СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ И УПРАВЛЕНИЙ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Никита Е. Селях

Кафедра методов оптимального управления

Научный руководитель: Н.М.Дмитрук

Цели и задачи работы

- Предложить методы синтеза оптимальных обратных связей в линейной задаче оптимального управления на основе идей параметрического программирования, по аналогии с подходами, использующимися в явных схемах управления по прогнозирующей модели.
- Применить набор инструментов и функций на основе Matlab для параметрической оптимизации и вычислительной геометрии (Multi-Paramteric Toolbox).

Классическое определение синтеза оптимальных обратных связей

- Классический подход к построению оптимальной обратной связи продемонстрируем на примере следующей задачи:

Задача оптимального управления

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \; x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

$$x(t) \in X \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

$$u(t) \in U \in \mathbb{R}^r, \; t \in [t_0, t_f] \tag{4}$$

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние
$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление

Классическое определение синтеза оптимальных обратных связей

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Погрузим задачу (1) – (4) в семейство, зависящее от позиции (τ, z):

Семейство задач

$$\varphi(x(t_f)) \to \min \tag{5}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \ x(\tau) = z$$

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \ t \in [\tau, t_f]$$

$u^0(t|\tau, z), \ t \in T_\tau,$ — оптимальная программа (5)

X_τ — множество состояний z, для которых (5) имеет решение

- Оптимальная обратная связь

$$u^0(\tau, z) = u^0(t|\tau, z), \ z \in X_\tau, \tau \in T \tag{6}$$

- Построение (6) — синтез оптимальной системы управления

Управление по прогнозирующей модели Model Predictive Control (MPC)

- Линейная стационарная система управления

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots \tag{7}$$

- На состояния и управления наложены ограничения

$$C_x x(t) \le d_x,\ C_u u(t) \le d_u, \quad t = 0, 1, \dots \tag{8}$$

- Цель управления системой (7) — стабилизация, т.е. построение обратной связи $u(x)$, при которой замкнутая система

$$x(t+1) = g(x(t)) = Ax(t) + Bu(x(t)) \tag{9}$$

  будет асимптотически устойчива в заданном положении равновесия $x \equiv 0$, $u \equiv 0$
- При этом переходный процесс не нарушает ограничения (8)

Алгоритм MPC

- Базовый алгоритм MPC состоит в следующем:
  1. измерить состояние $x(t) \in X$ системы (7);
  2. решить прогнозирующую задачу с начальным условием $x(0|t) = x(t)$, получить ее решение $u^0(\cdot|t)$;
  3. подать на вход системы (7) управляющее воздействие:

$$u_{MPC}(t) := u^0(0|t). \tag{10}$$

Прогнозирующая задача для MPC

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Прогнозирующая задача строится для текущего момента времени t и текущего измеренного состояния $x(t)$
- Переменными прогнозирующей модели являются состояние $x(k|\ t)$, k $= \overline{t, t+N}$, и управления $u(k|\ t)$, $k = \overline{t, t+N-1}$

$$J(x(t)) = \min_{u(\cdot|t)} \sum_{k=t}^{t+N-1} L(x(k|\ t), u(k|\ t)) + F(x(t+N|\ t)) \tag{11}$$

$$x(k+1|\ t) = Ax(k|\ t) + Bu(k|\ t),\ \ x(t|\ t) = x(t)$$

$$C_x x(k|\ t) \le d_x,\ \ C_u u(k|\ t) \le d_u,\ \ \ k = \overline{t, t+N-1}$$

$$C_f x(t+N|\ t) \le d_f$$

$L(x, u) = x^T Q x + u^T R u$ — квадратичная функция стоимости этапа
$F(x) = x^T P x$ — терминальная стоимость
C_f, d_f задают ограничения на терминальное состояние

Явный MPC

- Прогнозирующая задача сводится к задаче квадратичного программирования, зависящей от параметра $x = x(t)$:

$$J(x) = \min_z \frac{1}{2} z^T H z + \frac{1}{2} x^T \tilde{Y} x \qquad (12)$$

$$Gz \leq W + Sx \qquad (13)$$

$H = 2(\tilde{R} + \Gamma^T \tilde{Q} \Gamma)$, $\tilde{Y} = Y - FH^{-1}F^T$
$G = \mathrm{diag}(C_x, \ldots, C_x)$, $W = [d_x, \ldots, d_x]^T$, $S = \mathrm{diag}(C_x, \ldots, C_x)\Omega + GH^{-1}F^T$
$Y = 2(Q + \Omega^T \tilde{Q} \Omega)$, $F = 2\Omega^T \tilde{Q} \Gamma$, $\tilde{Q} = \mathrm{diag}(Q, \ldots, Q, P)$

$$\Omega = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} B & 0 & \vdots & 0 \\ AB & B & \vdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ A^{N-1}B & A^{N-1}B & \vdots & B \end{bmatrix}$$

