Corso di Laurea Triennale in Matematica

Geometria 3
Topologia

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2024–2025

Spazi topologici

Def. Sia X un insieme. L'insieme

$$\mathcal{P}(X) = \{U \mid U \subset X\}$$

i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di X è detto *insieme delle parti* (o *insieme potenza*) di X.

Oss. $\mathcal{P}(X) \cong \{0,1\}^X = \{\text{funzioni } X \to \{0,1\}\} \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Leggi di De Morgan.
$$X - \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (X - U_\alpha)$$
$$X - \bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (X - U_\alpha).$$

Def. Una *topologia* su X è una famiglia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X che soddisfa:

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(2) $X \in \mathcal{T}$

(3) $\forall \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$

(4) $\forall U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.

Uno *spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$ è un insieme X munito di una topologia $\mathcal{T}$ su X. Gli elementi di X sono detti *punti*. Scriveremo X anziché $(X, \mathcal{T})$ se $\mathcal{T}$ è sottinteso.

Def. $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico.

- $U \subset X$ è detto *aperto* in $X \Leftrightarrow U \in \mathcal{T}$.
- $C \subset X$ è detto *chiuso* in $X \Leftrightarrow X - C$ aperto $\Leftrightarrow X - C \in \mathcal{T}$.

Oss. Per una topologia $\mathcal{T}$ su X abbiamo:

(1) $\emptyset$ è aperto e chiuso in X

(2) X è aperto e chiuso in X

(3) unioni arbitrarie di aperti di X sono aperte in X

(4) intersezioni finite di aperti di X sono aperte in X (per induzione):
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall U_1 \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

(3′) intersezioni arbitrarie di chiusi sono chiuse:
$\forall \{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ famiglia di chiusi in $X \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ chiuso in X

(4′) unioni finite di chiusi sono chiuse:
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall C_1 \dots, C_n$ chiusi in $X \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n C_i$ chiuso in X.

Oss. Per determinare $\mathcal{T}$ è sufficiente dichiarare gli aperti (oppure i chiusi) in modo che siano soddisfatte le proprietà precedenti.

Esempio. I seguenti esempi sono basilari e verranno usati spesso.

(*1*) Topologia banale su X: $\mathcal{T}_{\text{ban}} = \{\emptyset, X\} \rightsquigarrow X_{\text{ban}} = (X, \mathcal{T}_{\text{ban}})$.
È la topologia minimale, gli unici aperti sono il vuoto e lo spazio.

(*2*) Topologia discreta su X: $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow X_{\text{dis}} = (X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$.
È la topologia massimale, tutti i sottoinsiemi sono aperti e chiusi.

(*3*) Topologia cofinita su X: $\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X \mid X - U \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\} \rightsquigarrow X_{\text{cof}} = (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$.
Gli aperti sono i complementari dei sottoinsiemi finiti e il vuoto.
I chiusi sono i sottoinsiemi finiti e X.

Oss.

(*1*) X discreto $\Leftrightarrow$ i singoletti dei punti sono aperti.

(*2*) $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{T}_{\text{cof}} \Leftrightarrow X$ finito.

Basi di topologie

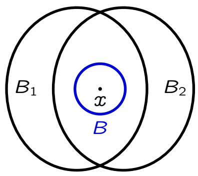
Def. Una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti di uno spazio topologico X è detta *base* per X se $\forall\, U \subset X$ aperto, $\exists\, \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ t.c. $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono detti *aperti basici*.

In altre parole $\mathcal{B}$ è base per $X \Leftrightarrow$ gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti e ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Oss. Per definizione di base, se $\mathcal{B}$ è base per X allora $U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in U$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset U$.

Esempio. La famiglia dei singoletti $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è base per la topologia discreta.

Teor. *Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora $\exists\, \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ topologia su X t.c. $\mathcal{B}$ è base per $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$*



(1) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$

(2) *$\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall\, x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

Inoltre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è unica (topologia generata da $\mathcal{B}$).

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Segue subito dalla definizione e osservazione precedente.
$\boxed{\Leftarrow}$ Definiamo

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B\in J} B \;\middle|\; J \subset \mathcal{B} \right\}$$

l'insieme di tutte e sole le unioni di elementi di $\mathcal{B}$.

Oss. Per definizione di $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \forall\, x \in U$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset U$.

Mostriamo che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è una topologia su X.

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ottenuto con $J = \emptyset$

(2) $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ottenuto con $J = \mathcal{B}$ in virtù di (1)

(3) $\forall\, \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \forall \alpha \in A$, $\exists\, J_\alpha \subset \mathcal{B}$ t.c.
$U_\alpha = \bigcup_{B\in J_\alpha} B \;\Rightarrow\; \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{B\in J} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ con $J = \bigcup_{\alpha\in A} J_\alpha \subset \mathcal{B}$

(4) $\forall\, U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $\forall\, x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_1 \subset U_1$ e $x \in B_2 \subset U_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \underset{(2)}{\Rightarrow} \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

$\forall\, B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ottenuto con $J = \{B\} \Rightarrow \mathcal{B}$ è base per $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

L'unicità segue subito dalle due osservazioni precedenti. $\square$

Topologie notevoli su $\mathbb{R}$

Topologia Euclidea su $\mathbb{R}$. $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a < b\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$. Infatti

(1) L'unione di tutti gli intervalli aperti limitati è $\mathbb{R}$

(2) L'intersezione di due intervalli aperti limitati è vuota oppure un intervallo aperto limitato ($\in \mathcal{B}$).

Si ha: $U \subset \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow \forall\, x \in U\ \exists\, a < b$ t.c. $x \in\,]a, b[\, \subset U$.

$]a, +\infty[\, = \bigcup_{b>a}\,]a, b[$, $]-\infty, b[$ aperti.

$\{a\}$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ chiusi (ma esistono molti altri chiusi).

$[a, b[$ e $]a, b]$ non sono né aperti né chiusi in $\mathbb{R}$, $\forall a < b$.

Retta di Sorgenfrey. $\mathcal{B}_\ell = \{[a, b[\mid a < b\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$ detta *topologia di Sorgenfrey* o *topologia degli intervalli aperti a destra*. Denotiamo con $\mathbb{R}_\ell$ questo spazio topologico (*retta di Sorgenfrey*).

Oss. $]a, b[\, = \bigcup_{c \in]a,b[} [c, b[$ aperto in $\mathbb{R}_\ell \Rightarrow$ aperti Euclidei sono aperti in $\mathbb{R}_\ell$ (ma non viceversa). I chiusi Euclidei di $\mathbb{R}$ sono chiusi in $\mathbb{R}_\ell$.

$[a, +\infty[\, = \bigcup_{c>a} [a, c[$ aperto in $\mathbb{R}_\ell$.

$[a, b]$ chiuso in $\mathbb{R}_\ell$ (perché chiuso in $\mathbb{R}$).

$[a, b[\, = \mathbb{R}_\ell - (]-\infty, a[\, \cup [b, +\infty[) \Rightarrow [a, b[$ chiuso (e aperto) in $\mathbb{R}_\ell$.

Intorni e basi di intorni

Def. X spazio topologico, $J \subset X$ è *intorno* di $x \in X$ se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $x \in U \subset J$.

Esempio. $U \subset X$ aperto non vuoto è intorno di ogni suo punto (*intorno aperto*).
$[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ è intorno di 0, e di ogni $x \in\,]-1, 1[$, ma non di -1 e di 1. Infatti $-1 \in\,]a, b[\, \subset [-1, 1]$ è impossibile.

