**Università degli Studi di Trieste**
**Laurea Triennale in Intelligenza Artificiale e Data Analytics**
**A. A. 2024–2025**
**Analisi Numerica**

# ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE NUMERICA E RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

**Esercizio 1**

1. Si dia la definizione di norma matriciale.
2. Si dia la definizione di norma matriciale indotta. Si dimostri che l'applicazione così definita è una norma.

**Esercizio 2** Si dimostri che ogni norma matriciale indotta $||\cdot||$ è compatibile con la norma vettoriale della quale è dedotta.

**Esercizio 3** Sia $||\cdot||$ una norma matriciale compatibile con una norma vettoriale che indicheremo con lo stesso simbolo. Si dimostri che $\rho(A) \leq ||A||$.

**Esercizio 4** Si determini $\|Q\|_2$ per $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale utilizzando la definizione della norma 2 di matrice indotta dalla norma 2 vettoriale.

**Esercizio 5** Si dimostri che $||I_n|| = 1$ dove $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è la matrice identità di ordine $n$ e $||\cdot||$ è la norma su $\mathbb{R}^{n\times n}$ indotta dalla norma $||\cdot||_{\mathbb{R}^n}$ su $\mathbb{R}^n$.

**Esercizio 6** Si dica se la norma di Frobenius è una norma di matrice indotta. Si giustifichi accuratamente la risposta.

**Esercizio 7** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

a) calcolare le norme $\|A\|_1$ , $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ (di Frobenius). Dare una maggiorazione di $\rho(A)$.

b) dire se esistono autovalori reali

c) usando il teorema di Gershgorin, disegnare la regione piana $R$ contenente gli autovalori di $A$

d) dire se un autovalore può aver parte reale negativa

e) dire se un autovalore può avere parte reale uguale a 2.5.

*Nota*: non si calcoli il polinomio caratteristico. Per rispondere ai punti c)-e) si usi il Teorema di Gershgorin.

**Esercizio 8** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$,
si risponda ai seguenti quesiti senza calcolare il polinomio caratteristico di $A$:

a) calcolare le norme $\|A\|_1$ , $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ (di Frobenius). Dare una maggiorazione di $\rho(A)$.

b) dire se esistono autovalori reali

c) usando il teorema di Gershgorin, disegnare la regione piana $R$ contenente gli autovalori di $A$

d) dire se un autovalore può aver parte reale negativa

e) dire se $3 + i$ è autovalore di $A$.

**Esercizio 9** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$,
si risponda ai seguenti quesiti senza calcolare il polinomio caratteristico di $A$:

a) calcolare le norme $\|A\|_1$ , $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ (di Frobenius).

b) usando il teorema di Gershgorin, disegnare la regione piana $R$ contenente gli autovalori di $A$

c) dire se un autovalore può aver parte reale uguale a 7

d) dire se $A$ è invertibile.

**Esercizio 10** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

a) calcolare le norme $\|A\|_1$ , $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ (di Frobenius).

b) usando il teorema di Gershgorin, e il fatto che $A$ è simmetrica, disegnare la regione piana $R$ contenente gli autovalori di $A$

c) si dica se $A$ è definita positiva

d) verificare quanto trovato al punto b) calcolando gli autovalori di A con il comando `eig` di Matlab.

e) trovare una matrice ortogonale che diagonalizza $A$.

**Esercizio 11** Si dimostri che, per ogni norma matriciale indotta, si ha $||A^{-1}|| \geq \dfrac{1}{||A||}$.

**Esercizio 12** Si dimostri che, per ogni norma matriciale indotta, si ha $\kappa(A) \geq 1$, essendo $\kappa(A)$ il numero di condizionamento di $A$ relativo a tale norma.

**Esercizio 13** Sia $x$ la soluzione del sistema $Ax = b$ e $\hat{x} = x + \delta x$ una sua approssimazione, si dimostri che
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|},$$
dove $r = b - A\hat{x}$ è il residuo e $\kappa(A)$ il numero di condizionamento.

**Esercizio 14**
1. Calcolare la norma infinito di una matrice elementare di Gauss $L_k = I - l_k e_k^T$, con $I$ la matrice identità, $l_k = (0, 0, \ldots, 0, l_{k+1,k}, l_{k+2,k}, \ldots, l_{n,k})^T$ ed $e_k$ il k-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.
2. Si dimostri che $L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$.

**Esercizio 15** Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($A = A^T$) invertibile, si dimostri che $\kappa_2(A)$ (indice o numero di condizionamento spettrale) è
$$\kappa_2(A) = \frac{\max |\lambda(A)|}{\min |\lambda(A)|} = \rho(A)\rho(A^{-1})$$

**Esercizio 16** Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva, si dimostri che $\kappa_2(A) = \dfrac{\max \lambda(A)}{\min \lambda(A)}$.