Многопараметрическое программирование

Многопараметрическая задача линейного программирования

$$
\begin{aligned}
J^0(x) &= \min_z J(z,x) = c'z \\
Gz &\le W + Sx
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$z \in \mathbb{R}^s$ — переменные оптимизации
$x \in \mathbb{R}^n$ — вектор параметров
$c \in \mathbb{R}^s$, $G \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $W \in \mathbb{R}^m$, и $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Tx \le Z\}$ — множество возможных значений параметров

- $K^* \subseteq K$ — множество параметров $x \in K$, при которых задача (14) допустима
- $J^0(x)$ — оптимальное значение задачи (14) при заданном $x \in K^*$
- $Z^0(x) = \{z \mid c'z = J^0(x)\}$ — множество оптимальных планов задачи

Свойства решений задачи многопараметрического линейного программирования

Теорема

- *Функция* $J^0(x)$, $x \in K^*$, *является выпуклой и кусочно-аффинной*
- *Если для каждого* $x \in K^*$ *оптимальное решение* $z^0(x)$ *единственно, то функция* $z^0(x)$, $x \in K^*$, *является непрерывной и кусочно-аффинной*
- *В противном случае (в случае неединственного решения) всегда можно определить непрерывную и кусочно-аффинную функцию решения* $z^0(x) \in Z^0(x)$, $x \in K^*$

- Многогранник K^* единственным образом разбивается на области аффинности функции $z^0(x)$
- Эти области называются критическими областями

Multi-Parametric Toolbox

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Для построения критических областей и законов обратной связи используется Multi-Parametric Toolbox (или **MPT**)
- MPT — это набор инструментов и функций на основе Matlab с открытым исходным кодом для параметрической оптимизации и вычислительной геометрии
- MPT предлагает широкий спектр алгоритмов, скомпилированных в удобном и доступном для пользователя формате
- Полученные в результате законы оптимального управления могут быть встроены в приложения в виде кода на C или развернуты на целевых платформах с использованием Real Time Workshop

Применение параметрического программирования в MPC

- Дискретная линейная система управления

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t), \tag{15}$$

- Ограничения

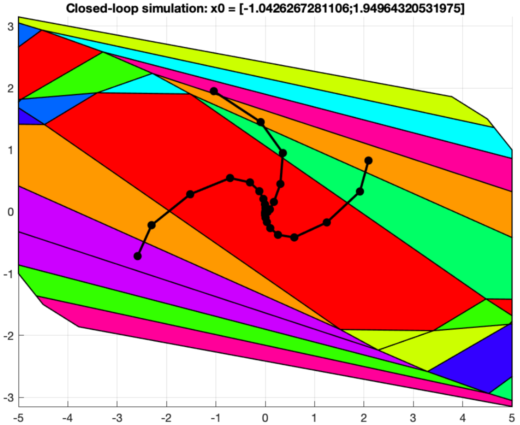
$$-5 \leq x(t) \leq 5; \ -1 \leq u(t) \leq 1, \ t = 0, 1, \ldots$$

- Критерий качества для прогнозирующей задачи

$$J_z^*(x(0)) = \min_z J(z, x) = \frac{1}{2} z^T H z$$

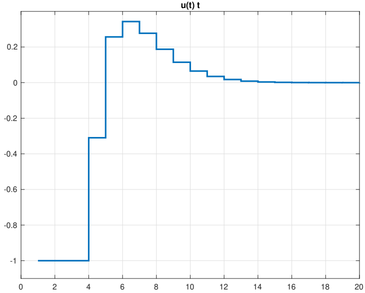
Применение параметрического программирования в MPC

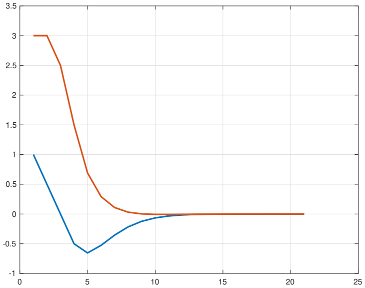
- Критические области и траектории замкнутой системы для нескольких начальных значений



Применение параметрического программирования в MPC

- Результаты реализации для $x = (3, 1)$





Применение параметрического программирования в задачах синтеза

- Рассмотрим задачу оптимального управления линейной системой со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{16}$$

