Analisi Numerica

Condizionamento dei sistemi lineari

Ángeles Martínez Calomardo

amartinez@units.it

Laurea Triennale in Intelligenza Artificiale e Data Analytics

A.A. 2024–2025

Condizionamento dei sistemi lineari

Consideriamo il sistema di equazioni lineari $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

Sia $\delta x = e = \bar{x} - x$ l'errore sul risultato in seguito ad una perturbazione δb sul termine noto b (per semplicità, assumiamo $\delta A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$). Possiamo pensare dunque che il sistema che si risolve sia

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \tag{1}$$

Da cui, poichè $Ax = b$ si ha

$$A\delta x = \delta b; \qquad \delta x = A^{-1}\delta b \tag{2}$$

Rispetto ad una qualsiasi norma matriciale indotta da quella vettoriale, seguono le maggiorazioni

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &= \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta b\| && (3) \\ \|b\| &= \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \implies \quad \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} && (4) \end{aligned}$$

Condizionamento di un sistema lineare

Moltiplicando tra di loro la (3) e la (4), si ha infine

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \ \|A\| \, \|A^{-1}\| \, \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \tag{5}$$

dove

$$\boxed{\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|} \tag{6}$$

si chiama *numero (o indice) di condizionamento* della matrice A.

Esso è sempre ≥ 1, in quanto si ha:

$$1 = \|I\| = \ \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

Malcondizionamento

Considerando che

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

si ha

$$r = b - A\bar{x} = b - A(x + \delta x) = Ax - Ax - A\delta x = -A\delta x = -\delta b$$

Vediamo dunque che la norma dell'errore relativo e quella del residuo relativo sono legate mediante la relazione:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

- Per valori molto grandi di $\kappa(A)$, diciamo per $\kappa(A) > 10^3$, l'errore relativo sulla soluzione può essere molto grande anche se è piccolo l'errore relativo sui dati.
- Vale a dire che *a residuo piccolo può non corrispondere un errore piccolo.* In questi casi si parla di *malcondizionamento* del sistema o della matrice.

Numero di Condizionamento

Numeri di condizionamento diversi si hanno in corrispondenza a scelte diverse della norma matriciale. Per esempio:

i)
$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty.$$

Poichè gli autovalori di A^{-1} sono uguali a $[\lambda_i(A)]^{-1}$ si ha l'indice

ii)
$$\kappa_2(A) = \left(\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)} \right)^{1/2}$$

Se la matrice è simmetrica (hermitiana), l'indice $\kappa_2(A)$ è detto indice di condizionamento spettrale

$$\kappa_2(A) = \frac{\max|\lambda(A)|}{\min|\lambda(A)|} = \rho(A)\rho(A^{-1})$$

Se infine A è anche definita positiva allora $\kappa_2(A) = \dfrac{\max \lambda(A)}{\min \lambda(A)}$.

Numero di Condizionamento

Esempio di matrice malcondizionata

$$A = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{pmatrix}; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 101 & -10 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si trova: $\sigma(A) = \{0.9804864 \times 10^{-2},\ 0.1019902 \times 10^{3}\}$ e quindi

$$\kappa_\infty = \kappa_1 = 12321;\ \kappa_2 =\approx 10402;$$

Se $b^T = (11, 111)$ il sistema $Ax = b$ ha per soluzione $x^T = (1, 1)$.

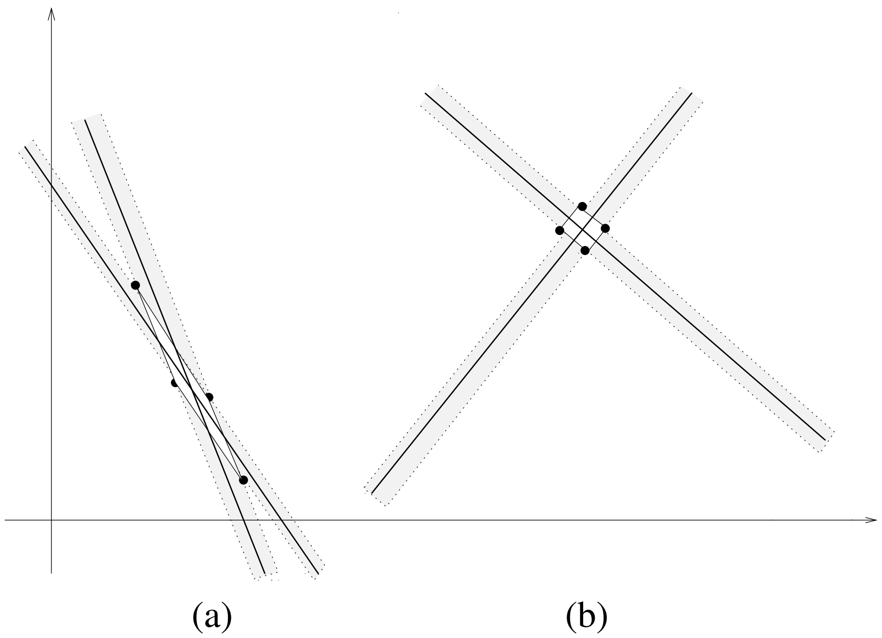
Se $b^T = (11.11, 112.11)$, esso ha per soluzione $x^T = (1.01, 1.01)$.
Quindi ad un errore relativo sui dati $\|\delta b\|/\|b\| = 10^{-2}$, corrisponde un errore relativo sui risultati $\|e\|/\|x\| = 10^{-2}$

Mentre se $b^T = (11.1, 111)$, il sistema ha per soluzione $x^T = (11.1, 0)$: ad un errore relativo sui dati $\|\delta b\|/\|b\| = 0.9 \times 10^{-3}$, corrisponde un errore relativo sui risultati $\|e\|/\|x\| = 10.1$

Numero di Condizionamento

Se si pensa all'interpretazione geometrica del sistema di due equazioni in due incognite si vede che il malcondizionamento corrisponde al caso di due rette quasi parallele, come in Figura (a)

Il buon condizionamento corrisponde al caso di due rette perpendicolari (o quasi perpendicolari), come in Figura (b).



Sistemi lineari: (a) malcondizionamento; (b) buon condizionamento.