Oss. $U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow \forall\, x \in U$, $\exists\, J \subset X$ intorno di x in X t.c. $J \subset U$.

Def. X spazio topologico, $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $x \in X$ è *base di intorni* (o *sistema fondamentale di intorni*) di x se $\forall\, L \subset X$ intorno di x, $\exists\, J \in \mathcal{J}$ t.c. $x \in J \subset L$.

Oss. Nella definizione possiamo limitarci a L intorno aperto di x.

Esempio. $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{J}_x = \left\{ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ base d'intorni di x.

Def. $J \subset X$ è *intorno* di $A \subset X$ se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $A \subset U \subset J$.

Def. $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $A \subset X$ è *base di intorni* (o *sistema fondamentale di intorni*) di A se $\forall\, L \subset X$ intorno (aperto) di A, $\exists\, J \in \mathcal{J}$ t.c. $A \subset J \subset L$.

Operatori topologici

X spazio topologico, $A \subset X$ sottoinsieme di X.

Def (Interno)**.** Si chiama *interno* di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Int}_X A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ aperto}}} U$$

unione di tutti gli aperti di X contenuti in A.

Oss. $\mathrm{Int}_X A$ è il più grande aperto di X contenuto in A.
$\mathrm{Int}_X A \subset A$ e vale $= \Leftrightarrow A$ aperto in X.
$U \subset A$ e U aperto in $X \Rightarrow U \subset \mathrm{Int}_X A$.
$x \in \mathrm{Int}_X A \Leftrightarrow \exists\, U \subset X$ intorno di x in X t.c. $U \subset A$.

Esempio. $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}[0,1] =]0,1[$, $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}\{0\} = \emptyset$, $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}_\ell}[0,1] = [0,1[$

Def (Chiusura)**.** Si chiama *chiusura* di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Cl}_X A \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{C \supset A \\ C \text{ chiuso}}} C$$

intersezione di tutti i chiusi di X che contengono A.

Oss. $\mathrm{Cl}_X A$ è il più piccolo chiuso di X che contiene A.
$A \subset \mathrm{Cl}_X A$ e vale $= \Leftrightarrow A$ chiuso in X.
$A \subset C$ e C chiuso in $X \Rightarrow \mathrm{Cl}_X A \subset C$.

Prop. *$x \in \mathrm{Cl}_X A \Leftrightarrow \forall\, U \subset X$ intorno (aperto) di x in X si ha $U \cap A \neq \emptyset$.*

Dim. Senza perdita di generalità basta considerare U intorno aperto di x.
$\boxed{\Rightarrow}$ Per assurdo, supponiamo $U \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset X - U$ chiuso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X A \subset X - U \Rightarrow x \in X - U$ assurdo perché $x \in U$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Per assurdo, supponiamo $x \notin \mathrm{Cl}_X A \Rightarrow x \in U := X - \mathrm{Cl}_X A$ aperto $\Rightarrow U \cap A \subset U \cap \mathrm{Cl}_X A = \emptyset \Rightarrow U \cap A = \emptyset$ assurdo. □

Def (Frontiera)**.** Si chiama *frontiera* (o *bordo*) di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Fr}_X A \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Cl}_X A \cap \mathrm{Cl}_X(X - A)$$

intersezione delle chiusure di A e del complementare.

Si usa anche la notazione $\mathrm{Fr}_X A = \partial_X A = \partial A$.

Oss. $\mathrm{Fr}_X A$ è chiuso in X e $\mathrm{Fr}_X A \subset \mathrm{Cl}_X A$.
$x \in \mathrm{Fr}_X A \Leftrightarrow \forall\, U \subset X$ intorno di x in X, si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Teor. *$\mathrm{Fr}_X A = \mathrm{Cl}_X A - \mathrm{Int}_X A$.*

Dim. Mostriamo le due inclusioni.
$\boxed{\subset}$ Sappiamo $\mathrm{Fr}_X A \subset \mathrm{Cl}_X A$. Resta da dimostrare $\mathrm{Fr}_X A \cap \mathrm{Int}_X A = \emptyset$. Per assurdo se $\exists\, x \in \mathrm{Fr}_X A \cap \mathrm{Int}_X A \Rightarrow \mathrm{Int}_X A \cap (X - A) \neq \emptyset$ assurdo.

$\boxed{\supset}$ $\forall\, x \in \mathrm{Cl}_X A - \mathrm{Int}_X A$, $\forall\, U \subset X$ intorno aperto di x in X dimostriamo $U \cap (X - A) \neq \emptyset$. Supponiamo per assurdo $U \cap (X - A) = \emptyset \Rightarrow U \subset A \Rightarrow U \subset \mathrm{Int}_X A \Rightarrow x \in \mathrm{Int}_X A$ assurdo. Quindi $x \in \mathrm{Cl}_X(X - A)$ e per ipotesi $x \in \mathrm{Cl}_X A \Rightarrow x \in \mathrm{Cl}_X A \cap \mathrm{Cl}_X(X - A) = \mathrm{Fr}_X A$. □

Sottospazi topologici

Teor. *Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottoinsieme. Allora la famiglia*

$$\mathcal{T}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \{U \cap Y \mid U \subset X \text{ aperto}\}$$

è una topologia su Y detta topologia indotta da X o topologia relativa o anche topologia di sottospazio.

Dim. Dimostriamo che valgono le proprietà della definizione di topologia.

(1) $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

(2) $Y = X \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

(3) $\forall \{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}_Y \ \exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ aperti di X t.c. $V_\alpha = U_\alpha \cap Y \ \forall \alpha \in A \Rightarrow$

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

(4) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y \ \exists U_1, U_2$ aperti in X t.c. $V_1 = U_1 \cap Y$ e $V_2 = U_2 \cap Y \Rightarrow$ $V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. □

Def. $Y \subset X$ con la topologia relativa è detto *sottospazio topologico*.

Oss.

(1) Qualunque sottoinsieme di uno spazio topologico è un sottospazio topologico con la topologia relativa.

(2) Un sottospazio topologico $Y \subset X$ è a sua volta uno spazio topologico.

(3) $V \subset Y$ aperto in $Y \Leftrightarrow \exists U \subset X$ aperto in X t.c. $V = U \cap Y$.

(4) $C \subset Y$ chiuso in $Y \Leftrightarrow \exists A \subset X$ chiuso in X t.c. $C = A \cap Y$.

(5) I sottoinsiemi di uno spazio topologico saranno sempre considerati con la topologia relativa, se non specificato diversamente.

Esempi. $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è un importante sottospazio topologico e lo consideriamo con la topologia Euclidea indotta da $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ è un altro esempio interessante.

Prop. *$Y \subset X$ sottospazio topologico e $\mathcal{B}$ base per $X \Rightarrow$*

$$\mathcal{B}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

base per Y.

Dim. Esercizio (usare le definizioni di topologia relativa e di base).

Prop. *$Y \subset X$ sottospazio, $y \in Y$ e $\mathcal{J}_y$ base di intorni di y in $X \Rightarrow$*

$$\mathcal{J}_{Y,y} \stackrel{\text{def}}{=} \{J \cap Y \mid J \in \mathcal{J}_y\}$$

base di intorni di y in Y.

Dim. Esercizio (usare le definizioni).

