БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОУ: кафедра методов оптимального управления

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ И УПРАВЛЕНИЙ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Никита Е. Селях

Кафедра методов оптимального управления

Научный руководитель: Н.М.Дмитрук

Цели и задачи работы

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Предложить методы синтеза оптимальных обратных связей в линейной задаче оптимального управления на основе идей параметрического программирования, по аналогии с подходами, использующимися в явных схемах управления по прогнозирующей модели.
- Применить набор инструментов и функций на основе Matlab для параметрической оптимизации и вычислительной геометрии (Multi-Paramteric Toolbox).

Классический подход к построению оптимальных обратных связей

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Классический подход к построению оптимальной обратной связи продемонстрируем на примере следующей задачи:

Задача оптимального управления

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \ x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

$$x(t) \in X \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

$$u(t) \in U \in \mathbb{R}^r, \ t \in [t_0, t_f] \tag{4}$$

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние
$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление

Классический подход к построению оптимальных обратных связей

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Погрузим задачу (1) – (4) в семейство задач:

Семейство задач

$$\varphi(x(t_f)) \to \min \tag{5}$$
$$\dot{x} = f(x, u, t), \; x(\tau) = z$$
$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \; t \in [\tau, t_f]$$

$u^0(t|\tau, z), \; t \in T_\tau$, — оптимальная программа (5)
X_τ — множество состояний z, для которых (5) имеет решение

- Оптимальная обратная связь

$$u^0(\tau, z) = u^0(t|\tau, z), \; z \in X_\tau, \tau \in T \tag{6}$$

- Построение (6) — синтез оптимальной системы управления

Многопараметрическую задачу линейного программирования

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Рассмотрим многопараметрическую задачу линейного программирования (mp-LP)

Многопараметрическая задача линейного программирования

$$
\begin{aligned}
&J^0(x) = \min_z J(z, x) = c'z, \\
&Gz \leq W + Sx,
\end{aligned} \tag{7}
$$

$z \in \mathbb{R}^s$ — переменные оптимизации, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор параметров, $J(z, x) \in \mathbb{R}$ — целевая функция и $G \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $c \in \mathbb{R}^s$, $W \in \mathbb{R}^m$, и $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $K \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Tx \leq Z\}$— многогранное множество параметров, $K \subset R^n$

- $K^* \subseteq K$ — множество параметров $x \in K$, при которых задача (7) допустима.

Многопараметрическую задачу линейного программирования

- Свойства, которыми обладает решение в задаче многопараметрического линейного программирования

Теорема

Функция $J^0(x)$, $x \in K^*$, является выпуклой и кусочно-аффинной на K^*.
Если для каждого $x \in K^*$ оптимальное решение $z^0(x)$ единственно, то функция $z^0(x)$, $x \in K^*$, является непрерывной и кусочно-аффинной. В противном случае (в случае неединственного решения) всегда можно определить непрерывную и кусочно-аффинную функцию решения $z^0(x) \in Z^0(x)$, $x \in K^*$.

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

- Рассмотрим задачу оптимального управления линейной системой со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + bu$$

- с критерием качества

$$J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)| dt \to \min$$

- при условиях

$$x(0) = x_0, \; x(t_f) = 0, \quad |u(t)| \le L$$

$L > 0$ — амплитуда управления

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

- Семейство, в которое погружается задача для определения обратной связи, имеет вид

$$J(u) = \int_{\tau}^{t_f} |u(t)| dt \to \min \tag{8}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \; x(\tau) = z$$

$$x(t_f) = 0, \quad |u(t)| \leq L, t \in [\tau, t_f]$$

- Момент времени $\tau \in T_h$ фиксируется
- Состояние z выступает в качестве параметра

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

- Задача для позиции (τ, z):