**Esercizio 17** Dimostrare che per una matrice ortogonale $Q$:

*1.* $\kappa_2(Q) = 1$

*2.* $||QA||_2 = ||A||_2$.

**Esercizio 18** Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile si dimostri che $\kappa_2(A^T A) = (\kappa_2(A))^2$.

**Esercizio 19** Si dimostri che se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è nonsingolare allora se la fattorizzazione LU di $A$ esiste essa è unica.
Che condizioni devono essere verificate perchè tale fattorizzazione esista?

**Esercizio 20**

*1.* Cosa significa se al passo $k$-esimo del metodo di eliminazione di Gauss si ha $a_{ik}^{(k)} = 0$, per $k+1 \leq i \leq n$?

*2.* Cosa significa se al passo $k$-esimo del metodo di eliminazione di Gauss si ha $a_{kk}^{(k)} = 0$ e $a_{ik}^{(k)} = 0$, per $k+1 \leq i \leq n$?

**Esercizio 21** Quali sono gli scopi del pivoting nel metodo di eliminazione di Gauss?

**Esercizio 22** Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. calcolarne la fattorizzazione LU.
2. Si verifichi la correttezza della fattorizzazione ottenuta.
3. Usando la fattorizzazione, calcolare $\det(A^2)$
4. Si dica, giustificando la risposta, perchè esiste la fattorizzazione LU di $A$.

**Esercizio 23** Dato il sistema lineare $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Risolvere il sistema mediante la fattorizzazione $LU$ della matrice $A$
2. Usando la fattorizzazione, calcolare $\det(A)$.

**Esercizio 24** Dimostrare che ogni matrice quadrata $A$ simmetrica e definita positiva può essere fattorizzata come $A = RR^T$ con $R$ matrice triangolare inferiore (Fattorizzazione di Cholesky).

**Esercizio 25** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Verificare che è definita positiva.
2. (**Facoltativo**) Calcolare la fattorizzazione di Cholesky $RR^T$.

[**Soluzione** ]

1. Calcoliamo i minori principali di testa:

$$\det A_1 = 2 > 0, \qquad \det A_2 = 4 - 1 = 3 > 0, \qquad \det A_3 = \det A = 4 > 0$$

2. 
$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ 0 & r_{22} & r_{32} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo schema più efficiente è quello di calcolare $R$ per colonne. Eseguiamo il prodotto righe per colonne. Si trova:

$$\text{Prima colonna di R} : \begin{cases} r_{11}^2 & = a_{11} = 2 \\ r_{21}r_{11} & = a_{21} = 1 \\ r_{31}r_{11} & = a_{31} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{11} = \sqrt{2} \\ r_{21} = 1/\sqrt{2} \\ r_{31} = 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{Seconda colonna di R} : \begin{cases} r_{21}^2 + r_{22}^2 & = a_{22} = 2 \\ r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} & = a_{32} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{22} = \sqrt{3/2} \\ r_{32} = 1/\sqrt{6}. \end{cases}$$

$$\text{Terza colonna di R} : \{ \; r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = \quad a_{33} = 2 \quad \Rightarrow \{ \; r_{33} = \sqrt{4/3}.$$

Si è ottenuto

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \sqrt{4/3} \end{pmatrix}$$

**Esercizio 26** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Senza calcolare il polinomio caratteristico, cosa si può dire dello spettro di $A$?
2. Calcolare $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, e fornire una maggiorazione per il raggio spettrale $\rho(A) = |\lambda_1|$.
3. Usando il teorema di Gershgorin, disegnare la regione piana $R$ contenente gli autovalori di $A$ e restringere tale regione utilizzando quanto detto al punto 1.
4. Dimostrare che esiste la fattorizzazione di Cholesky di $A$.

**Esercizio 27** Dato il sistema $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $rg(A) = n$, dimostrare che il vettore $x^\star$ tale che $||Ax^\star - b|| \leq ||Ay - b||$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, è l'unica soluzione del sistema delle equazioni normali.

**Esercizio 28** Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, $rg(A) = n$, e sia $A = Q_1 R_1$ la sua fattorizzazione QR con $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, le cui colonne formano un sistema ortonormale e $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, triangolare superiore (thin QR). Si dimostri che $R_1 = R^T$, essendo $R$ il fattore triangolare inferiore della fattorizzazione di Cholesky della matrice del sistema delle equazioni normali, $A^T A$.
A partire da tale risultato si dimostri inoltre che la fattorizzazione $A = Q_1 R_1$ è unica.

**Esercizio 29** Sia data la matrice

$$A(\beta) = \begin{bmatrix} \beta & 3 & 0 \\ 1.5 & \beta & 1.5 \\ 0 & 2 & \beta \end{bmatrix}$$

1. Sapendo che $\lambda_1 = 0.2614, \lambda_3 = 5.7386$ si trovi il valore di $\beta$ per il quale $\lambda_2 = 3$.
2. Con il valore di $\beta$ trovato al punto (a) si indichi il metodo numerico più appropriato per risolvere il sistema $Ax = b$, in funzione delle caratteristiche della matrice $A$.

