράβδος τυχούσας διατομής υποβαλλόμενη σε στρεπτική ροπή M_t

$$v(x, y, z) = -(PP') \sin \omega = -(MP) \theta_x(x) \sin \omega = -z \theta_x(x) \quad (4.2.2)$$

$$w(x, y, z) = (PP') \cos \omega = (MP) \theta_x(x) \cos \omega = y \theta_x(x) \quad (4.2.3)$$

ενώ για τη μετατόπιση u που αποτελεί τη στρέβλωση της διατομής θεωρούμε ότι ισχύει

$$u(x, y, z) = \theta'_x(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (4.2.4)$$

όπου $\theta'_x(x) = d\theta_x / dx$ είναι η σχετική γωνία στροφής δύο γειτονικών διατομών της ράβδου ανηγμένη στη μονάδα μήκους και $\phi_S(y, z)$ είναι η συνάρτηση στρεβλώσεως ως προς το κέντρο διατομής S , η οποία χαρακτηρίζεται και ως κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως. Ο δείκτης S δείχνει ότι η στρέβλωση αναφέρεται στον άξονα στροφής S . Η συνάρτηση στρεβλώσεως ϕ_S εκφράζει τη στρέβλωση u που προκύπτει για μοναδιαία σχετική γωνία στροφής ($\theta'_x(x) = 1$). Σύμφωνα με την παραδοχή που εκφράζει η σχέση (4.2.4), η συνάρτηση στρεβλώσεως εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διατομής, δηλαδή αποτελεί παράμετρο αυτής και είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης x .

Σύμφωνα με την ανεμπόδιστη ομοιόμορφη στρέψη *Saint Venant*, η σχετική γωνία στροφής θα πρέπει να είναι σταθερή ($\theta'_x = c$), ενώ σύμφωνα με την ανομοιόμορφη στρέψη με δυνάμεις στρεβλώσεως, η σχετική γωνία στροφής είναι συνάρτηση της διαμήκους συντεταγμένης x ($\theta'_x = \theta'_x(x)$).

Με τη βοήθεια των μετατοπίσεων που δίδονται από τις σχέσεις (4.2.2 – 4.2.4) και εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετατοπίσεων - παραμορφώσεων και τάσεων - παραμορφώσεων της θεωρίας ελαστικότητας λαμβάνουμε τις συνιστώσες του τανυστή παραμορφώσεως ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \theta'_x(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (4.2.5\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.2.5\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.2.5\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta'_x(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \quad (4.2.5\delta)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (4.2.5\epsilon)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta'_x(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \quad (4.2.5\sigma\tau)$$

και τις συνιστώσες του τανυστή τάσεως ως

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] = E \cdot \theta'_x(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (4.2.6\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] = 0 \quad (4.2.6\beta)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] = 0 \quad (4.2.6\gamma)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \quad (4.2.6\delta)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = 0 \quad (4.2.6\epsilon)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \quad (4.2.6\sigma\tau)$$

όπου οι τελικές εκφράσεις των εξ. (4.2.6α,β,γ) έχουν εξαχθεί με την παραδοχή ότι $\nu = 0$, όπου ν είναι ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου. Στην ειδική περίπτωση της ανεμπόδιστης ομοιόμορφης στρέψεως *Saint Venant* ($\theta'_x = \text{σταθερή}$), οι σχέσεις (4.2.5α) και (4.2.6α) δίδουν, αντίστοιχα

$$\varepsilon_{xx} = 0 \quad (4.2.7\alpha)$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (4.2.7\beta)$$

ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες των τανυστών παραμορφώσεως και τάσεως είναι ταυτόσημες με αυτές της ανομοιόμορφης στρέψεως με δυνάμεις στρεβλώσεως.

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες του τανυστή τάσεως στις τρεις εξισώσεις ισορροπίας της θεωρίας ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων λαμβάνουμε

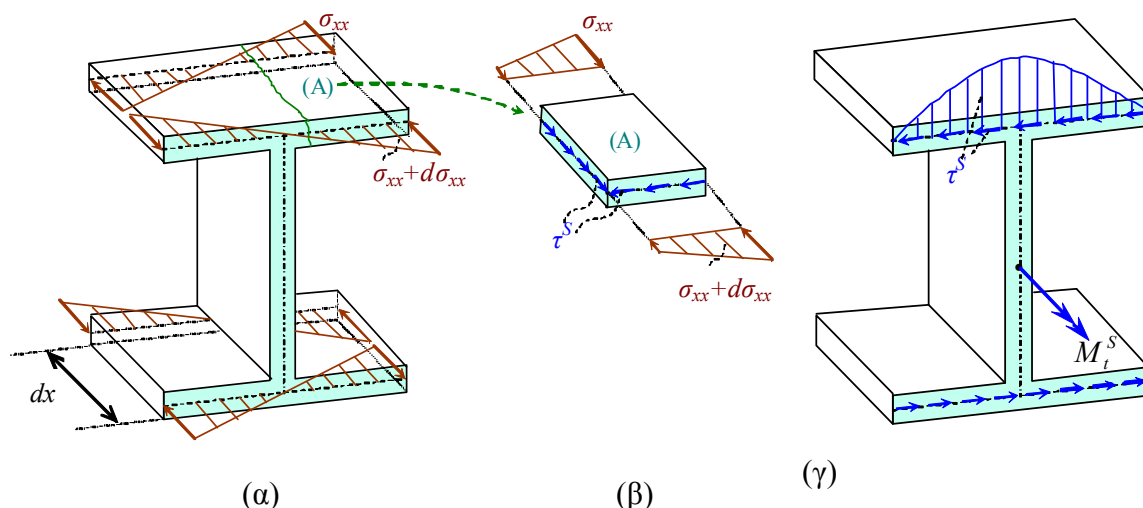
$$G \cdot \theta_x''(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) = 0 \quad (4.2.8\alpha)$$

$$G \cdot \theta_x''(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) = 0 \quad (4.2.8\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[G \cdot \theta_x'(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[G \cdot \theta_x'(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} [E \cdot \theta_x''(x) \cdot \phi_S] = 0 \quad (4.2.8\gamma)$$

Οι δύο πρώτες από τις εξισώσεις ισορροπίας, όπως φαίνεται και από τις σχέσεις (4.2.8α,β) δεν πληρούνται και το γεγονός αυτό αποτελεί ασυνέπεια της θεωρίας της ανομοιόμορφης στρέψεως ράβδων ή αλλιώς η παρούσα θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ικανοποιεί ενεργειακή αρχή που εκφράζει την ισορροπία ολόκληρου του φορέα αλλά τοπικά εξασφαλίζει την ισορροπία μόνο κατά τον άξονα x . Μόνο στην περίπτωση κατά την οποία $\theta_x''(x) = 0$, δηλαδή η σχετική γωνία στρόφης $\theta_x'(x)$ είναι σταθερή (περίπτωση ομοιόμορφης στρέψεως *Saint Venant*), οι δύο πρώτες εξισώσεις ισορροπίας πληρούνται εκ ταυτότητος. Κάνοντας πράξεις στη σχέση (4.2.8γ) εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 \phi_S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial z^2} = - \frac{E \cdot \theta_x'''(x)}{G \cdot \theta_x'(x)} \cdot \phi_S \quad (4.2.9)$$



Σχ. 4.10 Ορθές και διατμητικές τάσεις λόγω στρεβλώσεως

Γνωρίζοντας ότι η πρώτη θ_x' και η τρίτη θ_x''' παράγωγος της γωνίας στρόφης είναι συναρτήσεις της διαμήκουσ συντεταγμένης x , η λύση της μερικής διαφορικής εξισώσεως (4.2.9) στη γενική περίπτωση θα πρέπει να είναι και αυτή συνάρτηση της συντεταγμένης

x . Το γεγονός όμως αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση (4.2.4), όπου η συνάρτηση στρεβλώσεως $\phi_S(y, z)$ ορίζεται ως ανεξάρτητη της συντεταγμένης x . Έτσι στη σχέση (4.2.9) το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνο των μεταβλητών y, z , εφόσον $\phi_S = \phi_S(y, z)$, ενώ το δεξιό μέλος είναι συνάρτηση και της μεταβλητής x . Για την άρση της ασυνέπειας αυτής θεωρούμε ότι οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στη διατομή, διασπώνται σε **πρωτογενείς** τ^P και **δευτερογενείς** τ^S , οι οποίες προέρχονται από τη στρέβλωση. Η διάσπαση αυτή των διατμητικών τάσεων δικαιολογείται από τη θεώρηση της ισορροπίας των ορθών τάσεων από στρέβλωση σε στοιχειώδες τμήμα της διατομής, όπως αυτή φαίνεται στο Σχ.4.10. Έτσι, σε ράβδο τυχούσης διατομής υποβαλλόμενης σε ανομοιόμορφη στρέψη αναπτύσσονται ορθές τάσεις σ_{xx}^w , οι οποίες είναι ανάλογες με την πραγματοποιούμενη στρέβλωση και μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα x της ράβδου (Σχ.4.10α). Εξετάζοντας την τομή A του Σχ.4.10β παρατηρούμε ότι η στοιχειώδης μεταβολή $d\sigma_{xx}^w$ των ορθών τάσεων από στρέβλωση μπορεί να εξισορροπηθεί μόνο από διατμητικές τάσεις κατά μήκος της τομής A και οι οποίες με τη βοήθεια του θεωρήματος Cauchy οδηγούν στην ανάπτυξη των δευτερογενών διατμητικών τάσεων τ^S (Σχ.4.10γ) στο επίπεδο της διατομής. Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις, οι οποίες εκφράζουν τις διατμητικές τάσεις της ομοιόμορφης στρέψεως (*Saint-Venant*) με τη διαφορά ότι η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους δεν είναι σταθερή, και οι ορθές τάσεις από στρέβλωση προκύπτουν από τις παραμορφώσεις (πρωτογενείς), ενώ οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις προκύπτουν από την ισορροπία των διαμήκων ορθών τάσεων στρεβλώσεως σ_{xx} , που συμβολίζονται και ως σ_{xx}^w .

Με βάση την προαναφερθείσα διάσπαση των διατμητικών τάσεων σε πρωτογενείς και δευτερογενείς, δηλαδή

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S \quad (4.2.10\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S \quad (4.2.10\beta)$$

ορίζουμε τα πρωτογενή και δευτερογενή τμήματα των τάσεων αυτών καθώς και τις ορθές τάσεις από στρέβλωση σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\tau_{xy}^P = G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \quad \tau_{xy}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (4.2.11\alpha, \beta)$$

$$\tau_{xz}^P = G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \quad \tau_{xz}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (4.2.12\alpha, \beta)$$

$$\sigma_{xx}^w = E \cdot \theta''_x(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (4.2.13)$$

όπου τις συναρτήσεις $\phi_S^P(y, z)$ και $\phi_S^S(x, y, z)$ ονομάζουμε πρωτογενή και δευτερογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.2.10) στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας της θεωρίας ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^w}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} = 0 \quad (4.2.14)$$

Η σχέση (4.2.14) δηλώνει ότι η εντατική κατάσταση της ράβδου υποκείμενης σε στρεπτική καταπόνηση προκύπτει από την επαλληλία των πρωτογενών τ^P , των δευτερογενών τ^S διατμητικών τάσεων και των ορθών τάσεων από στρέβλωση σ_{xx}^w . Προκειμένου να ικανοποιήσουμε την εξίσωση (4.2.14) απαιτούμε τον μηδενισμό τόσο των όρων που προέρχονται από τις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις

$$\frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} = 0 \quad (4.2.15)$$

όσο και αυτών που προέρχονται από την ορθή και τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις από στρέβλωση (είναι προφανές ότι στην ομοιόμορφη στρέψη *Saint-Venant* δεν υπάρχουν οι όροι αυτοί)

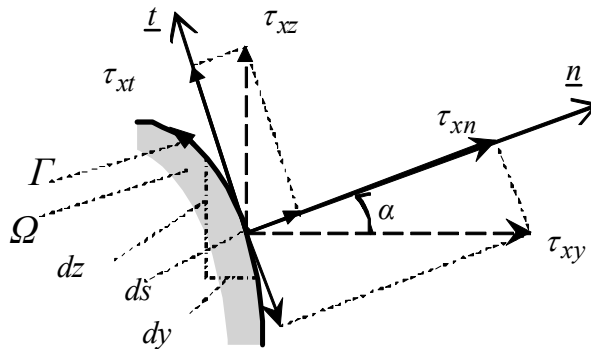
$$\frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}^w}{\partial x} = 0 \quad (4.2.16)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.2.11- 4.2.13) στις σχέσεις (4.2.15, 4.2.16) λαμβάνουμε

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2.17)$$

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E \cdot \theta_x'''(x)}{G} \cdot \phi_S^P \quad (4.2.18)$$

Για τη μόρφωση των **συνοριακών συνθηκών** της πρωτογενούς και της δευτερογενούς κύριας συνάρτησης στρεβλώσεως παρατηρούμε τις διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής. Εξετάζοντας τη στοιχειώδη επιφάνεια $dydz$ με τη βοήθεια του σχήματος 4.11 εύκολα λαμβάνουμε



Σχ. 4.11 Διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \quad (4.2.19)$$

$$\tau_{xt} = -\tau_{xy} \cdot n_z + \tau_{xz} \cdot n_y \quad (4.2.20)$$

όπου $n_y = \cos(y, n) = \cos \alpha = \frac{dy}{dn} = \frac{dz}{ds}$ και $n_z = \sin(z, n) = \sin \alpha = \frac{dz}{dn} = -\frac{dy}{ds}$ είναι τα συνημίτονα κατευθύνσεως του εξωτερικού κάθετου διανύσματος \underline{n} στο σύνορο της διατομής. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.2.10) που εκφράζουν τη διάσπαση των διατμητικών τάσεων σε πρωτογενείς και δευτερογενείς στις σχέσεις (4.2.19, 4.2.20) λαμβάνουμε

$$\tau_{xn}^P = \tau_{xy}^P \cdot n_y + \tau_{xz}^P \cdot n_z \quad \tau_{xt}^P = -\tau_{xy}^P \cdot n_z + \tau_{xz}^P \cdot n_y \quad (4.2.21\alpha, \beta)$$

$$\tau_{xn}^S = \tau_{xy}^S \cdot n_y + \tau_{xz}^S \cdot n_z \quad \tau_{xt}^S = -\tau_{xy}^S \cdot n_z + \tau_{xz}^S \cdot n_y \quad (4.2.22\alpha, \beta)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων που δίδονται από τις σχέσεις (4.2.11, 4.2.12) στις σχέσεις (4.2.21, 4.2.22) λαμβάνουμε

$$\tau_{xn}^P = G \cdot \theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - z \cdot n_y + y \cdot n_z \right) \quad (4.2.23\alpha)$$

$$\tau_{xt}^P = G \cdot \theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + y \cdot n_y + z \cdot n_z \right) \quad (4.2.23\beta)$$

$$\tau_{xn}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} \quad (4.2.23\gamma)$$

$$\tau_{xt}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad (4.2.23\delta)$$

Οι σχέσεις (4.2.23α, 4.2.23γ) και (4.2.23β, 4.2.23δ) δίδουν αντίστοιχα τις κάθετες και εφαπτομενικές ως προς το σύνορο της διατομής πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις. Επειδή η ράβδος είναι αφόρτιστη κατά τη διαμήκη κατεύθυνση στην παράπλευρη επιφάνεια της πρέπει για λόγους ισορροπίας οι κάθετες διατμητικές τάσεις στο σύνορο της να μηδενίζονται.

Προκειμένου να ικανοποιήσουμε τη συνοριακή αυτή συνθήκη απαιτούμε τον μηδενισμό τόσο των όρων που προέρχονται από τις πρωτογενείς όσο και αυτών από τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, δηλαδή

$$\tau_{xn}^P = 0 \quad \tau_{xn}^S = 0 \quad (4.2.24\alpha, \beta)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.2.23α, 4.2.23γ) στις σχέσεις (4.2.24α,β) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $G\theta'_x \neq 0$, η συνοριακή συνθήκη της πρωτογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως δίδεται ως

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z \cdot n_y - y \cdot n_z \quad (4.2.25)$$

και η συνοριακή συνθήκη της δευτερογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως ως

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad (4.2.26)$$

Ανακεφαλαιώνοντας τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι για τον προσδιορισμό της πρωτογενούς $\phi_S^P(y, z)$ και δευτερογενούς $\phi_S^S(x, y, z)$ κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως απαιτείται η λύση των πιο κάτω προβλημάτων :

1. *Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξισώσεως Laplace*

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \text{ στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \quad (4.2.27\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z \cdot n_y - y \cdot n_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (4.2.27\beta)$$

2. *Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξισώσεως Poisson*

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E \cdot \theta_x''(x)}{G} \cdot \phi_S^P \text{ στο εσωτερικό του } \Omega \quad (4.2.28\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (4.2.28\beta)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψεως τίθεται ως προς τυχόν σημείο O του επιπέδου της διατομής (βλ. Σχ.4.9β), αρχικά προσδιορίζεται η πρωτογενής συνάρτηση στρεβλώσεως $\phi_O^P(\bar{y}, \bar{z})$, την οποία λαμβάνουμε από τη λύση του αντίστοιχου προβλήματος Neumann της διαφορικής εξισώσεως Laplace

$$\nabla^2 \phi_O^P = \frac{\partial^2 \phi_O^P}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi_O^P}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \quad (4.2.29\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_O^P}{\partial n} = \bar{z} \cdot n_y - \bar{y} \cdot n_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (4.2.29\beta)$$

Στη συνέχεια προσδιορίζεται η πρωτογενής κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως $\phi_S^P(y, z)$ ως προς το κέντρο διατμήσεως S με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (Marguerre 1940)

$$\phi_M^P(y, z) = \phi_O^P(\bar{y}, \bar{z}) - \bar{y}\bar{z}^S + \bar{z}\bar{y}^S + \bar{c} \quad (4.2.30)$$

όπου \bar{y}^S, \bar{z}^S είναι οι συντεταγμένες του κέντρου διατομής S ως προς το αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $O\bar{y}\bar{z}$ και \bar{c} μία σταθερά. Οι συντεταγμένες \bar{y}^S, \bar{z}^S και η σταθερά \bar{c} προσδιορίζονται από την απαίτηση η αξονική δύναμη N και οι καμπτικές ροπές $M_{\bar{y}}, M_{\bar{z}}$ που προκύπτουν από τις ορθές τάσεις σ_{xx}^w από στρέβλωση να μηδενίζονται ως προς οιοδήποτε σύστημα αξόνων, δηλαδή

$$N = \int_{\Omega} \sigma_{xx}^w d\Omega = 0 \quad (4.2.31\alpha)$$

$$M_{\bar{y}} = \int_{\Omega} \bar{z} \sigma_{xx}^w d\Omega = 0 \quad (4.2.31\beta)$$

$$M_{\bar{z}} = - \int_{\Omega} \bar{y} \sigma_{xx}^w d\Omega = 0 \quad (4.2.31\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.2.13), (4.2.30) στις σχέσεις (4.2.31) λαμβάνουμε

$$S_{\bar{y}} \bar{y}^S - S_{\bar{z}} \bar{z}^S + A \bar{c} = -\bar{R}_S^P \quad (4.2.32\alpha)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} \bar{y}^S + I_{\bar{y}\bar{z}} \bar{z}^S + S_{\bar{y}} \bar{c} = -R_{\bar{y}}^P \quad (4.2.32\beta)$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} \bar{y}^S + I_{\bar{z}\bar{z}} \bar{z}^S - S_{\bar{z}} \bar{c} = R_{\bar{z}}^P \quad (4.2.32\gamma)$$

όπου

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad S_{\bar{y}} = \int_{\Omega} \bar{z} d\Omega \quad S_{\bar{z}} = \int_{\Omega} \bar{y} d\Omega \quad (4.2.33\alpha,\beta,\gamma)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_{\Omega} \bar{z}^2 d\Omega \quad I_{\bar{z}\bar{z}} = \int_{\Omega} \bar{y}^2 d\Omega \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = - \int_{\Omega} \bar{y}\bar{z} d\Omega \quad (4.2.34\alpha,\beta,\gamma)$$

είναι το εμβαδόν της διατομής, οι στατικές ροπές αδράνειας της ως προς τους άξονες \bar{y} και \bar{z} , οι καμπτικές ροπές αδράνειας της ως προς τους άξονες \bar{y} και \bar{z} και το γινόμενο αδρανείας της, αντίστοιχα. Επίσης στις σχέσεις (4.2.32) ως ροπές στρεβλώσεως $\bar{R}_S^P, R_{\bar{y}}^P, R_{\bar{z}}^P$ έχουν τεθεί οι ποσότητες

$$\bar{R}_S^P = \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega \quad R_{\bar{y}}^P = \int_{\Omega} \bar{z} \phi_O^P d\Omega \quad R_{\bar{z}}^P = \int_{\Omega} \bar{y} \phi_O^P d\Omega \quad (4.2.35\alpha,\beta,\gamma)$$

Η δεσπόζουσα εξίσωση (4.2.29α) του προαναφερθέντος προβλήματος Neumann αναφορικά με τη συνάρτηση στρεβλώσεως $\phi_O^P(\bar{y}, \bar{z})$ προκύπτει με τη βοήθεια των σχέσεων μετασχηματισμού (βλ. Σχ.4.9β)

$$y = \bar{y} - \bar{y}^S \quad (4.2.36\alpha)$$

$$z = \bar{z} - \bar{z}^S \quad (4.2.36\beta)$$

αν στη διαρμονική έκφραση της κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως $\phi_S^P(y, z)$

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) \quad (4.2.37)$$

αντικαταστήσουμε τη σχέση μετασχηματισμού (4.2.30), η οποία με τη βοήθεια των σχέσεων (4.2.36) γράφεται ως

$$\phi_S^P = \phi_O^P - (y + \bar{y}^S) \cdot \bar{z}^S + (z + \bar{z}^S) \cdot \bar{y}^S + \bar{c} \quad (4.2.38)$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$\nabla^2 \phi_S^P = \nabla^2 \phi_O^P \quad (4.2.39)$$

Επίσης η συνοριακή συνθήκη (4.2.29β) του προαναφερθέντος προβλήματος Neumann αναφορικά με τη συνάρτηση στρεβλώσεως $\phi_O^P(\bar{y}, \bar{z})$ προκύπτει εύκολα, αν στην πρώτη παράγωγο της πρωτογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως ως προς το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο της διατομής

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} n_z = \frac{\partial \phi_S^P}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi_S^P}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} n_z \quad (4.2.40)$$

αντικαταστήσουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού (4.2.36, 4.2.38).

Από τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι για τα προβλήματα Neumann που προαναφέρθηκαν και περιγράφονται από τις σχέσεις (4.2.27) και (4.2.28) πρέπει να ισχύουν τα ακόλουθα :

- Οι συνθήκες υπέρξεως λύσεως εκφράζονται με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds = 0 \quad (4.2.41\alpha)$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial (\phi_S^S - \phi_S^{Sp})}{\partial n} ds = 0 \quad (4.2.41\beta)$$

όπου ϕ_S^{Sp} είναι μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.2.28α) (Hsiao and Wendland 2008).

- Η λύση καθενός από τα δύο προβλήματα προκύπτει συναρτήσει μιας αυθαίρετης σταθεράς (μετατόπιση στερεού σώματος κατά x), η οποία δεν μπορεί να

προσδιορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες του. Είναι προφανές ότι στα μεγέθη στα οποία υπεισέρχονται παράγωγοι της λύσης, η σταθερά δεν έχει επιπτώσεις. Αναφορικά με το πρόβλημα Neumann για την εξίσωση Laplace, αντικαθιστώντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.27β) στη συνθήκη (4.2.41α) που αφορά την πρωτογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως λαμβάνουμε

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma} (z \cdot n_y - y \cdot n_z) ds = \oint_{\Gamma} y dy + z dz \quad (4.2.42)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss στο επίπεδο

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz dy = \oint_{\Gamma} P dz + Q dy \quad (4.2.43)$$

για $Q = y$ και $P = z$ λαμβάνουμε

$$\oint_{\Gamma} y dy + z dz = 0 \quad (4.2.44)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.2.41α), (4.2.42) και (4.2.44) συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη υπάρξεως λύσεως του προβλήματος Neumann για την πρωτογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως ικανοποιείται. Επίσης, η συνθήκη υπάρξεως λύσεως του προβλήματος Neumann για τη δευτερογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως (σχέση 4.2.41β) αποδεικνύεται ότι ικανοποιείται.

Αναφορικά με την αυθαίρετη σταθερά μετατόπισης στερεού σώματος του προβλήματος Neumann για την πρωτογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως περιλαμβάνεται στη σχέση μετασχηματισμού (4.2.30) που ήδη παρουσιάσαμε. Έτσι, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην περίπτωση κατά την οποία η αρχή των αξόνων στο επίπεδο της διατομής της ράβδου δεν συμπίπτει με το κέντρο συστροφής S , η επιφάνεια στρεβλώσεως (πρωτογενής) που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών Neumann για την εξίσωση Laplace, έχει υποστεί στροφή στερεού σώματος στο επίπεδο της διατομής (δευτερός και τρίτος όρος του δεξιού μέλους της σχέσεως μετασχηματισμού 2.30) και λόγω της φύσεως του προβλήματος Neumann παράλληλη μετατόπιση \bar{c} κατά τον άξονα της ράβδου.

Αναφορικά με την αυθαίρετη σταθερά μετατόπισης στερεού σώματος του προβλήματος Neumann για τη δευτερογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως ϕ_S^S , η οποία αναφέρεται στο κέντρο συστροφής S , θα ισχύει

$$\tilde{\phi}_S^S = \phi_S^S + c^S \quad (4.2.45)$$

όπου η συνάρτηση $\tilde{\phi}_S^S$ ονομάζεται **βασική δευτερογενής συνάρτηση στρεβλώσεως** και c^S είναι αυθαίρετη σταθερά ολοκληρώσεως. Η σχέση (4.2.45) επαληθεύει την εξίσωση Poisson και τη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος (4.2.28β). Ο προσδιορισμός της σταθεράς ολοκληρώσεως c^S επιτυγχάνεται από την απαίτηση

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (4.2.46)$$

η οποία προκύπτει από τη μέθοδο ισορροπίας ή την ενεργειακή μέθοδο. Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.2.45) στη σχέση (4.2.46) λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega} (\tilde{\phi}_S^S - c^S) d\Omega = 0 \quad (4.2.47)$$

και επομένως

$$c^S = \frac{I}{A} \int_{\Omega} \tilde{\phi}_S^S d\Omega \quad (4.2.48)$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η σχέση (4.2.45) γράφεται ως

$$\phi_S^S = \tilde{\phi}_S^S - \frac{I}{A} \int_{\Omega} \tilde{\phi}_S^S d\Omega \quad (4.2.49)$$

Τέλος, με βάση τα προαναφερθέντα, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου (εξ. (4.2.2-4.2.4)) διαμορφώνεται τελικά ως

$$u = \theta'_x(x) \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \quad (4.2.50\alpha)$$

$$v = -z\theta_x(x) \quad (4.2.50\beta)$$

$$w = y\theta_x(x) \quad (4.2.50\gamma)$$

4.3. Εντατικά μεγέθη, εξίσωση ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο προσδιορίστηκαν οι συνιστώσες του τανυστή τάσεως στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψεως ομογενών ισότροπων ράβδων. Οι διατμητικές τάσεις τ_{xy} και τ_{xz} δίδουν συνιστώσες στρεπτικής ροπής, οι οποίες προκύπτουν δια ολοκληρώσεως στο επίπεδο της διατομής. Έτσι, η προκύπτουσα στρεπτική ροπή λαμβάνεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) d\Omega \quad (4.3.1)$$

Προσθαφαιρώντας τους όρους $\partial \phi_S^P / \partial y$ και $\partial \phi_S^P / \partial z$ η σχέση (4.3.1) γράφεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z - \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y - \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad (4.3.2)$$

ή

$$M_t = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left(-\tau_{xy} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (4.3.3)$$

Εισάγοντας την προσέγγιση διάσπασης των διατμητικών τάσεων σε πρωτογενείς και δευτερογενείς, όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο και θεωρώντας ότι το πρωτογενές τμήμα τους αφορά τον πρώτο όρο του αθροίσματος του δεξιού μέλους της σχέσεως (4.3.3) και το δευτερογενές τμήμα τους τον δεύτερο όρο, η σχέση (4.3.3) γράφεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left(-\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (4.3.4)$$

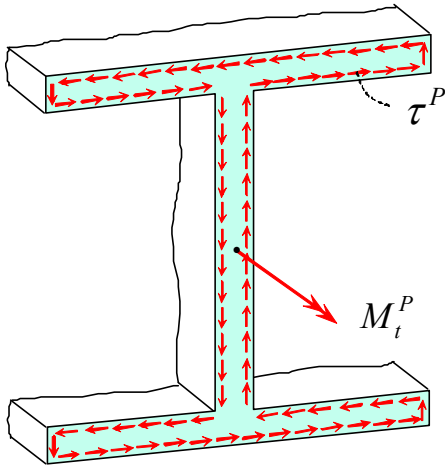
Έτσι, στην ανομοιόμορφη στρέψη σε κάθε διατομή της ράβδου ισχύει η σχέση

$$M_t = M_t^P + M_t^S \quad (4.3.5)$$

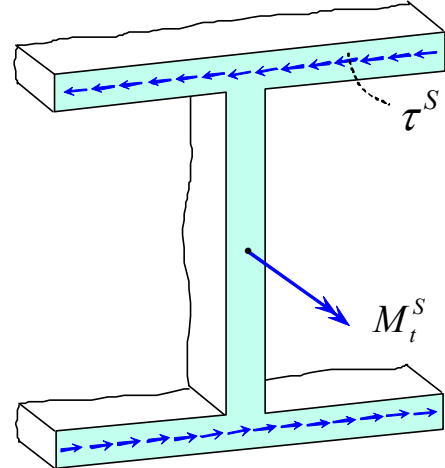
όπου έχει τεθεί

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (4.3.6\alpha)$$

$$M_t^S = \int_{\Omega} \left(-\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (4.3.6\beta)$$



(α)



(β)

Σχ. 4.12 Διανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων και προκύπτουσες στρεπτικές ροπές

δηλαδή ως M_t^P ονομάζεται η συνισταμένη ροπή των πρωτογενών και ως M_t^S αυτή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Επομένως, στην περίπτωση της ανομοιόμορφης

στρέψεως, η στρεπτική ροπή της διατομής χωρίζεται σε **πρωτογενές** τμήμα M_t^P , το οποίο προέρχεται από **πρωτογενείς** διατμητικές τάσεις τ^P λόγω στρέψεως (όπως στην ομοιόμορφη στρέψη) και σε **δευτερογενές** τμήμα M_t^S , το οποίο προέρχεται από την παρεμπόδιση της στρεβλώσεως (Σχ.4.12).

Προκειμένου να υπολογισθεί το πρωτογενές τμήμα M_t^P της στρεπτικής ροπής, η σχέση (4.3.6α) γράφεται ως

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left(\tau_{xy}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[\left(-\tau_{xy}^P \cdot z + \tau_{xz}^P \cdot y \right) \right] d\Omega \quad (4.3.7)$$

Επίσης, με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss – Green οι δύο πρώτοι όροι της σχέσης (4.3.7) μπορούν να γραφούν ως

$$\int_{\Omega} \tau_{xy}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_{xy}^P \cdot n_y \cdot \phi_S^P ds \quad (4.3.8\alpha)$$

$$\int_{\Omega} \tau_{xz}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_{xz}^P \cdot n_z \cdot \phi_S^P ds \quad (4.3.8\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.2.11α), (4.2.12α) εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} = G \cdot \theta'_x \cdot \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} \quad (4.3.9\alpha)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} = G \cdot \theta'_x \cdot \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} \quad (4.3.9\beta)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (4.3.8α), (4.3.8β) κατά μέλη και με τη βοήθεια των σχέσεων (4.2.27α) και (4.2.24α) συμπεραίνεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\tau_{xz}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + \tau_{xy}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega = \\ -G\theta'_x \int_{\Omega} \phi_S^P \cdot \nabla^2 \phi_S^P d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\tau_{xy}^P \cdot n_y + \tau_{xz}^P \cdot n_z \right) \cdot \phi_S^P ds = 0 \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Επίσης, με τη βοήθεια των εκφράσεων των πρωτογενών διατμητικών τάσεων που δίδονται από τις σχέσεις (4.2.11α) και (4.2.12α) προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega} \left(-\tau_{xy}^P \cdot z + \tau_{xz}^P \cdot y \right) d\Omega = G\theta'_x \cdot \int_{\Omega} \left[- \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) \cdot z + \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \cdot y \right] d\Omega \quad (4.3.11)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.7), (4.3.10) και (4.3.11) εύκολα προκύπτει ότι

$$M_t^P = -G \cdot I_t \cdot \theta'_x(x) \quad (4.3.12)$$

όπου έχει τεθεί

$$I_t = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.3.13)$$

Το μέγεθος I_t ονομάζεται στρεπτική ροπή αδράνειας κατά *Saint-Venant* ή **στρεπτική σταθερά**. Η ποσότητα $G I_t$ ονομάζεται **στρεπτική αντίσταση** της διατομής.

Προκειμένου να υπολογισθεί το δευτερογενές τμήμα M_t^S της στρεπτικής ροπής, όμοια με τις σχέσεις (4.3.8α,β), με τη βοήθεια και πάλι του θεωρήματος Gauss – Green προκύπτουν οι σχέσεις

$$\int_{\Omega} \tau_{xy}^S \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_{xy}^S \cdot n_y \cdot \phi_S^P ds \quad (4.3.14\alpha)$$

$$\int_{\Omega} \tau_{xz}^S \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_{xz}^S \cdot n_z \cdot \phi_S^P ds \quad (4.3.14\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.2.11β), (4.2.12β) από τις οποίες εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} = G \cdot \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} \quad (4.3.15\alpha)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} = G \cdot \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} \quad (4.3.15\beta)$$

και αθροίζοντας τις σχέσεις (4.3.14α), (4.3.14β) κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega} \left(-\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega = G \int_{\Omega} \phi_S^P \nabla^2 \phi_S^S d\Omega - \int_{\Gamma} \left(\tau_{xy}^S n_y + \tau_{xz}^S n_z \right) \phi_S^P ds \quad (4.3.16)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.6β) και (4.3.16) και με τη βοήθεια των σχέσεων (4.2.28α) και (4.2.24β) καταλήγουμε ότι

$$M_t^S = -E \cdot C_S \cdot \theta_x'''(x) \quad (4.3.17)$$

όπου έχει τεθεί

$$C_S = \int_{\Omega} \left(\phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (4.3.18)$$

Το μέγεθος C_S ονομάζεται **σταθερά στρεβλώσεως**. Η ποσότητα EC_S ονομάζεται **αντίσταση στρεβλώσεως** της διατομής. Τονίζεται ότι η στρεπτική σταθερά είναι ανεξάρτητη της θέσεως του συστήματος συντεταγμένων, ενώ η σταθερά στρεβλώσεως αναφέρεται στο κέντρο συστροφής S .