Функциональная форма задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} &\sum_{s\in T_h(\tau)} h(u_1(s)+u_2(s)) \to \min, \\ &\sum_{s\in T_h(\tau)} d_h(s)(u_1(s)-u_2(s)) = G(\tau)z, \\ &0 \le u_i(s) \le L,\ i=1,2,\ s\in T_h(\tau). \end{aligned} \tag{9}$$

$d_h(s) = \int_s^{s+h} F(t_f,\theta)b\, d\theta$
$G(t_0) = -F(t_f,t_0)$
$G(\tau) = -F(t_f,\tau)$

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Соответствующая задача, как задача многопараметрического программирования (mp-LP):

Задача многопараметрического программирования

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}^T U \to \min,\\
&DU = G(\tau)z,\\
&0 \le U \le L\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$D = [d_h(\tau) \;\; -d_h(\tau) \;\; \dots \;\; d_h(t_f - h) \;\; -d_h(t_f - h)]$,
$U = [u_1(\tau) \; u_2(\tau) \;\; \dots \;\; u_1(t_f - h) \; u_2(t_f - h)]^T$,
$\mathbf{1}$ — вектор из единиц соответствующей размерности.

Multi-Parametric Toolbox

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Multi-Parametric Toolbox (или **MPT**) — это набор инструментов и функций на основе Matlab с открытым исходным кодом для параметрической оптимизации и вычислительной геометрии. Инструментарий предлагает широкий спектр алгоритмов, скомпилированных в удобном и доступном для пользователя формате. Полученные в результате законы оптимального управления могут быть встроены в приложения в виде кода на C или развернуты на целевых платформах с использованием Real Time Workshop.

Содержание MPT для задач управления:

- Моделирование динамических систем.
- Построение MPC-регуляторов для линейных систем на основе явных схем (на основе многопараметрического программирования).
- Анализ обратной связи, полученной MPC-регулятором.
- Развертывание регуляторов MPC на аппаратном уровне.

Применение параметрического программирования в задаче синтеза оптимальной линейной системы

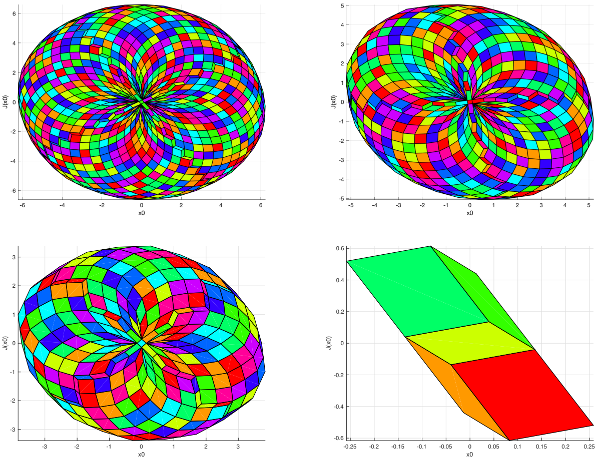
- В качестве примера синтеза рассмотрим задачу оптимизации колебательной системы второго порядка, критерием качества в которой является минимизация полного импульса управляющего воздействия:

Задача оптимизации колебательной системы второго порядка

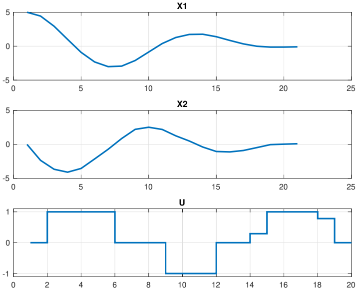
$$
\begin{aligned}
J(u) &= \int_0^{t_f} |u(t)| dt \to \min \\
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1 + u
\end{aligned}
\tag{11}
$$

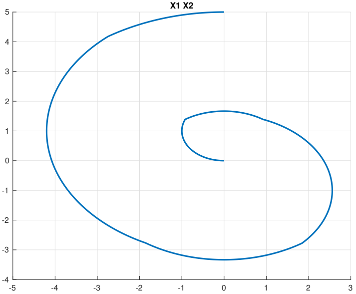
с ограничениями $-10 \leq x \leq 10$ и $-1 \leq u(t) \leq 1, \; t = 0, 1, \ldots$