**Esercizio 30** Si descrivano tre metodi diversi per la risoluzione di un sistema sovradeterminato, e si elenchino i vantaggi e gli svantaggi di ognuno di essi.

**Esercizio 31** Si dia la definizione di pseudo-inversa di Moore-Penrose $A^+$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $Rg(A) = n$. La si scriva in termini della matrice e in termini di una sua decomposizione ai valori singolari.

**Esercizio 32** È dato il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

1. Si risolva il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss senza pivoting (perché non è necessario?). Ottenere le matrici $L$ e $U$ della fattorizzazione e verificare la correttezza della soluzione del sistema.
2. Usando la fattorizzazione trovata si calcoli $\det A^{-1}$.

[**Soluzione** ]

1. La matrice è simmetrica definita positiva, esiste la fattorizzazione LU anche senza pivoting. Il metodo di eliminazione di Gauss procede in questo modo

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & | & 8 \\ 2 & 4 & 1 & | & 13 \\ 0 & 1 & 4 & | & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & | & 8 \\ 0 & 3 & 1 & | & 9 \\ 0 & 1 & 4 & | & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & | & 8 \\ 0 & 3 & 1 & | & 9 \\ 0 & 0 & 11/3 & | & 11 \end{bmatrix}$$

   Il sistema finale triangolare superiore ha come soluzione il vettore

$$x = [1 \ \ 2 \ \ 3]^T$$

   che è soluzione del sistema iniziale come si può verificare calcolando per esempio $r = b - Ax = [0 \quad 0 \quad 0]^T$. Si sono inoltre trovate le seguenti matrici della fattorizzazione LU:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 11/3 \end{bmatrix}.$$

2. $$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{\det U} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 11/3} = \frac{1}{44} = 2.272710^{-2}.$$

**Esercizio 33** Data una matrice $A$ simmetrica definita positiva, si determinino le matrici $L$ e $U$ della fattorizzazione LU di $A$ a partire dal fattore triangolare della sua fattorizzazione di Cholesky.

**Esercizio 34** Si consideri la matrice dipendente da un parametro reale $\alpha$

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 \\ 12 & 34 & 11 \\ 8 & 11 & \alpha \end{bmatrix}$$

Si dica per quali valori di $\alpha$ la matrice $A$ è definita positiva.

**Esercizio 35** Sia dato il sistema lineare $Ax = b$, dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7/2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 18 \\ 11 \end{bmatrix}$$

1. Si risolva il sistema mediante il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale. Si producano le matrici $L, U$ e la matrice di permutazione $P$. Verificare inoltre che $PA = LU$.

2. Usando la fattorizzazione si calcoli $\det A^{-1}$.

3. Usando la fattorizzazione si risolva $Ax = c$ dove $A$ è la matrice data e

$$c = \begin{bmatrix} 13/2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 36** 1. Si risolva il sistema lineare $Ax = b$, dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 1 \\ 0.08 & 0.9 & 2.2 \\ -0.16 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 3.26 \\ 0.88 \end{bmatrix}$$

mediante il metodo di eliminazione di Gauss. Si ricavino le matrici $L$ e $U$ della fattorizzazione LU.

2. Usando la fattorizzazione calcolare $\det A^{-1}$.

3. Usando la fattorizzazione risolvere il sistema $Ax = b$, dove $A$ è la stessa matrice del punto (1) ma $b = [2.5, 4.9, 1.6]^T$.

**Esercizio 37** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. calcolarne la fattorizzazione LU.
2. Si verifichi la correttezza della fattorizzazione ottenuta.
3. Usando la fattorizzazione, calcolare $\det(A^2)$
4. Si dica, giustificando la risposta, perchè esiste la fattorizzazione LU senza scambi di righe.

**Esercizio 38** È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 17 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

1. Dire perché è possibile fattorizzare $A$ nel prodotto $L \times U$ senza scambi di righe.
2. Calcolare la fattorizzazione $LU$ di $A$ e usarla per risolvere il sistema $Ax = b$ con $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 24 \end{bmatrix}$.
3. Dimostrare che esiste la fattorizzazione di Cholesky di $A = RR^T$.
4. Descrivere la relazione che lega $R$ con $L$ e $R^T$ con $U$.