Προκειμένου να διατυπωθεί η εξίσωση ισορροπίας στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψεως ομογενούς ισότροπης ράβδου θεωρείται η ισορροπία στοιχειώδους τμήματος μήκους dx της ράβδου έναντι στρεπτικών ροπών και σύμφωνα με το Σχ.4.13 λαμβάνουμε

$$M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx - M_t + m_t dx = 0 \quad (4.3.19)$$

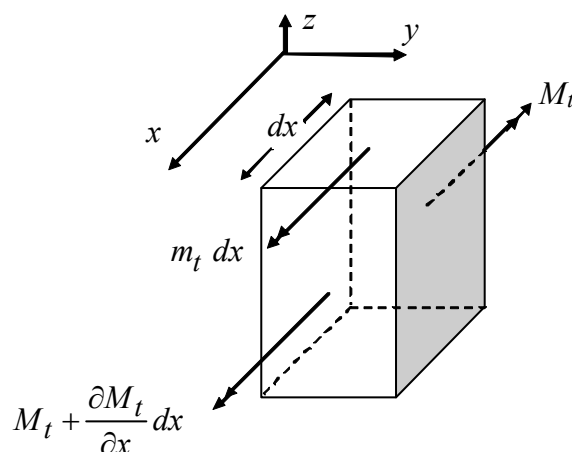
ή μετά τις σχετικές πράξεις

$$\frac{\partial M_t}{\partial x} = -m_t \quad (4.3.20)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.3.5), (4.3.12) και (4.3.17) στη σχέση (4.3.20) λαμβάνουμε

$$m_t = -G \cdot I_t \cdot \theta_x'' + E \cdot C_S \cdot \theta_x''' \quad (4.3.21)$$

η οποία αποτελεί τη **διαφορική εξίσωση ισορροπίας** τετάρτης τάξεως της ομογενούς ισότροπης ράβδου υποβαλλόμενης σε ανομοιόμορφη στρέψη και η οποία είναι ανεξάρτητη των στρεπτικών συνοριακών συνθηκών.



Σχ. 4.13 Εντατικά μεγέθη σε τμήμα ελαστικής ράβδου υποβαλλόμενης σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική φόρτιση $m_t = m_t(x)$ περί τον επιμήκη άξονα της x

Η μόρφωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα με τη **μέθοδο της ισορροπίας** των ροπών (σχέση 4.3.21) μπορεί να επιτευχθεί και με τη βοήθεια της **ενεργειακής μεθόδου**. Έτσι, είναι γνωστό ότι η

συνολική δυναμική ενέργεια ή συνολικό δυναμικό $\Pi_{ολ}$ οιοδήποτε ελαστικού συντηρητικού συστήματος ισούται με το άθροισμα του δυναμικού των εσωτερικών δυνάμεων (ελαστική ενέργεια παραμορφώσεως) $\Pi_{εσ}$ και του δυναμικού των εξωτερικών δυνάμεων $\Pi_{εξ}$, δηλαδή

$$\Pi_{ολ} = \Pi_{εσ} + \Pi_{εξ} \quad (4.3.22)$$

Ως δυναμική ενέργεια ενός ελαστικού συστήματος, που βρίσκεται σε κατάσταση παραμορφώσεως, ορίζεται το έργο που εκτελείται από όλες τις δυνάμεις (εσωτερικές και εξωτερικές), αν το σύστημα μετακινηθεί από την προαναφερθείσα κατάσταση σε άλλη προηγούμενη (που λαμβάνεται ως αφετηρία) και η οποία συνήθως είναι η αρχική αφόρτιστη κατάσταση. Συνεπώς, η δυναμική ενέργεια των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με την ενέργεια παραμορφώσεως που έχει αποταμιευθεί στο σύστημα, δηλαδή με το έργο των εσωτερικών δυνάμεων, και αυτό διότι αν το σύστημα αποφορτιστεί το έργο που θα αποδοθεί ισούται με την ενέργεια παραμορφώσεως. Το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων για στοιχείο ράβδου μοναδιαίου μήκους υποβαλλόμενο σε στρεπτική φόρτιση δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{εσ} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[\left(\tau_{xy}^P \right)^2 + \left(\tau_{xz}^P \right)^2 \right] d\Omega + \frac{I}{2E} \int_{\Omega} \left(\sigma_{xx}^w \right)^2 d\Omega \quad (4.3.23)$$

Στο δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων της σχέσεως (4.3.23) έχει ληφθεί υπόψη το ποσοστό των πρωτογενών διατμητικών τάσεων και των ορθών τάσεων στρεβλώσεως και έχει αγνοηθεί το ποσοστό των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Η παράλειψη των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στην ενέργεια παραμορφώσεως στην ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψεως αντιστοιχεί στην παράλειψη των διατμητικών τάσεων στην ενέργεια παραμορφώσεως στην ελαστική θεωρία κάμψεως.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών του τανυστή τάσεως από τις σχέσεις (4.2.11α), (4.2.12α) και (4.2.13) στη σχέση (4.3.23), το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\Pi_{εσ} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[G^2 \theta_x'^2 \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)^2 + G^2 \theta_x'^2 \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)^2 \right] d\Omega + \frac{I}{2E} \int_{\Omega} E^2 \theta_x''^2 \left(\phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (4.3.24)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συναρτήσεις θ_x' και θ_x'' είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες y, z και μετά τις σχετικές πράξεις, η σχέση (4.3.24) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
\Pi_{\varepsilon\sigma} = & \frac{1}{2} G \cdot \theta'_x{}^2 \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega + \frac{1}{2} E \cdot \theta''_x \int_{\Omega} \left(\phi_S^P \right)^2 d\Omega + \\
& + \frac{1}{2} G \cdot \theta'_x \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss – Green μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) n_y ds \tag{4.3.26α}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) n_z ds \tag{4.3.26β}$$

ή μετά τις σχετικές πράξεις

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) n_y ds \tag{4.3.27α}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) n_z ds \tag{4.3.27β}$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (4.3.27α), (4.3.27β) κατά μέλη και μετά τις σχετικές πράξεις εύκολα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega = \\
& = - \int_{\Omega} \phi_S^P \cdot \nabla^2 \phi_S^P d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - z \cdot n_y + y \cdot n_z \right) ds
\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.2.27α,β), η εξίσωση (4.3.28) γράφεται ως

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \tag{4.3.29}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.13), (4.3.18), (4.3.25) και (4.3.29) το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\Pi_{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x''^2 \quad (4.3.30)$$

Το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων για στοιχείο ράβδου μοναδιαίου μήκους υποβαλλόμενο σε στρεπτική φόρτιση m_t δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{\varepsilon\xi} = -m_t \cdot \theta_x \quad (4.3.31)$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι χαρακτηριστικό της δυναμικής ενέργειας κάθε εξωτερικής φόρτισης, μια και σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν κάθε εξωτερικό φορτίο εκτελεί αρνητικό έργο, καθώς το σύστημα μετακινείται από την κατάσταση παραμορφώσεως στην αφόρτιστη κατάσταση.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα το συνολικό δυναμικό $\Pi_{o\lambda}$ στοιχείου ράβδου μοναδιαίου μήκους με τη βοήθεια των σχέσεων (4.3.30) και (4.3.31) θα δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{o\lambda} = \frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x''^2 - m_t \cdot \theta_x \quad (4.3.32)$$

και για τη συνολική ράβδο μήκους L από τη σχέση

$$\Pi_{o\lambda} = \int_0^L \left(\frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x''^2 - m_t \cdot \theta_x \right) dx \quad (4.3.33)$$

Για τη μόρφωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου θα εφαρμόσουμε ένα ενεργειακό κριτήριο, γνωστό ως **αρχή της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας**, το οποίο διατυπώνεται ως εξής: *Μεταξύ όλων των κινηματικά συμβιβαστών θέσεων ενός συντηρητικού συστήματος, εκείνες που ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας δίδουν στάσιμη τιμή της συνολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος ως προς μικρές και κινηματικά συμβιβαστές μεταβολές των μετατοπίσεων του.* Η αρχή αυτή, που ισχύει και αν ακόμη η σχέση φόρτισης – παραμόρφωσης είναι μη γραμμική, εκφράζεται από την εξίσωση

$$\delta(\Pi_{\varepsilon\sigma}) + \delta(\Pi_{\varepsilon\xi}) = 0 \quad (4.3.34)$$

όπου δ είναι τελεστής που συμβολίζει (απειροστή) μεταβολή της ποσότητας επί της οποίας εφαρμόζεται λόγω δυνατής μετατοπίσεως. Εάν η στάσιμη τιμή είναι ένα τοπικό ελάχιστο, τότε η κατάσταση της ισορροπίας του συστήματος είναι ευσταθής και η σχέση (4.3.34) εκφράζει **την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας**, την οποία και θα εφαρμόσουμε για να μορφώσουμε τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας. Στη γενική περίπτωση κατά την οποία το σύστημα είναι συνεχές (άπειροι βαθμοί ελευθερίας κινήσεως), ο υπολογισμός των μεταβολών στην εξίσωση (4.3.34) γίνεται με τη βοήθεια του Λογισμού των Μεταβολών, σύμφωνα με τον οποίο η συνολική δυναμική ενέργεια

$\Pi_{ολ}$ είναι ένα συναρτησιακό. Η αναγκαία συνθήκη ακρότατου της σχέσεως (4.3.34) οδηγεί στις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας *Euler-Lagrange*, οι οποίες διέπουν την ισορροπία ελαστικού συστήματος στην παραμορφωμένη κατάσταση. Σύμφωνα λοιπόν με τις εξισώσεις αυτές, συναρτησιακό της μορφής $\Pi_{ολ} = \Pi_{ολ}(x, \theta_x, \theta'_x, \theta''_x)$ παρουσιάζει ακρότατο (εδώ ελάχιστο), όταν ο πυρήνας του ολοκληρώματος της σχέσεως (4.3.33), τον οποίο ονομάζουμε F , ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \theta'_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial \theta''_x} = 0 \quad (4.3.35)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.3.32) στη σχέση (4.3.35) προκύπτει η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως ισορροπίας της ράβδου λόγω ανομοιόμορφης στρέψεως που δίδεται από τη σχέση (4.3.21).

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.20) και (4.3.21) και ολοκληρώνοντας εύκολα προκύπτει ότι

$$M_t = GI_t \theta'_x - EC_S \theta'''_x \quad (4.3.36)$$

Η σχέση (4.3.36) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας τρίτης τάξεως της ομογενούς ισότροπης ράβδου υποβαλλόμενης σε ανομοιόμορφη στρέψη. Παρατηρώντας τις σχέσεις (4.3.5), (4.3.12) και (4.3.17) είναι φανερό ότι αυτές ταυτίζονται με τη σχέση (4.3.36).

Στη συνέχεια, σε αναλογία με τις καμπτικές ροπές M_y, M_z ορίζουμε ένα νέο στατικό μέγεθος, το οποίο ονομάζουμε **δίρροπο στρεβλώσεως** και το οποίο δίδεται από τη σχέση

$$M_w = - \int_{\Omega} \phi_S^P \sigma_{xx}^w d\Omega \quad (4.3.37)$$

Η ανάγκη θεώρησης του νέου εντατικού μεγέθους προκύπτει από το γεγονός ότι $M_y = M_z = N = 0$ αλλά ορθές τάσεις υπάρχουν στη διατομή, οπότε αν δεν θεωρηθεί κάποιο νέο μέγεθος, η ελαστική ενέργεια που οφείλεται στις ορθές τάσεις σ_{xx} , θα αγνοηθεί. Αντικαθιστώντας την έκφραση της ορθής συνιστώσας τάσεως σ_{xx}^w από τη σχέση (4.2.13) στη σχέση (4.3.37), η τελευταία γράφεται ως

$$M_w = -E\theta''_x \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (4.3.38)$$

ή με τη βοήθεια της σχέσεως (4.3.18)

$$M_w = -EC_S \theta''_x \quad (4.3.39)$$

και επομένως η σχέση (4.2.13) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$\sigma_{xx}^w = -\frac{M_w}{C_S} \varphi_S^P \quad (4.3.40)$$

Η σχέση (4.3.40) δηλώνει ότι το δίρροπο στρεβλώσεως είναι εντατικό μέγεθος με γενικά χαρακτηριστικά εντατικού μεγέθους της θεωρίας ελαστικότητας. Ο Schardt (1966) το ονομάζει ως “*ανώτερο εντατικό μέγεθος*”. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.17) και (4.3.39) προκύπτει η σχέση που συσχετίζει τη δευτερογενή στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρεβλώσεως ως

$$\frac{dM_w}{dx} = M_t^S \quad (4.3.41)$$

Όπως αναλύθηκε στα προηγούμενα, το πρόβλημα της ανομοιομορφης στρέψεως ομογενούς ισότροπης ράβδου ανάγεται στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως ως προς τη γωνία στροφής $\theta_x(x)$ της διατομής της ράβδου που δίδεται από τη σχέση (4.3.21). Η λύση της εξίσωσης αυτής εξαρτάται αφενός από τη στρεπτική φόρτιση της ράβδου και αφετέρου από τις στρεπτικές συνθήκες στήριξης της στο σύνορο ή και στο εσωτερικό της. Οι πλέον **γενικές γραμμικές συνοριακές στρεπτικές συνθήκες** στα άκρα της ράβδου περιγράφονται από τις σχέσεις

$$a_1 \theta_x + a_2 M_t = a_3 \quad (4.3.42\alpha)$$

$$\beta_1 \theta'_x + \beta_2 M_w = \beta_3 \quad (4.3.42\beta)$$

Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών (π.χ. πάκτωση, διχαλωτή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη) προκύπτουν από τις σχέσεις (4.3.42) καθορίζοντας κατάλληλα τις συναρτήσεις a_i, β_i ($i=1,2,3$). Έτσι για παράδειγμα στην περίπτωση της πακτωμένης στρεπτικής στήριξης οι προαναφερθείσες συναρτήσεις λαμβάνουν τις τιμές $a_1 = \beta_1 = 1$ και $a_2 = a_3 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα για τον υπολογισμό της γωνίας στροφής $\theta_x(x)$ και των παραγώγων της, που απαιτούνται για τον υπολογισμό των αναπτυσσόμενων τάσεων στη διατομή της ράβδου στην περίπτωση της ανομοιομορφης στρέψεως απαιτείται η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τη δεσπόζουσα εξίσωση (4.3.21) στο εσωτερικό της ράβδου υποκείμενη στις συνοριακές συνθήκες (4.3.42) στα άκρα της ράβδου $x=0, L$. Στην περίπτωση της ομοιομορφης στρέψεως (*Saint-Venant*) η γωνία συστrophής είναι σταθερή ($\theta'_x(x) = c$), οπότε θα έχουμε

$$\theta_x'' = \theta_x''' = \theta_x'''' = 0 \quad (4.3.43)$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωση ισορροπίας τετάρτης τάξεως (σχέση 3.21) γράφεται ως

$$m_t = 0 \quad (4.3.44)$$

και η διαφορική εξίσωση ισορροπίας τρίτης τάξεως (σχέση 3.36) γράφεται ως

$$M_t = \text{σταθερή} \quad (4.3.45)$$

Η σχέση (4.3.45) δηλώνει μια απαίτηση στην περίπτωση ομοιόμορφης στρέψεως, η οποία όμως σπάνια ικανοποιείται στην πράξη. Η εξίσωση ισορροπίας της ράβδου είναι πλέον αλγεβρική ως προς τη σχετική γωνία στροφής και προκύπτει από τις σχέσεις (4.3.36) και (4.3.43) ως

$$M_t = G \cdot I_t \cdot \theta'_x \quad (4.3.46)$$

Με τη βοήθεια της σχέσεως (4.3.46) η γωνία στροφής και η γωνία συστροφής στην περίπτωση ομοιόμορφης στρέψεως δίδονται από τις σχέσεις

$$\theta_x(x) = \frac{M_t}{GI_t} x \quad (4.3.47\alpha)$$

$$\theta'_x(x) = \frac{M_t}{GI_t} \quad (4.3.47\beta)$$

Τέλος, ορίζεται το μέγεθος ε που καλείται **Συντελεστής Στρεπτικής Αποσβέσεως** σύμφωνα με τη σχέση

$$\varepsilon = L \sqrt{\frac{GI_t}{EC_S}} \quad (4.3.48)$$

Ο συντελεστής αυτός προσεγγίζει ποιοτικά κατά πόσο η αναπτυσσόμενη στρέψη στη ράβδο είναι ανομοιόμορφη ή ομοιόμορφη. Έτσι, όσο μικρότερη είναι η τιμή του (δηλαδή ράβδος με μικρό μήκος, μικρή αντίσταση σε στρέψη και μεγάλη σε στρέβλωση) τόσο πιο **ανομοιόμορφη** θα είναι η στρέψη. Αντίθετα μεγάλες τιμές του συντελεστή ε (δηλαδή ράβδος με μεγάλο μήκος, μεγάλη αντίσταση σε στρέψη και μικρή σε στρέβλωση) δείχνουν ότι μεγάλο ποσοστό της στρέψεως θα αναπτυχθεί **ομοιόμορφα** και μόνο κοντά στις θέσεις παρακώλυσης της στρεβλώσεως θα αναπτυχθούν δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση. Οι Ramm και Hofmann (1995) δίδουν για τον τρόπο ανάπτυξης της στρέψεως τα εξής όρια για τον προαναφερθέντα συντελεστή

- για $\varepsilon \leq 1$ αναπτύσσονται κυρίως δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση (ανομοιόμορφη στρέψη)
- για $1 < \varepsilon \leq 15$ αναπτύσσονται πρωτογενείς, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση (ανομοιόμορφη στρέψη)
- για $\varepsilon > 15$ αναπτύσσονται κυρίως πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (ομοιόμορφη στρέψη)

4.4. Βήματα επίλυσης προβλήματος ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου

Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, για την επίλυση του προβλήματος της ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψεως ομογενών ισότροπων πρισματικών ράβδων με διατομή απλής ή πολλαπλής συνοχής τυχόντος σχήματος, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα :

- Υπολογισμός της πρωτογενούς συναρτήσεως στρεβλώσεως $\phi_O^P(\bar{y}, \bar{z})$. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_O^P = \frac{\partial^2 \phi_O^P}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi_O^P}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega$$

$$\frac{\partial \phi_O^P}{\partial n} = \bar{z} \cdot n_{\bar{y}} - \bar{y} \cdot n_{\bar{z}} \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma$$

ως ένα πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Laplace*, ως προς ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $O\bar{y}\bar{z}$, μια και οι συντεταγμένες του κέντρου συστροφής S δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές.

- Υπολογισμός των πεδιακών ολοκληρωμάτων, που περιγράφουν το εμβαδόν της διατομής και ως προς το αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $O\bar{y}\bar{z}$ τις στατικές ροπές αδράνειας, τις καμπτικές ροπές αδράνειας, το γινόμενο αδράνειας και τις ροπές στρεβλώσεως.

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Omega} d\Omega & S_{\bar{y}} &= \int_{\Omega} \bar{z} d\Omega & S_{\bar{z}} &= \int_{\Omega} \bar{y} d\Omega \\ I_{\bar{y}\bar{y}} &= \int_{\Omega} \bar{z}^2 d\Omega & I_{\bar{z}\bar{z}} &= \int_{\Omega} \bar{y}^2 d\Omega & I_{\bar{y}\bar{z}} &= - \int_{\Omega} \bar{y}\bar{z} d\Omega \\ \bar{R}_S^P &= \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega & R_{\bar{y}}^P &= \int_{\Omega} \bar{z} \phi_O^P d\Omega & R_{\bar{z}}^P &= \int_{\Omega} \bar{y} \phi_O^P d\Omega \end{aligned}$$

- Υπολογισμός ως προς το σύστημα $O\bar{y}\bar{z}$ των συντεταγμένων \bar{y}^S, \bar{z}^S του κέντρου συστροφής S και της σταθεράς \bar{c} από την επίλυση του ακόλουθου γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} S_{\bar{y}} \bar{y}^S - S_{\bar{z}} \bar{z}^S + A \bar{c} &= -\bar{R}_S^P \\ I_{\bar{y}\bar{y}} \bar{y}^S + I_{\bar{y}\bar{z}} \bar{z}^S + S_{\bar{y}} \bar{c} &= -R_{\bar{y}}^P \\ I_{\bar{y}\bar{z}} \bar{y}^S + I_{\bar{z}\bar{z}} \bar{z}^S - S_{\bar{z}} \bar{c} &= R_{\bar{z}}^P \end{aligned}$$

- Αναγωγή του συστήματος $O\bar{y}\bar{z}$ στο σύστημα αξόνων με αρχή το κέντρο συστροφής S και υπολογισμός της κύριας πρωτογενούς συνάρτησης στρεβλώσεως $\phi_S^P(y, z)$ με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} - \bar{y}^S \\ z &= \bar{z} - \bar{z}^S \\ \phi_S^P &= \phi_O^P - (y + \bar{y}^S) \cdot \bar{z}^S + (z + \bar{z}^S) \cdot \bar{y}^S + \bar{c} \end{aligned}$$

- Υπολογισμός της στρεπτικής σταθεράς I_t και της σταθεράς στρέβλωσης C_S με τη βοήθεια των σχέσεων

$$I_t = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$C_S = \int_{\Omega} \left(\phi_S^P \right)^2 d\Omega$$

- Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου για τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική φόρτιση $m_t = m_t(x)$ υποκείμενης στις πλέον γενικές γραμμικές στρεπτικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$m_t = -G \cdot I_t \cdot \theta_x'' + E \cdot C_S \cdot \theta_x''' \quad \text{στο εσωτερικό της ράβδου}$$

$$a_1 \theta_x + a_2 M_t = a_3 \quad \beta_1 \theta_x' + \beta_2 M_w = \beta_3 \quad \text{στα άκρα της ράβδου } x = 0, L$$

και υπολογισμός της γωνίας στροφής $\theta_x(x)$, των παραγώγων της καθώς και των αναπτυσσόμενων στρεπτικών εντατικών μεγεθών M_t , M_t^P , M_t^S και M_w με τη βοήθεια των σχέσεων

$$M_t = M_t^P + M_t^S$$

$$M_t^P = G I_t \theta_x'(x)$$

$$M_t^S = -E C_S \theta_x'''(x)$$

$$M_w = -E C_S \theta_x''(x)$$

- Υπολογισμός της βασικής δευτερογενούς συναρτήσεως στρεβλώσεως $\tilde{\phi}_S^S(x, y, z)$ σε κάθε διατομή της ράβδου. Συνήθως αρκεί ο υπολογισμός της στις θέσεις μεγιστοποίησης των στρεπτικών ροπών M_t^P και M_t^S . Η συνάρτηση αυτή υπολογίζεται από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών, ως ένα πρόβλημα Neumann για την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \tilde{\phi}_S^S = -\frac{E \cdot \theta_x'''(x)}{G} \cdot \phi_S^P \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma$$

- Υπολογισμός της κύριας δευτερογενούς συνάρτησης στρεβλώσεως $\tilde{\phi}_S^S(x, y, z)$ σε κάθε διατομή της ράβδου σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_S^S = \tilde{\phi}_S^S - \frac{I}{A} \int_{\Omega} \tilde{\phi}_S^S d\Omega$$

- Υπολογισμός των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων, των συνολικών διατμητικών τάσεων και των ορθών τάσεων στρεβλώσεως σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\tau_{I2}^P = G\theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) \text{ πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega$$

$$\tau_{I3}^P = G\theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \text{ πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega$$

$$\tau_{I2}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \text{ δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο της διατομής } \Omega$$

$$\tau_{I3}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \text{ δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο της διατομής } \Omega$$

$$\tau_x = \sqrt{\left(\tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S \right)^2 + \left(\tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S \right)^2} \text{ συνολικές διατμητικές τάσεις στο } \Omega$$

$$\tau_{xt}^P = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + yn_y + zn_z \right) \text{ πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$\tau_{xt}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \text{ δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$\tau_{xt} = \tau_{xt}^P + \tau_{xt}^S \text{ συνολικές διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$\sigma_{II}^w = E\theta_x'' \phi_S^P \text{ ορθές τάσεις στρεβλώσεως στο χωρίο } \Omega \text{ και στο σύνορο } \Gamma$$

- Υπολογισμός των πρωτογενών μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u^P = \theta'_x(x) \phi_S^P(y, z)$$

$$v^P = -z\theta_x(x)$$

$$w^P = y\theta_x(x)$$

- Υπολογισμός των δευτερογενών μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u^S = \phi_S^S(x, y, z)$$

$$v^S = 0$$

$$w^S = 0$$

ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΩΝ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

5.1. Εισαγωγή - Προκαταρκτικές έννοιες

Η ομοιομορφή στρέψη προκύπτει από την επιβολή δύο ισόποσων στρεπτικών ροπών στα άκρα της ράβδου, με την ταυτόχρονη απαίτηση να μην παρεμποδίζεται η αναπτυσσόμενη στρέβλωση των διατομών. Στη ράβδο αναπτύσσονται αποκλειστικά πρωτογενείς διατμητικές τάσεις κατά St. Venant (πρωτογενής στρεπτική ροπή), ενώ η στρέβλωση είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου και αποδεικνύεται ότι είναι ανάλογη με τη σχετική γωνία στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους θ'_x (συστροφή). Σε περίπτωση τυχούσας φόρτισης ή συννοριακών συνθηκών, η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ανομοιομορφή, στη ράβδο αναπτύσσονται επιπλέον τόσο ορθές όσο και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης (δίρροπο στρέβλωσης και δευτερογενής στρεπτική ροπή), ενώ η στρέβλωση μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου.

Κατά τη διερεύνηση της συμπεριφοράς ανοικτών λεπτότοιχων διατομών υπό ανομοιομορφή στρέψη, ο Vlasov (1963), βασιζόμενος στην παραδοχή περί μηδενισμού των διατμητικών τάσεων στη μέση γραμμή των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή, απέδειξε ότι η στρέβλωση είναι ανάλογη της συστροφής θ'_x . Κατά την «κλασική» θεωρία ανομοιομορφής στρέψης (κεφ. 4), υιοθετείται επίσης η θεώρηση ότι η στρέβλωση είναι αναλογική της συστροφής. Η θεώρηση αυτή έχει ως συνέπεια να λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι πρωτογενείς διατμητικές και οι ορθές τάσεις στην καθολική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου, με τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις να υπολογίζονται a posteriori μετά την επίλυσή της (κεφ. 4). Τούτο έχει ως αποτέλεσμα να αγνοείται η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η επιρροή αυτή είναι ιδιαίτερος σημαντική σε κλειστές λεπτότοιχες διατομές (Rubin 2005, Murin and Kutis 2008), όπου οι διατμητικές τάσεις λαμβάνουν υψηλές τιμές λόγω της ιδιαίτερης γεωμετρίας της διατομής. Η επιρροή αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψιν με υιοθέτηση νέου κινηματικού μεγέθους που δίδει το μέγεθος της στρέβλωσης της διατομής (πρωτογενής συστροφή $(\theta_x^P)'$ ή ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης η_x), το οποίο πλέον δεν λαμβάνεται ανάλογο με τη συστροφή θ'_x .

Η θεωρία ανομοιομορφής στρέψης που διατυπώνεται συναρτήσει δύο άγνωστων κινηματικών μεγεθών μίας μεταβλητής παρουσιάζει πλήρη αναλογία με τη μη γραμμική θεωρία καμπτόμενων ράβδων Timoshenko (Murin and Kutis 2008, Roik and Sedlacek

1966, Rubin 2005). Συνεπώς, παραβιάζει κι αυτή την τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής δευτερογενών διατμητικών τάσεων που προκύπτει. Τούτο έχει ως αποτέλεσμα την ανάγκη διόρθωσης της δευτερογενούς στρεπτικής αντίστασης με τη χρήση κατάλληλου διορθωτικού συντελεστή διάτμησης, ο οποίος υπολογίζεται στη βιβλιογραφία με ενεργειακή προσέγγιση (Slivker 2007, Kim and Kim 2005, Laudiero and Savoia 1990, Kraus 2007). Η συγκεκριμένη προσέγγιση οδηγεί στη σύζευξη στρεπτικών και καμπτικών καταπονήσεων ράβδων τυχούσας διατομής, με τους αντίστοιχους διορθωτικούς συντελεστές διάτμησης να υπολογίζονται σύμφωνα με τις παραδοχές της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών, στις εργασίες των Slivker (2007), Kim και Kim (2005). Στην περίπτωση που η διατομή είναι διπλά συμμετρική, αποδεικνύεται ότι στρεπτικές και καμπτικές καταπονήσεις αποζευγνύονται (Slivker 2007, Laudiero and Savoia 1990). Έτσι, το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά από αυτό της καμπτοδιατμητικής καταπόνησης, με τον αντίστοιχο διορθωτικό συντελεστή διάτμησης να υπολογίζεται αριθμητικά για ράβδους τυχούσας (διπλά συμμετρικής) διατομής στην εργασία του Kraus (2007) (Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων) και στην εργασία των Sapountzakis και Mokos (2009) (Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων).

Κατά την αναδρομή στη διεθνή βιβλιογραφία, διαπιστώνεται ότι το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων έχει μελετηθεί πολύ λιγότερο από αυτό της «κλασικής» ανομοιόμορφης στρέψης. Ο Heilig (1961b) παρουσιάζει μια θεωρητική διατύπωση του προβλήματος ενώ αργότερα οι Roik και Sedlacek (1966) δίδουν αναλυτική λύση του προβλήματος εφαρμόζοντας τη Μέθοδο των Δυνάμεων. Ο Schade (1969) παρουσιάζει μια θεωρητική διατύπωση του συζευγμένου καμπτοδιατμητικού και στρεπτικού προβλήματος. Ο Rubin (2005) βασιζόμενος στη μεθοδολογία των Roik και Sedlacek (1966) διατυπώνει Εξίσωση Τριών Ροπών (ανάλογη με τη μέθοδο Clapeyron για καμπτόμενες ράβδους) για την επίλυση συνεχών δοκών με ενδιάμεσες στηρίξεις, κατανεμημένες ή συγκεντρωμένες φορτίσεις. Οι Roberts και Al-Ubaidi (2001) επιλύουν αναλυτικά το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ως αγνώστους την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρεπτική γωνία στροφής και επιβεβαιώνουν πειραματικά τη μεθοδολογία τους σε FRP ράβδους διατομών μορφής διπλού ταυ. Αναφορικά με την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων, οι Park et.al. (1997), Emre Erkmén και Mohareb (2006), Laudiero και Savoia (1990) χρησιμοποιούν τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων ενώ οι Sapountzakis και Mokos (2009) τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων για επίλυση στατικών προβλημάτων. Ο Tralli (1986) διατυπώνει υβριδική μεθοδολογία Πεπερασμένων Στοιχείων που βασίζεται σε προσέγγιση του πεδίου τάσεων για στατική ανάλυση ράβδων, ενώ οι Kollár (2001), Kim και Kim (2005) εφαρμόζουν προσεγγιστικές αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων ελεύθερων ταλαντώσεων ράβδων. Αξίζει τέλος να αναφερθεί ότι πλήθος ερευνητών διερευνά προβλήματα κάνοντας χρήση ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης χωρίς ωστόσο την εισαγωγή διορθωτικού συντελεστή διάτμησης (πχ. για στατική και δυναμική ανάλυση μικρών μετατοπίσεων βλ. El Fatmi (2007), Back και Will (1998), Chen και Blandford (1989), Gendy et.al. (1992), Hu et.al. (1996), ενώ για μη γραμμική στατική και δυναμική ανάλυση βλ. Cortinez και Piovan (2002), Machado και Cortinez (2007), Vo και Lee (2009), Simo και Vu-Quoc (1991)).

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων. Οι βασικές παραδοχές της θεωρίας ταυτίζονται μερικώς με

αυτές της γραμμικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. κεφ. 4) και συνοψίζονται ως ακολούθως:

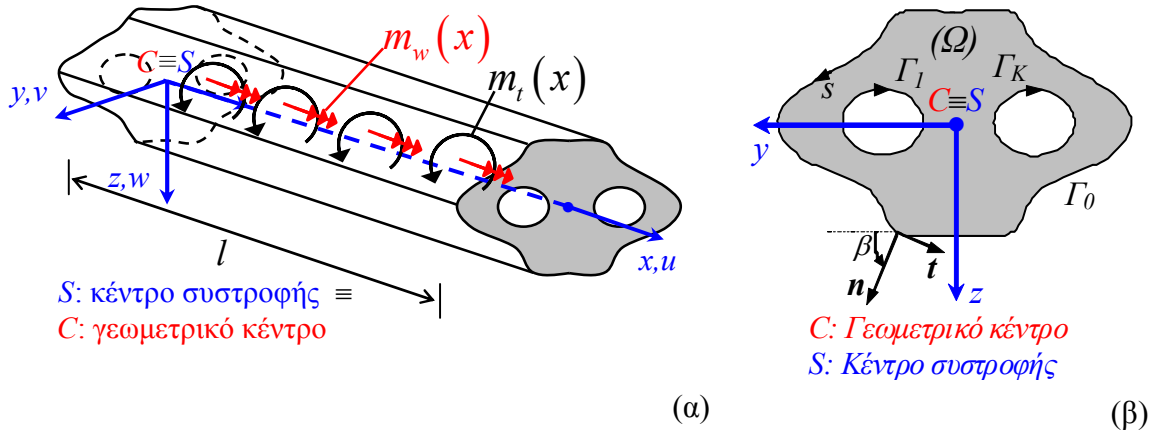
Παραδοχές ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων

1. Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.
2. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται.
3. Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.
4. Η διατομή της ράβδου είναι διπλά συμμετρική.
Στην περίπτωση όπου η διατομή έχει έναν ή κανέναν άξονα συμμετρίας, η στρεπτική και καμπτοδιατμητική καταπόνηση είναι συζευγμένες και πρέπει να μελετηθούν μαζί. Όταν η διατομή διαθέτει δύο άξονες συμμετρίας, τότε η στρεπτική καταπόνηση μπορεί να μελετηθεί αυτόνομα.
5. Στη ράβδο δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) κάποιος άξονας περιστροφής.
Η ράβδος μπορεί να στραφεί ελεύθερα μετά την άσκηση σε αυτήν του στρεπτικού φορτίου και αποδεικνύεται ότι ο άξονας περιστροφής ταυτίζεται με τον άξονα που διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο των διατομών. Η (κατασκευαστική) επιβολή οποιουδήποτε άλλου άξονα περιστροφής οδηγεί αναπόφευκτα στην ανάπτυξη καμπτοδιατμητικής έντασης πέρα από τη στρεπτική.
6. Η στρέβλωση της ράβδου είναι ανάλογη της πρωτογενούς σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους (ή ανεξάρτητης παράμετρου στρέβλωσης).
Επειδή η στρέβλωση των διατομών δεν λαμβάνεται ανάλογη της συνολικής σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους (βλ. κεφ. 4), η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι δυνατόν να ληφθεί υπόψιν στην καθολική ισορροπία της ράβδου.
7. Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του.
8. Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.
9. Η κατανομή των τάσεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.