Spazi metrici

Def. Sia X un insieme non vuoto. Una funzione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è detta *metrica* o *distanza* su X se valgono le seguenti proprietà $\forall\, x, y, z \in X$:

(*1*) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(*2*) $d(x, y) = d(y, x)$

(*3*) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Oss. $d \geqslant 0$ infatti $\forall\, x, y \in X$ si ha

$$0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Def. Uno *spazio metrico* (X, d) è un insieme non vuoto X munito di una metrica d su X.

Esempio. Per ogni insieme non vuoto X consideriamo la *metrica discreta*

$$d_{\text{dis}}: X \times X \to \mathbb{R}$$

$$d_{\text{dis}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

(X, d_{dis}) è detto *spazio metrico discreto*.

Esempio. *Metrica Euclidea* su $\mathbb{R}$: $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Def. (X, d) spazio metrico, $x \in X$, $r > 0$. Il sottoinsieme

$$B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subset X$$

è detto *boccia aperta di centro x e raggio r*.

$$\bar{B}_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\} \subset X$$

è detto *boccia chiusa di centro x e raggio r*.

Oss. $x \in B_d(x, r) \subset \bar{B}_d(x, r)$.

Teor. (X, d) *spazio metrico* $\Rightarrow$

$$\mathcal{B}_d := \{B_d(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$$

base per una topologia $\mathcal{T}_d$ su X (topologia indotta da d o top. metrica).

Dim. Oss. precedente $\Rightarrow \bigcup\limits_{x,r} B(x, r) = X$ (proprietà (*1*) delle basi).

$\forall\, x_1, x_2 \in X\ \forall\, r_1, r_2 > 0\ \forall\, y \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \rightsquigarrow$

$$r := \min(r_1 - d(x_1, y), r_2 - d(x_2, y)) > 0$$

$\forall\, z \in B(y, r) \Rightarrow d(x_1, z) \leqslant d(x_1, y) + d(y, z) < d(x_1, y) + r \leqslant r_1 \Rightarrow z \in B(x_1, r_1)$ e similmente $z \in B(x_2, r_2) \Rightarrow$

$$y \in B(y, r) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \quad \text{(proprietà (2) delle basi).} \quad \square$$

Oss. $U \in \mathcal{T}_d \Leftrightarrow \forall\, x \in U\ \exists\, r > 0$ t.c. $B_d(x, r) \subset U$.

Def. Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è detto *spazio metrizzabile* se esiste una metrica d su X che induce la topologia di X, ossia $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Esempio. Gli intervalli aperti limitati di $\mathbb{R}$ sono le bocce aperte rispetto alla metrica Euclidea $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ metrizzabile.

Oss. X_{dis} metrizzabile perché $B_{d_{\text{dis}}}(x,1) = \{x\}$, $\forall\, x \in X$.

Oss. X_{ban} non metrizzabile se $|X| \geqslant 2$.

Spazi Euclidei. Su $\mathbb{R}^n$ consideriamo la *metrica Euclidea*

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ricordiamo che la disuguaglianza triangolare consegue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$.

Def. La topologia su $\mathbb{R}^n$ indotta dalla metrica Euclidea si chiama *topologia Euclidea*.

Oss. Consideriamo sempre $\mathbb{R}^n$ con la topologia Euclidea, se non specificato diversamente.

In modo simile si definisce la topologia Euclidea su $\mathbb{C}^n$ come quella indotta dalla metrica Euclidea

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Prop. *Sia (X,d) spazio metrico e $Y \subset X$ sottospazio topologico. Allora la restrizione $d_Y = d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ è una metrica su Y che induce la topologia di sottospazio.*

Dim. Che d_Y sia una metrica segue subito dal fatto che lo è d.

Che la topologia indotta su Y da d_Y sia la topologia di sottospazio segue subito dall'uguaglianza

$$B_{d_Y}(y,r) = B_d(y,r) \cap Y,$$

$\forall\, y \in Y$ e $\forall\, r > 0$, che è di immediata verifica. $\square$

Cor. *X spazio metrizzabile e $Y \subset X$ sottospazio $\Rightarrow$ Y metrizzabile.*

Sottospazi notevoli di $\mathbb{R}^n$

$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^n$ *disco* o *boccia* n*-dimensionale*.
$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *sfera* o *ipersfera* n*-dimensionale*.
$I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ *intervallo (chiuso)*.
$\mathbb{R}_+ := [0,+\infty[\subset \mathbb{R}$ *semiretta (chiusa)*.

Oss. $S^n \subset B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
$B^0 = \{0\}$.
$B^1 = [-1,1] \subset \mathbb{R}$.
B^2 è il disco chiuso unitario in $\mathbb{R}^2$.
B^3 è la boccia chiusa unitaria in $\mathbb{R}^3$.
$S^0 = \{-1,1\} \subset \mathbb{R}$ è uno spazio discreto con due punti.
$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ è la circonferenza unitaria.
$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ è la sfera unitaria.

Oss. I, $\mathbb{R}_+$, S^n, B^n sono metrizzabili con la metrica Euclidea.

Applicazioni continue

Def. Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f : X \to Y$ è *continua* se $\forall V \subset Y$ aperto in Y si ha $f^{-1}(V) \subset X$ aperto in X.

In altre parole $f : X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow$ le preimmagini tramite f degli aperti sono aperti.

Oss. $f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$. Quindi $f : X \to Y$ continua $\Leftrightarrow$ $\forall C \subset Y$ chiuso in Y si ha $f^{-1}(C) \subset X$ chiuso in X.

Prop. *$f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ continue $\Rightarrow$ $g \circ f : X \to Z$ continua.*

Dim. Segue subito dal fatto che $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ $\forall V \subset Z$. $\square$

Oss. $c : X \to Y$ costante $\Rightarrow$ c continua.
$\mathrm{id}_X : X \to X$ continua per ogni spazio topologico X.
$Y \subset X$ sottospazio top. $\Rightarrow$ mappa d'inclusione $i_Y : Y \hookrightarrow X$ continua.
Restrizioni di applicazioni continue a sottospazi del dominio o del codominio sono continue.
$\forall\ f : X_{\mathrm{dis}} \to Y$ è continua.
$\forall\ f : X \to Y_{\mathrm{ban}}$ è continua.

Def. $f : X \to Y$ è *aperta* se $\forall U \subset X$ aperto in X si ha $f(U)$ aperto in Y.
$f : X \to Y$ è *chiusa* se $\forall C \subset X$ chiuso in X si ha $f(C)$ chiuso in Y.

$f : X \to Y$ aperta $\Leftrightarrow$ f manda aperti in aperti.
$f : X \to Y$ chiusa $\Leftrightarrow$ f manda chiusi in chiusi.

Oss. Una costante $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e chiusa, ma non aperta.
$f : X \to Y$ aperta $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ aperto.
$f : X \to Y$ chiusa $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ chiuso.
$A \subset X$ aperto (risp. chiuso) $\Leftrightarrow$ inclusione $i_A : A \hookrightarrow X$ aperta (risp. chiusa).

Esempio. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_{\mathrm{dis}} \to \mathbb{R}$ continua e biiettiva ma l'inversa non è continua.

Def. Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f : X \to Y$ è detta *omeomorfismo* se valgono le seguenti:

(1) f è biiettiva

(2) f è continua

(3) f^{-1} è continua.

Diciamo che X e Y sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo $f : X \to Y$ e in tal caso scriviamo $X \cong Y$.

