СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ И УПРАВЛЕНИЙ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Никита Е. Селях

Классический подход к построению оптимальных обратных связей

Классический подход к построению оптимальной обратной связи продемонстрируем на примере следующей задачи:

Задача

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

$$x(t) \in X \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

$$u(t) \in U \in \mathbb{R}^r,\ t \in [t_0, t_f] \tag{4}$$

Классический подход к построению оптим... обратных связей

Погрузим задачу (1) – (4) в следующее семейство задач:

Семейство задач

$$\varphi(x(t_f)) \to \min, \tag{5}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \;\; x(\tau) = z,$$

$$x(t) \in X, \;\; u(t) \in U, \;\; t \in [\tau, t_f].$$

Пусть $u^0(t|\tau, z), \;\; t \in T_\tau,$ — оптимальная программа задачи (5) для позиции (τ, z); X_τ — множество состояний z таких, что для позиции (τ, z) существуют программные решения задачи (5).

Функция

$$u^0(\tau, z) = u^0(t|\tau, z), \;\; z \in X_\tau, \tau \in T, \tag{6}$$

— оптимальная обратная связь.

Построение (6) — синтез оптимальной системы управления.

Применение параметрического программи задачах синтеза

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной системой со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

со следующим критерием качества

$$J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)| dt \to \min,$$

при условиях

$$x(0) = x_0, \ x(t_f) = 0, \quad |u(t)| \le L,$$

где $L > 0$ — амплитуда управления.

Применение параметрического программи задачах синтеза

Семейство, в которое погружается задача для определения обратной связи, имеет вид

$$J(u) = \int_{\tau}^{t_f} |u(t)| dt \to \min, \tag{7}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \; x(\tau) = z,$$

$$x(t_f) = 0, \quad |u(t)| \leq L, t \in [\tau, t_f].$$

Здесь z выступает в качестве параметра.

МОУ: кафедра методов оптимального управления

Чтобы избавиться от модуля в подынтегральном выражении представим $u(t)$ в виде:

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t),$$

тогда $|u(t)| = u_1(t) + u_2(t)$, где $0 \leq u_1(t) \leq 1, \; 0 \leq u_2(t) \leq 1$.
Таким образом, в классе дискретных оптимальных управлений получаем криерий качества:

$$\int_{\tau}^{t_f} u_1(t) + u_2(t)dt = \sum_{s \in T_h(\tau)} h(u_1(s) + u_2(s)) \to \min.$$

Применение параметрического программи[рования в] задачах синтеза

Тогда в результате проделанных преобразований привели задачу (7) к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s \in T_h(\tau)} h(u_1(s) + u_2(s)) \to \min, \\
&\dot{x} = Ax + bu_1 - bu_2, \\
&x(\tau) = z, \quad x(t_f) = 0, \\
&0 \leq u_1(s) \leq L, \; 0 \leq u_1(s) \leq L, \; s \in T_h(\tau).
\end{aligned}
$$

Применение параметрического программи задачах синтеза

МОУ: кафедра методов оптимального управления

Запишем по формуле Коши терминальное состояние:

$$x(t_f) = F(t_f, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} F(t_f, \theta)b(u_1(\theta) - u_2(\theta))d\theta.$$

В силу дискретности управляющего воздействия, интеграл на промежутке $T = [t_0, t_f]$ представим в виде суммы интегралов на промежутках $[s, s+h],\ s \in T_h$.

Теперь терминальные ограничения:

$$x(t_f) = F(t_f, t_0)x_0 + \sum_{s \in T_h} \int_{s}^{s+h} F(t_f, \theta)b\ d\theta(u_1(s) - u_2(s)) = 0.$$

Применение параметрического программи[рования в] задачах синтеза

Введем обозначение:

$$d_h(s) = \int_s^{s+h} F(t_f, \theta) b \, d\theta,$$

$$G(t_0) = -F(t_f, t_0), \quad G(\tau) = -F(t_f, \tau).$$

Задача для позиции (τ, z):

$$\sum_{s \in T_h(\tau)} h(u_1(s) + u_2(s)) \to \min,$$

$$\sum_{s \in T_h(\tau)} d_h(s)(u_1(s) - u_2(s)) = G(\tau) z,$$

$$0 \le u_i(s) \le L, \ i = 1, 2, \ s \in T_h(\tau).$$

Полученные задачи — функциональная форма задачи оптимального управления.

Применение параметрического программи… задачах синтеза

Соответствующая задача, как задача многопараметрического программирования (mp-LP):

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}^T U \to \min,\\
&DU = G(\tau) z,\\
&0 \le U \le L\mathbf{1},
\end{aligned}
$$

где

$$
D = [d_h(\tau) \;\; -d_h(\tau) \;\; \dots \;\; d_h(t_f - h) \;\; -d_h(t_f - h)],
$$

$$
U = [u_1(\tau) \; u_2(\tau) \;\; \dots \;\; u_1(t_f - h) \; u_2(t_f - h)]^T,
$$

$\mathbf{1}$ — вектор из единиц соответствующей размерности.

Multi-Parametric Toolbox

Multi-Parametric Toolbox (или MPT) — это набор инструментов и функций на основе Matlab с открытым исходным кодом для параметрической оптимизации и вычислительной геометрии. Инструментарий предлагает широкий спектр алгоритмов, скомпилированных в удобном и доступном для пользователя формате. Полученные в результате законы оптимального управления могут быть встроены в приложения в виде кода на C или развернуты на целевых платформах с использованием Real Time Workshop.

Содержание MPT для задач управления можно разделить на четыре модуля:

- Моделирование динамических систем.
- Построение MPC-регуляторов для линейных систем на основе явных схем (на основе многопараметрического программирования).
- Анализ обратной связи, полученной MPC-регулятором.
- Развертывание регуляторов MPC на аппаратном уровне.