5.2. Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο (παραδοχές 1, 3) τυχούσας διπλά συμμετρικής (παραδοχή 4) διατομής (στο υποκεφάλαιο 5.5 αιτιολογείται ο περιορισμός του παρόντος κεφαλαίου σε διπλά συμμετρικές διατομές), η οποία υποβάλλεται σε τυχούσες συγκεντρωμένες ή/και κατανεμημένες στρεπτικές ροπές $m_l = m_l(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$ περί τον διαμήκη άξονα της x (Σχ.5.1α). Η ανάλυση της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $Sxyz$, του οποίου ο διαμήκης άξονας διέρχεται από τα κέντρα συστροφής (κέντρα διάτμησης) S των διατομών. Τα σημεία S ταυτίζονται με τα γεωμετρικά κέντρα C εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής (Σχ.5.1β και παραδοχή 5). Το αρχικό σημείο του άξονα τοποθετείται συμβατικά στο αριστερό άκρο της ράβδου με $x = 0$ (Σχ.5.1α).

Με βάση τις προαναφερθείσες παραδοχές 2 και 7, οι εγκάρσιες μετατοπίσεις v , w κατά τους άξονες y , z , αντίστοιχα (Σχ.5.1β) δίδονται από τις σχέσεις (4.2.2-3) του κεφαλαίου 4 ως



Σχ. 5.1 Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα στρεπτική φόρτιση (α) με διατομή τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος που καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω (β).

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x) \quad (5.2.1)$$

$$w(x, y, z) = y\theta_x(x) \quad (5.2.2)$$

όπου θ_x είναι η (συνολική) γωνία στροφής περί τον άξονα x . Προκειμένου να ληφθεί υπόψιν η επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στο πρόβλημα, η διαμήκης μετατόπιση u θεωρείται ότι δίδεται από τη σχέση (παραδοχή 6)

$$u(x, y, z) = \eta_x(x) \phi_S^P(y, z) \quad (5.2.3)$$

όπου η_x είναι ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης (El Fatmi 2007, Simo and Vu-Quoc 1991) και ϕ_S^P είναι η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο S (βλ. κεφ. 4). Η παράμετρος η_x είναι συνάρτηση της διαμήκους συντεταγμένης x και περιγράφει το μέγεθος της στρέβλωσης σε μια διατομή, ενώ καλείται επίσης και ανεξάρτητη μεταβλητή στρέβλωσης (Wunderlich et. al. 1986). Ο χαρακτηρισμός «ανεξάρτητη» οφείλεται στο γεγονός ότι γενικά δεν ισχύει η έκφραση $\eta_x = \theta'_x$ που έχει υιοθετηθεί στην «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης του κεφαλαίου 4. Η φυσική σημασία της παραμέτρου η_x αναδεικνύεται από την εξέταση εναλλακτικής διατύπωσης με την οποία μπορεί να περιγραφεί η επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδου. Σύμφωνα με αυτήν, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου καθώς και η στρεπτική γωνία στροφής της διατομής διασπώνται σε πρωτογενές και δευτερογενές μέρος ως

$$u = u^P + u^S \quad (5.2.4\alpha)$$

$$v = v^P + v^S \quad (5.2.4\beta)$$

$$w = w^P + w^S \quad (5.2.4\gamma)$$

$$\theta_x = \theta_x^P + \theta_x^S \quad (5.2.4\delta)$$

όπου τα δύο αυτά μέρη προκύπτουν από τις πρωτογενείς και δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις, αντίστοιχα. Το πρωτογενές μέρος του πεδίου μετατοπίσεων λαμβάνεται ταυτόσημο με αυτό της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (κεφ. 4) ως

$$u^P(x, y, z) = (\theta_x^P)' \phi_S^P(y, z) \quad (5.2.5\alpha)$$

$$v^P(x, y, z) = -z\theta_x^P(x) \quad (5.2.5\beta)$$

$$w^P(x, y, z) = y\theta_x^P(x) \quad (5.2.5\gamma)$$

ενώ το δευτερογενές μέρος δίδεται ως

$$u^S(x, y, z) = 0 \quad (5.2.6\alpha)$$

$$v^S(x, y, z) = -z\theta_x^S(x) \quad (5.2.6\beta)$$

$$w^S(x, y, z) = y\theta_x^S(x) \quad (5.2.6\gamma)$$

Συγκρίνοντας τις δύο διατυπώσεις, παρατηρείται ότι η παράμετρος η_x ισούται με την πρωτογενή γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους της ράβδου (πρωτογενής συστροφή), δηλαδή

$$\eta_x = (\theta_x^P)' \quad (5.2.7)$$

Στα επόμενα παρουσιάζεται αναλυτικά η διατύπωση που βασίζεται στο πεδίο μετατοπίσεων (5.2.4-6) θέτοντας όπου $\theta_x^S = \theta_x - \theta_x^P$, καθώς η μόρφωση των συντοκικών συνθηκών της ράβδου είναι σημαντικά απλούστερη συγκριτικά με την εναλλακτική διατύπωση που βασίζεται στους κινηματικούς αγνώστους θ_x^P , θ_x^S . Τονίζεται ότι η υιοθετούμενη διατύπωση είναι ανάλογη με τη διατύπωση που βασίζεται στο πεδίο μετατοπίσεων (5.2.1-3).

Από την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας, οι ορθές και διατμητικές **παραμορφώσεις** για γεωμετρικά γραμμικά προβλήματα (παραδοχή 8) εκφράζονται συναρτήσει των μετατοπίσεων ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.2.8\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (5.2.8\delta, \epsilon, \sigma\tau)$$

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων (5.2.4-6) στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$\varepsilon_{xx} = (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (5.2.9\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (5.2.9\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (5.2.9\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\theta_x^P\right)' \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \theta_x' z \quad (5.2.9\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\theta_x^P\right)' \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + \theta_x' y \quad (5.2.9\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (5.2.9\zeta)$$

Προκειμένου να αναδειχθεί η συνεισφορά των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, οι σχέσεις (5.2.9δ-ε) αναγράφονται εναλλακτικά ως

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.10\alpha)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.10\beta)$$

Η φυσική σημασία της ποσότητας $\left(\theta_x^P\right)' - \theta_x'$ αναδεικνύεται από τη συγκριτική εξέταση της εναλλακτικής διατύπωσης του προβλήματος (σχέσεις 5.2.4-5.2.6), από όπου προκύπτει ότι

$$\left(\theta_x^P\right)' - \theta_x' = -\left(\theta_x^S\right)' \quad (5.2.11)$$

Συνεπώς, η ποσότητα $\left(\theta_x^P\right)' - \theta_x'$ σχετίζεται με τη δευτερογενή γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους της ράβδου (δευτερογενής συστροφή).

Ο υπολογισμός των **τάσεων** που καταπονούν τη ράβδο βασίζεται στον καταστατικό νόμο του Hooke (βλ. παραδοχή 8), ο οποίος συσχετίζει γραμμικά τον τανυστή παραμορφώσεως με τον ενεργειακά συζυγή ως προς αυτόν τανυστή τάσεως (τανυστής τάσεως Cauchy). Έτσι, υποθέτοντας ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό υλικό (παραδοχή 8), οι συνιστώσες του τανυστή τάσεως Cauchy δίδονται με τη βοήθεια των σχέσεων (5.2.9α, 5.2.10α,β) ως

$$\sigma_{xx} = E^* \left(\theta_x^P\right)'' \phi_S^P \quad (5.2.12\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = E^{**} \left(\theta_x^P\right)'' \phi_S^P \quad (5.2.12\beta)$$

$$\sigma_{zz} = E^{**} \left(\theta_x^P\right)'' \phi_S^P \quad (5.2.12\gamma)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.12\delta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.12\epsilon)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (5.2.12\zeta)$$

όπου $E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $E^{**} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ με E, G, ν το μέτρο ελαστικότητας, το

μέτρο διάτμησης και το λόγο Poisson, αντίστοιχα του υλικού. Οι σχέσεις (5.2.12α,δ,ε) που δίδουν την ορθή σ_{xx} και τις διατμητικές τ_{xy} , τ_{xz} τάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στις εξισώσεις ισορροπίας για την επίλυση του προβλήματος, ενώ οι σχέσεις (5.2.12β,γ) που δίδουν τις ορθές τάσεις σ_{yy} , σ_{zz} (που δεν παράγουν έργο αφού οι αντίστοιχες παραμορφώσεις ε_{yy} , ε_{zz} σύμφωνα με τις σχέσεις (5.2.9β,γ) είναι μηδενικές) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον προσδιορισμό των άγνωστων κινηματικών μεγεθών για τον υπολογισμό των τάσεων αυτών. Ωστόσο, στην παρούσα θεωρία γίνεται η παραδοχή ότι $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} \approx 0$, τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή αφενός δεν επηρεάζει την ισορροπία της ράβδου και αφετέρου ισχύει επακριβώς στην περίπτωση μηδενικού λόγου Poisson $\nu = 0$. Επιπλέον, το E^* αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας E , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που $\nu = 0$. Η παραδοχή αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία λεπτότοιχων διατομών (Vlasov 1963), σύμφωνα με την οποία τα τοιχώματα της διατομής θεωρείται ότι

βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσεως και αποδεικνύεται ότι $E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \Rightarrow E^* \approx E$

για τις συνήθεις τιμές λόγου Poisson που λαμβάνουν τα δομικά υλικά. Εξάλλου οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη διατύπωση θεωριών δοκού (Armenakas 2006). Με βάση τα προηγούμενα, οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή τάσεως διαμορφώνονται τελικά ως

$$\sigma_{xx} = E \left(\theta_x^P \right)'' \phi_S^P \quad (5.2.13\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.13\beta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.13\gamma)$$

5.3. Πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας

Η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P υπολογίζεται μέσω του ίδιου προβλήματος συνοριακών τιμών που έχει διατυπωθεί και στην «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης (κεφ. 4)

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (5.3.1\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z n_y - y n_z \quad \text{στο } \Gamma \quad (5.3.1\beta)$$

απαιτώντας παράλληλα να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega = 0 \quad (5.3.2)$$

Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται αφενός ότι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις αποτελούν αυτοϊσορροπούμενη κατανομή τάσεων σε επίπεδο υλικού σημείου (εξ. (5.3.1)) και αφετέρου ότι η στρεπτική ένταση δεν οδηγεί και σε αξονική καταπόνηση (εξ. (5.3.2)). Ωστόσο, αντικαθιστώντας τις εξ. (5.2.13) στη διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου σε επίπεδο υλικού σημείου (και στην αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (5.3.3\alpha)$$

$$\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = t_x \quad \text{στο } \Gamma \quad (5.3.3\beta)$$

διαπιστώνεται εύκολα ότι δεν επαληθεύονται εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Το γεγονός αυτό είναι ανάλογο με τη θεωρία Timoshenko καμπτόμενων ράβδων, στην οποία η προκύπτουσα κατανομή διατμητικών τάσεων επίσης δεν επαληθεύει την εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου. Συνεπώς, κατ' αναλογία με τη θεωρία δοκού Timoshenko, θα εισαχθεί και στην παρούσα θεωρία διορθωτικός συντελεστής διάτμησης (Roik and Sedlacek 1966, Slivker 2007, Kim and Kim 2005, Kraus 2007, Sapountzakis and Mokos 2009), ο οποίος εδώ καλείται **στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης**. Ο υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης καθώς και μιας ικανοποιητικότερης κατανομής δευτερογενών διατμητικών τάσεων παρουσιάζονται αναλυτικά στο υποκεφάλαιο 5.5. Όπως και στην «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τις δύο εγκάρσιες διευθύνσεις επίσης δεν πληρούνται και το γεγονός αυτό αποτελεί ασυνέπεια της παρούσας θεωρίας.

5.4. Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

Οι κινηματικοί άγνωστοι μιας μεταβλητής του προβλήματος ($(\theta_x^P)', \theta_x$) θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις ισορροπίας. Οι εξισώσεις ισορροπίας θα διατυπωθούν με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Προκειμένου να διευκολυνθεί η ανάλυση του προβλήματος λαμβάνονται και εδώ τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (5.4.1\alpha)$$

$$M_t^S = - \int_{\Omega} \left(\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.4.1\beta)$$

$$M_w = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (5.4.1\gamma)$$

τα οποία αντιστοιχούν σε αυτά της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (εξ. (4.3.6α,β), (4.3.37)).

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ. (5.2.13)) στις σχέσεις (5.4.1), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_t^P = G I_t^P \theta'_x \quad (5.4.2\alpha)$$

$$M_t^S = -G I_t^S \left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta'_x \right) \quad (5.4.2\beta)$$

$$M_w = -E C_S \left(\theta_x^P \right)'' \quad (5.4.2\gamma)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές I_t^P (πρωτογενής στρεπτική σταθερά), I_t^S (δευτερογενής στρεπτική σταθερά) και C_S (σταθερά στρέβλωσης) δίδονται ως

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (5.4.3\alpha)$$

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (5.4.3\beta)$$

$$C_S = \int_{\Omega} \left(\phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (5.4.3\gamma)$$

Η πρωτογενής στρεπτική σταθερά ορίζεται όμοια με τη στρεπτική σταθερά της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης. Στη δευτερογενή στρεπτική σταθερά εισάγεται ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής k_x (βλ. υποκεφάλαια 5.3 και 5.5), ο οποίος είναι πάντοτε μικρότερος της μονάδας ($k_x < 1$). Στην περίπτωση κατά την οποία η σταθερά I_t^S δεν διορθωθεί εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων, τότε στην έκφραση (5.4.3β) τίθεται $k_x = 1$. Η διατύπωση αυτή έχει υιοθετηθεί σε διάφορες δημοσιεύσεις της βιβλιογραφίας (Gruttmann et. al. 2000, Simo and Vu-Quoc 1991, El Fatmi and Zenzri 2004, Gendy et.al. 1992) και δίδει

$$I_t^S = I_P - I_t^P \quad (5.4.4)$$

όπου I_P η πολική ροπή αδράνειας της διατομής, μια και χρησιμοποιώντας τις εξ. (5.3.1) η σταθερά I_t^S μπορεί να γραφεί ως

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left(-y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (5.4.5\alpha)$$

$$\text{ή ως} \quad I_t^S = k_x \int_{\Gamma} \phi_S^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds \quad (5.4.5\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων τις δυνατές μεταβολές της στρεπτικής στροφής θ_x και της πρωτογενούς συστροφής $(\theta_x^P)'$ (και των παραγώγων τους), προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange (και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες) που περιγράφουν την ισορροπία στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων. Οι εξισώσεις ισορροπίας αυτές και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου $x = 0, l$ εκφράζονται ως

$$-\frac{dM_t^P}{dx} - \frac{dM_t^S}{dx} = m_t(x) \quad (5.4.6\alpha)$$

$$\frac{dM_w}{dx} - M_t^S = -m_w(x) \quad (5.4.6\beta)$$

$$(M_t^P + M_t^S - \bar{M}_t) \delta \theta_x = 0 \quad (5.4.7\alpha)$$

$$(-M_w + \bar{M}_w) \delta (\theta_x^P)' = 0 \quad (5.4.7\beta)$$

όπου τα μεγέθη m_t , m_w (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (βλ. Σχ.5.1α) και ορίζονται κατά μήκος της ράβδου (μέσω της Αρχής Δυνατών Έργων) συναρτήσει του διανύσματος τάσης ανά μονάδα επιφάνειας ως

$$m_t(x) = \int_{\Gamma} [t_y(-z) + t_z y] ds \quad (5.4.8\alpha)$$

$$m_w(x) = - \int_{\Gamma} t_x \phi_S^P ds \quad (5.4.8\beta)$$

Στις συνοριακές συνθήκες (5.4.7) υπεισέρχονται τα μεγέθη \bar{M}_t , \bar{M}_w που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) και ορίζονται στις διατομές των άκρων της ράβδου ως

$$(\bar{M}_t)_{x=0} = - \int_{\Omega} t_y(-z) + t_z y d\Omega \quad (\bar{M}_t)_{x=l} = \int_{\Omega} t_y(-z) + t_z y d\Omega \quad (5.4.9\alpha, \beta)$$

$$(\bar{M}_w)_{x=0} = \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (\bar{M}_w)_{x=l} = - \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (5.4.9\gamma, \delta)$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις (5.4.2) στις σχέσεις (5.4.6-7) και αναδιατυπώνοντας τις συνοριακές συνθήκες (5.4.7), μορφώνονται οι παρακάτω κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων ως

$$-G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' + GI_t^S(\theta_x^P)'' = m_t \quad (5.4.10\alpha)$$

$$-EC_S(\theta_x^P)''' + GI_t^S\left((\theta_x^P)' - \theta_x'\right) = -m_w \quad (5.4.10\beta)$$

που υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 (\theta_x^P)' = \beta_3 \quad (5.4.11\alpha,\beta)$$

όπου M_t είναι η στρεπτική ροπή στα άκρα της ράβδου, η οποία δίδεται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta_x' - GI_t^S(\theta_x^P)' \quad (5.4.12)$$

Στις σχέσεις (5.4.11), α_i , β_i ($i = 1, 2, 3$) είναι συντελεστές που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών (πχ πάκτωση, διχαλωτή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη) μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις αυτές με χρήση κατάλληλων συντελεστών.

Σε περίπτωση που επιθυμείται η διατύπωση των εξισώσεων ως προς τους κινηματικούς αγνώστους η_x , θ_x , αρκεί να γίνει χρήση της εξ. (5.2.7) σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις. Στην περίπτωση αυτή μορφώνονται οι κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας ως

$$-G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' + GI_t^S\eta_x' = m_t \quad (5.4.13\alpha)$$

$$-EC_S\eta_x'' + GI_t^S(\eta_x - \theta_x') = -m_w \quad (5.4.13\beta)$$

και οι αντίστοιχες πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες ως

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \eta_x = \beta_3 \quad (5.4.14\alpha,\beta)$$

όπου M_t είναι η στρεπτική ροπή στα άκρα της ράβδου, η οποία δίδεται συναρτήσει των η_x , θ_x ως

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta_x' - GI_t^S\eta_x \quad (5.4.15)$$

Οι πεπλεγμένες διαφορικές εξισώσεις (5.4.10α,β) επιτρέπουν τον υπολογισμό των κινηματικών αγνώστων της διαμήκουσ συντεταγμένης x του προβλήματος $(\theta_x, (\theta_x^P)')$. Είναι δυνατόν οι εξισώσεις αυτές να συνδυαστούν ώστε να προκύψει πρόβλημα συνοριακών τιμών ως προς έναν μόνο κινηματικό άγνωστο του προβλήματος. Προκειμένου να συγκριθεί το πρόβλημα αυτό με το αντίστοιχο της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης επιλέγεται η στρεπτική στροφή θ_x για τη διατύπωσή του. Έτσι, μετά από κατάλληλες παραγωγίσεις ως προς x , συνδυάζοντας τις εξ. (5.4.10α,β) μορφώνεται η κάτωθι κυρίαρχη διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης

$$\frac{EC_S}{\kappa} \theta_x'''' - GI_t^P \theta_x'' = m_t - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t' + m_w' \quad (5.4.16)$$

όπου κ είναι βοηθητική σταθερά που ορίζεται ως

$$\kappa = \frac{I_t^S}{I_t^P + I_t^S} \quad (5.4.17)$$

Μετά από παρόμοιους αλγεβρικούς συνδυασμούς εξισώσεων στα άκρα της ράβδου, οι συνοριακές συνθήκες (5.4.11) ισχύουν ως έχουν εάν σε αυτές τεθεί

$$M_t = GI_t^P \theta_x' - \frac{EC_S}{\kappa} \theta_x'' - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t' + m_w \quad (5.4.18)$$

$$M_w = -\frac{EC_S}{\kappa} \theta_x'' - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t \quad (5.4.19)$$

$$(\theta_x^P)' = \theta_x' + \frac{EC_S}{\kappa GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} \theta_x'' + \frac{EC_S}{(GI_t^P)^2} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^2 m_t' - \frac{1}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_w \quad (5.4.20)$$

Σημειώνεται τέλος ότι οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν και κατά μήκος της ράβδου, ενώ χρησιμεύουν στον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών και της πρωτογενούς συστροφής.

Πλέον, η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην εξίσωση ισορροπίας στρεπτόμενης ράβδου καθίσταται ευδιάκριτη. Στην περίπτωση όπου αγνοούνται οι παραμορφώσεις αυτές, αρκεί να τεθεί $\kappa = 1$ στην εξ. (5.4.16) οπότε και λαμβάνεται η εξίσωση ισορροπίας της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (4.3.21). Γενικά ισχύει $0 < \kappa < 1$ με την επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων να μεγαθύνεται όταν η σταθερά κ είναι μικρή. Κάτι τέτοιο ισχύει κυρίως σε κλειστές λεπτότοιχες διατομές, ενώ σε ανοικτές λεπτότοιχες διατομές συνήθως $\kappa \rightarrow 1$ με αποτέλεσμα οι δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις να είναι αμελητέες (Murin and Kutis 2008, Rubin 2005, Sapountzakis and Mokos 2009). Στην περίπτωση όπου στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.4.13-14) επιδιώκεται η αγνόηση των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων, αρκεί να τεθεί $k_x = \infty$ στη σχέση ορισμού της σταθεράς I_t^S (εξ. (5.4.3β)).

5.5. Στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις

Όπως φάνηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, η επίλυση των καθολικών εξισώσεων ισορροπίας της ράβδου απαιτεί τον υπολογισμό του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης k_x . Ο υπολογισμός αυτός βασίζεται σε ενεργειακή θεώρηση (Kraus 2007, Sapountzakis and Mokos 2009) σύμφωνα με την οποία εξισώνεται η ακριβής έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης με την αντίστοιχη προσεγγιστική (βλ. και υποκεφάλαιο 2.5). Προκειμένου να ευρεθεί η προαναφερθείσα ακριβής έκφραση, θα πρέπει να προσδιοριστεί ικανοποιητική κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων, η οποία να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας (5.3.3α) και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (5.3.3β). Έτσι, ενώ διατηρούνται οι εκφράσεις της ορθής παραμόρφωσης (5.2.13α) και των πρωτογενών διατμητικών τάσεων (εξ. (5.2.13β,γ)), τροποποιούνται οι εκφράσεις των δευτερογενών διατμητικών τάσεων και οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή τάσεως διαμορφώνονται τελικά ως

$$\sigma_{xx} = E \left(\theta_x^P \right)'' \phi_S^P \quad (5.5.1\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G \theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[-G \left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.5.1\beta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G \theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[-G \left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.5.1\gamma)$$

όπου $\phi_S^S = \phi_S^S(x, y, z)$ είναι δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης, η οποία θα προσδιοριστεί με εφαρμογή των εξ. (5.3.3). Οι προαναφερθείσες δευτερογενείς διατμητικές τάσεις περιλαμβάνουν συναρτήσεις παραγώγων της ϕ_S^S και προκύπτουν εάν για την περιγραφή του προβλήματος υιοθετηθεί το πεδίο μετατοπίσεων

$$u(x, y, z) = \left(\theta_x^P \right)'(x) \phi_S^P(y, z) + \left[- \left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{GC_S} \right] \phi_S^S(x, y, z) \quad (5.5.2\alpha)$$

$$v(x, y, z) = -z \theta_x(x) \quad (5.5.2\beta)$$

$$w(x, y, z) = y \theta_x(x) \quad (5.5.2\gamma)$$

και στη συνέχεια προσδιορίζονται οι συμβιβαστές παραμορφώσεις και ακολούθως οι προκύπτουσες από αυτές τάσεις. Ο λόγος που δεν υιοθετήθηκε το παραπάνω πεδίο μετατοπίσεων εξ αρχής είναι ότι θα διατυπώνονταν θεωρία ανάλογη με τη θεωρία διάτμησης 3ης τάξης (3rd order shear deformation theory, (Wang et. al. 2000)), η οποία είναι περισσότερο πολύπλοκη και απαιτεί τη χρήση τριών συνοριακών συνθηκών (αντί για δύο) σε κάθε άκρο της ράβδου.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (5.5.1) στις εξ. (5.3.3) και λαμβάνοντας υπόψη την καθολική εξίσωση ισορροπίας (5.4.10β), μορφώνεται πρόβλημα συνοριακών τιμών υπολογισμού της ϕ_S^S ως

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (5.5.3\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = - \frac{t_x C_S}{G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) I_t^S + m_w} \quad \text{στο } \Gamma \quad (5.5.3\beta)$$

Προκειμένου να υπολογιστεί στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης που να μην εξαρτάται από τη φόρτιση, τίθεται απλοποιητικά αφενός $t_x = 0$ στο δεξιά μέλος της εξ. (5.5.3β) και αφετέρου $m_w = 0$ στις εξ. (5.5.1β,γ). Έτσι καθίσταται δυνατό να οριστεί διδιάστατη $\phi_S^S = \phi_S^S(y, z)$ μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (5.5.4\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (5.5.4\beta)$$

καθώς επίσης και να απλοποιηθούν οι εκφράσεις των διατμητικών τάσεων ως

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[-G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.5.5\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[-G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.5.5\beta)$$

Σημειώνεται ότι προκειμένου η δευτερογενής στρέβλωση να μην οδηγεί σε αξονική καταπόνηση (βλ. εξ. (5.5.2α)), οι εξ. (5.5.4) επιλύονται με την επιπλέον απαίτηση να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (5.5.6)$$

Η ελαστική ενέργεια λόγω διάτμησης ανά μονάδα μήκους της ράβδου (εξ. (1.6.1)) δίδεται ως

$$U = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xy}^{S2} + 2\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + \tau_{xz}^{P2} + \tau_{xz}^{S2} + 2\tau_{xz}^P \tau_{xz}^S}{2G} d\Omega \quad (5.5.7\alpha)$$

$$\text{ή} \quad U = U_P + U_S + U_{PS} \quad (5.5.7\beta)$$

όπου

$$U_P = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xz}^{P2}}{2G} d\Omega \quad U_S = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{S2} + \tau_{xz}^{S2}}{2G} d\Omega \quad (5.5.8\alpha,\beta)$$

$$U_{PS} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left(2\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + 2\tau_{xz}^P \tau_{xz}^S \right) d\Omega \quad (5.5.8\gamma)$$

Η προσεγγιστική έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης θα δοθεί μέσω της κατανομής των εξ. (5.2.13β,γ) ενώ η ακριβής έκφραση μέσω των εξ. (5.5.5α,β). Και στις δύο περιπτώσεις αποδεικνύεται εύκολα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι $U_{PS} = 0$. Επιπρόσθετα, είναι εμφανές ότι η ελαστική ενέργεια που οφείλεται αποκλειστικά στις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (όρος U_P) ταυτίζεται στις δύο περιπτώσεις ($U_{approx.,P} = U_{exact,P}$). Συνεπώς, η εξίσωση προσεγγιστικής και ακριβούς έκφρασης δίδει

$$U_{approx.} = U_{exact} \Rightarrow U_{approx.,S} = U_{exact,S} \quad (5.5.9)$$

Η μη ικανοποιητική κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (βλ. εξ. (5.2.13β,γ)) διαμορφώνεται με τη βοήθεια της (5.4.2β) ως

$$\tau_{xy}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \quad \tau_{xz}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \quad (5.5.10\alpha,\beta)$$

ενώ για την ακριβή κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (βλ. εξ. (5.5.5α,β)) ισχύει

$$\tau_{xy}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad \tau_{xz}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (5.5.11\alpha,\beta)$$

Έτσι, η έκφραση της ελαστικής ενέργειας της σχέσης (5.5.8β) μετά την αντικατάσταση της προσεγγιστικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων των εξ. (5.5.10) διαμορφώνεται ως (Kraus 2007)

$$U_{approx.,S} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[\left(-\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left(-\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \xrightarrow{(5.4.3\beta)} \quad (5.5.12)$$

$$U_{approx.,S} = \frac{I}{2G} \frac{(M_t^S)^2}{I_t^S}$$

Αντίστοιχα, η αντικατάσταση της προσεγγιστικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων των εξ. (5.5.11) στην έκφραση της ελαστικής ενέργειας της σχέσης (5.5.8β) δίδει

$$U_{exact,S} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \rightarrow U_{exact,S} = \frac{I}{2G} \left(\frac{M_t^S}{C_S} \right)^2 I_{\phi} \quad (5.5.13)$$

όπου I_{ϕ} είναι γεωμετρική σταθερά που ορίζεται ως

$$I_{\phi} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (5.5.14)$$

και μπορεί να δοθεί (χωρίς να εξαρτάται από παραγώγους της ϕ_S^S) με ολοκλήρωση κατά παράγοντες και εκμετάλλευση των εξ. (5.5.4) ως

$$I_{\phi} = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (5.5.15)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (5.5.12-13), στην εξ. (5.5.9) μορφώνεται η σχέση υπολογισμού της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς ως

$$I_t^S = \frac{C_S^2}{I_{\phi}} \quad (5.5.16)$$

από την οποία με εφαρμογή των σχέσεων (5.4.3β), (5.4.4) προκύπτει η σχέση υπολογισμού του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης k_x ως

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_{\phi}} \quad (5.5.17)$$

Σημειώνεται ότι ισοδύναμες σχέσεις υπολογισμού προκύπτουν εάν η ακριβής έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης προσδιοριστεί μέσω της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (και της αντίστοιχης δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης που έχει οριστεί στο κεφ. 4).

Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι η δευτερογενής στρεπτική σταθερά μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει της πρωτογενούς στρεπτικής σταθεράς ως (Roik and Sedlacek 1966)

$$I_t^S = \kappa_x I_t^P \quad (5.5.18)$$

όπου κ_x είναι στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης που δίδεται ως

$$\kappa_x = \frac{C_S^2}{I_t^P I_{\phi}} \quad (5.5.19)$$

Μετά τον υπολογισμό του συντελεστή k_x , την εισαγωγή του στις καθολικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου και ακολούθως την επίλυσή τους, μπορεί να γίνει χρήση των σχέσεων (5.5.5) αντί των σχέσεων (5.2.13) προκειμένου να υπολογιστεί ικανοποιητικότερη κατανομή διατμητικών τάσεων που να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη). Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι η ενεργειακή θεώρηση για τον υπολογισμό των διορθωτικών συντελεστών διάτμησης οδηγεί γενικά στη σύζευξη καμπτοδιατμητικών και στρεπτικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών. Η στρέψη (στην περίπτωση κατά την οποία λαμβάνονται υπόψη οι διατμητικές παραμορφώσεις) αποζευγνύεται από την καμπτοδιατμητική ένταση αποκλειστικά στην περίπτωση διπλά συμμετρικών διατομών (Laudiero and Savoia 1990, Slivker 2007) και για τον λόγο αυτόν η παρούσα ανάλυση περιορίζεται στις συγκεκριμένες διατομές. Τέλος, τονίζεται ότι όλα τα μεγέθη του προβλήματος (γεωμετρικές σταθερές, κινηματικά και εντατικά μεγέθη) αντιστοιχίζονται πλήρως με μεγέθη του προβλήματος της μη γραμμικής καμπτοδιατμητικής ανάλυσης ράβδων διπλά συμμετρικής διατομής με επιρροή διατμητικών παραμορφώσεων, όταν η εξωτερική φόρτιση ασκείται αποκλειστικά κατά μία κύρια διεύθυνση (Murin and Kutis 2008, Rubin 2005).

5.6. Βήματα επίλυσης προβλήματος ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων

Σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, για την επίλυση του προβλήματος της ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ισότροπων πρισματικών ράβδων με διατομή απλής ή πολλαπλής συνοχής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος, λαμβάνοντας υπόψη δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

- Ορισμός αυθαίρετου συστήματος αναφοράς Syz στη διατομή της ράβδου που διέρχεται από το κέντρο συστροφής S . Το σημείο S ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο της διατομής το οποίο προσδιορίζεται ως η τομή των αξόνων συμμετρίας της.
- Υπολογισμός της βασικής πρωτογενούς συναρτήσεως στρεβλώσεως $\hat{\phi}_S^P(y, z)$. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \hat{\phi}_S^P = \frac{\partial^2 \hat{\phi}_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_S^P}{\partial z^2} = 0 \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma$$

ως ένα πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Laplace*.

- Υπολογισμός των πεδιακών ολοκληρωμάτων, που περιγράφουν το εμβαδόν της διατομής και τη ροπή στρεβλώσεως.

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad \hat{R}_S^P = \int_{\Omega} \hat{\phi}_S^P d\Omega$$

- Υπολογισμός της σταθεράς \hat{c} από τη σχέση

$$\hat{c} = -\frac{\hat{R}_S^P}{A}$$

- Υπολογισμός της κύριας πρωτογενούς συνάρτησης στρεβλώσεως $\phi_S^P(y, z)$ με τη βοήθεια της σχέσης

$$\phi_S^P = \hat{\phi}_S^P + \hat{c}$$

- Υπολογισμός της βασικής δευτερογενούς συνάρτησης στρεβλώσεως $\hat{\phi}_S^S(y, z)$. Η συνάρτηση αυτή υπολογίζεται από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\phi}_S^S &= \phi_S^P \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \\ \frac{\partial \hat{\phi}_S^S}{\partial n} &= 0 \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \end{aligned}$$

ως ένα πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Poisson*.

- Υπολογισμός της κύριας δευτερογενούς συνάρτησης στρεβλώσεως $\phi_S^S(y, z)$ σε κάθε διατομή της ράβδου σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_S^S = \hat{\phi}_S^S - \frac{1}{A} \int_{\Omega} \hat{\phi}_S^S d\Omega$$

- Υπολογισμός της πολικής ροπής αδράνειας I_P , της πρωτογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^P , της σταθεράς στρέβλωσης C_S , της σταθεράς I_ϕ , του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης k_x και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} I_P &= \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \\ I_t^P &= \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \\ I_\phi &= - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \end{aligned}$$

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_\phi} \quad I_t^S = k_x (I_P - I_t^P)$$

Στην περίπτωση όπου η σταθερά I_t^S δεν διορθωθεί εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων, τότε στην τελευταία έκφραση τίθεται $k_x = I$.

- Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας της ράβδου για τυχούσες συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$, υποκείμενων στις πλέον γενικές στρεπτικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -G(I_t^P + I_t^S) \theta_x'' + G I_t^S (\theta_x^P)'' = m_t \\ -E C_S (\theta_x^P)''' + G I_t^S \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) = -m_w \end{cases} \quad \text{στο εσωτερικό της ράβδου}$$

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 (\theta_x^P)' = \beta_3 \quad \text{στα άκρα της ράβδου } x = 0, l$$

και υπολογισμός της γωνίας στροφής $\theta_x(x)$, της πρωτογενούς συστροφής $(\theta_x^P)'(x)$ και των παραγώγων τους καθώς και των αναπτυσσόμενων εντατικών μεγεθών M_t , M_t^P , M_t^S και M_w με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} M_t &= M_t^P + M_t^S \\ M_t^P &= G I_t^P \theta_x' \quad M_t^S = -G I_t^S \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \\ M_w &= -E C_S (\theta_x^P)'' \end{aligned}$$

- Υπολογισμός των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων, των συνολικών διατμητικών τάσεων και των ορθών τάσεων του τανυστή Cauchy σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^P &= G \theta_x'(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) \quad \text{πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega \\ \tau_{xz}^P &= G \theta_x'(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \quad \text{πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}^S = \left[-G \left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \text{ δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega$$

$$\tau_{xz}^S = \left[-G \left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \text{ δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega$$

$$\tau_{xn} = \sqrt{\left(\tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S \right)^2 + \left(\tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S \right)^2} \text{ συνολικές διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega$$

$$\tau_{xt}^P = G \theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + y n_y + z n_z \right) \text{ πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$\tau_{xt}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \text{ δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$\tau_{xt} = \tau_{xt}^P + \tau_{xt}^S \text{ συνολικές διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$\sigma_{xx} = E \left(\theta_x^P \right)'' \phi_S^P \text{ ορθές τάσεις στρεβλώσεως στο χωρίο } \Omega \text{ και στο σύνορο } \Gamma$$

- Υπολογισμός των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u(x, y, z) = \left(\theta_x^P \right)'(x) \phi_S^P(y, z)$$

$$v(x, y, z) = -z \theta_x(x)$$

$$w(x, y, z) = y \theta_x(x)$$

Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι για τον υπολογισμό του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης k_x , η διαμήκης συνιστώσα του πεδίου μετατοπίσεων έχει ληφθεί ως

$$u(x, y, z) = \left(\theta_x^P \right)'(x) \phi_S^P(y, z) - \left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \phi_S^S(y, z)$$

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΝ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

6.1. Εισαγωγή - Προκαταρκτικές έννοιες

Η ανάπτυξη των υπολογιστικών μέσων που έχει στη διάθεση του ο μηχανικός συνέβαλε στο σχεδιασμό κατασκευών, οι οποίες περιλαμβάνουν ζεύξη μεγάλων ανοιγμάτων χωρίς ενδιάμεσες στηρίξεις, υποστηλωμάτων μεγάλου ύψους καθώς και μελών που δέχονται σημαντική εγκάρσια φόρτιση. Η κατασκευή χώρων μεγάλων διαστάσεων για την κάλυψη των σύγχρονων αναγκών στέγασης, η απαίτηση γεφύρωσης μεγάλων ανοιγμάτων χωρίς ενδιάμεση στήριξη, η σύγχρονη αντίληψη χρήσης διατομών μικρών διαστάσεων και η ανάπτυξη δομικών υλικών υψηλής αντοχής, που προσδίδουν μεγάλη φέρουσα ικανότητα στο φορέα, αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα. Στις περιπτώσεις αυτές, οι επιρροές της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και της διατμητικής παραμόρφωσης δεν θα πρέπει να αμελούνται, διότι μπορεί να οδηγήσουν σε αξιοσημείωτες αποκλίσεις στον υπολογισμό της εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης του φορέα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις δοκών με μονοσυμμετρική ή ασύμμετρη διατομή υπό εγκάρσια φόρτιση, ο φορέας όχι μόνο κάμπτεται αλλά και στρέφεται περί το διαμήκη άξονα του. Αυτό οφείλεται στην απόσταση που υπάρχει μεταξύ του κέντρου διάτμησης και του κέντρου βάρους πάνω στο οποίο ασκούνται τα φορτία. Τις περισσότερες φορές οι στρεπτικές ροπές που δημιουργούνται από τα εγκάρσια φορτία προκαλούν στροφές περί το διαμήκη άξονα, οι οποίες μπορεί να θεωρηθούν μικρές, αλλά δεν μπορεί να αμεληθούν.

Από την αναδρομή στην πρόσφατη συναφή βιβλιογραφία παρατηρείται ότι η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, λαμβάνοντας ή αγνοώντας τις διατμητικές παραμορφώσεις, έχει αποτελέσει αντικείμενο ιδιαίτερα εκτεταμένης έρευνας. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων οι ράβδοι επιλύονται αριθμητικά, ενώ αναλυτικές λύσεις υφίστανται σε ειδικές περιπτώσεις (Kounadis and Katsikadelis 1979, Simitses et al. 1981, Mattiasson 1981). Η πιο διαδεδομένη αριθμητική μέθοδος για την επίλυση των προβλημάτων αυτών είναι αυτή των Πεπερασμένων Στοιχείων (Mondkar and Powell 1977, Argyris et al. 1979, Bathe and Bolourchi 1979, Marinetti and Oliveto 1984, Papadrakakis and Gantes 1988, Filippou and Schultz 2001), ενώ η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων έχει επίσης χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση προβλημάτων καμπτόμενων ραβδωτών στοιχείων, χωρίς την επιρροή διατμητικών παραμορφώσεων, είτε αυτά διατυπώνονται σύμφωνα με τη γραμμικοποιημένη θεωρία (Sapountzakis and

Katsikadelis 2000, Elfesoufi and Azrar 2005) είτε με τη μη γραμμική θεωρία (Katsikadelis and Tsiatas 2003, 2004, 2005). Οι διατμητικές παραμορφώσεις στην ανάλυση ραβδωτών στοιχείων έχουν επίσης ληφθεί υπόψη με τη βοήθεια ολοκληρωτικών εξισώσεων, σε γραμμικά δυναμικά (Schanz and Antes 2002, Antes et al. 2004) και στατικά προβλήματα (Antes 2003). Επιπρόσθετα, η εν λόγω επιρροή συμπεριλήφθηκε πρόσφατα στις εργασίες των Sapountzakis and Mokos (2008) και Sapountzakis and Panagos (2008) στη μελέτη καμπτόμενων δοκών με σταθερή ή μεταβλητή διατομή διπλής συμμετρίας, λαμβάνοντας υπόψη τις πρόσθετες ροπές λόγω αξονικής έντασης (φαινόμενα 2^{ης} τάξης).

Τέλος, σημειώνεται ότι οι διάφοροι κανονισμοί (Eurocode 3, EAK 2000) βάσει των οποίων σχεδιάζονται οι σύγχρονες κατασκευές, λαμβάνουν υπόψη τα φαινόμενα 2^{ης} τάξης σε ραβδωτούς φορείς, κυρίως με προσεγγιστικές μεθόδους με τη βοήθεια κατάλληλων διορθωτικών συντελεστών και αποτελέσματα που βασίζονται σε αναλύσεις στην απαραμόρφωτη κατάσταση (γραμμική θεωρία), ενώ αγνοούν τη διατμητική παραμόρφωση των διατομών. Οι μεθοδολογίες αυτές σε ορισμένες περιπτώσεις ενδέχεται να οδηγήσουν σε σημαντικές ανακρίβειες (Gantes and Mageirou 2005).

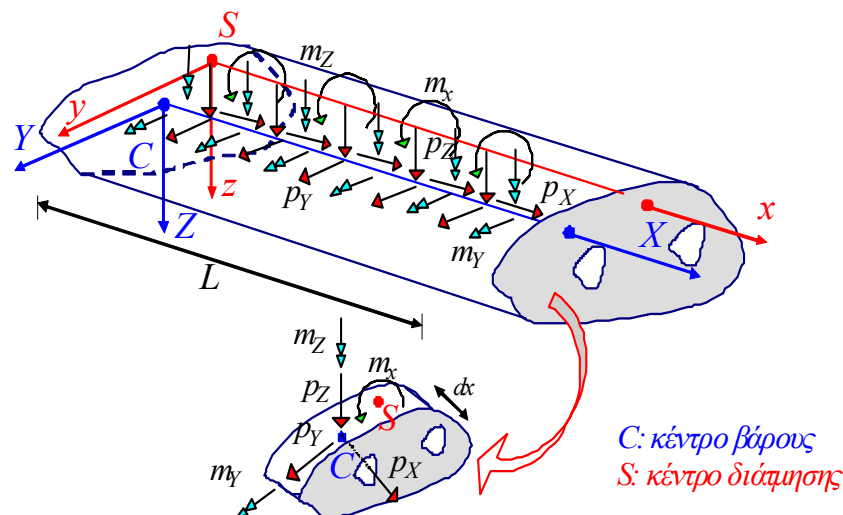
Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζεται η γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση ομογενούς δοκού τυχούσας διατομής λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων. Η δοκός υποβάλλεται σε συνδυασμό τυχούσας συγκεντρωμένης ή κατανεμημένης αξονικής, εγκάρσιας, καμπτικής και στρεπτικής φόρτισης, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές συννοριακές συνθήκες στις οποίες μπορεί να συμπεριληφθεί η περίπτωση της ελαστικής στήριξης. Η διατμητική παραμόρφωση των διατομών λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης, όπως αυτοί παρουσιάζονται στα υποκεφάλαια 1.6, 2.5, στα οποία προσδιορίζονται με εφαρμογή ενεργειακής μεθόδου. Επισημαίνεται ότι στην ανάλυση λαμβάνεται υπόψη η επιρροή του συντελεστή διατμητικής παραμόρφωσης a_{yz} που υφίσταται όταν το πρόβλημα δεν μελετάται στο κύριο διατμητικό σύστημα αξόνων, μέσω του υπολογισμού της γωνίας που σχηματίζει το κύριο διατμητικό σύστημα με το τυχαίο σύστημα αξόνων. Η ισορροπία της δοκού εξετάζεται στην παραμορφωμένη κατάσταση και υιοθετείται η θεωρία μετρίως μεγάλων μετακινήσεων, σύμφωνα με την οποία οι μετατοπίσεις θεωρούνται μεγάλες με αποτέλεσμα τη διατήρηση των τετραγώνων των παραγώγων των μετατοπίσεων (μη γραμμικοί όροι) στον υπολογισμό της ορθής παραμόρφωσης, ενώ οι στροφές (λόγω κάμψης και στρέψης) θεωρούνται μικρές. Επισημαίνεται, ότι η στρέβλωση της διατομής λόγω στρέψης λαμβάνεται υπόψη στην ανάλυση εισάγοντας ένα πρόσθετο βαθμό ελευθερίας, τη συστροφή (θ_x'). Οι βασικές παραδοχές της θεωρίας ταυτίζονται μερικώς με αυτές της γραμμικής θεωρίας ανομοιομόρφης στρέψης (βλ. κεφ. 4) και συνοψίζονται ως ακολούθως:

Παραδοχές ελαστικής θεωρίας κάμψης δοκού Timoshenko με γεωμετρική μη γραμμικότητα

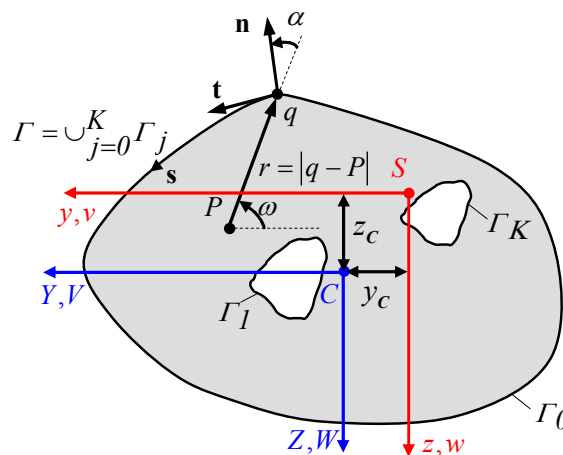
1. *Ο διαμήκης άξονας της δοκού είναι ευθύγραμμος.*
2. *Η διατομή της δοκού είναι σταθερή.*
3. *Οι διαστάσεις της διατομής της δοκού είναι μικρές συγκρινόμενες με το μήκος της.*
4. *Το υλικό της δοκού θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και (υπερ)ελαστικό. Οι παραμορφώσεις της δοκού θεωρούνται μικρές και συνεπώς ισχύει ο γενικευμένος καταστατικός νόμος του Hooke, βάσει του οποίου οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων είναι γραμμικές.*

Η θεώρηση μικρών παραμορφώσεων είναι απαραίτητη προκειμένου να διατυπωθεί γραμμική θεωρία σε ό,τι αφορά την προσομοίωση του υλικού. Τονίζεται ωστόσο ότι η παραδοχή αυτή δεν επηρεάζει το μέγεθος των μετακινήσεων της δοκού που μπορούν να θεωρηθούν μεγάλες (γεωμετρική μη γραμμικότητα). Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στην ανάγκη συσχέτισης (μέσω του νόμου του Hooke) διαφορετικών τανυστών τάσης και παραμόρφωσης από τους αντίστοιχους της γραμμικής θεωρίας.

5. Κάθε διατομή επίπεδη και κάθετη στον απαραμόρφωτο άξονα της δοκού παραμένει επίπεδη μετά την παραμόρφωση.
Η παραδοχή αυτή λαμβάνει υπόψη τη συμβολή των διατμητικών παραμορφώσεων στις εγκάρσιες μετακινήσεις της δοκού και αποτελεί γενίκευση της θεωρίας Bernoulli-Euler σύμφωνα με την οποία το επίπεδο της διατομής μετά την παραμόρφωση παραμένει επίπεδο και κάθετο στον (παραμορφωμένο) άξονα των γεωμετρικών κέντρων των διατομών.
6. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται.
7. Η κατανομή των τάσεων στα άκρα της δοκού είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.



(α)



(β)

Σχ. 6.1 Ομογενής δοκός υποβαλλόμενη σε αξονική, εγκάρσια, καμπτική και στρεπτική φόρτιση (α) με σταθερή διατομή τυχόντος σχήματος (β).

6.2. Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Έστω ευθύγραμμη δοκός μήκους l , σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος, που αποτελείται από ομογενές, γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και μέτρο διάτμησης G , ενώ μπορεί να περιλαμβάνει πεπερασμένο αριθμό οπών. Με $CXYZ$ συμβολίζεται το κύριο διατμητικό σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο βάρους C της διατομής (Σχ.6.1) και με $Sxyz$ το σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης S , με άξονες παράλληλους με το $CXYZ$. Στη δοκό επιβάλλονται κατανεμημένο ή συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο $p_X = p_X(X)$, εγκάρσια φορτία $p_Y = p_Y(X)$, $p_Z = p_Z(X)$ των οποίων η διεύθυνση διέρχεται από το κέντρο βάρους, καμπτικές ροπές $m_Y = m_Y(X)$, $m_Z = m_Z(X)$ περί τους άξονες Y και Z , αντίστοιχα και τέλος, κατανεμημένη ή συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή $m_x = m_x(x)$.

Εξετάζοντας τον φορέα στην παραμορφωμένη κατάσταση, θεωρώντας μικρές γωνίες στροφής θ_x περί το διαμήκη άξονα, δηλαδή

$$\cos \theta_x \approx 1 \quad \sin \theta_x \approx \theta_x \quad (6.2.1\alpha, \beta)$$

το πεδίο μετατοπίσεων τυχόντος σημείου της διατομής μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{u}(x, y, z) = u(x) + \theta_Y(x)(z - z_C) - \theta_Z(x)(y - y_C) + \theta'_x(x)\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \quad (6.2.2)$$

$$\bar{v}(x, z) = v(x) - z\theta_x(x) \quad (6.2.3)$$

$$\bar{w}(x, y) = w(x) + y\theta_x(x) \quad (6.2.4)$$

όπου $\phi_S^P(y, z)$, $\phi_S^S(x, y, z)$ είναι η πρωτογενής και δευτερογενής κύρια συνάρτηση στρέβλωσης, αντίστοιχα, οι οποίες αναφέρονται στο κέντρο στρέψης, το οποίο ταυτίζεται στη παρούσα εργασία με το κέντρο διάτμησης S , θ_Y , θ_Z είναι οι στροφές λόγω κάμψης περί τους άξονες Y και Z , αντίστοιχα, $v(x)$, $w(x)$ είναι οι μετατοπίσεις του κέντρου διάτμησης κατά τους άξονες y , z , αντίστοιχα και $\theta_x(x)$ είναι η στροφή της διατομής περί τον διαμήκη άξονα x , ο οποίος διέρχεται από το κέντρο διάτμησης (Σχ.6.1). Επίσης, με $u(x)$ συμβολίζεται η μέση αξονική μετακίνηση της διατομής. Επισημαίνεται ότι στο προηγούμενο πεδίο μετατοπίσεων και πιο συγκεκριμένα στην εξ.(6.2.2) έχει διαχωριστεί η αξονική μετακίνηση λόγω πρωτογενούς και δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης.

Από τις εξισώσεις ορισμού του τανυστή παραμόρφωσης Green-Lagrange, αγνοώντας τους μη γραμμικούς όρους των γινομένων των παραγώγων της αξονικής μετατόπισης στις συνιστώσες των γωνιών διατμητικής παραμόρφωσης γ_{xy} , γ_{xz} $((\partial u / \partial x)(\partial u / \partial z) \ll (\partial w / \partial x) + (\partial u / \partial z), (\partial u / \partial x)(\partial u / \partial y) \ll (\partial v / \partial x) + (\partial u / \partial y))$, θεωρώντας $(\partial u / \partial x)^2 \ll \partial u / \partial x$, αγνοώντας την επιρροή της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης στον προσδιορισμό της ορθής παραμόρφωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ανάλυση που παρατίθεται στη συνέχεια αφορά μικρές γωνίες στροφής λόγω στρέψης

(αγνοείται ο όρος $(\theta_x')^2$ από τον υπολογισμό της ορθής παραμόρφωσης) προκύπτουν η ορθή και οι διατμητικές παραμορφώσεις ως

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{d\theta_Y}{dx} Z - \frac{d\theta_Z}{dx} Y + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) \quad (6.2.5\alpha)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} - \theta_Z - z \frac{d\theta_x}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (6.2.5\beta)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \theta_Y + y \frac{d\theta_x}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (6.2.5\gamma)$$

όπου $Y = y - y_C$, $Z = z - z_C$ οι αποστάσεις από το κέντρο βάρους του τυχόντος σημείου κατά τους άξονες Y , Z , αντίστοιχα. Επιπρόσθετα επισημαίνεται ότι ισχύει $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0$. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (6.2.5) με τις σχέσεις (1.2.5 – 1.2.10) παρατηρείται ότι η διαφορά στον υπολογισμό των συνιστωσών παραμόρφωσης έγκειται στη διατήρηση των τετραγώνων των παραγώγων των εγκάρσιων μετατοπίσεων (μη γραμμικοί όροι) στην ορθή συνιστώσα παραμόρφωσης.

Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις, ο δεύτερος τανυστής τάσης Piola-Kirchhoff για ισότροπο και ομογενές υλικό προσδιορίζεται συναρτήσει των συνιστωσών παραμόρφωσης ως ($S_{yy} = S_{zz} = S_{yz} = 0$)

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (6.2.6)$$

οπότε οι συνιστώσες του προκύπτουν με τη βοήθεια των σχέσεων (6.2.5) ως

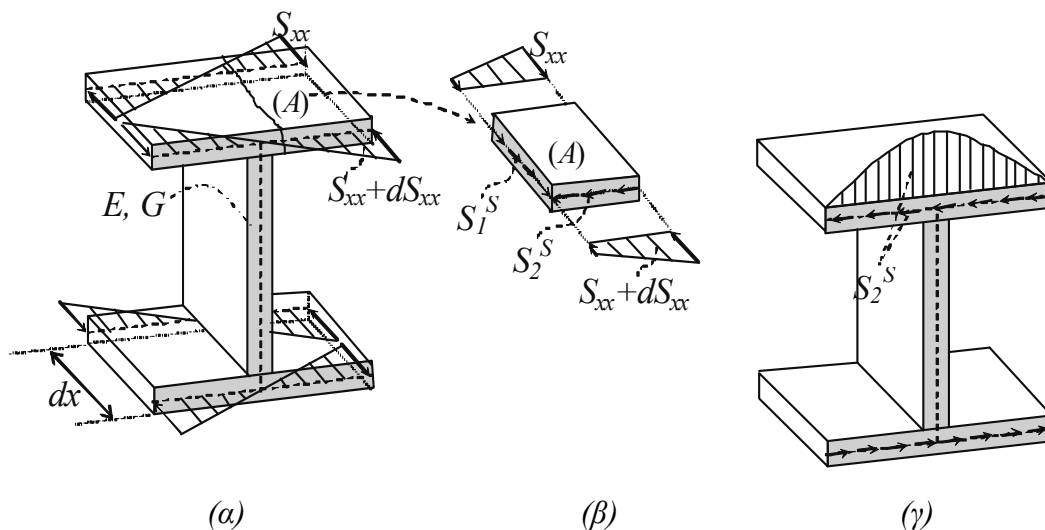
$$S_{xx} = E \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\theta_Y}{dx} Z - \frac{d\theta_Z}{dx} Y + \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} (\phi_S^P) \right) \quad (6.2.7\alpha)$$

$$S_{xy} = S_{xy}^B + S_{xy}^P + S_{xy}^S = G(-\theta_Z + v') + G \left(\theta_x' \cdot \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) - z \right) \right) + G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (6.2.7\beta)$$

$$S_{xz} = S_{xz}^B + S_{xz}^P + S_{xz}^S = G(\theta_Y + w') + G \left(\theta_x' \cdot \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) + y \right) \right) + G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (6.2.7\gamma)$$

όπου S_{xy}^B , S_{xz}^B είναι το μέρος των διατμητικών τάσεων που έχει ως αποτέλεσμα τις τέμνουσες δυνάμεις Q_y , Q_z , ενώ S_{xy}^P , S_{xz}^P και S_{xy}^S , S_{xz}^S είναι οι πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, αντίστοιχα και οι οποίες προέρχονται από τη στρεπτική καταπόνηση της δοκού. Πιο συγκεκριμένα, όπως είχε αναφερθεί και στην περίπτωση του

προβλήματος της γραμμικής ανομοιομόρφης στρέψης η εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση στη ράβδο μπορεί να διασπαστεί σε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους φάσεις (Wagner 1929, Karpus 1937, Marguerre 1940, Μώκος 2007). Οι φάσεις αυτές γίνονται κατανοητές στο Σχ.6.2, όπου εξετάζεται η ισορροπία στοιχειώδους τμήματος δοκού, υπό στρεπτική φόρτιση. Έτσι, σε διατομή τυχούσας μορφής λόγω της στρεπτικής φόρτισης αναπτύσσονται αρχικά (πρωτογενής φάση) διατμητικές τάσεις σε μορφή κλειστής ροής, οι οποίες λόγω της ανομοιομόρφης κατανομής τους προκαλούν διατμητικές τροπές με επίσης ανομοιομόρφη κατανομή, με αποτέλεσμα η διατομή, εκτός της στροφής να στρεβλώνει προς τη διαμήκη διεύθυνση. Οι διατμητικές αυτές τάσεις ονομάζονται πρωτογενείς S_{xy}^P, S_{xz}^P . Εάν η αναπτυσσόμενη στρέβλωση λόγω στρέψης δεν παρεμποδίζεται τότε οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις ταυτίζονται με τις διατμητικές τάσεις Saint Venant. Στην περίπτωση όμως, που η στρέβλωση της διατομής παρεμποδίζεται (ανομοιομόρφη στρέψη, θ_x' μεταβάλλεται) τότε αναπτύσσονται ορθές τάσεις, οι οποίες είναι ανάλογες με την πραγματοποιούμενη στρέβλωση και μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα x της δοκού. Από το Σχ.6.2β παρατηρείται ότι η στοιχειώδης μεταβολή των ορθών τάσεων dS_{xx} από στρέβλωση μπορεί να εξισορροπηθεί μόνο από την ανάπτυξη νέων διατμητικών τάσεων S_I^S κατά μήκος της τομής A , οι οποίες, σύμφωνα με τη συνθήκη Cauchy, οδηγούν στην ανάπτυξη πρόσθετων διατμητικών τάσεων S_2^S στο επίπεδο της διατομής που ονομάζονται δευτερογενείς (Σχ.6.2γ). Η ανάπτυξη των ορθών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων λόγω στρέβλωσης αποτελούν τη δεύτερη φάση (δευτερογενή). Σημειώνεται ότι, στη δευτερογενή φάση δεν αναπτύσσεται πρόσθετη στροφή της διατομής, ενώ η στρέβλωση λόγω δευτερογενών διατμητικών τάσεων θεωρείται πολύ μικρή και επομένως το φαινόμενο έχει ολοκληρωθεί, δηλαδή δεν θεωρούνται δευτερογενείς ορθές τάσεις.



Σχ. 6.2 Ορθές και διατμητικές τάσεις στρέβλωσης.

Σημειώνεται ότι η προαναφερθείσα δευτερογενής κύρια συνάρτηση στρέβλωσης $\varphi_S^S(x, y, z)$ εκφράζει τη στρέβλωση της διατομής που αναπτύσσεται λόγω δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες ισορροπίας στην παράπλευρη

επιφάνεια της διατομής αποδεικνύεται (Μώκος 2007) ότι για τις διατμητικές τάσεις S_{xy}^P , S_{xy}^S , S_{xz}^P , S_{xz}^S ισχύει

$$\int_{\Omega} S_{xy}^P d\Omega = 0 \quad \int_{\Omega} S_{xy}^S d\Omega = 0 \quad (6.2.8\alpha, \beta)$$

$$\int_{\Omega} S_{xz}^P d\Omega = 0 \quad \int_{\Omega} S_{xz}^S d\Omega = 0 \quad (6.2.8\gamma, \delta)$$

6.3. Εντατικά μεγέθη, εξίσωση ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

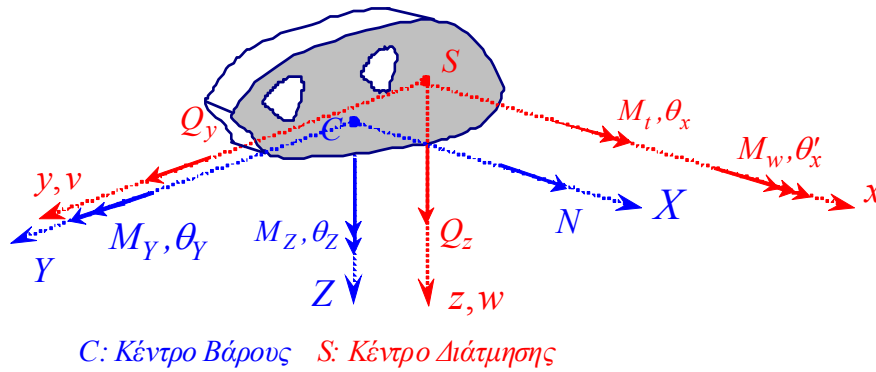
Τα εντατικά μεγέθη (Σχ.6.3) που αναπτύσσονται ως προς τους άξονες της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση, μπορούν να προκύψουν από την ολοκλήρωση των ορθών και διατμητικών συνιστωσών τάσεως του 2^{ου} τανυστή Piola – Kirchhoff. Πιο συγκεκριμένα, οι τέμνουσες δυνάμεις προσδιορίζονται ως

$$Q_y = \int_{\Omega} S_{xy} d\Omega \quad Q_z = \int_{\Omega} S_{xz} d\Omega \quad (6.3.1\alpha, \beta)$$

όπου λαμβάνοντας υπόψη τις (6.2.7), (6.2.8) προκύπτει ότι οι τέμνουσες δυνάμεις Q_y , Q_z είναι αποτέλεσμα των διατμητικών τάσεων S_{xy}^B και S_{xz}^B , το οποίο επαληθεύει την παρατήρηση ότι οι διατμητικές τάσεις S_{xy}^P , S_{xy}^S , S_{xz}^P , S_{xz}^S δεν οφείλονται στις τέμνουσες δυνάμεις που αναπτύσσονται στη διατομή. Έτσι

$$Q_y = \int_{\Omega} (S_{xy}^B + S_{xy}^P + S_{xy}^S) d\Omega = \int_{\Omega} (S_{xy}^B) d\Omega \quad (6.3.2\alpha)$$

$$Q_z = \int_{\Omega} (S_{xz}^B + S_{xz}^P + S_{xz}^S) d\Omega = \int_{\Omega} (S_{xz}^B) d\Omega \quad (6.3.2\beta)$$



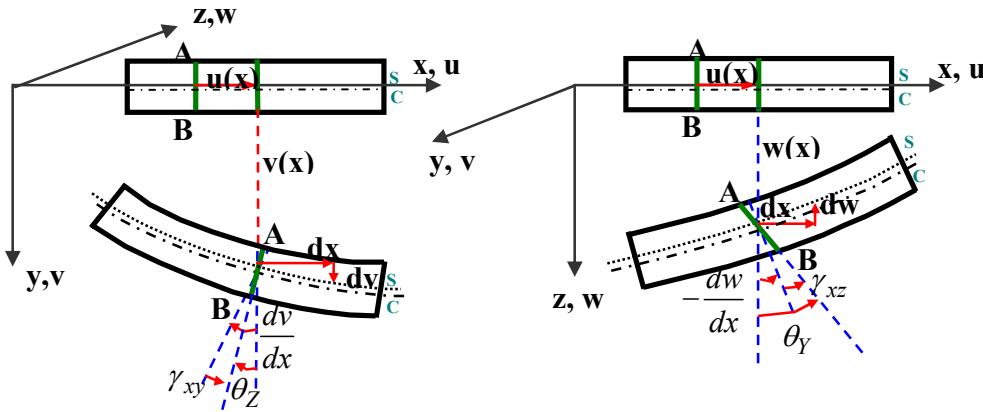
Σχ. 6.3 Συνιστώσες μετακίνησης και εντατικά μεγέθη σε διατομή δοκού.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.3.2), (6.2.7) προκύπτει ότι

$$Q_y = GA_Y \left(\frac{dv}{dx} - \theta_Z \right) \quad Q_z = GA_Z \left(\theta_Y + \frac{dw}{dx} \right) \quad (6.3.3\alpha, \beta)$$

όπου A_Y, A_Z είναι οι επιφάνειες διάτμησης κατά τους άξονες Y, Z , αντίστοιχα, οι οποίες ορίζονται με τη χρήση των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης a_Y, a_Z ως

$$A_Z = \kappa_Z A = \frac{I}{a_Z} A \quad A_Y = \kappa_Y A = \frac{I}{a_Y} A \quad (6.3.4\alpha, \beta)$$



Σχ. 6.4 Καμπτόμενη δοκός Timoshenko, στην παραμορφωμένη κατάσταση, στα επίπεδα xy και xz .

Σημειώνεται ότι ο συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης a_{YZ} είναι μηδενικός επειδή το πρόβλημα μελετάται στο κύριο διατμητικό σύστημα αξόνων, το οποίο προκύπτει με περιστροφή του τυχαίου συστήματος συντεταγμένων κατά τη γωνία θ^S (Μώκος 2007). Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι για καμπτόμενο στοιχείο, οι εξ.(6.2.5β,γ) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή (Σχ.1.4)

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} - \theta_Z \quad \gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \theta_Y \quad (6.3.5\alpha, \beta)$$

όπου $dv/dx, dw/dx$ οι γωνίες κλίσης της ελαστικής γραμμής με τον άξονα x .