N. B. Gli omeomorfismi si chiamano anche applicazioni *bicontinue*.

Oss. $\mathrm{id}_X : X \to X$ omeomorfismo per ogni spazio X (stessa topologia).
$f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow$ $f^{-1} : Y \to X$ omeomorfismo.
$f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ omeomorfismi $\Rightarrow$ $g \circ f : X \to Z$ omeomorfismo.
L'omeomorfismo è una *relazione d'equivalenza* tra spazi topologici.

Oss. Data $f : X \to Y$ biiettiva, si ha f^{-1} continua $\Leftrightarrow$ f aperta $\Leftrightarrow$ f chiusa (attenzione, serve biiettiva).
$f : X \to Y$ omeo $\Leftrightarrow$ f continua, biiettiva e aperta (o chiusa).

Cor. *Per ogni spazio X l'insieme*

$$\mathrm{Omeo}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : X \to X \mid f \text{ omeo}\}$$

è un gruppo rispetto a composizione, detto gruppo degli omeomorfismi.

N. B. In generale $\mathrm{Omeo}(X)$ è un gruppo molto grande e molto complicato, quasi mai abeliano (a parte alcuni casi banali).

Def. Una proprietà $\mathcal{P}$ è detta *proprietà topologica* se $\forall\, X, Y$ spazi topologici, X ha $\mathcal{P}$ e $Y \cong X \Rightarrow Y$ ha $\mathcal{P}$.

In altre parole $\mathcal{P}$ è una proprietà topologica se valendo per uno spazio X vale anche per tutti gli spazi omeomorfi a X, ovvero $\mathcal{P}$ è *invariante* a meno di omeomorfismi. Studieremo in seguito importanti proprietà topologiche.
La *Topologia* studia le proprietà topologiche degli spazi. Un problema fondamentale è capire se due spazi topologici X e Y sono omeomorfi.

Prop. *La metrizzabilità è una proprietà topologica.*

Dim. Diamo solo un'idea, lasciando i dettagli per Esercizio.
X metrizzabile e $Y \cong X \Rightarrow \exists\, d_X$ metrica su X che ne induce la topologia e $\exists\, f : Y \to X$ omeo $\rightsquigarrow$

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$$
$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$$

metrica su Y che induce la topologia di Y. $\square$

Def. Dati gli spazi X e Y definiamo l'insieme delle applicazioni continue

$$C(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : X \to Y \mid f \text{ continua}\}.$$

Oss. $C(X, Y) \neq \emptyset$ (contiene almeno le costanti).
$\mathrm{Omeo}(X) \subset C(X, X)$.

Prop. *$f : X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow \forall\, x \in X$, $\forall\, V \subset Y$ intorno di $f(x) \in Y$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x in X t.c. $f(U) \subset V$.*

Dim. Non è restrittivo limitarci a considerare solo intorni aperti.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, V \subset Y$ intorno aperto di $f(x) \Rightarrow x \in U := f^{-1}(V) \subset X$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, V \subset Y$ aperto, se $f^{-1}(V) = \emptyset$ allora è aperto.
Se $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in f^{-1}(V) \Rightarrow V$ intorno di $f(x)$ in $Y \Rightarrow \exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f(U) \subset V \Rightarrow x \in U \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ aperto in $X \Rightarrow f$ continua. $\square$

Oss. Nella Prop. possiamo limitarci a considerare intorni U e V aperti e/o basici (se abbiamo preventivamente fissato basi di intorni in X e Y). La dimostrazione richiede solo piccole modifiche.

Continuità negli spazi metrici

Cor. *Siano* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *spazi metrici. Allora* $f : X \to Y$ *è continua* $\Leftrightarrow \forall\, x_0 \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *t.c.* $\forall\, x \in X$ *si abbia che*

$$d_X(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dim. Segue subito dalla Prop. e dall'Oss. usando come intorni basici le bocce aperte $V = B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ e $U = B_{d_X}(x_0, \delta)$. □

Oss. In generale δ dipende da x_0 e da ε.
La definizione di funzione continua generalizza quella studiata in Analisi.
Le funzioni reali di variabili reali la cui continuità è nota dall'Analisi saranno considerate continue senza bisogno di dimostrazione.

Oss. *Applicazioni affini reali* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax + b$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$, sono continue.
Idem per *applicazioni affini complesse* $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.
Affinità reali $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ con $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^n$, sono omeomorfismi (l'inversa è anch'essa affinità quindi continua).
Idem per *affinità complesse* $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.
In particolare, per $b = 0$, le applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono continue e gli automorfismi lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono omeomorfismi (idem su $\mathbb{C}$).

Esempio. $\exp : \mathbb{R} \to\,]0, +\infty[$, $\exp(x) = e^x$ è continua e infatti è omeo con inversa $\log :]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$, pure essa continua $\Rightarrow \mathbb{R} \cong\,]0, +\infty[$.
$g :]0, 1[\, \to\,]0, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$ omeo con inversa $g^{-1}(y) = \dfrac{y}{1+y}$.

$$]0, 1[\; \cong\;]a, b[\; \cong\;]a, +\infty[\; \cong\;]-\infty, a[\; \cong \mathbb{R}.$$

$$[0, 1[\; \cong [a, b[\; \cong\;]a, b] \cong [0, +\infty[\; \cong [a, +\infty[\; \cong\;]-\infty, a].$$

$$[0, 1] \cong [a, b] \quad \text{ma} \quad [0, 1] \ncong \mathbb{R} \quad \text{(lo vedremo più avanti)}.$$

Chiusura e frontiera negli spazi metrici

Def. Dato (X, d) spazio metrico, $\forall x \in X$ e $\forall A, B \subset X$ non vuoti, definiamo la distanza tra x e A

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \geqslant 0$$

e la distanza tra A e B

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \geqslant 0.$$

Oss. $x \in A \not\Leftarrow\Rightarrow d(x, A) = 0$.
$A \cap B \neq \emptyset \not\Leftarrow\Rightarrow d(A, B) = 0$.
L'inf non è necessariamente un minimo.

Esempio. In $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(0,]0, 1[) = 0$.

Prop. *(X, d) spazio metrico, $\emptyset \neq A \subset X \Rightarrow$*

$$d_A : X \to \mathbb{R}$$
$$d_A(x) = d(x, A)$$

funzione continua.

Oss. In altre parole la distanza da un sottoinsieme è continua.

Dim. $\forall x_0, x \in X$, $\forall a \in A$ per la disuguaglianza triangolare e passando all'inf si ha

$$d(x, a) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, a) \quad \Rightarrow \quad d_A(x) - d_A(x_0) \leqslant d(x, x_0)$$

da cui scambiando x con x_0 si deduce

$$|d_A(x) - d_A(x_0)| \leqslant d(x, x_0).$$

Si ottiene quindi la continuità ponendo $\delta = \varepsilon$. □

Oss. $f : X \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ i sottoinsiemi di X definiti da un'equazione continua $f(x) = \alpha$, o da una disequazione $f(x) \geqslant \alpha$ o $f(x) \leqslant \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, sono chiusi in X in quanto preimmagini di chiusi.
Analogamente i sottoinsiemi di X definiti da $f(x) > \alpha$ o da $f(x) < \alpha$ o da $f(x) \neq \alpha$ sono aperti in X.

Prop. *Siano (X, d) uno spazio metrico e $\emptyset \neq A \subset X$. Allora*

$$\mathrm{Cl}_X A = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}.$$

Dim. Poniamo $C = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ e dimostriamo $\mathrm{Cl}_X A = C$.
$\boxed{\subset}$ C chiuso in X perché definito da un'equazione continua.
$A \subset C \Rightarrow \mathrm{Cl}_X A \subset C$.