Применение параметрического программирования в задаче синтеза оптимальной линейной системы



Применение параметрического программирования в задаче синтеза оптимальной линейной системы





Явный MPC

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Основную идею явного MPC покажем на примере задачи стабилизации линейной дискретной стационарной системы, для которой формулируется прогнозирующая задачи оптимального управления следующего вида:

Прогнозирующая задачи оптимального управления

$$J(x) = \min_{u(\cdot|t)} \sum_{t}^{t+N-1} L(x(k(t), u(k(t))) + F(x(t+N)t)), \qquad (12)$$

Явный MPC

При условиях:

Условия

$$x(k+1|\ t) = Ax(k \mid t) + Bu(k \mid t)$$

$$x(t \mid t) = x(t),$$

$$C_x x(k \mid t) \leq d_x,\ t \leq k \leq t+N-1,$$

$$C_u u(k \mid t) \leq d_u,\ C_x x(t+N \mid t) = d_f,$$

$$C_f x(t+N|\ t) \leq d_f.$$

$L(x,u) = x^T Qx + u^T Ru$ — квадратичная функция стоимости
$F(x) = x^T Qx,\ Q, R > 0$ — терминальная стоимость
$C_x, C_u, C_f, d_x, d_u, d_f$ задают ограничения на траекторию, управления и терминальное состояние.

$$J(x) = \min_z \frac{1}{2} z^T H z + \frac{1}{2} x^T \tilde{Y} x, \tag{13}$$

при условиях $Gz \leq W + sx$, где $\tilde{Y} = Y - FH^{-1}F^T$, $S := E + GH^{-1}F^T$.

Применение параметрического программи MPC

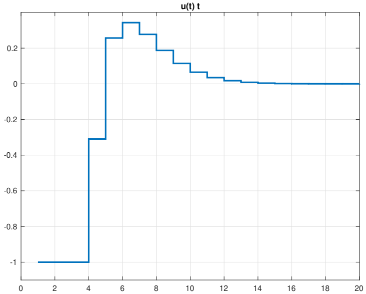
- Рассмотрим дискретную линейную систему управления:

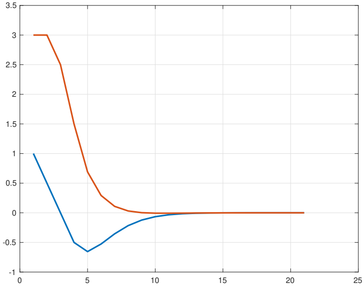
Дискретная линейная система управления

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t), \tag{14}$$

с ограничениями $-5 \leq x(t) \leq 5$ и $-1 \leq u(t) \leq 1$, $t = 0, 1, \ldots$.

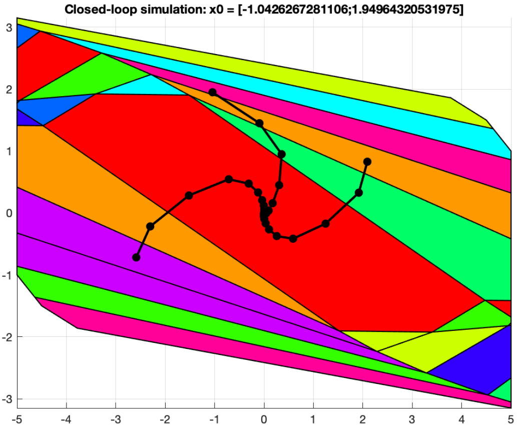
- Результаты реализации для $x = (3, 1)$





Применение параметрического программи MPC

- Критические области и траектории замкнутой системы для нескольких начальных значений



Заключение

МОУ: кафедра методов оптимального управления

Спасибо за внимание!