Τα υπόλοιπα εντατικά μεγέθη προσδιορίζονται από τις εξισώσεις που ακολουθούν

$$N = \int_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad (6.3.6\alpha)$$

$$M_Z = \int_{\Omega} S_{xx} Y d\Omega \quad (6.3.6\beta)$$

$$M_Y = \int_{\Omega} S_{xx} Z d\Omega \quad (6.3.6\gamma)$$

$$M_t = M_t^P + M_t^S \quad (6.3.6\delta)$$

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[S_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + S_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (6.3.6\epsilon)$$

$$M_t^S = - \int_{\Omega} \left[S_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right] d\Omega \quad (6.3.6\sigma\tau)$$

$$M_w = - \int_{\Omega} S_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (6.3.6\zeta)$$

όπου M_t^P , M_t^S είναι οι συνιστώσες της στρεπτικής ροπής που οφείλονται στις πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, αντίστοιχα, λόγω ανομοιόμορφης στρέψης και M_w είναι η ροπή στρέβλωσης λόγω των ορθών τάσεων που είναι αποτέλεσμα της μεταβολής της στρέβλωσης της διατομής κατά μήκος της δοκού λόγω στρέψης (Sapountzakis and Mokos 2001). Οι εξ.(6.3.6β), (6.3.6γ), με τη βοήθεια της σχέσης (6.2.7α) γράφονται ως

$$M_Z = \int_{\Omega} EY \frac{du}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} EY^2 \frac{d\theta_Z}{dx} d\Omega - \int_{\Omega} EYZ \frac{d\theta_Y}{dx} d\Omega - \int_{\Omega} E \frac{d^2\theta_x}{dx^2} \phi_S^P Y d\Omega \quad (6.3.7\alpha)$$

$$M_Y = \int_{\Omega} EZ \frac{du}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} EZ^2 \frac{d\theta_Y}{dx} d\Omega - \int_{\Omega} EYZ \frac{d\theta_Z}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} E \frac{d^2\theta_x}{dx^2} \phi_S^P Z d\Omega \quad (6.3.7\beta)$$

Ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων της διατομής, για τις ροπές αδράνειας και για την πρωτογενή κύρια συνάρτηση στρέβλωσης ισχύει

$$I_Y = \int_{\Omega} Z^2 d\Omega \quad I_Z = \int_{\Omega} Y^2 d\Omega \quad I_{YZ} = \int_{\Omega} YZ d\Omega \quad (6.3.8\alpha,\beta,\gamma)$$

$$S_Y^{st} = \int_{\Omega} Z d\Omega = 0 \quad S_Z^{st} = \int_{\Omega} Y d\Omega = 0 \quad (6.3.9\alpha,\beta)$$

$$\int_{\Omega} \phi_S^P Y d\Omega = 0 \quad \int_{\Omega} \phi_S^P Z d\Omega = 0 \quad (6.3.10\alpha,\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.3.8-10) στις (6.3.7), οι καμπτικές ροπές υπολογίζονται ως

$$M_Z = EI_Z \frac{d\theta_Z}{dx} - EI_{YZ} \frac{d\theta_Y}{dx} \quad (6.3.11\alpha)$$

$$M_Y = EI_Y \frac{d\theta_Y}{dx} - EI_{YZ} \frac{d\theta_Z}{dx} \quad (6.3.11\beta)$$

Επιπρόσθετα, οι σχέσεις (6.3.6α,δ-ζ) με τη βοήθεια των εξ.(6.2.7) γράφονται ως (Sapountzakis and Mokos 2001, 2003a, 2003b)

$$N = EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (6.3.12)$$

$$M_t^P = GI_t \frac{d\theta_x}{dx} \quad (6.3.13)$$

$$M_t^S = \frac{dM_w}{dx} = -EC_S \frac{d^3\theta_x}{dx^3} \quad (6.3.14)$$

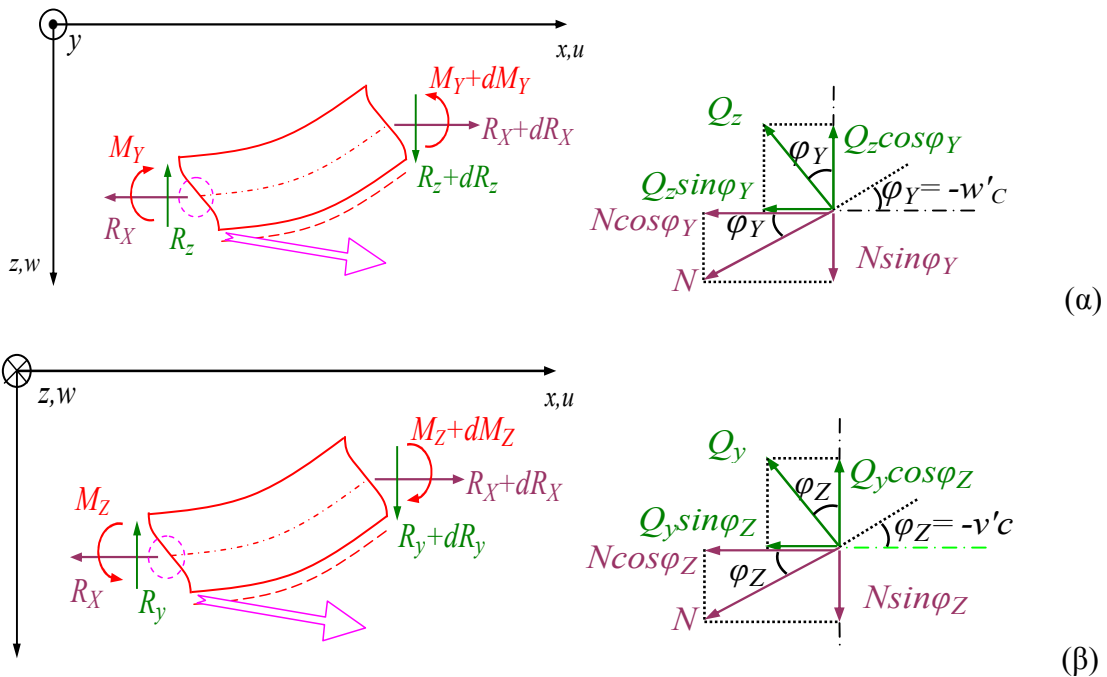
$$M_t = GI_t \frac{d\theta_x}{dx} - EC_S \frac{d^3\theta_x}{dx^3} \quad (6.3.15)$$

$$M_w = -EC_S \frac{d^2\theta_x}{dx^2} \quad (6.3.16)$$

Το μέγεθος EC_S εκφράζει την αντίσταση της διατομής σε στρέβλωση λόγω στρέψης (warping rigidity) και η σταθερά C_S είναι η σταθερά στρέβλωσης ή σταθερά Wagner, αδιαστατοποιημένη ως προς το μέτρο ελαστικότητας E . Επίσης, το μέγεθος GI_t εκφράζει τη στρεπτική αντίσταση (torsional rigidity) της διατομής, όπου I_t είναι η στρεπτική ροπή αδράνειας ή στρεπτική σταθερά Saint Venant. Η σταθερά στρέβλωσης και η στρεπτική σταθερά υπολογίζονται από τις σχέσεις (βλ. σχέσεις 4.3.18, 4.3.13 του υποκεφαλαίου 4.3)

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (6.3.17)$$

$$I_t = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (6.3.18)$$



Σχ. 6.5 Εντατικά μεγέθη στοιχειώδους τμήματος δοκού Timoshenko στην παραμορφωμένη κατάσταση στο επίπεδο xz (α) και στο επίπεδο xy (β).

ενώ οι προαναφερθείσες πρωτογενής $\phi_S^P(y, z)$ και δευτερογενής $\phi_S^S(x, y, z)$ συνάρτηση στρέβλωσης στο χωρίο Ω μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας ανεξάρτητα τα προβλήματα Neumann (Sapountzakis and Mokos 2003a, 2003b) που περιγράφονται από τις εξισώσεις (4.2.27), (4.2.28), αντίστοιχα του υποκεφαλαίου 4.2, αφού πρώτα έχει προσδιοριστεί η θέση του κέντρου διάτμησης της διατομής (υποκεφάλαιο 2.4).

Στη θεωρία Timoshenko (Atanackovic and Spasic 1994) η αξονική και η τέμνουσα δύναμη ασκούνται στη διατομή που είναι κάθετη στον παραμορφωμένο άξονα της δοκού. Επομένως, η γωνία που σχηματίζει το αξονικό φορτίο με τον άξονα x (Σχ.6.5) θεωρώντας μικρές στροφές λόγω κάμψης προκύπτει ως

$$\cos \varphi_Y \approx 1 \quad \cos \varphi_Z \approx 1 \quad (6.3.19\alpha, \beta)$$

$$\sin \varphi_Y \approx \varphi_Y = -\frac{dw_C}{dx} \quad \sin \varphi_Z \approx \varphi_Z = -\frac{dv_C}{dx} \quad (6.3.19\gamma, \delta)$$

Σύμφωνα με το Σχ.6.5 ισχύει ότι

$$R_X = N + Q_Z \sin \varphi_Y + Q_Y \sin \varphi_Z \quad (6.3.20)$$

$$R_Y = -N \sin \varphi_Z + Q_Y \cos \varphi_Z \quad (6.3.21)$$

$$R_Z = -N \sin \varphi_Y + Q_Z \cos \varphi_Y \quad (6.3.22)$$

όπου R_X είναι η δύναμη στον οριζόντιο άξονα, N η αξονική δύναμη, R_Y , R_Z οι κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα τέμνουσες δυνάμεις και Q_Z , Q_Y οι κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα τέμνουσες δυνάμεις (Κουνάδης 1997). Με τη βοήθεια των εξ. (6.3.19) και λαμβάνοντας υπόψη ότι για την αξονική καταπόνηση ισχύει $N \gg Q_Z \varphi_Y, Q_Y \varphi_Z$ (Rothert and Gensichen 1987, Ramm and Hofmann 1995, Κουνάδης 1997) οι εξ. (6.3.20-22) γράφονται ως

$$R_X = N + Q_Z \varphi_Y + Q_Y \varphi_Z \approx N \quad (6.3.23)$$

$$R_Y = Q_Y + N \frac{dv_C}{dx} = Q_Y + N \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) \quad (6.3.24)$$

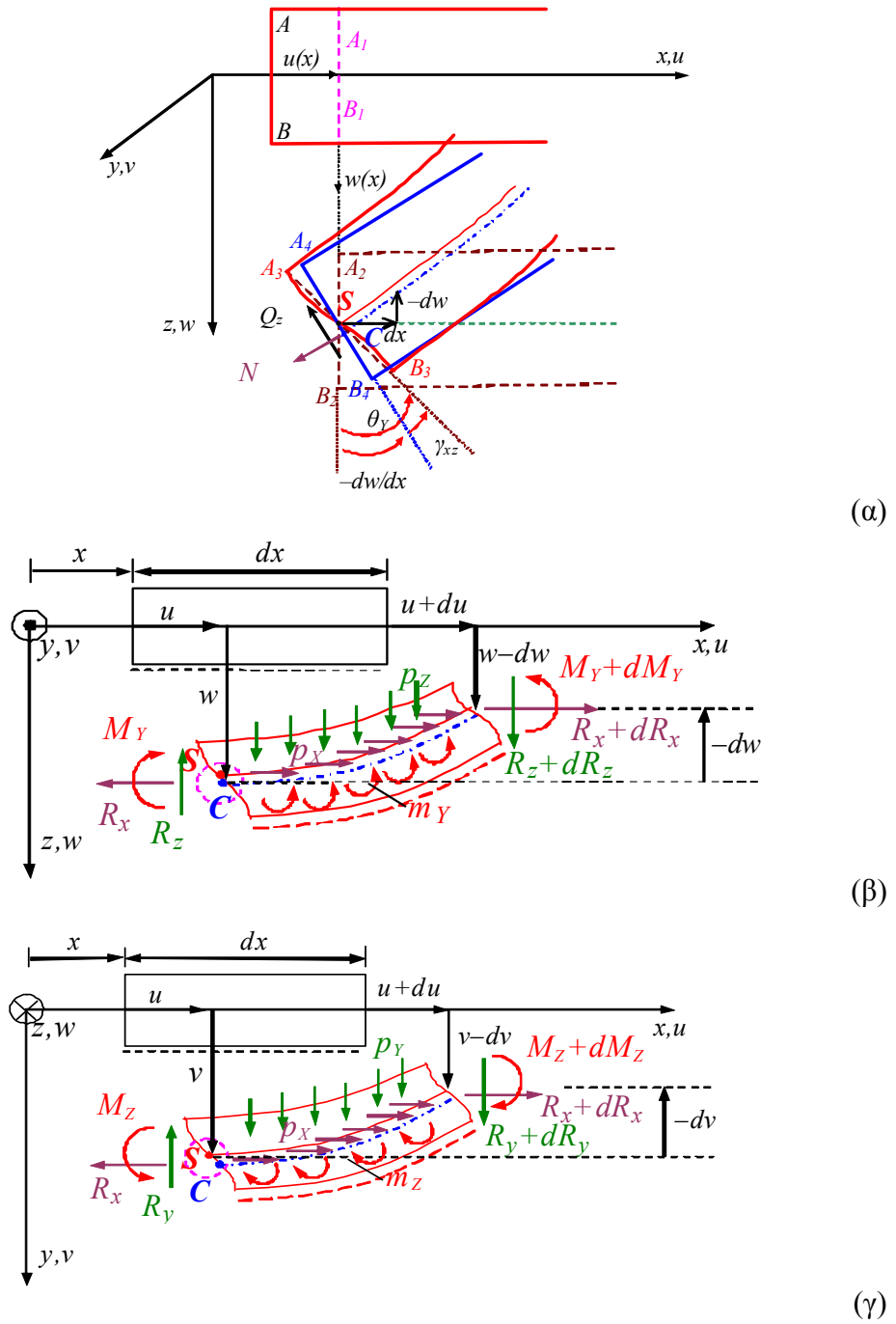
$$R_Z = Q_Z + N \frac{dw_C}{dx} = Q_Z + N \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) \quad (6.3.25)$$

Αναφέρεται ότι η επιρροή των όρων $Q_Z \varphi_Y$, $Q_Y \varphi_Z$ στον υπολογισμό της σχέσης (6.3.23) ξεετάζεται εκτενώς στην εργασία των Katsikadelis and Tsiatas (2003).

Από την ισορροπία δυνάμεων και ροπών του στοιχειώδους τμήματος δοκού του Σχ.6.6 προκύπτει ότι

$$\frac{dR_X}{dx} + p_X = 0 \quad \frac{dR_Z}{dx} + p_Z = 0 \quad \frac{dR_Y}{dx} + p_Y = 0 \quad (6.3.26\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\frac{dM_Y}{dx} - Q_Z + m_Y = 0 \quad \frac{dM_Z}{dx} + Q_Y + m_Z = 0 \quad (6.3.27\alpha, \beta)$$



Σχ. 6.6 Παραμόρφωση δοκού στο επίπεδο xz (α), εσωτερικές δυνάμεις και εξωτερική φόρτιση στην παραμορφωμένη κατάσταση στο επίπεδο xz (β) και στο επίπεδο xy (γ).

Οι εξ. (6.3.26) με τη βοήθεια των σχέσεων (6.3.23) – (6.3.25) γράφονται ως

$$\frac{dN}{dx} = -p_X \quad (6.3.28)$$

$$\frac{dQ_y}{dx} + \frac{dN}{dx} \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) + N \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + p_Y = 0 \quad (6.3.29)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} + \frac{dN}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) + N \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + p_z = 0 \quad (6.3.30)$$

Από την εξίσωση ισορροπίας (6.3.28) κατά τον διαμήκη άξονα, μετά την αντικατάσταση της αξονικής δύναμης από τη σχέση (6.3.12) προκύπτει η πρώτη διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού ως

$$EA \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{dv}{dx} \right] = -p_x \quad (6.3.31)$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας καμπτικών ροπών (6.3.27), μετά την αντικατάσταση των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών από τις σχέσεις (6.3.3), (6.3.11) προκύπτει η δεύτερη και η τρίτη διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού ως

$$EI_Y \frac{d^2 \theta_Y}{dx^2} - EI_{YZ} \frac{d^2 \theta_Z}{dx^2} - \frac{GA}{a_Z} \left(\theta_Y + \frac{dw}{dx} \right) + m_Y = 0 \quad (6.3.32)$$

$$EI_Z \frac{d^2 \theta_Z}{dx^2} - EI_{YZ} \frac{d^2 \theta_Y}{dx^2} + \frac{GA}{a_Y} \left(\frac{dv}{dx} - \theta_Z \right) + m_Z = 0 \quad (6.3.33)$$

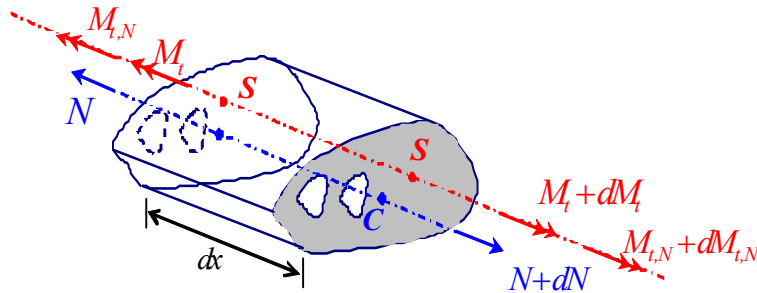
Από τις εξισώσεις ισορροπίας τεμνουσών δυνάμεων (6.3.29-30), μετά την αντικατάσταση των τεμνουσών δυνάμεων από τις σχέσεις (6.3.3) προκύπτει η τέταρτη και η πέμπτη διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού ως

$$\frac{GA}{a_Y} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\theta_Z}{dx} \right) + \frac{dN}{dx} \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) + N \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + p_Y = 0 \quad (6.3.34)$$

$$\frac{GA}{a_Z} \left(\frac{d\theta_Y}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{dN}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) + N \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + p_Z = 0 \quad (6.3.35)$$

Από την ισορροπία των ροπών κατά το διαμήκη άξονα x (Σχ.6.1, Σχ.6.7) προκύπτει ότι

$$-\left(\frac{dM_t}{dx} + \frac{dM_{t,N}}{dx} \right) = -\left(\frac{dM_t^S}{dx} + \frac{dM_t^P}{dx} + \frac{dM_{t,N}}{dx} \right) = m_x + p_Z y_C - p_Y z_C \quad (6.3.36)$$



Σχ. 6.7 Ισορροπία στρεπτικών εντατικών μεγεθών στοιχειώδους τμήματος, αξονικά καταπονούμενης δοκού.

Ο όρος $M_{t,N}$ αποτελεί την επιρροή της αξονικής δύναμης N στην ισορροπία στρεπτικών ροπών (Timoshenko and Gere 1961). Σε στρεπτικά καταπονούμενη ράβδο, οι διαμήκεις ίνες της στην παραμορφωμένη κατάσταση, δεν παραμένουν ευθύγραμμες αλλά λαμβάνουν ελικοειδές σχήμα. Λόγω όμως, της αξονικής δύναμης που ασκείται σε κάθε διατομή στην παραμορφωμένη κατάσταση, αναπτύσσεται στρεπτική ροπή η οποία υπολογίζεται ως (Κουνάδης 1997, Timoshenko and Gere 1961, Wagner 1929)

$$M_{t,N} = \int_{\Omega} \left(S_{xx}^N \sin\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right) y - S_{xx}^N \sin\left(\frac{d\bar{v}}{dx}\right) z \right) d\Omega \quad (6.3.37)$$

ή με τη βοήθεια των σχέσεων (6.2.3), (6.2.4) ως

$$M_{t,N} = \int_{\Omega} \frac{N}{A} \left[y \left(\frac{dw}{dx} + y \frac{d\theta_x}{dx} \right) - z \left(\frac{dv}{dx} - z \frac{d\theta_x}{dx} \right) \right] d\Omega \quad (6.3.38)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων $y = Y + y_C$, $z = Z + z_C$ όπου Y, Z οι αποστάσεις τυχόντος σημείου του χωρίου Ω από το κέντρο βάρους του χωρίου στην αντίστοιχη διεύθυνση, προκύπτει

$$M_{t,N} = N \left(y_C \frac{dw}{dx} - z_C \frac{dv}{dx} + \frac{I_S}{A} \frac{d\theta_x}{dx} \right) \quad (6.3.39)$$

όπου I_S η πολική ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο διάτμησης της διατομής που υπολογίζεται ως

$$I_S = (y_C^2 A + z_C^2 A + I_Y + I_Z) \quad (6.3.40)$$

Η εξ.(6.3.36) με τη βοήθεια των σχέσεων (6.3.13), (6.3.14) και (6.3.39) λαμβάνει τη μορφή

$$EC_S \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} - N \left(y_C \frac{d^2 w}{dx^2} - z_C \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{I_S}{A} \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) =$$

$$m_x + p_Z y_C - p_Y z_C - p_X \left(y_C \frac{dw}{dx} - z_C \frac{dv}{dx} + \frac{I_S}{A} \frac{d\theta_x}{dx} \right) \quad (6.3.41)$$

η οποία αποτελεί την έκτη διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού.

Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού $x = 0, l$ περιγράφονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$a_1 u(x) + a_2 N^b(x) = a_3 \quad (6.3.42)$$

$$\beta_1 v(x) + \beta_2 R_y^b(x) = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 \theta_Z(x) + \bar{\beta}_2 M_Z^b(x) = \bar{\beta}_3 \quad (6.3.43\alpha, \beta)$$

$$\gamma_1 w(x) + \gamma_2 R_z^b(x) = \gamma_3 \quad \bar{\gamma}_1 \theta_Y(x) + \bar{\gamma}_2 M_Y^b(x) = \bar{\gamma}_3 \quad (6.3.44\alpha, \beta)$$

$$\delta_1 \theta_x(x) + \delta_2 M_t^b(x) = \delta_3 \quad \bar{\delta}_1 \frac{d\theta_x(x)}{dx} + \bar{\delta}_2 M_w^b(x) = \bar{\delta}_3 \quad (6.3.45\alpha, \beta)$$

όπου R_y^b , R_z^b , θ_Z , θ_Y , M_Z^b , M_Y^b είναι οι αντιδράσεις, οι γωνίες στροφής και οι καμπτικές ροπές ως προς τους αντίστοιχους άξονες της διατομής. Τα μεγέθη M_Z^b , M_Y^b υπολογίζονται με εφαρμογή των σχέσεων (6.3.11), ενώ τα R_y^b , R_z^b με αντικατάσταση των σχέσεων (6.3.3) στις εκφράσεις (6.3.24-25) και δίδονται ως

$$R_y^b = \frac{GA}{a_Y} \left(\frac{dv}{dx} - \theta_Z \right) + N \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) \quad (6.3.46)$$

$$R_z^b = \frac{GA}{a_Z} \left(\theta_Y + \frac{dw}{dx} \right) + N \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) \quad (6.3.47)$$

Η αξονική ένταση N^b και η ροπή στρέβλωσης M_w^b στα άκρα της δοκού προσδιορίζονται από τις εξ. (6.3.12) και (6.3.16), αντίστοιχα και η αντίδραση M_t^b από την ακόλουθη σχέση

$$M_t^b = -EC_S \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} + GI_t \frac{d\theta_x}{dx} + N \left(y_C \frac{dw}{dx} - z_C \frac{dv}{dx} + \frac{I_S}{A} \frac{d\theta_x}{dx} \right) \quad (6.3.48)$$

Τέλος, οι συντελεστές $\alpha_k, \beta_k, \bar{\beta}_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k, \delta_k, \bar{\delta}_k$ ($k = 1, 2, 3$) λαμβάνουν τιμές ανάλογα με τις συνθήκες στήριξης που επικρατούν στα άκρα της δοκού, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η περίπτωση ελαστικής στήριξης.

Το πρόβλημα της μη γραμμικής ανάλυσης δοκών Timoshenko διέπεται από τις έξι διαφορικές εξισώσεις (6.3.31-35), (6.3.41) και τις συνοριακές συνθήκες (6.3.42)-(6.3.45), οι οποίες συνιστούν ένα μη γραμμικό, έντονα πεπλεγμένο σύστημα, εξισώσεων. Η εξάρτηση της αξονικής δύναμης από την εγκάρσια παραμόρφωση έχει ως αποτέλεσμα την εφαρμογή επαναληπτικής διαδικασίας, όπου ο υπολογισμός των εγκάρσιων μετακινήσεων και της στροφής περί το διαμήκη άξονα προκύπτει με χρήση της τιμής της αξονικής δύναμης που υπολογίστηκε από το προηγούμενο επαναληπτικό βήμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την ικανοποίηση του κριτηρίου σύγκλισης που αφορά την σύγκλιση της αξονικής έντασης μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων.

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας είναι δυνατό να συνδυαστούν ώστε να προκύψει σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων ως προς τα κινηματικά μεγέθη u, v, w, θ_x . Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται ως εξής: Με συνδυασμό των σχέσεων (6.3.3) και (6.3.11) προκύπτει

$$M_Y = EI_Y \left(\frac{1}{GA_Z} \frac{dQ_Z}{dx} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - EI_{YZ} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{GA_Y} \frac{dQ_Y}{dx} \right) \quad (6.3.49\alpha)$$

$$M_Z = EI_Z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{GA_Y} \frac{dQ_Y}{dx} \right) - EI_{YZ} \left(\frac{1}{GA_Z} \frac{dQ_Z}{dx} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (6.3.49\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους των τεμνουσών δυνάμεων ($dQ_y/dx, dQ_z/dx$) από τις εξ.(6.3.29), (6.3.30) στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$M_Y = -EI_Y \frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha_Z \frac{EI_Y}{GA} \left(p_Z - p_X \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) + N \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) \right) -$$

$$- EI_{YZ} \frac{d^2 v}{dx^2} - \alpha_Y \frac{EI_{YZ}}{GA} \left(p_Y - p_X \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) + N \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) \right) \quad (6.3.50)$$

$$M_Z = EI_Z \frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha_Y \frac{EI_Z}{GA} \left(p_Y - p_X \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) + N \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) \right) +$$

$$+ EI_{YZ} \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha_Z \frac{EI_{YZ}}{GA} \left(p_Z - p_X \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) + N \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) \right) \quad (6.3.51)$$

Οι Q_y, Q_z προσδιορίζονται από το συνδυασμό των εξ.(6.3.27α,β) με τις (6.3.50-51) ως

$$Q_y = -EI_Z \frac{d^3 v}{dx^3} - EI_{YZ} \frac{d^3 w}{dx^3} - m_Z -$$

$$- \alpha_Y \frac{EI_Z}{GA} \left(\frac{dp_Y}{dx} - \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 2p_X \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + N \left(\frac{d^3 v}{dx^3} - z_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) \right) -$$

$$- \alpha_Z \frac{EI_{YZ}}{GA} \left(\frac{dp_Z}{dx} - \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 2p_X \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + N \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + y_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) \right) \quad (6.3.52)$$

$$Q_z = -EI_Y \frac{d^3 w}{dx^3} - EI_{YZ} \frac{d^3 v}{dx^3} + m_Y -$$

$$- \alpha_Z \frac{EI_Y}{GA} \left(\frac{dp_Z}{dx} - \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 2p_X \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + N \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + y_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) \right) -$$

$$- \alpha_Y \frac{EI_{YZ}}{GA} \left(\frac{dp_Y}{dx} - \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 2p_X \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + N \left(\frac{d^3 v}{dx^3} - z_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) \right) \quad (6.3.53)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξ.(6.3.29), (6.3.30) και λαμβάνοντας υπόψη την εξ.(6.3.28) προκύπτουν οι καμπτοδιατμητικές διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας της δοκού ως

$$\begin{aligned}
& EI_Z \frac{d^4 v}{dx^4} + EI_{YZ} \frac{d^4 w}{dx^4} - p_Y + p_X \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - N \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + \frac{dm_Z}{dx} + \\
& + \alpha_Y \frac{EI_Z}{GA} \left[\frac{d^2 p_Y}{dx^2} - \frac{d^2 p_X}{dx^2} \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 3 \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - 3 p_X \left(\frac{d^3 v}{dx^3} - z_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) + N \left(\frac{d^4 v}{dx^4} - z_C \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} \right) \right] + \quad (6.3.54) \\
& + \alpha_Z \frac{EI_{YZ}}{GA} \left[\frac{d^2 p_Z}{dx^2} - \frac{d^2 p_X}{dx^2} \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 3 \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - 3 p_X \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + y_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) + N \left(\frac{d^4 w}{dx^4} + y_C \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EI_Y \frac{d^4 w}{dx^4} + EI_{YZ} \frac{d^4 v}{dx^4} - p_Z + p_X \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - N \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) - \frac{dm_Y}{dx} + \\
& + \alpha_Z \frac{EI_Y}{GA} \left[\frac{d^2 p_Z}{dx^2} - \frac{d^2 p_X}{dx^2} \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 3 \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - 3 p_X \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + y_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) + N \left(\frac{d^4 w}{dx^4} + y_C \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} \right) \right] + \quad (6.3.55) \\
& + \alpha_Y \frac{EI_{YZ}}{GA} \left[\frac{d^2 p_Y}{dx^2} - \frac{d^2 p_X}{dx^2} \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 3 \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - 3 p_X \left(\frac{d^3 v}{dx^3} - z_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) + N \left(\frac{d^4 v}{dx^4} - z_C \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις μαζί με τις εξισώσεις (6.3.31), (6.3.41) αποτελούν σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων ως προς ως προς μεγέθη u , v , w , θ_x . Οι εξισώσεις αυτές υπόκεινται στις συνοριακές συνθήκες (6.3.42-45) αφού αυτές αναγραφούν κατάλληλα ως κάτωθι. Οι γωνίες στροφής λόγω κάμψης (θ_Y, θ_Z) υπολογίζονται από τις εξ. (6.3.3α,β) σε συνδυασμό με τις (6.3.52), (6.3.53) ως

$$\begin{aligned}
\theta_Y = & -\frac{dw}{dx} - \alpha_Z \frac{EI_Y}{GA} \frac{d^3 w}{dx^3} - \alpha_Z \frac{EI_{YZ}}{GA} \frac{d^3 v}{dx^3} + a_Z \frac{m_Y}{GA} - \\
& - \alpha_Z^2 \frac{EI_Y}{G^2 A^2} \left[\frac{dp_Z}{dx} - \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 2 p_X \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + N \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + y_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) \right] - \\
& - \alpha_Y \alpha_Z \frac{EI_{YZ}}{G^2 A^2} \left[\frac{dp_Y}{dx} - \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 2 p_X \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + N \left(\frac{d^3 v}{dx^3} - z_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) \right] \quad (6.3.56)
\end{aligned}$$

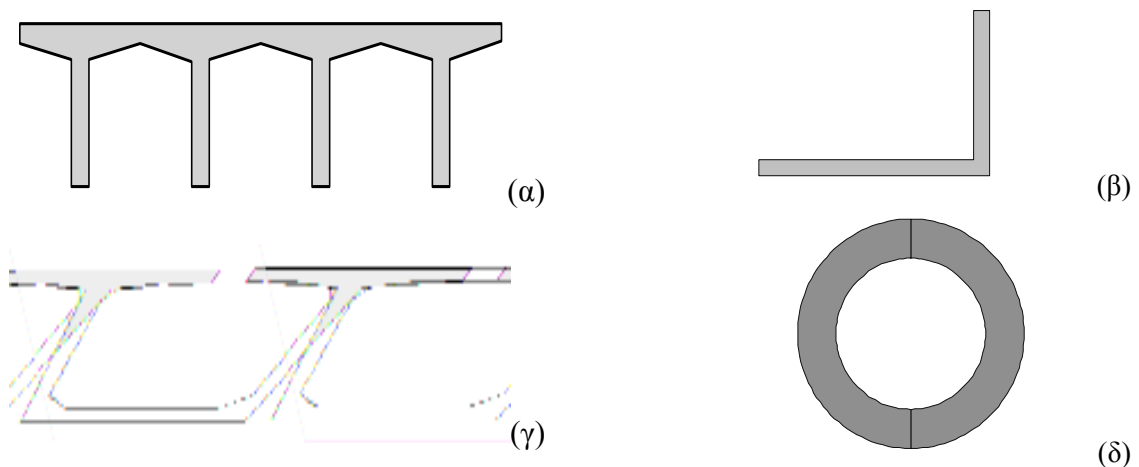
$$\begin{aligned}
\theta_Z = & \frac{dv}{dx} + \alpha_Y \frac{EI_Z}{GA} \frac{d^3 v}{dx^3} + \alpha_Y \frac{EI_{YZ}}{GA} \frac{d^3 w}{dx^3} + a_Y \frac{m_Z}{GA} + \\
& + \alpha_Y^2 \frac{EI_Z}{G^2 A^2} \left[\frac{dp_Y}{dx} - \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{dv}{dx} - z_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 2p_X \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - z_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + N \left(\frac{d^3 v}{dx^3} - z_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) \right] + \\
& + \alpha_Z \alpha_Y \frac{EI_{YZ}}{G^2 A^2} \left[\frac{dp_Z}{dx} - \frac{dp_X}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + y_C \frac{d\theta_x}{dx} \right) - 2p_X \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + y_C \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) + N \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + y_C \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.3.57}$$

Οι καμπτικές ροπές M_Z^b , M_Y^b υπολογίζονται με βάση τις σχέσεις (6.3.50-51), ενώ τέλος οι δυνάμεις R_y^b , R_z^b προσδιορίζονται αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τεμνουσών δυνάμεων (6.3.52-6.3.53) στις σχέσεις (6.3.46-47).

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΩΝ

7.1. Εισαγωγή - Προκαταρκτικές έννοιες

Σε φορείς έργων μηχανικού, συχνά υιοθετούνται σχεδιαστικές λύσεις στις οποίες κυρίαρχο χαρακτηριστικό είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους της κατασκευής. Σε τέτοιες περιπτώσεις γίνεται συνήθως χρήση ραβδωτών μελών με λεπτότοιχες διατομές ανοικτού ή κλειστού τύπου (Σχ.7.1). Οι ράβδοι ανοικτής λεπτότοιχης διατομής συνήθως διαθέτουν πολύ μικρή στρεπτική δυσκαμψία με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μεγάλων στρεπτικών στροφών (γεωμετρική μη γραμμικότητα) αρκετά πριν την πλαστικοποίηση ινών της διατομής ή την πλαστική κατάρρευση ολόκληρου του μέλους (μη γραμμικότητα υλικού). Στην περίπτωση αυτή η χρήση του γραμμικού τανυστή παραμορφώσεων (σχέσεις 5.2.8) και της παραδοχής περί αντικατάστασης της κυκλικής τροχιάς ενός υλικού σημείου με την αντίστοιχη χορδή (παραδοχές υποκεφάλαιου 4.1) είναι αμφίβολης αξιοπιστίας (γραμμική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης). Επιπλέον, όπως θα φανεί αναλυτικά στα επόμενα (υποκεφάλαιο 7.4), οι μεγάλες στρεπτικές στροφές οδηγούν επιπλέον στη σύζευξη καμπτικών και στρεπτικών μετακινήσεων ραβδών ασύμμετρης διατομής, καθιστώντας την ανάλυσή τους σημαντικά δυσχερέστερη. Συνεπώς, είναι αναγκαία η ανάπτυξη ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης ραβδών διατομής τυχόντος (ασύμμετρου) σχήματος, κατά την οποία να λαμβάνεται υπόψιν η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας.



Σχ. 7.1 Διατομές φορέων έργων μηχανικού ανοικτού (α, β) ή κλειστού (γ, δ) τύπου.

Η μη γραμμική συμπεριφορά ράβδων υπό στρέψη διερευνήθηκε για πρώτη φορά από τον Young το 1807 (βλ. (Attard 1986a)), ο οποίος μελέτησε την **ομοιόμορφη στρέψη** ράβδων κυκλικής διατομής και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το στρεπτικό φορτίο είναι ανάλογο της γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους θ'_x και ενός ανώτερου μη γραμμικού όρου $(\theta'_x)^3$, συσχέτισε δε τον ανώτερο αυτό όρο με αξονική βράχυνση της ράβδου. Στη γραμμική θεωρία στρέψης, η παραδοχή της αντικατάστασης της κυκλικής τροχιάς ενός υλικού σημείου με την αντίστοιχη χορδή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι διαμήκεις ίνες της ράβδου παραμένουν ευθύγραμμες και μετά την παραμόρφωση (εάν υποθεθεί ότι η στρέβλωση είναι ισόποση σε όλες τις διατομές). Η θεώρηση ωστόσο της ακριβούς κυκλικής τροχιάς στη μη γραμμική θεωρία έχει ως αποτέλεσμα οι διαμήκεις ίνες να αποκτούν μια ελικοειδή μορφή στην παραμορφωμένη κατάσταση. Συνεπώς η παραμορφωμένη ίνα θα έχει μεγαλύτερο μήκος από αυτό της απαραμόρφωτης κατάστασης, με αποτέλεσμα να έχει υποστεί εφελκυσμό. Ωστόσο επειδή δεν ασκείται εφελκυστική αξονική δύναμη στη ράβδο, έπεται ότι ο διαμήκης άξονας του μέλους θα πρέπει να βραχυνθεί ούτως ώστε οι εξωτερικές ίνες να βρίσκονται υπό εφελκυσμό και οι εσωτερικές υπό θλίψη, προκειμένου να αποκατασταθεί η αξονική ισορροπία. Ακολουθώντας παρόμοιες θεωρήσεις, διαπιστώνεται ότι πέρα από τη σύζευξη στρεπτικών και αξονικών κινηματικών μεγεθών, ράβδοι ασύμμετρης διατομής υπό καθαρά στρεπτικά φορτία αναπτύσσουν και εγκάρσιες (καμπτικές) μετακινήσεις προκειμένου να εξασφαλιστεί η καμπτοδιατμητική ισορροπία.