Применение параметрического программи задаче синтеза оптимальной линейной системы

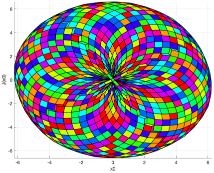
В качестве примера синтеза рассмотрим задачу оптимизации колебательной системы второго порядка, критерием качества в которой является минимизация полного импульса управляющего воздействия:

$$J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)| dt \to \min,$$

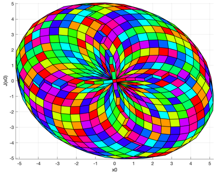
$$\dot{x_1} = x_2,$$

$$\dot{x_2} = -x_1 + u,$$

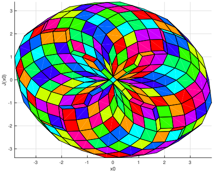
Применение параметрического программи… задаче синтеза оптимальной линейной системы



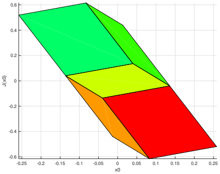
(a) N = 20, $\tau = 0$



(b) N = 15, $\tau = 2.5$

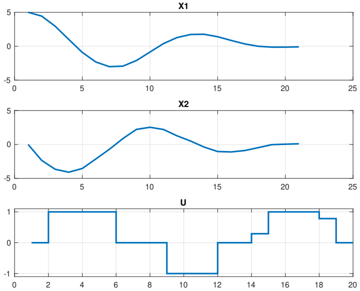


(c) N = 10, $\tau = 5$

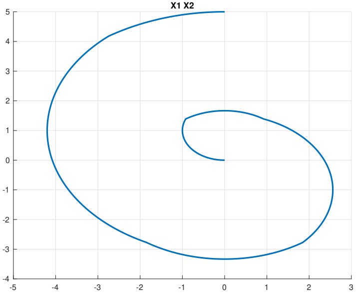


(d) N = 1, $\tau = 9.5$

Применение параметрического программи… задаче синтеза оптимальной линейной системы



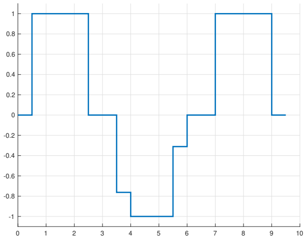
(a) Траектории и управление для $x_0 = (0, 5)$



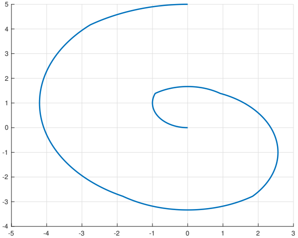
(b) Фазовые траектории для $x_0 = (0, 5)$

Применение параметрического программи задаче синтеза оптимальной линейной системы

```
u0 = linprog([ch', ch'],[],[],[dh,-dh], g0,zeros(2*N,1),L*ones(2*N,1)),
```



(a) Оптимальная программа



(b) Фазовый портрет оптимальной траектории

Применение параметрического программи MPC

Рассмотрим дискретную линейную систему управления:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t), \tag{8}$$

с ограничениями $-5 \le x(t) \le 5$ и $-1 \le u(t) \le 1$, $t = 0, 1, \ldots$.

Применение параметрического программи MPC

Матрицы:

A = [1, 1; 0, 1];

B = [1; 0.5];

Задаем линейную модель с дискретным временем:

sys = ss(A,B,[],[],1); model = LTISystem(sys);

Ограничения на управления и состояния:

model.x.min = [-5; -5]; model.x.max = [5; 5]; model.y.min = [-10; -10]; model.y.max = [10; 10]; model.u.min = -1; model.u.max = 1;

Параметры критерия качества:

R = 1; model.u.penalty = QuadFunction(R); model.x.penalty = QuadFunction(eye(2));

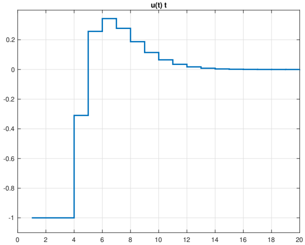
Терминальные значения:

P = model.LQRPenalty; Tset = model.LQRSet;

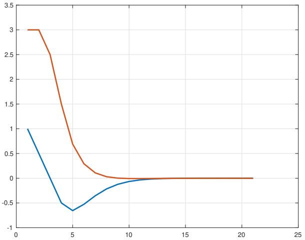
Наконец, формулируем задачу MPC:

ctrl = MPCController(model,7);

Применение параметрического программи… MPC



(a) Управляющее воздействие



(b) Траектории X

Рис.: Результаты реализации для $x = (3, 1)$

Применение параметрического программи... MPC

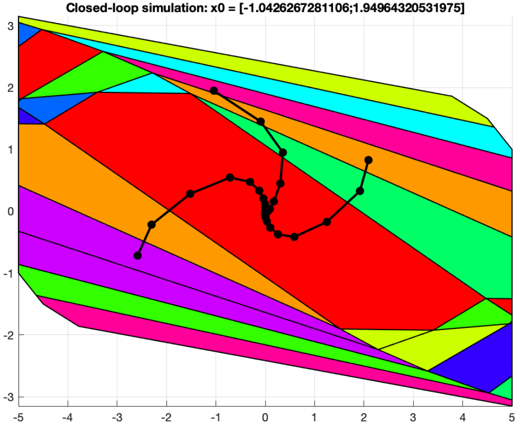


Рис.: Критические области и траектории замкнутой системы для нескольких начальных значений

Спасибо за внимание!