$\boxed{\supset}$ $\forall x \in C$, $\forall r > 0$ $\exists a \in A$ t.c. $d(x, a) < r \Rightarrow B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \mathrm{Cl}_X A$. □

Cor. *$\forall x \in X$ si ha $x \in \mathrm{Cl}_X A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.*

Cor. *$\forall x \in X$ si ha $x \in \mathrm{Fr}_X A \Leftrightarrow d(x, A) = d(x, X - A) = 0$.*

Cor. *$A \subset X$ chiuso, $x \in X$ e $d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$.*

N. B. $\emptyset \neq A, B \subset X$ chiusi e $d(A, B) = 0 \not\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Spazi vettoriali normati

Def. Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso. Una funzione

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

è detta *norma* su V se valgono le seguenti $\forall\, v, w \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$:

(1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V$

(2) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

(3) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare per la norma).

Uno *spazio vettoriale normato* $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale reale o complesso V munito di una norma.

Oss. $\|0_V\| = \|0\, 0_V\| = 0\|0_V\| = 0$.
$0 = \|0_V\| = \|v - v\| \leqslant \|v\| + \|-v\| = 2\|v\|$, $\forall\, v \in V \Rightarrow \|\cdot\| \geqslant 0$.

Prop. *Sia V uno spazio vettoriale normato. Allora la funzione*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$d(v, w) = \|v - w\|$$

è una metrica su V. Pertanto V è anche uno spazio metrico e quindi uno spazio topologico.

Dim. Esercizio.

Oss. Si ha: $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leqslant \|v - w\| \Rightarrow \|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ continua. Esercizio.

Def. Due metriche d_1 e d_2 su X sono *equivalenti* se $\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant C_2 d_1(x, y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su V sono *equivalenti* se $\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant C_2\|v\|_1, \quad \forall\, v \in V.$$

Oss. Sono due relazioni d'equivalenza.
Norme equivalenti su V inducono metriche equivalenti. Esercizio.

Prop. *Metriche equivalenti su un insieme X inducono la stessa topologia.*

Dim. $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ metriche equivalenti $\rightsquigarrow C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1 d_1 \leqslant d_2 \leqslant C_2 d_1 \;\Rightarrow\; B_{d_1}(x, C_2^{-1} r) \subset B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, C_1^{-1} r). \qquad \square$$

Esempio. $\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, definiamo:

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|;$$
$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Sono equivalenti tra loro e alla norma Euclidea $\|\cdot\|$:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

Pertanto su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ potremo usare indifferentemente una di queste norme per rappresentare la topologia Euclidea.

Esempio. Su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ si considera anche la p-*norma* (o *norma* ℓ^p), $\forall\, p \geqslant 1$:

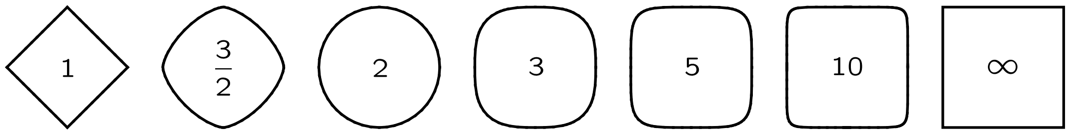
$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si ha subito la disuguaglianza

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

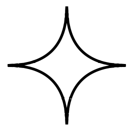
da cui per il Teorema dei due carabinieri

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$



Sfere unitarie $\|x\|_p = 1$ in $\mathbb{R}^2$ per alcuni valori di $p \geqslant 1$.

Oss. $\|\cdot\|_p$ non soddisfa la disuguaglianza triangolare $\forall\, p \in \,]0, 1[$.



Enunciamo senza dimostrare il teorema seguente.

Teor. $\dim V < \infty \Rightarrow$ *tutte le norme su V sono tra loro equivalenti.*

N. B. $\dim V = \infty \Rightarrow$ esistono norme non equivalenti su V.

Lavoro di gruppo. (a) $B^2 \cong [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. ($b$) $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^2} B^2 = S^1$.

Immersioni, immersioni locali e omeo locali

Def. Un'applicazione tra spazi topologici $f : X \to Y$ è detta

(1) *immersione* se $f|_{f(X)} : X \to f(X)$ omeo, dove $f(X) \subset Y$ ha la top. di sottospazio. Scriviamo $f : X \hookrightarrow Y$ e diciamo X *si immerge* in Y.

(2) *immersione locale* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f|_U : U \to Y$ è un'immersione. Diciamo che X si *immerge localmente* in Y.

(3) *omeomorfismo locale* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f(U) \subset Y$ intorno di $f(x)$ e $f_{|U} : U \to f(U)$ omeo.

N. B. In inglese: immersione = *embedding*; immersione loc. = *immersion*.

Oss. $X \subset Y$ sottospazio topologico $\Leftrightarrow$ $i_X : X \hookrightarrow Y$ immersione.

Oss. $f : X \hookrightarrow Y$ immersione $\not\Leftarrow\Rightarrow$ f continua e iniettiva.
$X \hookrightarrow Y \Leftrightarrow X$ omeomorfo ad un sottospazio di Y e a meno di immersione possiamo considerare $X \subset Y$.
$f : X \to Y$ immersione loc. $\not\Leftarrow\Rightarrow$ f continua e loc. iniettiva
($\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f_{|U} : U \to Y$ iniettiva).
Immersione $\not\Leftarrow\Rightarrow$ immersione loc.
$f : X \to Y$ omeo loc. $\Leftrightarrow$ $f : X \to Y$ immersione loc. aperta.

Esempio. $\forall\, k < n$ consideriamo le *immersioni canoniche*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (x, 0_{\mathbb{R}^{n-k}}) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{C}^k &\hookrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto (x, 0_{\mathbb{C}^{n-k}}). \end{aligned}$$

Abbiamo anche: $B^k \hookrightarrow B^n$, $S^k \hookrightarrow S^n$.
Possiamo considerare $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$, $S^k \subset S^n$, $B^k \subset B^n$, $\forall\, k < n$.
Queste immersioni sono chiuse.

Lavoro di gruppo. $f : [0, 2\pi[\to S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ omeo?

Unione topologica

Unione disgiunta di insiemi. L'*unione disgiunta* di due insiemi X e Y è

$$X \sqcup Y \overset{\text{def}}{=} (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}).$$

Più in generale l'*unione disgiunta* di una famiglia di insiemi $\{X_i\}_{i\in I}$ è

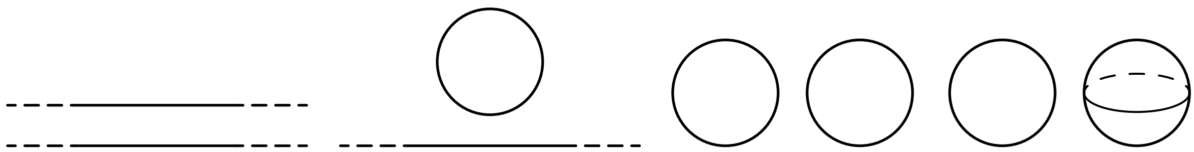
$$\bigsqcup_{i\in I} X_i \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\}).$$

Pertanto l'unione disgiunta di insiemi non necessariamente disgiunti è l'unione di loro copie disgiunte ottenute identificando X_i con $X_i \times \{i\}$ $\forall\, i \in I$. L'unione disgiunta di insiemi a due a due disgiunti si identifica con l'unione.