Ο Weber (1921) επέκτεινε την ανάλυση του Young σε ράβδους ορθογωνικής διατομής, ενώ ο Cullimore (1949) μελέτησε το ίδιο φαινόμενο σε ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές. Οι Ashwell (1951) και Gregory (1960a, 1960b, 1961) διαπίστωσαν τη σύζευξη καμπτικών και στρεπτικών κινηματικών μεγεθών σε ράβδους μονοσυμμετρικής και ασύμμετρης διατομής. Πιο λεπτομερής ανάλυση των ίδιων φαινομένων σε ανοικτές λεπτότοιχες διατομές παρουσιάζεται στην εργασία του Attard (1986a). Η **ανομοιόμορφη στρέψη** λαμβάνοντας υπόψιν τη γεωμετρική μη γραμμικότητα διερευνήθηκε σε ανοικτές λεπτότοιχες διατομές αρχικά από τους Tso and Ghobarah (1971), Ghobarah and Tso (1971) και στη συνέχεια από πλήθος άλλων ερευνητών, όπως οι Attard (1986b), Attard and Somervaille (1987), Ronagh et. al. (2000a, 2000b), Trahair (2005), Mohri et. al. (2008) κλπ. Επιπλέον, ομογενείς ή σύνθετες διατομές τυχόντος σχήματος μελετήθηκαν πιο πρόσφατα από τους Sapountzakis and Tsipiras (2009, 2010a).

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η ελαστική θεωρία μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων ασύμμετρης διατομής τυχόντος σχήματος. Οι βασικές παραδοχές της θεωρίας ταυτίζονται μερικώς με αυτές της γραμμικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. κεφ. 4) και συνοψίζονται ως ακολούθως:

Παραδοχές ελαστικής θεωρίας μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης

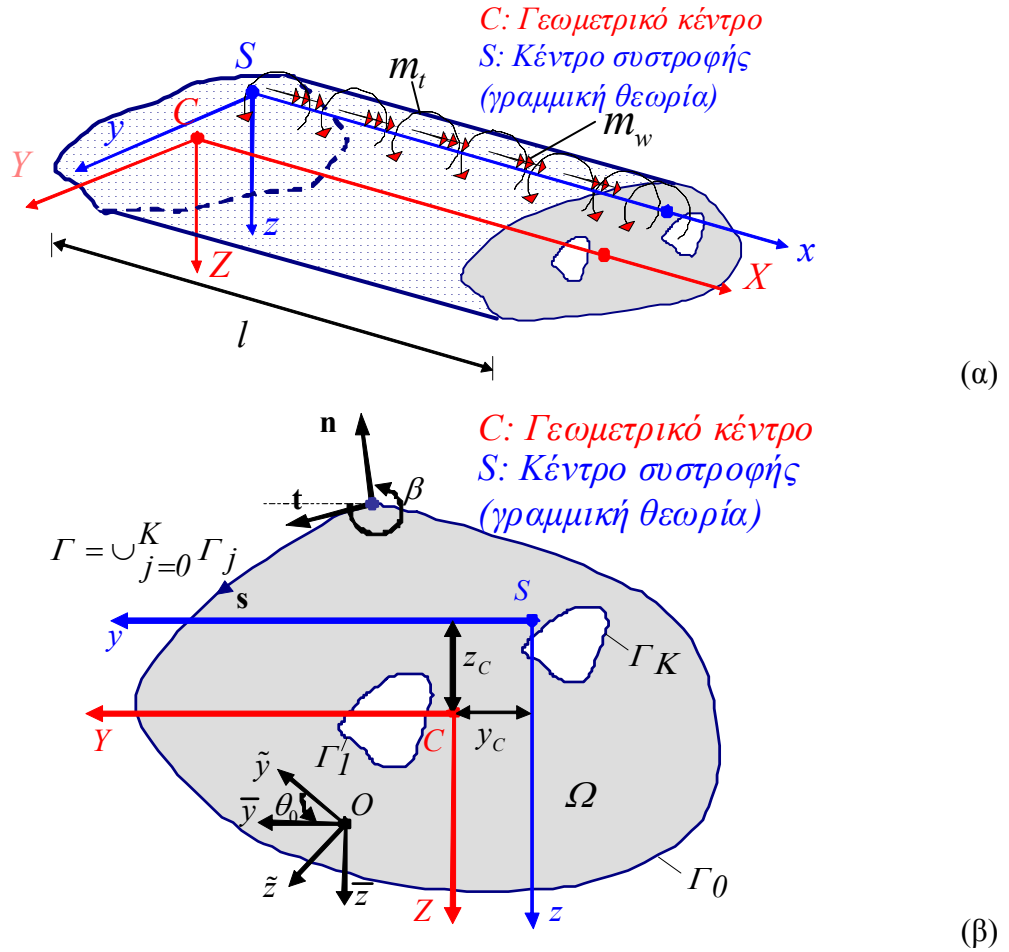
1. Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.
2. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται.
3. Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.
4. Η στρεπτική στροφή της διατομής (υπό την αίρεση της παραδοχής 9) μπορεί να είναι μεγάλη. Η εγκάρσια κίνηση κάθε υλικού σημείου της διατομής αποτελεί κυκλική τροχιά περί το κέντρο συστροφής της διατομής.
5. Οι καμπτικές στροφές της διατομής θεωρούνται ότι είναι μικρές έως μετρίως μεγάλες. Λεπτομερής περιγραφή των συνεπειών από τον χαρακτηρισμό των καμπτικών στροφών ως μικρές, μετρίως μεγάλες κλπ περιέχονται στην εργασία του Torkamani et. al. (1997).

6. *Οι εγκάρσιες μετακινήσεις της ράβδου θεωρείται ότι δεν προκαλούν διατμητικές παραμορφώσεις.*
 Η παραδοχή αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία Bernoulli-Euler καμπτόμενων ράβδων σύμφωνα με την οποία το επίπεδο της διατομής μετά την παραμόρφωση παραμένει κάθετο στον (παραμορφωμένο) άξονα των γεωμετρικών κέντρων των διατομών. Υιοθετείται προκειμένου να διατυπωθεί μια όσο το δυνατόν απλούστερη θεωρία σχετικά με τις καμπτοδιατμητικές παραμορφώσεις της ράβδου.
7. *Η πρωτογενής (κύρια) στρέβλωση της ράβδου είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους.*
 Η αναλογία μεταξύ στρέβλωσης των διατομών της ράβδου και σχετικής γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους αποδείχθηκε ότι ισχύει στην περίπτωση της γραμμικής ομοιομορφής στρέψης από τον St. Venant. Ο συγκεκριμένος τρόπος στρέβλωσης της διατομής επεκτείνεται και στην παρούσα θεωρία μη γραμμικής ανομοιομορφής στρέψης και οδηγεί σε απλοποίησή της. Η θεώρηση ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης της διατομής έχει υιοθετηθεί από διάφορους ερευνητές (ενδεικτικά αναφέρονται οι Laudiero and Savoia (1990), Rubin (2005), Murín and Kutis (2008), Sapountzakis and Mokos (2009), Sapountzakis & Tsipiras (2010b) κλπ) και οδηγεί σε θεωρία στρέψης που είναι ανάλογη με τη θεωρία Timoshenko καμπτόμενων ράβδων (βλ. κεφ. 5).
8. *Στη ράβδο δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) κάποιος άξονας περιστροφής.*
 Η ράβδος μπορεί να στραφεί ελεύθερα μετά την άσκηση σε αυτήν του στρεπτικού φορτίου. Η (κατασκευαστική) επιβολή συγκεκριμένου άξονα περιστροφής οδηγεί αναπόφευκτα στην ανάπτυξη καμπτοδιατμητικής έντασης πέρα από τη στρεπτική.
9. *Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και (υπερ)ελαστικό. Οι παραμορφώσεις της ράβδου θεωρούνται μικρές και συνεπώς ισχύει ο γενικευμένος καταστατικός νόμος του Hooke, βάσει του οποίου οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων είναι γραμμικές.*
 Η θεώρηση μικρών παραμορφώσεων είναι απαραίτητη προκειμένου να διατυπωθεί γραμμική θεωρία σε ό,τι αφορά την προσομοίωση του υλικού. Τονίζεται ωστόσο ότι η παραδοχή αυτή δεν επηρεάζει το μέγεθος των μετακινήσεων της ράβδου που θεωρούνται ότι είναι μεγάλες (γεωμετρική μη γραμμικότητα). Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στη ανάγκη συσχέτισης (μέσω του νόμου του Hooke) διαφορετικών τανυστών τάσης και παραμόρφωσης από τους αντίστοιχους της γραμμικής θεωρίας.
10. *Στη ράβδο ασκούνται αποκλειστικά στρεπτικές φορτίσεις. Η αξονική και η καμπτοδιατμητική φόρτιση θεωρούνται μηδενικές.*
 Η παραδοχή αυτή οδηγεί σε μη γενικές αξονικές και καμπτοδιατμητικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου. Οι στρεπτικές συνοριακές συνθήκες μπορούν να είναι τυχούσες, όχι όμως και οι αξονικές ή οι καμπτοδιατμητικές αφού διαφορετικά στη ράβδο θα αναπτύσσονταν αξονική ή/και καμπτοδιατμητική ένταση.
11. *Η κατανομή των τάσεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.*

7.2. Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο (παραδοχές 1, 3) τυχούσας διατομής, η οποία υποβάλλεται σε τυχούσες συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$ περί το διαμήκη άξονα της x (Σχ. 7.2α) (παραδοχή 10). Η ράβδος μπορεί να μετακινείται ελεύθερα κατά την εγκάρσια έννοια χωρίς την επιβολή συγκεκριμένου άξονα περιστροφής (παραδοχή 8). Η ανάλυση

της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια δεξιόστροφου κύριου καμπτικού συστήματος αναφοράς $Sxyz$ του οποίου ο διαμήκης άξονας διέρχεται από τα κέντρα συστρώφης (κέντρα διάτμησης) S των διατομών κατά τη γραμμική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης (Σχ.7.2β και κεφ. 4). Το αρχικό σημείο του άξονα τοποθετείται συμβατικά στο αριστερό άκρο της ράβδου με $x=0$ (Σχ.7.2α). Στο Σχ.7.2β διακρίνεται επίσης και το κύριο καμπτικό σύστημα αναφοράς $CXYZ$, του οποίου ο διαμήκης άξονας διέρχεται από τα γεωμετρικά κέντρα C των διατομών. Τονίζεται ότι το σημείο S προσδιορίζεται με βάση τα όσα έχουν παρουσιαστεί στο κεφ. 4, ωστόσο όπως θα φανεί παρακάτω (υποκεφάλαιο 7.4), στη μη γραμμική θεωρία δεν υπάρχει σταθερός (διαμήκης) άξονας συστρώφης. Έτσι, αν και στη μη γραμμική θεωρία το σημείο S δεν έχει την έννοια του σταθερού άξονα περιστροφής των διατομών, ωστόσο χρησιμοποιείται στην ανάλυση της ράβδου, μια και οι εξισώσεις του προβλήματος απλοποιούνται σημαντικά.



Σχ. 7.2 Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα στρεπτική φόρτιση (α) με διατομή τυχόντος σχήματος που καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω (β).

Με βάση τις προαναφερθείσες παραδοχές 2 και 4, οι εγκάρσιες μετατοπίσεις v και w κατά τους άξονες y και z , αντίστοιχα (Σχ.7.2β) δίδονται από τις σχέσεις (Attard 1986b)

$$v(x, y, z) = v_S(x) - z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (7.2.1)$$

$$w(x, y, z) = w_S(x) + y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (7.2.2)$$

όπου θ_x είναι η γωνία στροφής περί τον άξονα x και v_S , w_S είναι οι εγκάρσιες μετακινήσεις του άξονα που συνδέει τα κέντρα συστροφής S των διατομών. Προκειμένου να ληφθούν υπόψη τα κινηματικά φαινόμενα που έχουν αναφερθεί στο υποκεφάλαιο 7.1, η διαμήκης μετατόπιση u θεωρείται ότι δίδεται ως

$$u(x, y, z) = u_m(x) + \theta_Y(x)(z - z_C) - \theta_Z(x)(y - y_C) + \theta'_x(x)\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \quad (7.2.3)$$

όπου u_m είναι «μέση» αξονική μετατόπιση της διατομής που γενικά δεν ισούται με τη μετατόπιση του σημείου S ή του γεωμετρικού κέντρου και θα εξηγηθεί αναλυτικά στα επόμενα, θ_Y και θ_Z είναι οι καμπτικές στροφές της διατομής περί τους άξονες Y , Z , αντίστοιχα και ϕ_S^P , ϕ_S^S είναι η πρωτογενής και η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο S (βλ. κεφ. 4). Οι καμπτικοί όροι της παραπάνω εξίσωσης (δεύτερος και τρίτος όρος) μπορούν να γραφούν με τη συγκεκριμένη διατύπωση εξαιτίας της υπόθεσης ότι οι καμπτικές στροφές της ράβδου είναι μικρές (παραδοχή 5). Επιπλέον είναι φανερό ότι οι στροφές θεωρούνται ότι γίνονται περί τον άξονα των γεωμετρικών κέντρων C . Οι συναρτήσεις στρέβλωσης εισάγονται προκειμένου να προσομοιωθεί η στρέβλωση της διατομής που προκαλείται από τις κύριες και τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ο υπολογισμός τους θα παρουσιαστεί αναλυτικά στα επόμενα. Η υιοθέτηση της παραδοχής 7 οδηγεί στη συσχέτιση του προτελευταίου όρου της εξ. (7.2.3) (που περιγράφει την πρωτογενή στρέβλωση της διατομής) με τη σχετική γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους θ'_x . Παρατηρείται τέλος ότι στο πεδίο μετατοπίσεων έχουν εισαχθεί συνολικά 8 άγνωστες ποσότητες (έξι συναρτήσεις της διαμήκους συντεταγμένης x , μία των εγκάρσιων συντεταγμένων y , z και μία τρισεδιάστατη), οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις παραδοχές και τις διατιθέμενες εξισώσεις του προβλήματος.

Για τον υπολογισμό των παραμορφώσεων της ράβδου χρησιμοποιείται ο μη γραμμικός τανυστής παραμορφώσεων Green (Novozhilov 1953) που είναι κατάλληλος για τη διατύπωση προβλημάτων με γεωμετρική μη γραμμικότητα. Λαμβάνοντας υπόψη τις παραδοχές 4, 9 (θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων, μικρών παραμορφώσεων), οι μη γραμμικοί όροι της διαμήκους μετατόπισης u μπορούν να αγνοηθούν (Ramm and Hoffmann 1995, Rothert and Gensichen 1987, Brush and Almroth 1975) και οι ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις γράφονται ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (7.2.4\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (7.2.4\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (7.2.4\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (7.2.4\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (7.2.4\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (7.2.4\sigma\tau)$$

Αντικαθιστώντας τις εξ. (7.2.1-7.2.3) στις παραπάνω εκφράσεις προκύπτει

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & u'_m + \theta'_Y (z - z_C) - \theta'_Z (y - y_C) + \theta''_x \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \\ & - \theta'_x \left[y (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) + z (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) \right] \\ & + \frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.2.5\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (7.2.5\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (7.2.5\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = -\theta_Z + (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) + \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (7.2.5\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \theta_Y - (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) + \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (7.2.5\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (7.2.5\sigma\tau)$$

Από τις σχέσεις (7.2.5δ-ε) των διατμητικών παραμορφώσεων διακρίνονται οι εκφράσεις των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων που είναι πανομοιότυπες με αυτές της γραμμικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. κεφ. 4), ενώ επιπλέον παρατηρείται και η ανάπτυξη διατμητικών παραμορφώσεων που είναι σταθερές στο επίπεδο της διατομής και οι οποίες εξαρτώνται από τις εγκάρσιες μετατοπίσεις και τις καμπτικές στροφές. Με την παραδοχή 6 περί μηδενικής συνεισφοράς των εγκάρσιων μετακινήσεων στη διατμητική παραμόρφωση της ράβδου, μπορούν να υπολογιστούν οι καμπτικές στροφές θ_Y , θ_Z συναρτήσει των υπολοίπων άγνωστων κινηματικών μεγεθών. Συνεπώς, απομονώνοντας στις εξ. (7.2.5δ-ε) τη συνεισφορά των προαναφερθέντων κινηματικών μεγεθών, η παραδοχή 6 οδηγεί στις παρακάτω εκφράσεις των στροφών θ_Y , θ_Z

$$\theta_Y = v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x \quad (7.2.6\alpha)$$

$$\theta_Z = v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x \quad (7.2.6\beta)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων, οι μη μηδενικές ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις απλοποιούνται ως

$$\varepsilon_{xx} = u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta'_x \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \quad (7.2.7\alpha)$$

$$- \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{1}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right]$$

$$\gamma_{xy} = \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (7.2.7\beta)$$

$$\gamma_{xz} = \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (7.2.7\gamma)$$

όπου τα θ_Y , θ_Z λαμβάνονται μέσω των εξ. (7.2.6), ο τρισδιάστατος όρος $(1/2)(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2$ της ορθής παραμόρφωσης ε_{xx} καλείται “παραμόρφωση Wagner” (Pi and Trahair 1995), ενώ τα κ_Y , κ_Z χαρακτηρίζουν τις καμπτικές καμπυλότητες του άξονα των γεωμετρικών κέντρων και δίδονται ως

$$\kappa_Y = v''_S \sin \theta_x - w''_S \cos \theta_x \quad (7.2.8\alpha)$$

$$\kappa_Z = v''_S \cos \theta_x + w''_S \sin \theta_x \quad (7.2.8\beta)$$

Η παραδοχή 6 και ακολούθως οι σχέσεις (7.2.6) μπορούν να προκύψουν εναλλακτικά διατυπώνοντας κινηματική υπόθεση αντίστοιχη με την υπόθεση της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Euler-Bernoulli ότι οι διατομές παραμένουν κατά την παραμόρφωση κάθετες στον άξονα των γεωμετρικών κέντρων της ράβδου. Αρχικά, αγνοείται προς στιγμήν η συμβολή της στρέβλωσης στο πεδίο μετατοπίσεων (7.2.1-7.2.3). Διαπιστώνεται εύκολα ότι στην παραμορφωμένη κατάσταση οι διατομές της ράβδου παραμένουν επίπεδες, όπου τυχόν σημείο του επιπέδου της τυχούσας διατομής x θα έχει διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = (x + u, y + v, z + w) = \begin{pmatrix} x + u_m + \theta_Y (z - z_C) - \theta_Z (y - y_C), \\ y + v_S - z \sin \theta_x - y(1 - \cos \theta_x), \\ z + w_S + y \sin \theta_x - z(1 - \cos \theta_x) \end{pmatrix} \quad (7.2.9)$$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\vec{r}_{pl} = \vec{r} - \vec{r}_C(x)$ κείται πάντοτε επί του επιπέδου της διατομής x στην παραμορφωμένη διαμόρφωση, όπου $\vec{r}_C(x)$ είναι το διάνυσμα θέσης του (παραμορφωμένου) άξονα των γεωμετρικών κέντρων. Το \vec{r}_{pl} εκφράζεται ως

$$\vec{r}_{pl} = \begin{pmatrix} +\theta_Y (z - z_C) - \theta_Z (y - y_C), (y - y_C) \cos \theta_x - (z - z_C) \sin \theta_x, \\ (y - y_C) \sin \theta_x + (z - z_C) \cos \theta_x \end{pmatrix} \quad (7.2.10)$$

Για τυχόν διάνυσμα $\vec{r}_n = (n_x, n_y, n_z)$ κάθετο στο επίπεδο της διατομής, προφανώς θα πρέπει να ισχύει

$$\vec{r}_{pl} \cdot \vec{r}_n = 0 \quad (7.2.11)$$

όπου με « \cdot » συμβολίζεται στην παραπάνω σχέση το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Επειδή η εξ. (7.2.11) πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε (y, z) εντός της διατομής, αντικαθιστώντας την έκφραση του \vec{r}_{pl} από την εξ. (7.2.10), η παραπάνω σχέση δίδει

$$\vec{r}_n = (n_x, n_x(\theta_Y \sin \theta_x + \theta_Z \cos \theta_x), n_x(\theta_Z \sin \theta_x - \theta_Y \cos \theta_x)) \quad (7.2.12)$$

Επιπρόσθετα, το εφαπτομενικό διάνυσμα στον άξονα των κέντρων συστροφής S αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\frac{d\vec{r}_S}{dx}$, όπου με $\vec{r}_S = \vec{r}_S(x)$ συμβολίζεται το διάνυσμα θέσης του συγκεκριμένου άξονα. Με στοιχειώδη άλγεβρα προκύπτει ότι

$$\frac{d\vec{r}_S}{dx} = (1 + u'_m + y_C \theta'_Z - z_C \theta'_Y, v'_S, w'_S) \quad (7.2.13)$$

Υποθέτοντας ότι η διατομή της ράβδου παραμένει κάθετη στον άξονα των κέντρων συστροφής στην παραμορφωμένη κατάσταση, έπεται ότι

$$\frac{d\vec{r}_S}{dx} \parallel \vec{r}_n \Rightarrow \vec{r}_n = \lambda \frac{d\vec{r}_S}{dx} \quad \text{όπου } \lambda \in R \quad (7.2.14)$$

Από τις εξ. (7.2.10, 7.2.12, 7.2.14) προκύπτει ότι

$$\theta_Y = \frac{\lambda}{n_x} (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) \quad (7.2.15\alpha)$$

$$\theta_Z = \frac{\lambda}{n_x} (v'_S \sin \theta_x + w'_S \cos \theta_x) \quad (7.2.15\beta)$$

Θέτοντας στις παραπάνω σχέσεις λαμβάνονται επακριβώς οι κινηματικές σχέσεις (7.2.6). Συνεπώς, στην παρούσα θεωρία και αγνοώντας προς στιγμήν την επιρροή της στρέβλωσης, η υπόθεση της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Euler-Bernoulli ότι οι διατομές παραμένουν κατά την παραμόρφωση κάθετες στον άξονα των γεωμετρικών κέντρων της ράβδου μεταβάλλεται ως εξής: **«Διατομές παραμένουν κατά την παραμόρφωση κάθετες στον άξονα των κέντρων συστροφής της ράβδου».**

Πράγματι εάν προσδιορίσουμε τις εξ. (7.2.15) υποθέτοντας ότι οι διατομές παραμένουν κάθετες στον άξονα των γεωμετρικών κέντρων της ράβδου (όπως στη θεωρία Euler - Bernoulli), θα καταλήξουμε σε διαφορετικές εκφράσεις των καμπτικών στρωφών από αυτές των εξ. (7.2.6). Επιπλέον, αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφερθεί ότι και ο Attard (1986b) καταλήγει στις ίδιες ακριβώς κινηματικές εκφράσεις στην περίπτωση **ανοικτών λεπτότοιχων διατομών** και υποθέτοντας ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις στη μέση γραμμή των τοιχωμάτων που συνθέτουν τη διατομή είναι μηδενικές. Συνεπώς, μπορεί να αντιστοιχισθούν οι κινηματικές υποθέσεις που πρέπει να διατυπωθούν έτσι ώστε οι εξ. (7.2.6) να ισχύουν τόσο για ανοικτές λεπτότοιχες διατομές

όσο και για διατομές τυχόντος σχήματος. Τέλος, όπως θα αναφερθεί αναλυτικά παρακάτω (υποκεφάλαιο 7.4), οι σχέσεις (7.2.6) μπορούν εναλλακτικά να προκύψουν και με στατικές υποθέσεις.

Ο υπολογισμός των **τάσεων** που καταπονούν τη ράβδο βασίζεται στο γενικευμένο νόμο του Hooke (βλ. παραδοχή 9) ο οποίος συσχετίζει γραμμικά τον τανυστή παραμορφώσεως Green με τον ενεργειακά συζυγή ως προς αυτόν τανυστή τάσεως. Αποδεικνύεται ότι ο 2ος Piola-Kirchhoff τανυστής τάσεως είναι ενεργειακά συζυγής με τον τανυστή παραμορφώσεως Green (Novozhilov 1953, Bonet and Wood 1997). Έτσι, υποθέτοντας ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά (υπερ)ελαστικό υλικό (παραδοχή 9) και αγνοώντας τη συμβολή της δευτερογενούς στρέβλωσης στις ορθές τάσεις (βλ. κεφ. 4), οι συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσεως Piola-Kirchhoff με τη βοήθεια των σχέσεων (7.2.7) δίδονται ως

$$S_{xx} = E^* \left\{ u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta_x'' \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + y^2) (\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (7.2.16\alpha)$$

$$S_{yy} = E^{**} \left\{ u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta_x'' \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + y^2) (\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (7.2.16\beta)$$

$$S_{zz} = E^{**} \left\{ u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta_x'' \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + y^2) (\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (7.2.16\gamma)$$

$$S_{xy} = G \left[\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right] \quad (7.2.16\delta)$$

$$S_{xz} = G \left[\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right] \quad (7.2.16\epsilon)$$

$$S_{yz} = 0 \quad (7.2.16\sigma\tau)$$

όπου $E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $E^{**} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ με E, G, ν το μέτρο ελαστικότητας,

το μέτρο διάτμησης και το λόγο Poisson, αντίστοιχα του υλικού. Οι σχέσεις (7.2.16α,δ,ε) που δίδουν την ορθή S_{xx} και τις διατμητικές S_{xy}, S_{xz} τάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στις εξισώσεις ισορροπίας για την επίλυση του προβλήματος, ενώ οι σχέσεις (7.2.16β,γ) που δίδουν τις ορθές τάσεις S_{yy}, S_{zz} που δεν παράγουν έργο (αφού οι αντίστοιχες παραμορφώσεις $\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ σύμφωνα με τις σχέσεις (7.2.5β,γ) είναι μηδενικές) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον προσδιορισμό των άγνωστων κινηματικών μεγεθών για τον υπολογισμό των τάσεων αυτών. Ωστόσο, στην παρούσα θεωρία γίνεται η παραδοχή ότι $S_{yy} = S_{zz} \approx 0$, τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή αφενός δεν επηρεάζει την ισορροπία της ράβδου και αφετέρου ισχύει επακριβώς στην περίπτωση μηδενικού λόγου Poisson $\nu = 0$. Επιπλέον, το E^*

αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας E , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που $\nu = 0$. Η παραδοχή αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία λεπτότοιχων διατομών του Vlasov (1963), ο οποίος θεωρεί ότι τα τοιχώματα της διατομής βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσεως και αποδεικνύει ότι $E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \Rightarrow E^* \approx E$ για τις συνήθεις τιμές λόγου Poisson που λαμβάνουν τα δομικά υλικά. Εξάλλου οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη διατύπωση θεωριών δοκού (βλ (Armenakas 2006)). Με βάση τα προηγούμενα, οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή τάσεως διαμορφώνονται τελικά ως

$$S_{xx} = E^* \left\{ u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta_x'' \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (7.2.17\alpha)$$

$$S_{xy} = G \left[\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right] \quad (7.2.17\beta)$$

$$S_{xz} = G \left[\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right] \quad (7.2.17\gamma)$$

7.3. Πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης

Μετά τον υπολογισμό των μετατοπίσεων, παραμορφώσεων και τάσεων της ράβδου μπορούν να προσδιορισθούν τα άγνωστα κινηματικά μεγέθη που έχουν εισαχθεί στο πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου. Στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων (βλ. κεφ. 4), οι συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_S^P , ϕ_S^S προσδιορίστηκαν με χρήση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά το διαμήκη άξονα της ράβδου x . Στη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων, ανάλογη μέθοδος είναι εξαιρετικά δυσχερής εξαιτίας των πολύ περισσότερων όρων που προκύπτουν. Η προσπάθεια να ικανοποιηθεί επακριβώς σε επίπεδο υλικού σημείου η διαφορική εξίσωση ισορροπίας οδηγεί σε περίπλοκες εξισώσεις, οι οποίες δεν έχουν πρακτική αξία για την ανάπτυξη μιας σχετικά απλής θεωρίας δοκού που να αποτελεί επέκταση της αντίστοιχης θεωρίας μικρών μετατοπίσεων. Έτσι, οι συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_S^P , ϕ_S^S θα προσδιορισθούν με χρήση του λογισμού των μεταβολών, που έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς από το Washizu (1975) για την επίλυση του προβλήματος ομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων, όταν στη ράβδο ασκούνται αρχικές αξονικές τάσεις.

Η αρχή δυνατών έργων σε μια ολική διατύπωση Lagrange, αγνοώντας μαζικές δυνάμεις, μπορεί να γραφεί ως (Bathe 1996)

$$\int_V (S_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + S_{xy} \delta \gamma_{xy} + S_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV = \int_F (t_x \delta u + t_y \delta v + t_z \delta w) dF \quad (7.3.1)$$

όπου στην παραπάνω σχέση παραλήφθηκαν οι όροι τάσεων που δεν παράγουν έργο, με $\delta(\bullet)$ συμβολίζονται δυνατές ποσότητες, V είναι ο όγκος της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) κατάσταση, F είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) κατάσταση συμπεριλαμβανομένων και των δύο ακραίων διατομών της

και t_x , t_y , t_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας (αρχική κατάσταση). Ο υπολογισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης βασίζεται στη θεώρηση των δυνατών μεταβολών των ϕ_S^P , ϕ_S^S στη σχέση (7.3.1). Αρχικά λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι δυνατοί όροι της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P . Έτσι οι σχετικοί όροι του δυνατού εσωτερικού έργου (αριστερά μέλος της σχέσης (7.3.1)) δίδονται ως

$$I_1^P = \int_V S_{xx} \theta'_x \delta \phi_S^P dV + \int_V \theta'_x \left(S_{xy} \frac{\partial \delta \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \delta \phi_S^P}{\partial z} \right) dV \quad (7.3.2)$$

Ακολουθώντας την τεχνική του Washizu (1975), ολοκλήρωση κατά παράγοντες ως προς x του πρώτου όρου της παραπάνω εξίσωσης δίδει

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^l \int_{\Omega} (\theta'_x)' (S_{xx} \delta \phi_S^P) d\Omega dx &= - \int_{x=0}^l \int_{\Omega} \theta'_x \frac{\partial}{\partial x} (S_{xx} \delta \phi_S^P) d\Omega dx \\ &+ \left[\int_{\Omega} (\theta'_x) (S_{xx} \delta \phi_S^P) d\Omega \right]_{x=0}^l \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Ολοκληρώνοντας κατάλληλα κατά παράγοντες ως προς y , z τον δεύτερο όρο της εξ. (7.3.2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^l \int_{\Omega} \theta'_x \left(S_{xy} \frac{\partial \delta \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \delta \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega dx &= \int_{x=0}^l \left[-\theta'_x \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \delta \phi_S^P d\Omega + \right. \\ &\left. + \theta'_x \int_{\Gamma} (S_{xy} n_y + S_{xz} n_z) \delta \phi_S^P ds \right] dx \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

όπου $n_y = \cos \beta$, $n_z = \sin \beta$ (με $\beta = \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{n}$) είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος στο σύνορο Γ της διατομής (βλ. Σχ.7.2β). Αντικαθιστώντας τις τελευταίες δύο εξισώσεις στην εξ. (7.3.2) έπεται ότι

$$\begin{aligned} I_1^P &= \int_{x=0}^l \left[-\theta'_x \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \delta \phi_S^P d\Omega + \theta'_x \int_{\Gamma} (S_{xy} n_y + S_{xz} n_z) \delta \phi_S^P ds \right] dx \\ &+ \left[\theta'_x \int_{\Omega} S_{xx} \delta \phi_S^P d\Omega \right]_{x=0}^l \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Ομοίως ο σχετικός όρος I_2^P της δυνατής συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P του δυνατού εξωτερικού έργου (δεξιά μέλος της σχέσης (7.3.1)) δίδεται ως

$$I_2^P = \int_F t_x \theta'_x \delta \phi_S^P dF = \int_{\Omega_0} t_x \theta'_x \delta \phi_S^P d\Omega + \int_{\Omega_l} t_x \theta'_x \delta \phi_S^P d\Omega + \int_{F_{lat}} t_x \theta'_x \delta \phi_S^P dF \quad (7.3.6)$$

όπου Ω_0, Ω_l είναι οι ακραίες διατομές της ράβδου (για $x=0, l$ αντίστοιχα) και F_{lat} είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου ($F = F_{lat} \cup \Omega_0 \cup \Omega_l$). Επειδή η ϕ_S^P είναι άγνωστη συνάρτηση, η δυνατή μεταβολή της δεν μπορεί να είναι μηδενική, συνεπώς, συσχετίζοντας τις εξ. (7.3.5-6) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{στο } \Omega, \forall x \in (0, l) \quad (7.3.7\alpha)$$

καθώς και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη στο σύνορο Γ του χωρίου Ω

$$S_{xy}n_y + S_{xz}n_z = t_x \quad \text{στο } \Gamma, \forall x \in (0, l) \quad (7.3.7\beta)$$

Συμπεραίνεται ότι ο προσδιορισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P θα πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια των εξισώσεων (7.3.7), παρατηρώντας ότι η ϕ_S^P που θα προκύψει ισχύει στο διάστημα $x \in (0, l)$, αλλά όχι στα δύο άκρα της ράβδου $x=0, l$. Από τους όρους των εξ. (7.3.5-6) που σχετίζονται με τα δύο άκρα της ράβδου προκύπτει ένας όρος - «υπόλοιπο»

$$I_{res}^P = \left[\theta'_x \int_{\Omega} (t_x - S_{xx}) \delta \phi_S^P d\Omega \right]_{x=0}^l \quad (7.3.8)$$

ο οποίος, στα πλαίσια θεωρίας δοκού, δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P . Έτσι θα θεωρείται ότι η ϕ_S^P που προκύπτει από τις εξ. (7.3.7) θα ισχύει και στα άκρα της ράβδου, ενώ η ασυνέπεια λόγω αυτής της παραδοχής είναι «τοπική» και δεν επηρεάζει τη συνολική συμπεριφορά της ράβδου. Εξάλλου, για συγκεκριμένες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών, όπως π.χ. πλήρης παρεμπόδιση της στρέβλωσης, θα ισχύει $\theta'_x = 0$ με αποτέλεσμα ο όρος I_{res}^P να μηδενίζεται.

Εφαρμόζοντας παρόμοια διαδικασία και για τους δυνατούς όρους της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S , οι εξ. (7.3.5-6) αναδιατυπώνονται ως

$$I_1^S = \int_{x=0}^l \left[- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \delta \phi_S^S d\Omega + \int_{\Gamma} (S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) \delta \phi_S^S ds \right] dx + \left[\int_{\Omega} S_{xx} \delta \phi_S^S d\Omega \right]_{x=0}^l \quad (7.3.9\alpha)$$

$$I_2^S = \int_F t_x \delta \phi_S^S dF = \int_{\Omega_0} t_x \delta \phi_S^S d\Omega + \int_{\Omega_l} t_x \delta \phi_S^S d\Omega + \int_{F_{lat}} t_x \delta \phi_S^S dF \quad (7.3.9\beta)$$

Επειδή η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S είναι επίσης άγνωστη συνάρτηση, η δυνατή μεταβολή της δεν μπορεί να είναι μηδενική, συνεπώς από τις εξ. (7.3.9) προκύπτει ότι η ϕ_S^S θα προκύψει από τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις που θα προκύψει και η ϕ_S^P (βλ. εξ. (7.3.7)). Όπως και στην προηγούμενη ανάλυση της ϕ_S^P , έτσι και στην περίπτωση της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S θα προκύψει κάποιος όρος-«υπόλοιπο» I_{res}^S στα δύο άκρα της ράβδου ο οποίος επίσης αγνοείται.

