

4. (12 points) If you know that $\det \begin{bmatrix} \text{Row 1} \\ \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{bmatrix} = 4$, what is the determinant of

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3\text{Row 1} + 2\text{Row 2} \\ \text{Row 2} + 2\text{Row 3} \\ \text{Row 3} + \text{Row 1} \end{bmatrix}$$

let

$$\text{Row 1} = a$$

$$\text{Row 2} = b$$

$$\text{Row 3} = c$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & c \\ 0 & 2 & 4 & b \\ 1 & 0 & 2 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b+2c \\ a+c \end{bmatrix}$$

applied
matrix
a/c

$$\det \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 4$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{3a} \begin{bmatrix} 3a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{2b} \begin{bmatrix} 3a+2b \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{2c} \begin{bmatrix} 3a+2b \\ b+2c \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{a+c} \begin{bmatrix} 3a+2b \\ b+2c \\ a+c \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 3a+2b+b+2c \\ a+3b+3c+a \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 3a+2b \\ b+2c \\ c+a \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 3a \\ b+2c \\ c+a \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2b \\ b+2c \\ c+a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3a \\ b \\ c+a \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3a \\ 2c \\ c+a \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2b \\ b \\ c+a \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2b \\ 2c \\ c+a \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 3a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3a \\ b \\ a \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3a \\ 2c \\ a \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3a \\ 2c \\ c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2b \\ b \\ c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2b \\ b \\ a \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2b \\ 2c \\ a \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2b \\ 2c \\ c \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 3a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2b \\ 2c \\ a \end{bmatrix} \\ &= 4 \times 3 + (-1)^4 \cdot 4 \times 2 \times 2 = 12 + 16 \\ &= 28 \end{aligned}$$

28