Unione topologica di spazi. L'*unione topologica* di due spazi X e Y è l'unione disgiunta $X \sqcup Y$ con la *topologia unione*

$$\mathcal{T}_\sqcup \overset{\text{def}}{=} \{U \sqcup V \mid U \subset X \text{ e } V \subset Y \text{ aperti}\}.$$

Oss. $W \subset X \sqcup Y$ aperto $\Leftrightarrow$ $W \cap X$ e $W \cap Y$ aperti.
X e Y sottospazi aperti e chiusi di $X \sqcup Y$.



$\mathbf{R} \sqcup \mathbf{R}$ $\quad$ $\mathbf{R} \sqcup S^1$ $\quad$ $S^1 \sqcup S^1$ $\quad$ $S^1 \sqcup S^2$

Def. L'*unione topologica* di una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i\in I}$ è l'unione disgiunta $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ con la *topologia unione*

$$\mathcal{T}_\sqcup \overset{\text{def}}{=} \left\{ \bigsqcup_{i\in I} U_i \mid U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall\, i \in I \right\}.$$

Oss. Si verifica facilmente che questa è una topologia.
$W \subset \bigsqcup_{i\in I} X_i$ aperto $\Leftrightarrow$ $W \cap X_i$ aperto in X_i $\forall\, i \in I$.
$X_j \subset \bigsqcup_{i\in I} X_i$ sottospazio aperto e chiuso $\forall\, j \in I$.

Definiamo le *immersioni canoniche* $\forall\, j \in I$

$$i_j : X_j \hookrightarrow \bigsqcup_{i\in I} X_i$$
$$i_j(x) = x, \quad \forall\, x \in X_j$$

Oss. i_j immersione aperta e chiusa $\forall\, j \in I$.
$i_j^{-1}(W) = W \cap X_j$, $\forall\, W \subset \bigsqcup_{i\in I} X_i$.

Teor. $f : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to Y$ *continua* $\Leftrightarrow$ $f_j := f \circ i_j : X_j \to Y$ *continua* $\forall\, j \in I$.

Def. $f_j = f \circ i_j = f|_{X_j} : X_j \to Y$ è detta j*-esima restrizione* di f.

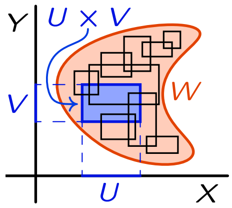
Oss. Si ha $f(x) = f_j(x)$, $\forall\, x \in X_j$, $\forall\, j \in I$.

Dim. Basta osservare che $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$, $\forall\, V \subset Y$ aperto. $\square$

Prodotto topologico

Prodotti topologici finiti. Il *prodotto topologico* di due spazi X e Y è il prodotto cartesiano $X \times Y$ con la *topologia prodotto* avente come base

$$\mathcal{B}_\times \overset{\text{def}}{=} \{U \times V \mid U \subset X \text{ e } V \subset Y \text{ aperti}\}.$$



Gli aperti di $X \times Y$ sono unioni di prodotti di aperti, e in generale sono più complicati dei prodotti di aperti.

In generale, il *prodotto topologico* di $X_1, \ldots, X_n$ è il prodotto cartesiano

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n$$

con la *topologia prodotto* avente per base la famiglia dei prodotti di aperti

$$\mathcal{B}_\times \overset{\text{def}}{=} \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Verifichiamo che $\mathcal{B}_\times$ è base per una topologia su $X_1 \times \cdots \times X_n$.

(1) $X_1 \times \cdots \times X_n \in \mathcal{B}_\times$. $\forall\, U_1 \times \cdots \times U_n,\ V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{B}_\times$ si ha

(2) $(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n) \in \mathcal{B}_\times$.

Proiezioni canoniche. Definiamo le *proiezioni canoniche* $\forall\, j = 1, \ldots, n$

$$\pi_j : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_j$$
$$\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$$

Oss. π_j continua, suriettiva e aperta $\forall\, j = 1, \ldots, n$, infatti si ha:
$\pi_j^{-1}(U_j) = X_1 \times \cdots \times U_j \times \cdots \times X_n$, $\pi_j(U_1 \times \cdots \times U_n) = U_j$, $\forall\, U_j \subset X_j$.

Teor. *$f : Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$ continua $\Leftrightarrow$ $f_j := \pi_j \circ f : Y \to X_j$ continua $\forall\, j = 1, \ldots, n$.*

Def. $f_j = \pi_j \circ f : Y \to X_j$ è detta *j-esima componente* di f.

Oss. Si ha $f(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$ e scriviamo $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ f_j è composizione di applicazioni continue quindi è continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, U_1 \times \cdots \times U_n \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ prodotto di aperti (aperto basico) $\Rightarrow$

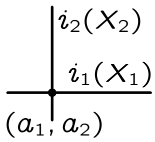
$$f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n) = f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n). \qquad \square$$

Oss. $A_j \subset X_j$ chiuso $\forall\, j = 1, \ldots, n \Rightarrow A_1 \times \cdots \times A_n$ chiuso. Infatti:

$$(X_1 \times \cdots \times X_n) - (A_1 \times \cdots \times A_n) = \bigcup_{j=1}^{n} (X_1 \times \cdots \times (X_j - A_j) \times \cdots \times X_n).$$

Immersioni canoniche. $\forall\, j = 1, \ldots, n$ scegliamo un punto $a_j \in X_j \rightsquigarrow$

$$i_j : X_j \hookrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$$
$$i_j(x_j) = (a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$



Oss. $i_j(X_j) = \{a_1\} \times \cdots \times \{a_{j-1}\} \times X_j \times \{a_{j+1}\} \times \cdots \times \{a_n\}$.

Prop. *i_j è un'immersione $\forall\, j = 1, \dots, n$.*

Dim. $\pi_j \circ i_j = \mathrm{id}_{X_j}$ e $\pi_i \circ i_j = a_i =$ cost per $i \neq j \Rightarrow i_j$ continua e iniettiva. $i_j(U_j) = (X_1 \times \cdots \times U_j \times \cdots \times X_n) \cap i_j(X_j) \Rightarrow i_j| : X_j \to i_j(X_j)$ aperta. $\square$

Oss. $\mathcal{B}_i$ base per X_i, $\forall\, i = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times \cdots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i, \forall\, i = 1, \dots, n\}$$

base per $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Teor. *$X_1 \dots, X_n$ metrizzabili $\Rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ metrizzabile.*

Dim. $d_1, \dots, d_n$ distanze su $X_1 \dots, X_n$ risp. $\rightsquigarrow$

$$d \colon (X_1 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times \cdots \times X_n) \to \mathbb{R} \quad \textit{(distanza prodotto)}$$

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)).$$

$$B_d((x_1, \dots, x_n), r) = B_{d_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, r)$$

e la tesi segue dall'osservazione che i prodotti di bocce aperte dello stesso raggio sono base per $X_1 \times \cdots \times X_n$. $\square$

Cor. *$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$ e $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ volte}}$ sono prodotti topologici.*

Dim. Top. prodotto = top. Euclidea perché entrambe indotte da $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Oss. $f : Y \to \mathbb{R}^n$ è continua $\Leftrightarrow$ tutte le componenti sono continue.

Def. $T^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ è detto *n-toro* o *toro n-dimensionale*.

$I^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{I \times \cdots \times I}_{n \text{ volte}}$ è detto *ipercubo* o *cubo n-dimensionale*.