Συμπερασματικά, οι δύο συναρτήσεις στρέβλωσης που εισήχθησαν στο πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου, θα προκύψουν από την επίλυση μίας διαφορικής εξίσωσης (εξ. (7.3.7α)) σε επίπεδο υλικού σημείου υποκείμενη στην αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (εξ. (7.3.7β)). Παρατηρείται ότι και στη γραμμική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης (κεφ. 4) ο προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης πραγματοποιείται μέσω των παρόμοιων εξισώσεων

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, l) \quad (7.3.10\alpha)$$

$$\tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = t_x \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, l) \quad (7.3.10\beta)$$

που αποτελούν την έκφραση της 1ης διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου και της αντίστοιχης συνοριακής συνθήκης για το διάστημα $x \in (0, l)$. Προκειμένου να απλοποιηθεί ο προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης αλλά και να διατυπωθεί θεωρία παρόμοια με αυτή των μικρών μετατοπίσεων, υιοθετείται και για τις εξ. (7.3.7) η τεχνική της διάσπασης των διατμητικών τάσεων σε πρωτογενείς (εξαρτώνται από τη ϕ_S^P) και δευτερογενείς (εξαρτώνται από τη ϕ_S^S και εξισορροπούν τις ορθές τάσεις S_{xx}) (βλ. κεφ. 4). Σε αντίθεση με τη θεωρία μικρών μετατοπίσεων, η εξίσωση προσδιορισμού της ϕ_S^S είναι περίπλοκη εξαιτίας των πολλών όρων της έκφρασης (7.2.17α) της S_{xx} . Συνεπώς, για να προκύψουν απλούστερες εξισώσεις, αγνοούνται όλοι οι όροι που εξαρτώνται από την αξονική και τις εγκάρσιες μετακινήσεις u_m , v_S , w_S και μετά από κάποια άλγεβρα διατυπώνονται τα παρακάτω προβλήματα συνοριακών τιμών των συναρτήσεων στρέβλωσης

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, l) \quad (7.3.11\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, l) \quad (7.3.11\beta)$$

$$\nabla^2 \phi_S^S = -\frac{E}{G} \theta_x''' \phi_S^P - \frac{E}{G} (y^2 + z^2) \theta_x' \theta_x'' \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, l) \quad (7.3.12\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = \frac{t_x}{G} \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, l) \quad (7.3.12\beta)$$

Από τις εξ. (7.3.11-12) παρατηρείται ότι η μόνη διαφορά με τη γραμμική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων βρίσκεται στην προσθήκη ενός επιπλέον όρου στο δεξιά μέλος της εξίσωσης προσδιορισμού της ϕ_S^S (σχέση (7.3.12α)). Οι εκφράσεις των

πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων είναι παρόμοιες με αυτές της γραμμικής θεωρίας και δίδονται ως (βλ. εξ. (7.2.17))

$$S_{xy}^P = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) \quad S_{xz}^P = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \quad (7.3.13\alpha, \beta)$$

$$S_{xy}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad S_{xz}^P = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (7.3.14\alpha, \beta)$$

Τα προβλήματα συνοριακών τιμών (7.3.11-12) είναι τύπου Neumann και επομένως οι συναρτήσεις στρέβλωσης θα προκύψουν συναρτήσει αυθαίρετων σταθερών. Όπως έχει προαναφερθεί στο υποκεφάλαιο 7.2, προκειμένου να προσδιοριστεί μοναδική λύση για τη ϕ_S^P χρησιμοποιούνται οι συνθήκες ορθογωνικότητας της γραμμικής θεωρίας (βλ. κεφ. 4)

$$\int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega = 0 \quad \int_{\Omega} \phi_S^P y d\Omega = 0 \quad \int_{\Omega} \phi_S^P z d\Omega = 0 \quad (7.3.15\alpha, \beta, \gamma)$$

Οι συγκεκριμένες εκφράσεις προσδιορίζουν τη θέση του σημείου S ως προς το οποίο αναλύεται η ράβδος. Τονίζεται ότι οποιεσδήποτε άλλες συνθήκες θα μπορούσαν να εφαρμοσθούν, ωστόσο οι σχέσεις (7.3.15) (και η επακόλουθη χρήση του συστήματος αναφοράς $Sxyz$) απλοποιούν σημαντικά τις εξισώσεις ισορροπίας του προβλήματος. Για να προσδιορισθεί μοναδική λύση για τη ϕ_S^S χρησιμοποιείται επίσης η απαίτηση της γραμμικής θεωρίας

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (7.3.16)$$

τονίζοντας και πάλι ότι οποιαδήποτε άλλη συνθήκη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί. Στο σημείο αυτό μπορεί πλέον να δοθεί η φυσική σημασία της αξονικής μετακίνησης u_m . Έτσι, ολοκληρώνοντας την έκφραση (7.2.3) της διαμήκους μετατόπισης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u d\Omega = & u_m(x) A + \theta_Y(x) \left(\int_{\Omega} z d\Omega - z_C A \right) - \theta_Z(x) \left(\int_{\Omega} y d\Omega - y_C A \right) + \\ & + \theta'_x \int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega + \int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

όπου $A = \int_{\Omega} d\Omega$ είναι το εμβαδόν της διατομής. Από τις ιδιότητες του γεωμετρικού κέντρου της διατομής και τις εξ. (7.3.15α), (7.3.16) έπεται ότι

$$u_m(x) = \int_{\Omega} u d\Omega / A \quad (7.3.18)$$

Είναι εμφανές ότι η u_m είναι μια «μέση» αξονική μετατόπιση των διατομών της ράβδου. Εύκολα διαπιστώνεται ότι δεν ταυτίζεται με την αξονική μετατόπιση ούτε του γεωμετρικού κέντρου ούτε του σημείου S της διατομής.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με τη γραμμική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, όπου οι εκφράσεις εντατικών μεγεθών χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της θέσης του άξονα συστροφής της ράβδου, στη μη γραμμική θεωρία οι εκφράσεις αυτές αξιοποιούνται για τον προσδιορισμό των κινηματικών μεγεθών u_m , v_S , w_S .

7.4. Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

Οι εναπομείναντες τέσσερις κινηματικοί άγνωστοι του προβλήματος (u_m , v_S , w_S , θ_x) θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις ισορροπίας. Οι εξισώσεις ισορροπίας θα διατυπωθούν (όπως πραγματοποιήθηκε και στο υποκεφάλαιο 7.3) με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Προκειμένου να διευκολυνθεί η ανάλυση του προβλήματος ορίζονται τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$N = \int_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad (7.4.1\alpha)$$

$$M_Y = \int_{\Omega} S_{xx} (z - z_C) d\Omega \quad M_Z = - \int_{\Omega} S_{xx} (y - y_C) d\Omega \quad (7.4.1\beta, \gamma)$$

$$Q_y = \int_{\Omega} S_{xy} d\Omega \quad Q_z = \int_{\Omega} S_{xz} d\Omega \quad (7.4.1\delta, \epsilon)$$

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[S_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + S_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad M_w = - \int_{\Omega} S_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (7.4.1\sigma\tau, \zeta)$$

τα οποία αντιστοιχούν σε αξονική δύναμη, καμπτικές ροπές, τέμνουσες δυνάμεις, πρωτογενής στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης αντίστοιχα (βλ. κεφ. 4). Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι ο ορισμός των παραπάνω μεγεθών βασίζεται στο 2ο τανυστή τάσεων Piola-Kirchhoff, συνεπώς λαμβάνονται υπόψιν οι στροφές που έχουν υποστεί τα (απειροστά) στοιχεία που απαρτίζουν τις διατομές της ράβδου κατά την παραμόρφωση (Bathe 1996). Εξαιτίας της στρέβλωσης που παρουσιάζουν οι διατομές της ράβδου, συμπεραίνεται ότι οι συνιστώσες του συγκεκριμένου τανυστή τάσεως που καταπονούν τα απειροστά στοιχεία δεν έχουν κοινή διεύθυνση. Συνεπώς τα εντατικά μεγέθη που ορίζονται μέσω των συνιστωσών αυτών δεν αντιστοιχούν σε επίπεδες διατομές στην παραμορφωμένη διαμόρφωση. Αγνοώντας προς στιγμήν τη στρέβλωση των διατομών, οι εκφράσεις (7.2.6) που έχουν υιοθετηθεί για τις καμπτικές στροφές θ_Y , θ_Z μπορούν να προκύψουν με τη βοήθεια των εκφράσεων των τέμνουσών δυνάμεων (7.4.1δ-ε). Με άλλα λόγια θα χρησιμοποιηθούν στατικές υποθέσεις για την εξαγωγή των σχέσεων (7.2.6). Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των διατμητικών παραμορφώσεων (7.2.5δ-ε) και τις αντίστοιχες καταστατικές σχέσεις (7.2.16), οι τέμνουσες δυνάμεις γράφονται ως

$$Q_2 = G \left[-\theta_Z + (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) \right] \quad (7.4.2\alpha)$$

$$Q_3 = G \left[\theta_Y - (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) \right] \quad (7.4.2\beta)$$

Θεωρώντας ότι οι τέμνουσες δυνάμεις μηδενίζονται, λαμβάνονται οι καμπτικές στροφές θ_Y , θ_Z όπως ακριβώς αυτές δίδονται στις σχέσεις (7.2.6).

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ. (7.2.17)) στις σχέσεις (7.4.1α,β,γ,στ,ζ), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = EA \left[u'_m + \frac{I}{2} \left((v'_S)^2 + (w'_S)^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right) - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) \right] \quad (7.4.3\alpha)$$

$$M_Y = EI_{YY} \left[\kappa_Y + \beta_2 (\theta'_x)^2 \right] \quad M_Z = EI_{ZZ} \left[\kappa_Z - \beta_1 (\theta'_x)^2 \right] \quad (7.4.3\beta,\gamma)$$

$$M_t^P = GI_t \theta'_x \quad M_w = -EC_S \left[\theta''_x + \frac{U_w}{2C_S} (\theta'_x)^2 \right] \quad (7.4.3\delta,\epsilon)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές I_P (πολική ροπή αδράνειας ως προς το σημείο S), I_{YY} , I_{ZZ} (ρομές αδράνειας ως προς το γεωμετρικό κέντρο C), I_t (στρεπτική σταθερά), C_S (σταθερά στρέβλωσης) και β_1 , β_2 , U_w (συντελεστές Wagner (Mohri et. al. 2001)) δίδονται ως

$$I_P = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad I_{YY} = \int_{\Omega} (z - z_C)^2 d\Omega \quad I_{ZZ} = \int_{\Omega} (y - y_C)^2 d\Omega \quad (7.4.4\alpha,\beta,\gamma)$$

$$I_t = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (7.4.4\delta,\epsilon)$$

$$\beta_1 = \frac{I}{2I_{ZZ}} \int_{\Omega} (y^2 + z^2) (y - y_C) d\Omega \quad \beta_2 = \frac{I}{2I_{YY}} \int_{\Omega} (y^2 + z^2) (z - z_C) d\Omega \quad (7.4.4\sigma\tau,\zeta)$$

$$U_w = \int_{\Omega} \phi_S^P (y^2 + z^2) d\Omega \quad (7.4.4\eta)$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις παρατηρείται ότι οι συντελεστές Wagner σχετίζονται με την ανάπτυξη ορθών τάσεων εξαιτίας των μεγάλων στρεπτικών στροφών και ποσοτικοποιούν τη μεταβολή των καμπτικών καμπυλοτήτων (συντελεστές β_1 , β_2) και της στρεπτικής δυσκαμψίας (συντελεστής U_w) σε ράβδους που υποβάλλονται σε στρεπτική φόρτιση (Attard 1986a, Attard 1986b). Ένας από τους δύο συντελεστές β_1 , β_2 θα είναι μηδενικός στην περίπτωση που η διατομή διαθέτει έναν άξονα συμμετρίας, ενώ και οι δύο συντελεστές μηδενίζονται όταν η διατομή είναι διπλά συμμετρική (Attard 1986a, Attard 1986b). Ο συντελεστής U_w είναι μη μηδενικός μόνο στην περίπτωση που η διατομή δεν διαθέτει άξονα συμμετρίας.

Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων (εξ. (7.3.1)) τις δυνατές μεταβολές της στρεπτικής στροφής θ_x (και των παραγώγων της), προσδιορίζεται διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange (και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες) που περιγράφει την ισορροπία στρεπτικών δράσεων. Αγνοώντας πλήρως τη συνεισφορά της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης στον υπολογισμό των κινηματικών αγνώστων μίας μεταβλητής (η ϕ_S^S υπολογίζεται κανονικά μέσω των εξ. (7.3.12), ωστόσο αγνοείται η επιρροή της στα u_m , v_S , w_S , θ_x - βλ. και κεφ. 4), η προαναφερθείσα εξίσωση ισορροπίας και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου $x=0,l$ εκφράζονται ως

$$-Ny_C\theta_Z\theta'_x + Nz_C\theta_Y\theta'_x - M_Z\kappa_Y + M_Y\kappa_Z - \frac{d^2 M_w}{dx^2} - \quad (7.4.5)$$

$$- \frac{d}{dx} \left[M_t^P + \frac{I}{2} EI_n (\theta'_x)^3 + \Psi \theta'_x - Ny_C \theta_Y - Nz_C \theta_Z \right] = m_t(x) + \frac{d}{dx} [m_w(x)]$$

$$\left[(M_w)' + M_t^P + \frac{I}{2} EI_n (\theta'_x)^3 + \Psi \theta'_x - Ny_C \theta_Y - Nz_C \theta_Z - m_w - \bar{M}_t \right] \delta \theta_x = 0 \quad (7.4.6a)$$

$$(-M_w + \bar{M}_w) \delta \theta'_x = 0 \quad (7.4.6b)$$

όπου η γεωμετρική σταθερά I_n μπορεί να χαρακτηριστεί ως «στρεπτική σταθερά ανώτερης τάξης» (Attard, 1986b) και δίδεται μαζί με τη μεταβλητή $\Psi = \Psi(x)$ ως

$$I_n = \int_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega - \frac{I_P^2}{A} - 4\beta_1^2 I_{ZZ} - 4\beta_2^2 I_{YY} - \frac{U_w^2}{C_S} \quad (7.4.7a)$$

$$\Psi = N \frac{I_P}{A} - 2M_Z \beta_1 + 2M_Y \beta_2 - M_w \frac{U_w}{C_S} \quad (7.4.7b)$$

Η έκφραση (7.4.5) αποτελεί γενίκευση αντίστοιχων εξισώσεων ισορροπίας που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία για την περιγραφή του προβλήματος του πλευρικού (στρεπτοκαμπτικού λυγισμού) (Timoshenko and Gere 1961, Vlasov 1963). Επιπλέον, στην ίδια έκφραση υπεισέρχονται τα μεγέθη m_t , m_w (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (βλ Σχ.7.2α) και ορίζονται κατά μήκος της ράβδου (μέσω της Αρχής Δυνατών Έργων) συναρτήσει του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωσης επιφάνειας ως

$$m_t(x) = \int_{\Gamma} t_y (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) ds \quad (7.4.8a)$$

$$m_w(x) = - \int_{\Gamma} t_x \phi_S^P ds \quad (7.4.8b)$$

Στις συνοριακές συνθήκες (7.4.6) υπεισέρχονται τα μεγέθη \bar{M}_t , \bar{M}_w που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) και ορίζονται στις διατομές των άκρων της ράβδου ως

$$(\bar{M}_t)_{x=0} = - \int_{\Omega} t_y (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) d\Omega \quad (7.4.9a)$$

$$(\bar{M}_t)_{x=l} = \int_{\Omega} t_y (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) d\Omega \quad (7.4.9b)$$

$$(\bar{M}_w)_{x=0} = \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (\bar{M}_w)_{x=l} = - \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (7.4.9\gamma, \delta)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις των εξωτερικών δράσεων διακρίνεται η επιρροή της στρεπτικής στροφής θ_x , η οποία τροποποιεί ουσιαστικά τη μη γραμμική από τη γραμμική ανάλυση. Οι εκφράσεις (7.4.8α, 7.4.9α,β) **παύουν να είναι γραμμικές** και ουσιαστικά περιγράφουν τη μεταβολή των μοχλοβραχιόνων των επιβαλλόμενων επιφανειακών

δράσεων t_y, t_z που προκαλείται εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Επιπλέον, από τις εξ. (7.4.5-6) συμπεραίνεται ότι στρεπτικά, αξονικά και καμπτοδιατμητικά εντατικά μεγέθη είναι συζευγμένα και δεν μπορούν να μελετηθούν απομονωμένα όπως πραγματοποιείται στη γραμμική ανάλυση.

Με βάση την παραδοχή 10, είναι λογικό να υποτεθεί ότι τα εντατικά μεγέθη που αντιστοιχούν στην αξονική δύναμη και τις καμπτικές ροπές μηδενίζονται, δηλαδή ισχύει

$$N = 0 \quad M_Y = 0 \quad M_Z = 0 \quad (7.4.10\alpha, \beta, \gamma)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις ουσιαστικά αντιστοιχούν σε εξισώσεις ισορροπίας, οι οποίες μαζί με την εξίσωση ισορροπίας στρεπτικών δράσεων (7.4.5) μορφώνουν σύστημα εξισώσεων που μπορεί να επιλυθεί ώστε να προσδιοριστούν τα εναπομείναντα άγνωστα κινηματικά μεγέθη u_m, v_S, w_S, θ_x . Εναλλακτικά, στην Αρχή Δυνατών Έργων μπορούν να θεωρηθούν οι δυνατές μεταβολές των μεγεθών u_m, v_S, w_S (και των παραγώγων τους) και να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω για τις δυνατές μεταβολές της στρεπτικής στροφής θ_x . Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο των δυνατών όρων θα έχει ληφθεί υπόψη στην ανάλυση της ράβδου και τελικά θα διατυπωθούν τρεις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες) που περιγράφουν την ισορροπία αξονικών και καμπτοδιατμητικών δράσεων. Το σύστημα των τεσσάρων συνολικά διαφορικών εξισώσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων στρεπτοκαμπτικού ή/και πλευρικού (στρεπτοκαμπτικού) λυγισμού ράβδων. Οι διαφορικές εξισώσεις αξονικών και καμπτοδιατμητικών δράσεων περιγράφονται αναλυτικά στην εργασία του Attard (1986b) και παραλείπονται εδώ αφού εκφεύγουν από τον σκοπό του παρόντος κεφαλαίου. Τονίζεται ωστόσο ότι με συνδυασμένη χρήση των εξισώσεων αυτών και της παραδοχής 10 περί μηδενικών αξονικών και καμπτοδιατμητικών δράσεων, αποδεικνύεται η ισχύς των εξισώσεων (7.4.10) περί μηδενισμού των εντατικών μεγεθών αξονικής και καμπτικής έντασης. Φυσικά όπως έχει ήδη προαναφερθεί, στην περίπτωση αυτή οι αξονικές και καμπτοδιατμητικές συνοριακές συνθήκες της ράβδου δεν μπορούν να είναι τυχούσες.

Εισάγοντας τις εκφράσεις (7.4.10) στις εξ. (7.4.5-6) και αναδιατυπώνοντας τις συνοριακές συνθήκες (7.4.6), μορφώνεται η παρακάτω κυρίαρχη διαφορική εξίσωση ισορροπίας στρεπτικών δράσεων

$$EC_S \theta_x''' - GI_t \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_{n2} (\theta_x')^2 \theta_x'' = m_t + m_w' \quad (7.4.11)$$

που υπόκειται στις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \theta_x' = \beta_3 \quad (7.4.12\alpha, \beta)$$

όπου η γεωμετρική σταθερά I_{n2} ορίζεται ως

$$I_{n2} = I_n + \frac{U_w^2}{C_S} \quad (7.4.13\alpha)$$

$$\text{ή} \quad I_{n2} = \int_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega - \frac{I_P^2}{A} - 4\beta_1^2 I_{ZZ} - 4\beta_2^2 I_{YY} \quad (7.4.13\beta)$$

ενώ M_t , M_w είναι η στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρέβλωσης στα άκρα της ράβδου αντίστοιχα και δίδονται ως

$$M_t = GI_t \theta'_x - EC_S \theta''_x + \frac{I}{2} EI_{n2} (\theta'_x)^3 + m_w \quad M_w = -EC_S \left[\theta''_x + \frac{U_w}{2C_S} (\theta'_x)^2 \right] \quad (7.4.14\alpha, \beta)$$

Στις σχέσεις (7.4.12) α_i , β_i ($i = 1, 2, 3$) είναι συντελεστές που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών (πχ πάκτωση, διχαλωτή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη) μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις (7.4.12). Στην πλέον γενική περίπτωση οι συγκεκριμένες εκφράσεις είναι μη γραμμικές λόγω των εξ. (7.4.14). Αγνοώντας όλους τους μη γραμμικούς όρους των εξ. (7.4.11, 7.4.14), προκύπτει επακριβώς το πρόβλημα συνοριακών τιμών της γραμμικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. κεφ. 4). Σε κάθε περίπτωση, **οι μεγάλες στρεπτικές στροφές οδηγούν σε αύξηση της στρεπτικής δυσκαμψίας της ράβδου** (Trahair 2005).

Οι εξισώσεις (7.4.11-12) επιτρέπουν τον υπολογισμό της στρεπτικής στροφής θ_x . Ο προσδιορισμός των εγκάρσιων μετακινήσεων v_S , w_S βασίζεται στο σύστημα εξισώσεων (7.4.10β, γ) με το οποίο προσδιορίζονται οι παράγωγοι v'_S , w'_S με τη βοήθεια των σχέσεων (7.4.3β, γ), (7.2.8) ως

$$v'_S = -(\theta'_x)^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \quad w'_S = (\theta'_x)^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \quad (7.4.15\alpha, \beta)$$

Οι παράγωγοι v'_S , w'_S προκύπτουν με ολοκλήρωση των παραπάνω σχέσεων ως

$$v'_S = \int \left[-(\theta'_x)^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \right] dx + C_{21} \quad (7.4.16\alpha)$$

$$w'_S = \int \left[(\theta'_x)^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \right] dx + C_{31} \quad (7.4.16\beta)$$

ενώ οι εγκάρσιες μετακινήσεις v_S , w_S προκύπτουν με περαιτέρω ολοκλήρωση ως

$$v_S = \int \left\{ \int \left[-(\theta'_x)^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \right] dx \right\} dx + C_{21}x + C_{22} \quad (7.4.17\alpha)$$

$$w_S = \int \left\{ \int \left[(\theta'_x)^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \right] dx \right\} dx + C_{31}x + C_{32} \quad (7.4.17\beta)$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης C_{21} , C_{22} , C_{31} , C_{32} υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες εγκάρσιων μετακινήσεων και καμπτικών στροφών, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να είναι γενικές (βλ. και παραδοχή 11). Έτσι, για την περίπτωση π.χ. πάκτωσης στο αριστερό άκρο της ράβδου, ο υπολογισμός των προαναφερθέντων σταθερών βασίζεται στις σχέσεις $v'_S(0) = w'_S(0) = 0$, $v_S(0) = w_S(0) = 0$. Παρατηρείται ότι το μέγεθος των εγκάρσιων μετακινήσεων είναι μη μηδενικό και εξαρτάται από τη στρεπτική στρόφη θ_x καθώς και τους συντελεστές Wagner β_1 , β_2 . Είναι εμφανές ότι η αντικατάσταση των

θ_x , v_S , w_S στις εκφράσεις (7.2.1-2) των εγκάρσιων μετατοπίσεων των υλικών σημείων της ράβδου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλες οι διαμήκεις ίνες της ράβδου μετακινούνται κατά την εγκάρσια έννοια. Κατά συνέπεια **στη μη γραμμική στρέψη δεν υπάρχει ακλόνητος άξονας περιστροφής της ράβδου**, σε αντίθεση με τη γραμμική θεώρηση (βλ. και (Attard 1986a)).

Ο προσδιορισμός του u_m βασίζεται στην εξ. (7.4.10α), η οποία με τη βοήθεια των (7.4.3α), (7.2.6) δίδει

$$u'_m = -\frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + \theta'_x \left[y_C (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) + z_C (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) \right] \quad (7.4.18)$$

Η μέση αξονική μετακίνηση u_m βρίσκεται με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης ως

$$u_m = \int \left\{ -\frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + \theta'_x \left[y_C (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) + z_C (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) \right] \right\} dx + C_I \quad (7.4.19)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. (7.4.18) στην έκφραση (7.2.3) της διαμήκου μετατόπισης των υλικών σημείων της ράβδου, διαπιστώνεται ότι **οι διαμήκεις ίνες της ράβδου βραχύνονται (κατά μέσο όρο)**, σε αντίθεση με τη γραμμική θεώρηση.

Η ειδική περίπτωση της **ομοιόμορφης στρέψης** προκύπτει θεωρώντας ότι στη ράβδο ασκούνται αποκλειστικά δύο ισόποσες στρεπτικές ροπές στα άκρα της ενώ η αναπτυσσόμενη στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Στην περίπτωση αυτή η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους θ'_x είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου και δίδεται από την αλγεβρική εξίσωση 3ου βαθμού (βλ. εξ. (7.4.14α))

$$M_t = GI_t \theta'_x + \frac{I}{2} EI_{n2} (\theta'_x)^3 \quad (7.4.20)$$

Η δευτερογενής στρέβλωση ϕ_S^S προφανώς είναι μηδενική αφού δεν αναπτύσσονται δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στη ράβδο, ενώ τα κινηματικά μεγέθη u_m , v_S , w_S υπολογίζονται ακριβώς όπως και στην περίπτωση της ανομοιόμορφης στρέψης. Η έκφραση (7.4.9) της εξωτερικά επιβαλλόμενης στρεπτικής ροπής ισχύει επίσης ως έχει.

7.5. Βήματα επίλυσης προβλήματος μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων

Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, για την επίλυση του προβλήματος της (γεωμετρικά) μη γραμμικής ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ισότροπων πρισματικών ράβδων με διατομή απλής ή πολλαπλής συνοχής τυχόντος σχήματος ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

- Ορισμός αυθαίρετου συστήματος αναφοράς $O\tilde{x}$ στη διατομή της ράβδου. Υπολογισμός των καμπτικών ροπών αδράνειας και του γινομένου αδράνειας ως

$$\tilde{I}_{YY} = \int_{\Omega} \tilde{z}^2 d\Omega \quad \tilde{I}_{ZZ} = \int_{\Omega} \tilde{y}^2 d\Omega \quad \tilde{I}_{YZ} = - \int_{\Omega} \tilde{y}\tilde{z} d\Omega$$

και προσδιορισμός κύριου καμπτικού συστήματος αναφοράς $O\bar{y}\bar{z}$ με στροφή του $O\tilde{y}\tilde{z}$ κατά γωνία θ_0 που δίνεται ως

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \arctan\left(\frac{2\tilde{I}_{YZ}}{\tilde{I}_{YY} - \tilde{I}_{ZZ}}\right) \\ \bar{y} &= \tilde{y} \cos \theta_0 + \tilde{z} \sin \theta_0 \\ \bar{z} &= -\tilde{y} \sin \theta_0 + \tilde{z} \cos \theta_0 \end{aligned}$$

- Υπολογισμός της πρωτογενούς συναρτήσεως στρεβλώσεως $\phi_O^P(\bar{y}, \bar{z})$. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_O^P &= \frac{\partial^2 \phi_O^P}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi_O^P}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \\ \frac{\partial \phi_O^P}{\partial n} &= \bar{z}n_y - \bar{y}n_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \end{aligned}$$

ως ένα πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Laplace*, ως προς το σύστημα αναφοράς $O\bar{y}\bar{z}$, μια και οι συντεταγμένες του σημείου S δεν είναι εκ των προτέρω γνωστές.

- Υπολογισμός των πεδιακών ολοκληρωμάτων, που περιγράφουν το εμβαδόν της διατομής και ως προς το σύστημα αναφοράς $O\bar{y}\bar{z}$ τις στατικές ροπές αδράνειας, τις καμπτικές ροπές αδράνειας, το γινόμενο αδράνειας και τις ροπές στρεβλώσεως.

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Omega} d\Omega & S_{\bar{y}} &= \int_{\Omega} \bar{z} d\Omega & S_{\bar{z}} &= \int_{\Omega} \bar{y} d\Omega \\ I_{\bar{y}\bar{y}} &= \int_{\Omega} \bar{z}^2 d\Omega & I_{\bar{z}\bar{z}} &= \int_{\Omega} \bar{y}^2 d\Omega & I_{\bar{y}\bar{z}} &= - \int_{\Omega} \bar{y}\bar{z} d\Omega \\ \bar{R}_S^P &= \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega & R_{\bar{y}}^P &= \int_{\Omega} \bar{z} \phi_O^P d\Omega & R_{\bar{z}}^P &= \int_{\Omega} \bar{y} \phi_O^P d\Omega \end{aligned}$$

- Υπολογισμός ως προς το σύστημα $O\bar{y}\bar{z}$ των συντεταγμένων \bar{y}^S, \bar{z}^S του σημείου S και της σταθεράς \bar{c} από την επίλυση του ακόλουθου γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} S_{\bar{y}} \bar{y}^S - S_{\bar{z}} \bar{z}^S + A \bar{c} &= -\bar{R}_S^P \\ I_{\bar{y}\bar{y}} \bar{y}^S + S_{\bar{y}} \bar{c} &= -R_{\bar{y}}^P \\ I_{\bar{z}\bar{z}} \bar{z}^S - S_{\bar{z}} \bar{c} &= R_{\bar{z}}^P \end{aligned}$$

- Αναγωγή του συστήματος $O\bar{y}\bar{z}$ στο κύριο καμπτικό σύστημα αναφοράς Syz με αρχή το σημείο S και υπολογισμός της κύριας πρωτογενούς συνάρτησης στρεβλώσεως $\phi_S^P(y, z)$ με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} - \bar{y}^S \\ z &= \bar{z} - \bar{z}^S \\ \phi_S^P &= \phi_O^P - \left(y + \bar{y}^S \right) \bar{z}^S + \left(z + \bar{z}^S \right) \bar{y}^S + \bar{c} \end{aligned}$$

- Υπολογισμός των συντεταγμένων του γεωμετρικού κέντρου της διατομής y_C, z_C , των καμπτικών ροπών αδράνειας I_{YY}, I_{ZZ} ως προς το γεωμετρικό κέντρο, της πολικής ροπής αδράνειας ως προς το S , της στρεπτικής σταθεράς I_t , της σταθεράς στρέβλωσης C_S , των συντελεστών Wagner β_1, β_2, U_w και της γεωμετρικής σταθεράς I_{n2} με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\int y d\Omega}{A} & z_C &= \frac{\int z d\Omega}{A} \\ I_{YY} &= \int_{\Omega} (z - z_C)^2 d\Omega & I_{ZZ} &= \int_{\Omega} (y - y_C)^2 d\Omega \\ I_P &= \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \\ I_t &= \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega & C_S &= \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \\ \beta_1 &= \frac{I}{2I_{ZZ}} \int_{\Omega} (y^2 + z^2)(y - y_C) d\Omega & \beta_2 &= \frac{I}{2I_{YY}} \int_{\Omega} (y^2 + z^2)(z - z_C) d\Omega \\ U_w &= \int_{\Omega} \phi_S^P (y^2 + z^2) d\Omega \\ I_{n2} &= \int_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega - \frac{I_P^2}{A} - 4\beta_1^2 I_{ZZ} - 4\beta_2^2 I_{YY} \end{aligned}$$

- Επίλυση της διαφορικής εξισώσεως ισορροπίας της ράβδου για τυχούσες συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$, υποκείμενης στις πλέον γενικές στρεπτικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} EC_S \theta_x''' - GI_t \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_{n2} (\theta_x')^2 \theta_x'' &= m_t + m'_w \quad \text{στο εσωτερικό της ράβδου} \\ \alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x &= \alpha_3 & \beta_1 M_w + \beta_2 \theta_x' &= \beta_3 \quad \text{στα άκρα της ράβδου } x = 0, l \end{aligned}$$

και υπολογισμός της γωνίας στροφής $\theta_x(x)$, των παραγώγων της καθώς και των αναπτυσσόμενων στρεπτικών εντατικών μεγεθών M_t , M_t^P , M_t^S , M_t^{nl} , M_w^l και M_w^{nl} με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} M_t &= M_t^P + M_t^S + M_t^{nl} + m_w \\ M_w &= M_w^l + M_w^{nl} \\ M_t^P &= G I_t \theta'_x \quad M_t^S = -E C_S \theta_x''' \quad M_t^{nl} = \frac{I}{2} E I_{n2} (\theta'_x)^3 \\ M_w^l &= -E C_S \theta_x'' \quad M_w = -\frac{I}{2} E U_w (\theta'_x)^2 \end{aligned}$$

- Υπολογισμός των κινηματικών μεγεθών u_m , v_S , w_S και των παραγώγων τους καθώς και των κ_Y , κ_Z , θ_Y , θ_Z με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} v_S'' &= -(\theta'_x)^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \quad w_S'' = (\theta'_x)^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \\ v_S' &= \int \left[-(\theta'_x)^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \right] dx + C_{21} \\ w_S' &= \int \left[(\theta'_x)^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \right] dx + C_{31} \\ v_S &= \int \left\{ \int \left[-(\theta'_x)^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \right] dx \right\} dx + C_{21}x + C_{22} \\ w_S &= \int \left\{ \int \left[(\theta'_x)^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \right] dx \right\} dx + C_{31}x + C_{32} \\ u_m' &= -\frac{I}{2} \left[(v_S')^2 + (w_S')^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] \\ &\quad + \theta'_x \left[y_C (v_S' \sin \theta_x - w_S' \cos \theta_x) + z_C (v_S' \cos \theta_x + w_S' \sin \theta_x) \right] \\ u_m &= \int \left\{ -\frac{I}{2} \left[(v_S')^2 + (w_S')^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \theta'_x \left[y_C (v_S' \sin \theta_x - w_S' \cos \theta_x) + z_C (v_S' \cos \theta_x + w_S' \sin \theta_x) \right] \right\} dx + C_1 \\ \kappa_Y &= v_S'' \sin \theta_x - w_S'' \cos \theta_x \quad \kappa_Z = v_S'' \cos \theta_x + w_S'' \sin \theta_x \\ \theta_Y &= v_S' \sin \theta_x - w_S' \cos \theta_x \quad \theta_Z = v_S' \cos \theta_x + w_S' \sin \theta_x \end{aligned}$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης C_{21} , C_{22} , C_{31} , C_{32} προκύπτουν από τις καμπτοδιατμητικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου, ενώ η σταθερά C_1 από τις αξονικές συνοριακές συνθήκες. Οι συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες δεν μπορούν να είναι τυχούσες.