- с критерием качества

$$J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)|dt \to \min \tag{17}$$

- при условиях

$$x(0) = x_0, \;\; x(t_f) = 0, \quad |u(t)| \leq L \tag{18}$$

$L > 0$ — амплитуда управления

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

- Семейство, в которое погружается задача для определения обратной связи:

$$J(u) = \int_{\tau}^{t_f} |u(t)| dt \to \min \tag{19}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \ \ x(\tau) = z$$

$$x(t_f) = 0, \quad |u(t)| \le L, t \in [\tau, t_f]$$

- Момент времени $\tau \in T_h$ фиксируется
- Состояние z выступает в качестве параметра

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Задача для позиции (τ, z) в функциональной форме (исключены состояния x, переменными оптимизации являются только управления u)

Функциональная форма задачи оптимального управления

$$\begin{gathered}\sum_{s\in T_h(\tau)} h(u_1(s)+u_2(s)) \to \min \\ \sum_{s\in T_h(\tau)} d_h(s)(u_1(s)-u_2(s)) = G(\tau)z \\ 0 \le u_i(s) \le L,\ i=1,2,\ s\in T_h(\tau)\end{gathered} \tag{20}$$

$d_h(s) = \int_s^{s+h} F(t_f,\theta)b\, d\theta$
$G(\tau) = -F(t_f,\tau)$

Применение параметрического программирования в задачах синтеза

- Соответствующая задача, как задача многопараметрического программирования (mp-LP):

Задача многопараметрического программирования

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}^T U \to \min \\ &DU = G(\tau) z \\ &0 \le U \le L\mathbf{1} \end{aligned} \tag{21}$$

$D = [d_h(\tau) \;\; -d_h(\tau) \;\; \dots \;\; d_h(t_f - h) \;\; -d_h(t_f - h)]$
$U = [u_1(\tau) \; u_2(\tau) \;\; \dots \;\; u_1(t_f - h) \; u_2(t_f - h)]^T$
$\mathbf{1}$ — вектор из единиц соответствующей размерности

Пример

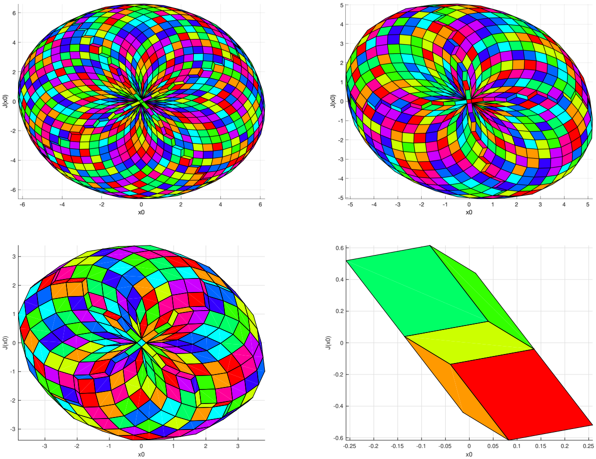
- В качестве примера синтеза рассмотрим задачу оптимизации колебательной системы второго порядка, критерием качества в которой является минимизация полного импульса управляющего воздействия:

Задача оптимизации колебательной системы второго порядка

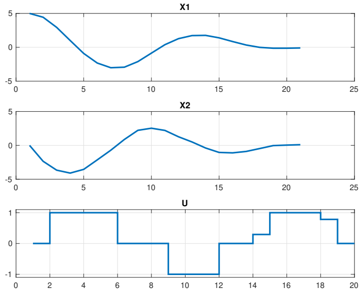
$$
\begin{aligned}
J(u) &= \int_0^{t_f} |u(t)| dt \to \min \\
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1 + u
\end{aligned}
\tag{22}
$$

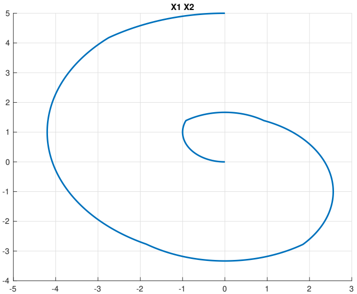
с ограничениями $-10 \le x \le 10$ и $-1 \le u(t) \le 1, \;\; t = 0, 1, \ldots$

Пример



Пример





Заключение

- Предложены пути решения, включающие в себя использоваение MPT, задачи синтеза оптимальной системы второго порядка
- Проведен анализ методов параметрического программирования
- Изучены основные результаты теории оптимального управления и подход к построению реализаций оптимальных обратных связей.