$T^1 = S^1$, $T^2 = S^1 \times S^1$, $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$.
$I^1 = I = [0, 1]$ (intervallo), $I^2 = I \times I$ (quadrato), $I^3 = I \times I \times I$ (cubo).

Oss. $I^n \cong B^n \Rightarrow B^m \times B^n \cong B^{m+n}$, $\forall\, m, n \geqslant 0$.

N.B. $S^m \times S^n \ncong S^{m+n}$ (lo dimostreremo più avanti per $m \leqslant 1$).

Prodotti topologici arbitrari

Prodotti arbitrari di insiemi. Dati gli insiemi $X_1, \ldots, X_n$, una n-upla

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$$

è essenzialmente una funzione

$$x : \{1, \ldots, n\} \to X_1 \cup \cdots \cup X_n$$
$$\text{t.c.} \quad x(i) = x_i \in X_i, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$

e quindi il prodotto cartesiano è l'insieme di tutte le funzioni di questo tipo. Questa considerazione ci permette di generalizzare il prodotto cartesiano.

Def. Data una famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ di insiemi, il *prodotto cartesiano* è l'insieme

$$\prod_{i\in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \;\middle|\; x(i) \in X_i, \forall\, i \in I \right\}.$$

$\forall\, x \in \prod_{i\in I} X_i$, $\forall\, i \in I \rightsquigarrow x_i := x(i)$ (*i-esima componente di x*).
Scriviamo anche $x = (x_i)_{i\in I}$.

Oss.

$\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è l'insieme delle *successioni* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in X_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\prod_{n\in\mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}}$ è l'insieme delle successioni a valori in X.

$\prod_{i\in I} X = X^I$ è l'insieme delle funzioni $x : I \to X$.

Assioma della scelta. $X_i \neq \emptyset \;\forall\, i \in I \Rightarrow \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.

Oss. L'assioma dice che $\forall$ insieme I e $\forall$ famiglia di insiemi non vuoti $\{X_i\}_{i\in I}$ $\exists\, s : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ t.c. $s(i) \in X_i \;\forall\, i \in I$ (*funzione di scelta*).

Prodotti topologici arbitrari. Il *prodotto topologico* di una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i\in I}$ è il prodotto cartesiano $X = \prod_{i\in I} X_i$ con la *topologia prodotto* avente per base la famiglia di tutti i prodotti $U = \prod_{i\in I} U_i$ t.c.
$U_i \subset X_i$ aperto $\forall\, i \in I$ e $\#\{i \in I \mid U_i \subsetneq X_i\} < \infty$

N.B. Se $\# I = \infty$, la base della topologia prodotto non è formata da tutti i prodotti di aperti ma solo dai prodotti di aperti quasi tutti banali, cioè $U_i = X_i$ per ogni $i \in I$ tranne che per al più un numero finito.

N.B. La famiglia di *tutti* i prodotti di aperti è base per la *topologia box* che non studieremo. La topologia box è diversa dalla topologia prodotto nel caso di prodotti infiniti. Le due topologie coincidono per prodotti finiti.

Esempio. In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ gli aperti basici sono i prodotti del tipo $U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con $U_n \subset \mathbb{R}$ aperto $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\exists N > 0$ t.c. $U_n = \mathbb{R} \;\forall\, n \geqslant N$.

Esempio. $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} [0,1]$ è detto *cubo di Hilbert.*

Spazio quoziente

$\sim$ Relazione d'equivalenza su un insieme X. $\forall\, x, y, z \in X$:

$x \sim x$	*Riflessiva*
$x \sim y \Rightarrow y \sim x$	*Simmetrica*
$x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$	*Transitiva*
$[x] \overset{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y \sim x\}$	*Classe d'equivalenza di* $x \in X$
$X/{\sim} \overset{\text{def}}{=} \{[x] \mid x \in X\}$	*Insieme quoziente*
$\pi : X \to X/{\sim}$ $\pi(x) = [x]$	*Applicazione quoziente*

$\sim$ Relazione d'equivalenza su uno spazio topologico X.

Def. La *topologia quoziente* su $X/{\sim}$ è

$$\mathcal{T}_{\sim} \overset{\text{def}}{=} \{V \subset X/{\sim} \mid \pi^{-1}(V) \subset X \text{ aperto}\}.$$

$X/{\sim}$ con la topologia quoziente è detto *spazio quoziente*.

Oss.
$V \subset X/{\sim}$ aperto in $X/{\sim} \Leftrightarrow \pi^{-1}(V)$ aperto in X.
$C \subset X/{\sim}$ chiuso in $X/{\sim} \Leftrightarrow \pi^{-1}(C)$ chiuso in X.

Oss. $\mathcal{T}_{\sim}$ è una topologia perché

$$\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi^{-1}(X/{\sim}) = X$$

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(V_i)$$

$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2).$$

Oss. $\pi : X \to X/{\sim}$ continua e suriettiva.

N.B. Per definire $\sim$ su X è sufficiente dichiarare equivalenze non banali.

Esempio. *Retta con due origini.* Su $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0, 1\}_{\text{dis}}$ definiamo

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\} \rightsquigarrow R_{\div} := (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R})/{\sim}.$$

Ogni intorno di $[(0, 0)]$ interseca ogni intorno di $[(0, 1)]$.

Teor. *$f : X/{\sim} \to Y$ continua $\Leftrightarrow f \circ \pi : X \to Y$ continua.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Immediato.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, V \subset Y$ aperto $\Rightarrow \pi^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ \pi)^{-1}(V) \subset X$ aperto $\Rightarrow$ $f^{-1}(V) \subset X$ aperto $\Rightarrow f$ continua. $\square$

Oss. $f : Y \to X/{\sim}$ continua *se* $\exists\, \tilde{f} : Y \to X$ continua t.c. $f = \pi \circ \tilde{f}$.

Spazi proiettivi

Caso reale. $\sim$ relazione di proporzionalità: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ t.c. } x = \alpha y$$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$	*Spazio proiettivo reale di dimensione* n. (*Retta* per $n = 1$, *piano* per $n = 2$)
$[x] = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$	*Coordinate omogenee* (non tutte nulle).
$\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ $\pi(x) = [x]$	Continua e suriettiva.

Caso complesso. $\sim$ relazione di proporzionalità: $\forall\, x, y \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ t.c. } x = \alpha y$$

$\mathbb{C}\mathrm{P}^n \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$	*Spazio proiettivo complesso di dimensione* n. (*Retta* per $n = 1$, *piano* per $n = 2$)
$[x] = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$	*Coordinate omogenee* (non tutte nulle).
$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ $\pi(x) = [x]$	Continua e suriettiva.

Proiettività. Poniamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a seconda del caso.

$A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow p_A : \mathbb{K}\mathrm{P}^n \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n$ *Proiettività.*

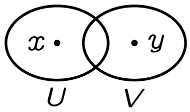
$$p_A([x]) = [Ax]$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{K}\mathrm{P}^n & \xrightarrow[p_A]{} & \mathbb{K}\mathrm{P}^n \end{array} \qquad \begin{array}{c} L_A(x) = Ax \\ \\ p_A([x]) = [Ax] \end{array}$$

Oss. $p_A \circ \pi = \pi \circ L_A \Rightarrow p_A$ continua e $p_A^{-1} = p_{A^{-1}} \Rightarrow p_A$ omeomorfismo.

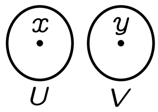
Assiomi di separazione $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$

Def. Uno spazio topologico X è:



T_1 se $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$ e $y \in V - U$.