- Υπολογισμός της βασικής δευτερογενούς συναρτήσεως στρεβλώσεως $\hat{\phi}_S^S(x_1, x_2, x_3)$ σε κάθε διατομή της ράβδου. Η συνάρτηση αυτή υπολογίζεται από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών, ως ένα πρόβλημα Neumann για την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \hat{\phi}_S^S = -\frac{E}{G} \theta_x'' \phi_S^P - \frac{E}{G} (y^2 + z^2) \theta_x' \theta_x'' \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_S^S}{\partial n} = \frac{t_x}{G} \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma$$

- Υπολογισμός της κύριας δευτερογενούς συνάρτησης στρεβλώσεως $\phi_S^S(x_1, x_2, x_3)$ σε κάθε διατομή της ράβδου σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_S^S = \hat{\phi}_S^S - \frac{I}{A} \int_{\Omega} \hat{\phi}_S^S d\Omega$$

- Υπολογισμός των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων, των συνολικών διατμητικών τάσεων και των ορθών τάσεων του 2ου τανυστή Piola-Kirchoff σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$S_{xy}^P = G \theta_x' (x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) \quad \text{πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega$$

$$S_{xz}^P = G \theta_x' (x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \quad \text{πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega$$

$$S_{xy}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad \text{δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο της διατομής } \Omega$$

$$S_{xz}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad \text{δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο της διατομής } \Omega$$

$$S_{xn} = \sqrt{\left(\tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S \right)^2 + \left(\tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S \right)^2} \quad \text{συνολικές διατμητικές τάσεις στο χωρίο } \Omega$$

$$S_{xt}^P = G \theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + y n_y + z n_z \right) \quad \text{πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$S_{xt}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad \text{δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$S_{xt} = S_{xt}^P + S_{xt}^S \quad \text{συνολικές διατμητικές τάσεις στο σύνορο } \Gamma$$

$$S_{II} = E \left\{ u_m' + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta_x'' \phi_S^P - \theta_x' (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{I}{2} \left[(v_S')^2 + (w_S')^2 + (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 \right] \right\}$$

ορθές τάσεις στρεβλώσεως στο χωρίο Ω και στο σύνορο Γ της διατομής

- Υπολογισμός των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u(x, y, z) = u_m(x) + \theta_Y(x)(z - z_C) - \theta_Z(x)(y - y_C) + \theta_x'(x) \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z)$$

$$v(x, y, z) = v_S(x) - z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x))$$

$$w(x, y, z) = w_S(x) + y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x))$$

7.6. Συνοπτική αναφορά των επιρροών της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων

Οι επιρροές των μεγάλων στρεπτικών στροφών στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Σύζευξη των στρεπτικών, αξονικών και καμπτοδιατμητικών **εντατικών** μεγεθών ακόμα και στην περίπτωση μηδενικής εξωτερικά επιβαλλόμενης αξονικής και καμπτοδιατμητικής φόρτισης. Η ράβδος δεν αναπτύσσει αξονική και καμπτοδιατμητική ένταση αποκλειστικά στην περίπτωση ειδικών (κατάλληλων) αξονικών και καμπτοδιατμητικών συνοριακών συνθηκών στα άκρα της.
- Σύζευξη των στρεπτικών, αξονικών και καμπτοδιατμητικών **κινηματικών** μεγεθών. Οι διατομές της ράβδου παρουσιάζουν εγκάρσιες και αξονικές μετακινήσεις ακόμα και στην περίπτωση όπου ασκούνται αποκλειστικά εξωτερικά επιβαλλόμενες στρεπτικές δράσεις. Κατά συνέπεια όλες οι διαμήκεις ίνες της ράβδου μετατοπίζονται, με αποτέλεσμα **να μην υπάρχει ακλόνητος άξονας περιστροφής** όπως στη γραμμική θεωρία. Γενικά, οι διαμήκεις ίνες της ράβδου αλλάζουν μήκος (βράχυνση ή επιμήκυνση). Μόνο στην περίπτωση διπλά συμμετρικών διατομών οι εγκάρσιες μετακινήσεις είναι μηδενικές, ωστόσο η ράβδος υφίσταται (μέση) αξονική βράχυνση εξαιτίας της σύζευξης αξονικών και στρεπτικών μετακινήσεων.
- **Η σχέση στρεπτικού φορτίου - στρεπτικής στροφής ανά μονάδα μήκους παύει να είναι γραμμική.** Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί σε **αύξηση της στρεπτικής δυσκαμψίας** της ράβδου.
- **Η σχέση δίρροπου στρέβλωσης - στρεπτικών κινηματικών μεγεθών παύει να είναι γραμμική.** Το δίρροπο στρέβλωσης συσχετίζεται γραμμικά με τη δεύτερη παράγωγο της στρεπτικής στροφής μόνο στην περίπτωση που η διατομή διαθέτει τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας.
- **Οι εκφράσεις των εξωτερικά επιβαλλόμενων στρεπτικών φορτίων παύουν να είναι γραμμικές** ως προς τις συνιστώσες του διανύσματος τάσης ανά μονάδα παραμόρφωσης επιφάνειας. Στις εκφράσεις αυτές υπεισέρχεται και η στρεπτική στροφή.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στην ανάπτυξη **επιπρόσθετων (δευτερογενών) διατμητικών τάσεων** που καταπονούν τη ράβδο πέραν αυτών που εξισορροπούν τις ορθές τάσεις λόγω στρέβλωσης.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στην ανάπτυξη **επιπρόσθετων ορθών τάσεων** που καταπονούν τη ράβδο πέραν των ορθών τάσεων λόγω στρέβλωσης.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Antes H.** (2003). “Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams”, *Computers and Structures*, 81, 383–396.
- Antes H., Schanz M. and Alvermann S.** (2004). “Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 276, 807-836.
- Argyris J.H., Hilpert O., Malejannakis G.A. and Scharpf D.W.** (1979). “On the geometrical stiffness of a beam in space—A Consistent V.W. Approach”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20, 105–131.
- Armenakas A.E.** (2006). “*Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*”, Taylor & Francis Group, New York.
- Ashwell D.G.** (1951). “The Axis of Distortion of a Twisted Prism”, *Philosophical Magazine*, 42, 820–832.
- Atanackovic, T.M. and Spasic, D.T.** (1994). A model for plane Elastica with simple shear deformation pattern, *Acta Mechanica*, 104, 241-253.
- Attard, M. M.** (1986a). “Nonlinear Shortening and Bending Effect Under Pure Torque of Thin-Walled Open Beams”, *Thin-Walled Structures*, 4(3), 165-177.
- Attard, M.M.** (1986b). “Nonlinear Theory of Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Open Beams”, *Thin-Walled Structures*, 4, 101-134.
- Attard, M.M. and Somerville, I.J.** (1987). “Non-Linear Analysis of Thin-walled Open Beams”, *Computers and Structures*, 25 (3), 437–443.
- Back, S.Y. and Will, K.M.** (1998). “A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 1173-1191.
- Bathe, K. J.** (1996). “*Finite Element Procedures*”, Prentice-Hall, New Jersey.
- Bathe, K.J. and Bolourchi, S.** (1979). “Large displacement analysis of three-dimensional beam structures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, 961-986.
- Becker, G.** (1965). “Ein Beitrag zur statischen Berechnung Beliebiger Gelagerter Ebener Gekrümmter Stäbe Mit Einfachsymmetrischen Dünnwandigen Offenen Profilen von in der Stabachse Veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion”, *Der Stahlbau* 34, H.11, 334-346 und H.12, S.368-377.
- Bonet, J. and Wood, R.D.** (1997). “*Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*”, Cambridge University Press, Cambridge.

- Bornscheuer, F.W.** (1952). “Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt”, *Der Stahlbau* 21, H.12, 225-232.
- Bornscheuer, F.W.** (1953). “Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt”, *Der Stahlbau* 22, H.2, 32-44.
- Brush, D.O. and Almroth, B.O.** (1975). “*Buckling of Bars, Plates and Shells*”, McGraw - Hill Book Co, New York.
- Βαρδουλάκης, Ι.** (1998). “*Τεχνική Μηχανική ΙΓ*”, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- Chen, H. and Blandford, G.E.** (1989). “A C0 finite element formulation for thin-walled beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 2239-2255.
- Chou, S.I.** (1993). “Determination of Centers of Flexure Using the Boundary Element Method”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12, 321-324.
- Chou, S.I. and Mohr, J.A.** (1990). “Boundary Integral Method for Torsion of Composite Shafts”, *The International Journal of Structural Mechanics and Materials Science*, 29, 41-56.
- Christiansen, S.** (1976). “A Review of Some Integral Equations for Solving the Saint-Venant Torsion Problem”, *The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics*, Nr. 109.
- Cornelius, W.** (1951). “Über den Einfluss der Torsionssteifigkeit auf die Verdrehung von Tragwerken”, *MAN-Forschungsheft*, 39-65.
- Cortinez, V.H. and Piovan, M.T.** (2002). “Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability”, *Journal of Sound and Vibration*, 258, 701-723.
- Coulomb, C.A.** (1784). “Recherches theoriques et experimentales sur la force de torsion, et sur l’elasticite des files de metal”, *Mem. De l’Acad. Roy. Des Sci.*, 229-269.
- Cowper, G.R.** (1966). “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 33(2), 335-340.
- Cruse, T.A.** (1969). “Numerical solution in three dimensional elastostatics”, *International Journal Solids Structures*, 5, 1259-1274.
- Cruse, T.A. and Rizzo, F.J.** (1968). “A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem”, *International Journal Math. Analysis and Appl.*, 22, 244-259.
- Cullimore, M.S.G.** (1949). “The Shortening Effect: A Nonlinear Feature of Pure Torsion”, *Research, Engineering Structures Supplement*, 153 .
- Dabrowski, R.** (1968). “*Gekrümmte dünnwandige Träger, Theorie und Berechnung*”, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Dittler, J.** (1980). “Querbiegung und Profilverformung des ein- und zweizelligen Hohlkastens (unter Berücksichtigung der Scheibenwirkung der Gurte)”, *Der Bauingenieur*, 55, 317-321.
- El Fatmi, R.** (2007). “Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part I: A general beam theory”, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 5912-5929.

- El Fatmi, R.E., Zenzri, H.** (2004). “A Numerical Method for the Exact Elastic Beam Theory. Applications to Homogeneous and Composite Beams”, *International Journal of Solids and Structures*, 41, 2521–2537.
- Elfelsoufi, Z. and Azrar, L.** (2005). “Buckling, flutter and vibration analyses of beams by integral equation formulations”, *Computers and Structures*, 83, 2632–2649.
- Ely, J.F. and Zienkiewicz, O.C.** (1960). “Torsion of Compound Bars—A Relaxation Solution”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1, 4.
- Emre Erkmen, R. and Mohareb, M.** (2006). “Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects”, *Thin-Walled Structures*, 44, 1096–1108.
- Epstein, M. and Murray, D.** (1976). “Three-dimensional large deformation analysis of thin walled beams”, *International Journal of Solids and Structures*, 12, 867–876.
- EAK** (2000). “Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός”, ΦΕΚ 2184B/20-12-1999, ΦΕΚ 423B/12-04-2001.
- Filippou, F.C. and Schulz, M.** (2001). “Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 761–785.
- Friedman, Z. and Kosmatka, J.B.** (2000). “Torsion and flexure of a prismatic isotropic beam using the boundary element method”, *Computers and Structures*, 74, 479–494.
- Friemann, H.** (1993). “*Schub und Torsion in gerade Stäben*”, Werner-Verlag Düsseldorf.
- Gantes, C.J. and Mageirou, G.E.** (2005). “Improved stiffness distribution factors for evaluation of effective buckling lengths in multi-story sway frames”, *Engineering Structures*, 27, 1113–1124.
- Gaul, L. und Fiedler, C.** (1996). “*Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*”, Verlag Vieweg.
- Gendy, A.S., Saleeb, A.F. and Chang, T.Y.P.** (1992). “Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis”, *Computers & Structures*, 42, 531–550.
- Ghobarah, A. A. and Tso, W. K.** (1971). “A Non-Linear Thin-Walled Beam Theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(12), 1025–1038.
- Goodier, J.N.** (1944). “A Theorem on the Shearing Stress in Beams with Applications to Multicellular Sections”, *Journal of Aeronautical Sciences*, 11, 272–280.
- Gregory, M.** (1960a). “A Nonlinear Bending Effect When Certain Unsymmetrical Sections are Subjected to a Pure Torque”, *Australian Journal of Applied Science*, 11, 33–48.
- Gregory, M.** (1960b). “The Bending and Shortening Effect of Pure Torsion”, *Australian Journal of Applied Science*, 11, 209–216.
- Gregory, M.** (1961). “Elastic Torsion of Members of Thin-Walled Open Cross-Sections”, *Australian Journal of Applied Science*, 12(2), 1974–1993.
- Gruttmann, F. and Wagner, W.** (2001). “Shear Correction Factors in Timoshenko’s Beam Theory for Arbitrary Shaped Cross-Sections”, *Computational Mechanics*, 27, 199–207.

- Gruttmann, F., Sauer, R. and Wagner, W.** (1999). “Shear Stresses in Prismatic Beams with Arbitrary Cross-Sections”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 865-889.
- Gruttmann, F., Sauer, R. and Wagner, W.** (2000). “Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 1675-1702
- Gruttmann, F., Wagner, W. und Sauer, R.** (1998). “Zur Berechnung von Wölbfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der Finiten Elemente”, *Bauingenieur*, 73(3), 138-143.
- Γδούτος, Ε.** (1993). “Αντοχή των Υλικών”, Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη Α.Ε., Θεσσαλονίκη
- Haberl, G. and Och, F.** (1974). “A Finite Element Solution for the Torsional Rigidity and the Shear Center of Arbitrary Cross Section”, *Z. Flugwiss* 22(4), 115-119.
- Hartmann, F.** (1995). “Die Methode der Randelemente”, Der Ingenieurbau Grundwissen—Rechnerorientierte Baumechanik, Ernst & Sohn, Berlin.
- Heilig, R.** (1961a). “Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform”, *Der Stahlbau*, 30, H.11, 333-349.
- Heilig, R.** (1961b). “Der Schubverformzugseinfluss auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil”, *Der Stahlbau*, 30, H.4, 97.
- Hermann, L.R.** (1966). “Elastic Torsional Analysis of Irregular Shapes”, *Proc. ASCE J. EM Dn.*, Vol.91 Em6.
- Hsiao, G.C., Wendland, W.L.** (2008). “Boundary Integral Equations”, Springer-Verlag, Berlin.
- Hu, Y., Jin, X. and Chen, B.** (1996). “A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections”, *Computers & Structures*, 61, 897-908.
- Hutchinson, J.R.** (2001). “Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 68, 87.92.
- Jaswon, M.A. and Ponter, A.R.S.** (1963). “An Intergral Equation Solution of the Torsion Problem”, *Proceedings, Royal Society of London*, Ser.A, Vol.273, No.1353, 237-246.
- Θεοχάρης, Π.Σ.** (1976). “Μηχανική—Αντοχή των Υλικών”, Τόμος 2, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- Kandler, P.** (1967). “Numerische Behandlung des SAINT–VENANTschen Torsionsproblems bei beliebigen Querschnittsbereichen mit Hilfe von Integralgleichungen”, *Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Band 9, 637-649.
- Kappus, R.** (1937). “Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich”, *Luftfahrtforschung*, 14, 444-457.
- Katsikadelis, J.T. and Sapountzakis, E.J.** (1985). “Torsion of Composite Bars by the Boundary Element Method”, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 1197-1210.
- Katsikadelis, J.T. and Tsiatas, G.C.** (2003). “Large deflection analysis of beams with variable stiffness”, *Acta Mechanica*, 164, 1–13.

- Katsikadelis, J.T. and Tsiatas, G.C.** (2004). “Nonlinear dynamic analysis of beams with variable stiffness”, *Journal of Sound and Vibration*, 270, 847–863.
- Katsikadelis, J.T. and Tsiatas, G.C.** (2005). “Buckling load optimisation of beams”, *Archive of Applied Mechanics*, 74(11–12), 790–799.
- Kim, N.-I. and Kim, M.-Y.** (2005). “Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects”, *Thin-Walled Structures*, 43, 701–734.
- Klöppel, K. und Bilstein, W.** (1972). “Stark tordierte, eigenspannungsbehaftete Stäbe mit dünnwandigen, offenen einfachsymmetrischen Querschnitten”, *Der Stahlbau*, 41, H.5, S.135-142.
- Klöppel, K. und Friemann, H.** (1963). “Der Spannungs- und Verformungszustand rechtwinklig zu ihrer Krümmungsebene belasteter Rohre”, *Zeitschrift VDI*, 105, H.23, 1106-1102.
- Kollár, L.P.** (2001). “Flexural-torsional vibration of open section composite beams with shear deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7543-7558.
- Kollbrunner, C.F. und Basler, K.** (1966). “*Torsion*”, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Kosmatka, J.B.** (1993). “Flexure-Torsion Behavior of Prismatic Beams, Part I: Section Properties via Power Series”, *AIAA Journal*, 31(1), 170-9.
- Kounadis, A. and Katsikadelis, J.T.** (1979). “Coupling effects on a cantilever subjected to a follower force”, *Journal of Sound and Vibration*, 62(1), 131–139.
- Kraus, M.** (2007). “*Computerorientierte Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren gewalzter I-Profile*”, Festschrift Rolf Kindmann, Shaker Verlag, Aachen, 81-98.
- Kreuzinger, H.** (1969). “*Der Einfluss eines nichtlinearen Anteils des Drehwiderstandes auf das Gleichgewichts- und Stabilitätsverhalten von geraden dünnwandigen Stäben*”, Diss. TH, München.
- Κουνάδης, Α.Ν.** (1997). “*Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*”, β' έκδοση, Εκδόσεις Συμμεών, Αθήνα.
- Ladevéze, P., Simmonds, J.G.** (1998). “New Concepts for Linear Beam Theory with Arbitrary Geometry and Loading”, *European Journal of Mechanics, A/Solids* 17(3), 377–402.
- Laudiero, F. and Savoia, M.** (1990). “Shear strain effects in flexure and torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section”, *Thin-Walled Structures*, 10(2), 87-119.
- Lee, G.C. and Szabo, B.A.** (1967). “Torsional response of tapered I-Girders”, *J. Struc. Div.*, ASCE vol. 93, No. St5, 233-252.
- Leonhardt, F.** (1980). “*Ολόσωμες Κατασκευές- Ολόσωμες Γέφυρες*”, Τόμος 6, Μ. Γκιούρδας, Αθήνα.
- Lo, C.C. and Nietenfuhr, F.W.** (1970). “Singular Integral Equation Solution for Torsion”, Proc. ASCE, *Journal Engineering Mechanics Division*, 96, EM4, 535-542.

- Machado, S.P. and Cortínez, V.H.** (2007). “Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations”, *Engineering Structures*, 29, 372-382.
- Maillart, R.** (1921). “Zur Frage der Biegung”, *Schweizerische Bauzeitung*, Band LXXVII, 195.
- Marguerre, K.** (1940). “Torsion von Voll- und Hohlquerschnitten”, *Der Bauingenieur*, 21, S.317-322.
- Marinetti, A. and Oliveto, G.** (1984). “Second order analysis of elastic frames with Timoshenko members”, *Engineering Analysis*, 1(2), 92-98.
- Mason, W.E. and Herrmann, L.R.** (1968). “Elastic Shear Analysis of General Prismatic Beams”, *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 94(EM4), 965-983.
- Massonet, C.** (1949). “Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane”, *Bull. Centre Et. Rech. Essais Sc. Génie Civil.*, 4, 169-180.
- Mattiasson, K.** (1981). “Numerical results from large deflection beam elliptic integrals and frame problems analysed by means of elliptic integrals”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17, 145-153.
- Mehlhorn, G.** (1970). “Ein Beitrag zum Kipp-Problem von Stahlbeton- und Spannbetonträgern”, Diss. TH Darmstadt.
- Minghini, F., Tullini, N. and Laudiero, F.** (2007). “Locking-free finite elements for shear deformable orthotropic thin-walled beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72, 808-834.
- Mohri, F., Azrar, L. and Potier-Ferry, M.** (2001). “Flexural-Torsional Post-Buckling Analysis of Thin-Walled Elements With Open sections”, *Thin-Walled Structures*, 39(11), 907-938.
- Mohri, F., Damil, N. and Potier-Ferry, M.M.** (2008). “Large Torsion Finite Element Model for Thin-walled Beams”, *Computers and Structures*, 86(7-8), 671-683.
- Mondkar, D.P. and Powell, G.H.** (1977). “Finite element analysis of nonlinear static and dynamic response”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, 499-520.
- Murín, J. and Kutis, V.** (2008). “An Effective Finite Element for Torsion of Constant Cross-Sections Including Warping With Secondary Torsion Moment Deformation Effect”, *Engineering Structures* 30, 2716-2723.
- Μώκος, Β.Γ.** (2007). Συμβολή στη Γενικευμένη Θεωρία Σύνθετων Ραβδωτών Φορέων με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, Διδακτορική διατριβή για την απόκτηση του επιστημονικού τίτλου του Διδάκτορα Μηχανικού, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Nemenyi, P.** (1929). “Eine neue Singularitätenmethode für die Elastizitätstheorie”, *ZAMM*, 9, 480-490.
- Novozhilov, V.V.** (1953). “*Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*”, Graylock Press, Toronto.
- Osgood, W.R.** (1943). “The Centre of Shear again”, *Journal of Applied Mechanics*, 10(2), A-62-A-64.

- Oxford, J.K.** (1963). “Zur Beanspruchung der Obergute vollwandiger Kranbahnträger durch Torsionsmomente und durch Querkraftbiegung unter dem örtlichen Lastangriff”, *Der Stahlbau*, 32, H.12, 360-367.
- Papadrakakis, M. and Gantes, C.J.** (1988). “Truncated Newton Methods for nonlinear finite element analysis”, *Computers and Structures*, 30, 705–714.
- Park, S., Fujii, D. & Fujitani, Y.** (1997). “A finite element analysis of discontinuous thin-walled beams considering nonuniform shear warping deformation”, *Computers & Structures*, 65, 17-27.
- Pi, Y.L. and Trahair, N.S.** (1995). “Inelastic Torsion of Steel I-Beams”, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 121, 609-620.
- Ramm, E. und Hofmann, T.J.**, (1995). “*Stabtragwerke*”, Der Ingenieurbau: Grundwissen–Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn, Berlin
- Reissner, E. and Tsai, W.T.** (1972). “On the Determination of the Centers of Twist and of Shear for Cylindrical Shell Beams”, *Journal of Applied Mechanics*, 39, 1098-1102.
- Rieder, G.** (1969). “Eine Variante zur Integralgleichung von Windisch für das Torsionsproblem”, *ZAMM*, 49, H.6, S.351-358.
- Rizzo, F.J.**, (1967). “An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics”, *Quart. Appl. Math.*, 25, 83-95.
- Roberts T.M. and Al-Ubaidi, H.** (2001). “Influence of shear deformation on restrained torsional warping of pultruded FRP bars of open cross section”, *Thin-Walled Structures*, 39, 395–414.
- Roik, K.H.** (1978). “*Vorlesungen über Stahlbau (Grundlagen)*”, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf
- Roik, K.H., Carl, J. und Linder, J.** (1972). “*Biegetorsionsprobleme gerade dünnwandiger Stäbe*”, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf.
- Roik, K. und Sedlacek, G.** (1966). “Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen–Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes”, *Der Stahlbau*, 35 H.2, 43–52 and H.5, 160.
- Ronagh, H. R., Bradford, M. A., and Attard, M. M.** (2000α). “Nonlinear Analysis of Thin-Walled Members of Variable Cross-Section. Part I: Theory”. *Computers and Structures*, 77(3), 285-299.
- Ronagh, H. R., Bradford, M. A., and Attard, M. M.** (2000β). “Nonlinear Analysis of Thin-Walled Members of Variable Cross-Section. Part II: Application”. *Computers and Structures*, 77(3), 301-313.
- Rossner, W.**, (1988). “*Brücken aus Spannbeton–Fertigteilen*”, Verlag Ernst & Sohn. Berlin.
- Rothert, H. and Gensichen, V.** (1987). “*Nichtlineare Stabstatik*”, Springer–Verlag, Berlin.
- Rubin, H.** (2005). “Wölbkrafttorsion von Durchlaufträgern Mit Konstantem Querschnitt Unter Berücksichtigung Sekundärer Schubverformungen”, *Stahlbau* 74, 826-842.
- Saint–Venant, B.** (1855). “*Memoire sur la torsion des prismes*”, Memoires des Savants Etrangers, 14, 233-560.

- Sapountzakis, E.J.** (2000a). “Bridge Deck Structures in Nonuniform Torsion”, *Proc. of the 16th Congress of IABSE Structural Engineering for Meeting Urban Transportation Challenges*, September 18-21, 150, Lucerne, Switzerland.
- Sapountzakis, E.J.** (2000b). “Nonuniform Torsion of Composite Bars of Materials in Contact by the Boundary Element Method”, *Proc. of the Fourth International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures*, 14, June 5-7, Chania, Crete Greece.
- Sapountzakis, E.J.** (2000c). “Solution of Nonuniform Torsion of Bars by an Integral Equation Method”, *International Journal Computers and Structures*, 77, 659-667.
- Sapountzakis, E.J.** (2001). “Nonuniform Torsion of Multi-Material Composite Bars by the Boundary Element Method”, *International Journal Computers and Structures*, 79, 2805-2816.
- Sapountzakis, E.J. and Dourakopoulos, J.A.** (2010). “Flexural – Torsional Nonlinear Analysis of Timoshenko Beam-Column of Arbitrary Cross Section by BEM”, *Computers, Materials and Continua*, 18(2), 121-154.
- Sapountzakis, E.J. and Katsikadelis, J.T.** (2000). “Analysis of plates reinforced with beams”, *Computational Mechanics*, 26, 66-74.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2001a). “Nonuniform Torsion of Composite Bars by Boundary Element Method”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 127, 9, 945-953.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2001b). “Nonuniform Torsion of Composite Bars by the Boundary Element Method”, *Proc. of the 2nd European Conference on Computational Mechanics*, 188, June 26-29, Cracow, Poland.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2002a). “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion of Composite Bars”, *Proc. of the 5th World Congress on Computational Mechanics*, II-49, July 7-12, Austria, Vienna.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2002b). “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion of Bars”, *Proc. of the 4th GRACM Congress on Computational Mechanics*, 93, June 27-29, Patras.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2003a). “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion by BEM”, *Computational Mechanics*, 30(2), 131-142.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2003b). “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion of Composite Bars by BEM”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 4337-4353.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2003c). “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion in Bridge Decks of Materials in Contact by BEM”, *Proc. of the 2nd MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Massachusetts Institute of Technology, June 17-20, Cambridge, USA.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2004). “A BEM Solution to Transverse Shear Loading of Beams”, *Proc. of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, ICTAM 2004, Warsaw, Poland, 15 - 21 August, 199.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V. G.** (2005). A BEM solution to transverse shear loading of beams, *Computational Mechanics*, 36, 384-397

- Sapountzakis E.J. and Mokos V.G.** (2008). “Shear deformation effect in nonlinear analysis of spatial beams”, *Engineering Structures*, 30, 653-663.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2009). “Secondary Torsional Moment Deformation Effect by BEM”, *Proceedings of the 10th international conference of Advances in Boundary Element Techniques*, Athens, Greece, 81-88.
- Sapountzakis E.J. and Panagos D.G.** (2008). “Nonlinear analysis of beams of variable cross section including shear deformation effect”, *Archive of Applied Mechanics*, 78, 687-710.
- Sapountzakis, E.J. and Tsipiras, V.J.** (2009). “Composite Bars of Arbitrary Cross Section in Nonlinear Elastic Nonuniform Torsion by BEM”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 135(12), 1354-1367.
- Sapountzakis, E.J. and Tsipiras, V.J.** (2010a). “Nonlinear Elastic Nonuniform Torsion of Bars of Arbitrary Cross Section by BEM”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45, 63-74.
- Sapountzakis, E. J. and Tsipiras, V. J.** (2010b). “Shear Deformable Bars of Doubly Symmetrical Cross Section Under Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations-Application to Torsional Postbuckling Configurations and Primary Resonance Excitations”, *Nonlinear Dynamics*, 62(4), 967-987.
- Sauer, E.** (1980). “*Schub und Torsion bei elastischen prismatischen Balken*”, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, No. 29, Berlin/München.
- Schade, D.** (1969). “Zur Wölbkrafttorsion von Stäben mit dünnwandigem Querschnitt”, *Ingenieur-Archiv*, 38, 25–34.
- Schanz, M. and Antes, H.** (2002). “A boundary integral formulation for the dynamic behavior of a Timoshenko beam”, *Electronic Journal of Boundary Elements*, 3, 348-359.
- Schardt, R.** (1966). “Eine Erweiterung der Technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Faltwerke”, *Der Stahlbau*, 35, 161-171 und 384.
- Scheer, J.** (1955). “Die Berücksichtigung der Stegverformungen bei der Wölbkrafttorsion von doppelsymmetrischen I-Profilen”, *Der Stahlbau*, 24, H.11, 257-260.
- Schramm, U., Kitis, L., Kang, W. and Pilkey, W. D.** (1994). “On the Shear Deformation Coefficient in Beam Theory”, *Finite Elements in Analysis and Design*, 16, 141-162.
- Schramm, U., Rubenchik, V. and Pilkey, W. D.** (1997). “Beam Stiffness Matrix Based on the Elasticity Equations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 211.232
- Schwalbe, W.L.** (1934). “Die Torsion von Walzeisenträgern”, *Ingenieur-Archiv*, V. Band, 179.
- Schweda, E.** (1978). “*Αντοχή των Υλικών*”, Μ. Γκιούρδας, Αθήνα.
- Shakourzadeh, H., Guo, Y. and Batoz, J.** (1995). “A torsion bending element for thin-walled beams with open and closed cross sections”, *Computers and Structures* 55, 1045-1054.

- Shams-Ahmadi, M. and Chou, S.I.** (1997). “Complex Variable Boundary Element Method for Torsion of Composite Shafts”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1165-1179.
- Simitses, G., Giri, J., and Kounadis, A.** (1981). “Nonlinear analysis of portal frames”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17, 123–132.
- Simo, J.C. and Vu-Quoc, L.** (1991). “A Geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 27, 371-393.
- Slivker, V.** (2007). “*Mechanics of Structural Elements*”, Springer-Verlag, Berlin.
- Steinle, A.** (1970). “Torsion und Profilverformung beim einzelligen Kastenträger”, *Beton–u. Stahlbetonbau* 65, H.9, 215-222.
- Stephen, N.G.** (1980). “Timoshenko’s Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Loading”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 47, 121.127
- Σαπουντζάκης, Ε.Ι.** (1999). “Προσομοίωση Τεχνικών Έργων”, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- Thadani, B.N.** (1963). “Das beschleunigte Iterationsverfahren für die Lösung einiger Differentialgleichungen der Baustatik”, *Der Bauingenieur*, 38, H2, 57-60.
- Timoshenko, S. and Gere, J. M.** (1961). “*Theory of Elastic Stability*”, McGraw-Hill Book Company, London.
- Timoshenko, S. and Goodier, J.** (1951). “*Theory of Elasticity*”, McGraw-Hill Book Comp, New York, Toronto, London.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.** (1984). “*Theory of Elasticity*”, 3rd edn, McGraw-Hill, New York.
- Tolf, G.** (1985). “St. Venant Bending of an Orthotropic Beam”, *Composite Structures*, 4, 1-14.
- Torkamani, M. A. M., Sonmez, M., and Cao, J.** (1997). “Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method”, *Journal of Structural Engineering New York, N.Y.*, 123(9), 1225-1235.
- Trahair, N. S.** (2005). “Nonlinear Elastic Nonuniform Torsion”, *Journal of Structural Engineering*, 131(7), 1135–1142.
- Tralli, A.** (1986). “A simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beams”, *Computers and Structures*, 22, 649-658.
- Trefftz, E.** (1926). “Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren”, *Int. Kongress f. Techn. Mechanik*, 131-137. Zürich.
- Tso, W.K. and Ghobarah, A.A.** (1971). “Nonlinear Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Beams”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(12), 1039–1047.
- Τσαμασφύρος, Γ. Ι.** (1991). “Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων ΙΙ”, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα
- Vlasov, V.** (1963). “*Thinwalled beams*”, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
- Vlassov, W.S.** (1964). “Dünnwandige elastische Stäbe”, *VEB Verlag für Bauwesen*, Band 1, Berlin.

- Vlassov, W.S.** (1965). “Dünnwandige elastische Stäbe”, *VEB Verlag für Bauwesen*, Band 2, Berlin.
- Vo, T.P. and Lee, J.** (2009). “Flexural-torsional coupled vibration and buckling of thin-walled open section composite beams using shear-deformable beam theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51, 631-641.
- Wagner H.** (1929). *Verdrehung und Knickung von offenen Profilen*. In: 25th Anniversary Publication, Technische Hochschule, Danzig (2nd edn.), NACA translation, TM 807, 329–343.
- Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee K.H.** (2000). “*Shear deformable beams and plates*”, Elsevier, Oxford.
- Washizu, K.** (1975). “*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*”, (2nd Edn.), Pergamon Press, Oxford.
- Weber, C.** (1921). “Die Lehre der Drehungsfestigkeit”, *Forscharb IngWes.*, 249, 60-62.
- Weber, C. und Günther, W.** (1958). “*Torsionstheorie*”, Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig.
- Weber, C.** (1924). “Biegung und Schub in geraden Balken”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 4, 334-348.
- Weidemann, H.** (1984). “Balkenförmige Stahlbeton– und Spannbetonbrücken”, *Werner Ingenieur Texte*, Teil 1 und 2.
- Weinel, E.** (1931). “Die Integralgleichungen des ebenen Spannungszustandes und der Plattentheorie”, *ZAMM*, 11, 349-360.
- Weinstein, A.** (1947). “The Centre of Shear and the Centre of Twist”, *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(1), 97-99.
- Windisch, E.** (1967). “Eine Numerische Methode zur Lösung des Torsionsproblems I”, *Acta Mechanica*, 4, 191-199.
- Windisch, E.** (1970). “Eine Numerische Methode zur Lösung des Torsionsproblems II”, *Acta Mechanica*, 10, 181-191.
- Worndle, R.** (1982). “Calculation of the Cross-Section Properties and the Shear Stresses of Composite Rotor Blades”, *Vertica* 6, 111-29.
- Wunderlich W., Obrecht, H. and Schroedter, V.** (1986). “Nonlinear analysis and elastic-plastic load-carrying behaviour of thin-walled spatial beam structures with warping constraints”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, 671-695.