[**Soluzione** ]

1. Il teorema visto sull'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU afferma che essa esiste se tutti i minori principali di testa della matrice sono non nulli. Si tratta dunque di calcolare i determinanti delle matrici quadrate di dimensione crescente che si ottengono da $A$ partendo dall'angolo in alto a sinistra. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \det A_1 &= 9 \neq 0; \\ \det A_2 &= 9 \cdot 17 - 3 \cdot 3 = 144 \neq 0; \\ \det A &= 9\,(17 \cdot 11 - 5 \cdot 5) - 3\,(3 \cdot 11 - 3 \cdot 5) + 3\,(3 \cdot 5 - 17 \cdot 3) \\ &= 1458 - 54 - 108 = 1296 > 0. \end{aligned}$$

I minori principali di testa sono tutti positivi (e quindi non nulli).

2. Scriviamo la matrice in forma aumentata:

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 17 & 5 & 24 \\ 3 & 5 & 11 & 24 \end{array}\right]$$

Calcoliamo i primi due moltiplicatori relativi agli elementi $a_{21}$ e $a_{31}$ per annullare i corrispondenti elementi nella matrice $A$: $l_{21} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $l_{31} = \frac{1}{3}$, $l_{31}$. Sottraendo dunque alla 2a riga $l_{21}$ volte la prima e alla 3a riga $l_{31}$ volte la prima si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 17 & 5 & 24 \\ 3 & 5 & 11 & 24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 4 & 24 \\ 0 & 4 & 10 & 24 \end{array}\right]$$

L'ultimo passo del metodo di eliminazione di Gauss consiste nel calcolare $l_{32} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ e sottrarre alla 3a riga la seconda moltiplicata per $l_{32}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 17 & 5 & 24 \\ 3 & 5 & 11 & 24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 4 & 24 \\ 0 & 4 & 10 & 24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right]$$

La soluzione del sistema si ottiene per sostituzione all'indietro:

$$x_3 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = -1.$$

Le matrici $L$ ed $U$ della fattorizzazione sono:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

3. Nel punto 1. si è già dimostrato che $A$ è simmetrica definita positiva.

   (Facoltativo, non richiesto). Ne calcoliamo ora la fattorizzazione di Cholesky uguagliando coefficiente a coefficiente $A$ con il prodotto $RR^T$:

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 17 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ 0 & r_{22} & r_{32} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

   Si ottiene

$$\begin{aligned} 9 = a_{11} = r_{11}^2 \quad &\Longrightarrow \quad r_{11} = 3 \\ 3 = a_{12} = r_{11}r_{21} \quad &\Longrightarrow \quad r_{21} = 1 \\ 3 = a_{13} = r_{11}r_{31} \quad &\Longrightarrow \quad r_{31} = 1 \\ 17 = a_{22} = r_{21}^2 + r_{22}^2 \quad &\Longrightarrow \quad r_{22} = \sqrt{17-1} = 4 \\ 5 = a_{23} = r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} \quad &\Longrightarrow \quad r_{32} = \frac{5-1}{4} = 1 \\ 11 = a_{33} = r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 \quad &\Longrightarrow \quad r_{33} = \sqrt{11-1-1} = 3 \end{aligned}$$

La matrice $R$ della fattorizzazione è pertanto:

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. La fattorizzazione di Cholesky si ottiene dalla LU definendo $D = \text{diag}(U)$ la matrice con gli elementi diagonali di $U$ e $D^{1/2}$ la sua radice quadrata.

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Si ha la relazione $A = LU = LD^{1/2}D^{-1/2}U$. Ponendo $R = LD^{1/2}$ si ha che $R^T = D^{-1/2}U$. Verifichiamo la relazione $R = LD^{1/2}$ direttamente sulle matrici ottenute:

$$LD^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = R.$$

**Esercizio 39** 1. Sia dato il sistema lineare $Ax = b$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & 15/2 & 0 \\ -2 & 4 & 47/6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 53 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando il teorema di Gershgorin, si disegni la più piccola regione del piano complesso contenente gli autovalori di $A$.

(b) Usando l'informazione al punto precedente, si dica se $A$ è invertibile. Si giustifichi accuratamente la risposta.

(c) Perchè esiste certamente la fattorizzazione $LU$ di $A$ (senza scambi di righe)?

(d) Si risolva il sistema dato con il metodo di eliminazione di Gauss, si producano le matrici della fattorizzazione.

(e) Usando la fattorizzazione, si calcoli $\det A^{-1}$ e si risolva $Ax = d$ con $d = [0,\ 30, 63]^T$.

**Esercizio 40** Sia dato il sistema lineare $Ax = b$, dove, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1/2 \\ 6 & \alpha & 3 \\ -3 & 12 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 44 \\ 24 \end{bmatrix}$$

1. Si ricavi almeno un valore di $\alpha$ per cui la matrice $A$ non ammette la fattorizzazione LU.

2. **Si usi ora** $\alpha = 4$. Si risolva il sistema mediante il metodo di eliminazione di Gauss. Si producano le matrici $L$ ed $U$ della fattorizzazione. Usando la fattorizzazione si calcoli $\det(A^{-1})$.