

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ И УПРАВЛЕНИЙ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Никита Е. Селях

Кафедра методов оптимального управления

Научный руководитель: Н.М.Дмитрук

- Предложить методы синтеза оптимальных обратных связей в линейной задаче оптимального управления на основе идей параметрического программирования, по аналогии с подходами, использующимися в явных схемах управления по прогнозирующей модели.
- Применить набор инструментов и функций на основе Matlab для параметрической оптимизации и вычислительной геометрии (Multi-Paramteric Toolbox).

Классический подход к построению оптимальных обратных связей

- Классический подход к построению оптимальной обратной связи продемонстрируем на примере следующей задачи:

Задача оптимального управления

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

$$x(t) \in X \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

$$u(t) \in U \in \mathbb{R}^r, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (4)$$

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние

$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление

- Погрузим задачу (1) – (4) в семейство задач:

Семейство задач

$$\varphi(x(t_f)) \rightarrow \min \quad (5)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(\tau) = z$$

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \quad t \in [\tau, t_f]$$

$u^0(t|\tau, z)$, $t \in T_\tau$, — оптимальная программа (5)

X_τ — множество состояний z , для которых (5) имеет решение

- Оптимальная обратная связь**

$$u^0(\tau, z) = u^0(t|\tau, z), \quad z \in X_\tau, \tau \in T \quad (6)$$

- Построение (6) — **синтез** оптимальной системы управления

- Основную идею явного MPC покажем на примере задачи стабилизации линейной дискретной стационарной системы, для которой формулируется прогнозирующая задачи оптимального управления следующего вида:

Прогнозирующая задачи оптимального управления

$$J(x) = \min_{u(\cdot|t)} \sum_t^{t+N-1} L(x(k(t), u(k(t))) + F(x(t+N)t)), \quad (7)$$

При условиях:

Условия

$$\begin{aligned}x(k+1 | t) &= Ax(k | t) + Bu(k | t) \\x(t | t) &= x(t), \\C_x x(k | t) &\leq d_x, \quad t \leq k \leq t + N - 1, \\C_u u(k | t) &\leq d_u, \quad C_x x(t + N | t) = d_f, \\C_f x(t + N | t) &\leq d_f.\end{aligned}\tag{8}$$

$L(x, u) = x^T Q x + u^T R u$ — квадратичная функция стоимости

$F(x) = x^T Q x$, $Q, R > 0$ — терминальная стоимость

$C_x, C_u, C_f, d_x, d_u, d_f$ задают ограничения на траекторию, управления и терминальное состояние.

$$J(x) = \min_z \frac{1}{2} z^T H z + \frac{1}{2} x^T \tilde{Y} x, \quad (9)$$

при условиях $Gz \leq W + sx$, где $\tilde{Y} = Y - FH^{-1}F^T$, $S := E + GH^{-1}F^T$.

- Рассмотрим многопараметрическую задачу линейного программирования (mp-LP)

Многопараметрическая задача линейного программирования

$$\begin{aligned} J^0(x) &= \min_z J(z, x) = c'z, \\ Gz &\leq W + Sx, \end{aligned} \tag{10}$$

$z \in \mathbb{R}^s$ — переменные оптимизации, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор параметров, $J(z, x) \in \mathbb{R}$ — целевая функция и $G \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $c \in \mathbb{R}^s$, $W \in \mathbb{R}^m$, и $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $K \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Tx \leq Z\}$ — многогранное множество параметров, $K \subset \mathbb{R}^n$

- $K^* \subseteq K$ — множество параметров $x \in K$, при которых задача (10) допустима.

- Свойства, которыми обладает решение в задаче многопараметрического линейного программирования

Теорема

Функция $J^0(x)$, $x \in K^$, является выпуклой и кусочно-аффинной на K^* .*

Если для каждого $x \in K^$ оптимальное решение $z^0(x)$ единственно, то функция $z^0(x)$, $x \in K^*$, является непрерывной и кусочно-аффинной. В противном случае (в случае неединственного решения) всегда можно определить непрерывную и кусочно-аффинную функцию решения $z^0(x) \in Z^0(x)$, $x \in K^*$.*

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

- Рассмотрим задачу оптимального управления линейной системой со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (11)$$

- с критерием качества

$$J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)| dt \rightarrow \min \quad (12)$$

- при условиях

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = 0, \quad |u(t)| \leq L \quad (13)$$

$L > 0$ — амплитуда управления

- Семейство, в которое погружается задача для определения обратной связи, имеет вид

$$J(u) = \int_{\tau}^{t_f} |u(t)| dt \rightarrow \min \quad (14)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(\tau) = z$$

$$x(t_f) = 0, \quad |u(t)| \leq L, t \in [\tau, t_f]$$

- Момент времени $\tau \in T_h$ фиксируется
- Состояние z выступает в качестве параметра

- Задача для позиции (τ, z) :

Функциональная форма задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} \sum_{s \in T_h(\tau)} h(u_1(s) + u_2(s)) &\rightarrow \min, \\ \sum_{s \in T_h(\tau)} d_h(s)(u_1(s) - u_2(s)) &= G(\tau)z, \\ 0 \leq u_i(s) \leq L, \quad i = 1, 2, \quad s \in T_h(\tau). \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} d_h(s) &= \int_s^{s+h} F(t_f, \theta) b \, d\theta \\ G(t_0) &= -F(t_f, t_0) \\ G(\tau) &= -F(t_f, \tau) \end{aligned}$$

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

- Соответствующая задача, как задача многопараметрического программирования (mp-LP):

Задача многопараметрического программирования

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T U &\rightarrow \min, \\ DU &= G(\tau)z, \\ 0 &\leq U \leq L\mathbf{1}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$D = [d_h(\tau) \quad -d_h(\tau) \quad \dots \quad d_h(t_f - h) \quad -d_h(t_f - h)],$$

$$U = [u_1(\tau) \quad u_2(\tau) \quad \dots \quad u_1(t_f - h) \quad u_2(t_f - h)]^T,$$

$\mathbf{1}$ — вектор из единиц соответствующей размерности.

- Multi-Parametric Toolbox (или **MPT**) — это набор инструментов и функций на основе Matlab с открытым исходным кодом для параметрической оптимизации и вычислительной геометрии. Инструментарий предлагает широкий спектр алгоритмов, скомпилированных в удобном и доступном для пользователя формате. Полученные в результате законы оптимального управления могут быть встроены в приложения в виде кода на C или развернуты на целевых платформах с использованием Real Time Workshop.

Содержание МРТ для задач управления:

- Моделирование динамических систем.
- Построение MPC-регуляторов для линейных систем на основе явных схем (на основе многопараметрического программирования).
- Анализ обратной связи, полученной MPC-регулятором.
- Развертывание регуляторов MPC на аппаратном уровне.

Применение параметрического программирования в задаче синтеза оптимальной линейной системы

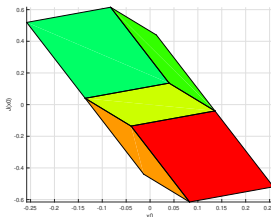
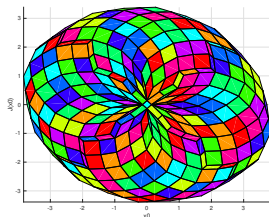
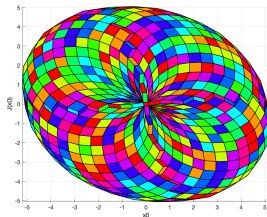
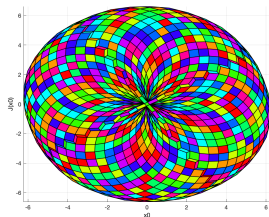
- В качестве примера синтеза рассмотрим задачу оптимизации колебательной системы второго порядка, критерием качества в которой является минимизация полного импульса управляющего воздействия:

Задача оптимизации колебательной системы второго порядка

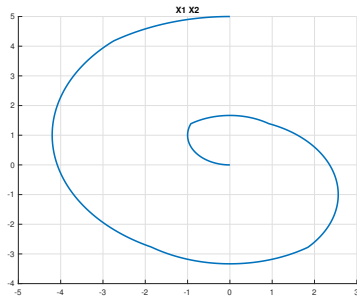
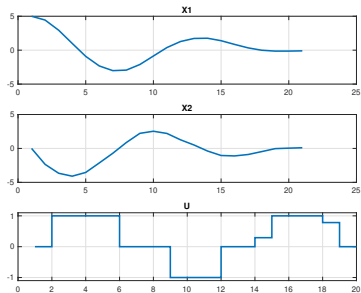
$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^{t_f} |u(t)| dt \rightarrow \min \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \end{aligned} \tag{17}$$

с ограничениями $-10 \leq x \leq 10$ и $-1 \leq u(t) \leq 1$, $t = 0, 1, \dots$

Применение параметрического программирования в задаче синтеза оптимальной линейной системы



Применение параметрического программирования в задаче синтеза оптимальной линейной системы



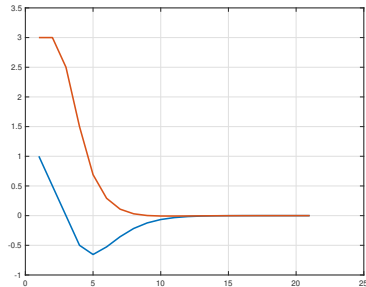
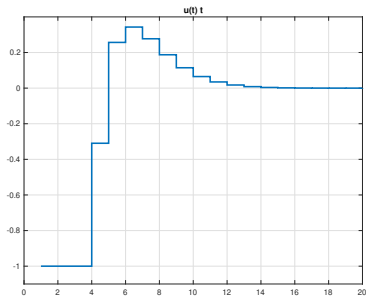
- Рассмотрим дискретную линейную систему управления:

Дискретная линейная система управления

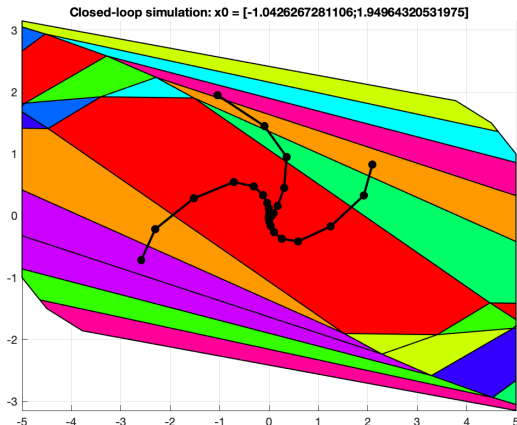
$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t), \quad (18)$$

с ограничениями $-5 \leq x(t) \leq 5$ и $-1 \leq u(t) \leq 1$, $t = 0, 1, \dots$

- Результаты реализации для $x = (3, 1)$



- Критические области и траектории замкнутой системы для нескольких начальных значений



Спасибо за внимание!