T_2 o *di Hausdorff* se $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.



Oss.

(*1*) $\#X \geqslant 2 \Rightarrow X_{\text{ban}}$ non T_1.

(*2*) $\#X = \infty \Rightarrow X_{\text{cof}}$ T_1 ma non T_2.

$\boxed{T_1}$ $\forall\, x \neq y \in X_{\text{cof}} \rightsquigarrow U = X - \{y\}$, $V = X - \{x\}$.

$\boxed{\text{Non } T_2}$ $\forall\, U, V \subset X_{\text{cof}}$ aperti non vuoti $\Rightarrow \exists\, A, B \subset X$ finiti t.c. $U = X - A$, $V = X - B \Rightarrow U \cap V = X - (A \cup B) \neq \emptyset$.

(*3*) X_{dis} T_2 $\forall\, X$.

Oss. $T_2 \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow T_1$.

Oss. <u>Metrizzabile $\Rightarrow T_2$</u>. $\forall\, x \neq y \in (X, d) \rightsquigarrow r = \dfrac{d(x,y)}{2} > 0 \rightsquigarrow$ $x \in U := B_d(x, r)$, $y \in V := B_d(y, r)$ e $U \cap V = \emptyset$.

Oss. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ e i loro sottospazi sono T_2 in quanto metrizzabili. In particolare I^n, B^n, S^n e T^n sono T_2.

Oss. $T_2 \Rightarrow$ unicità del limite per funzioni e successioni.

Teor. *X è T_1 $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in X$, $\{x\}$ è chiuso in X.*

In altre parole uno spazio è T_1 $\Leftrightarrow$ i punti sono chiusi.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in X - \{x\}$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$ e $y \in V - U \Rightarrow y \in V \subset X - \{x\} \Rightarrow X - \{x\}$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x \neq y \in X \rightsquigarrow U := X - \{y\}$, $V := X - \{x\}$ aperti $\Rightarrow$ $x \in U - V$ e $y \in V - U$. $\square$

Oss. La retta con due origini $R_{\div}$ è T_1 ma non T_2.

Oss. T_1 e T_2 si preservano a meno di prodotti topologici. Esercizio.

Oss. $X_1, \ldots, X_n$ spazi T_1 $\Rightarrow i_j : X_j \hookrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ immers. chiusa $\forall\, j$.

Prop. *X è T_2 $\Leftrightarrow$ la diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, (x, y) \in (X \times X) - \Delta \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow (x, y) \in U \times V \subset (X \times X) - \Delta \Rightarrow (X \times X) - \Delta$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x \neq y \in X \Rightarrow (x, y) \in (X \times X) - \Delta \Rightarrow \exists\, U \times V \subset X \times X$ aperto basico t.c. $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) - \Delta \Rightarrow x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Cor. *$f, g : X \to Y$ continue e Y di Hausdorff $\Rightarrow$ l'insieme di coincidenza*

$$C(f, g) := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

è chiuso in X.

Dim. $F : X \to Y \times Y$, $F(x) = (f(x), g(x))$ continua perché le componenti sono continue $\Rightarrow C(f, g) = F^{-1}(\Delta)$ chiuso, con $\Delta \subset Y \times Y$ diag. di Y. □

Proprietà topologiche ereditarie

Def. Una proprietà topologica $\mathcal{P}$ è *ereditaria* se valendo per uno spazio X vale anche per tutti i sottospazi topologici di X.

Oss. Se X ha una proprietà topologica ereditaria $\mathcal{P}$ e $Y \hookrightarrow X \Rightarrow Y$ ha $\mathcal{P}$.

Oss. La metrizzabilità è una proprietà topologica ereditaria.

Prop. *T_1 e T_2 sono proprietà topologiche ereditarie.*

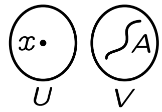
Dim. Dimostriamolo per T_2. T_1 è lasciata per Esercizio.
$\boxed{T_2 \text{ proprietà topologica}}$ X T_2 e $X \cong Y \Rightarrow \exists f : X \to Y$ omeo.
$\forall y_1 \neq y_2 \in Y \; \exists U, V \subset X$ aperti t.c. $f^{-1}(y_1) \in U$, $f^{-1}(y_2) \in V$, $U \cap V = \emptyset$ $\Rightarrow f(U), f(V) \subset Y$ aperti, $y_1 \in f(U)$, $y_2 \in f(V)$, $f(U) \cap f(V) = \emptyset$.

$\boxed{T_2 \text{ ereditaria}}$ X T_2 e $Y \subset X$. $\forall y_1 \neq y_2 \in Y$, $\exists U, V \subset X$ aperti t.c. $y_1 \in U$, $y_2 \in V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap Y$ e $V \cap Y$ aperti disgiunti in Y. □

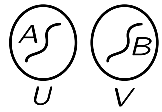
Assiomi di separazione T_3 e T_4

Def. Uno spazio topologico X è detto:

T_3 o *regolare* se X è T_1 e $\forall\, A \subset X$ chiuso, $\forall\, x \in X - A$
$\Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $A \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.



T_4 o *normale* se X è T_1 e $\forall\, A, B \subset X$ chiusi t.c. $A \cap B = \emptyset$
$\Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.



Oss. $T_4 \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow T_3 \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow T_2 \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow T_1$.

N.B. In alcune referenze non si assume T_1 per regolare e normale. T_3 e T_4 sono accettati secondo la definizione data.

N.B. Esistono spazi T_3 non T_4, uno lo vedremo (forse) più avanti. Esempi di spazi T_2 non T_3 esistono ma non li esamineremo.

Prop. *T_3 e T_4 sono proprietà topologiche e T_3 è ereditaria.*

Dim. T_3 e T_4 proprietà topologiche: simile a T_2 nella lezione precedente. Mostriamo che T_3 è ereditaria. Sia X spazio T_3 e $Y \subset X$. Facciamo vedere che Y è T_3. Y è T_1 perché T_1 è ereditaria.
$\forall\, A \subset Y$ chiuso in Y, $\forall\, y \in Y - A$, $\exists\, \tilde{A} \subset X$ chiuso in X t.c. $A = \tilde{A} \cap Y$ $\Rightarrow y \in X - \tilde{A} \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $y \in U$, $\tilde{A} \subset V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ $U' = U \cap Y$ e $V' = V \cap Y$ aperti in Y t.c. $y \in U'$, $A \subset V'$, $U' \cap V' = \emptyset$. $\square$

Oss. La dimostrazione non si estende a T_4 perché non è detto che esistano chiusi *disgiunti* $\tilde{A}, \tilde{B} \subset X$ t.c. $A = \tilde{A} \cap Y$, $B = \tilde{B} \cap Y$.

N.B. T_4 *non* è ereditaria, esistono controesempi ma non li esaminiamo. Per controesempi in topologia vedi Steen e Seebach, *Counterexamples in Topology*, e il sito π-Base `https://topology.pi-base.org/`

Oss. I sottospazi *chiusi* di spazi topologici T_4 sono T_4.

Esempio. La retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$ è T_4. $\mathbb{R}_\ell$ è T_1 (punti chiusi).
$\forall\, A, B \subset \mathbb{R}_\ell$ chiusi disgiunti non vuoti $\Rightarrow$

$\forall\, a \in A\ \exists\, a' > a$ t.c. $[a, a'[\subset \mathbb{R}_\ell - B \ \rightsquigarrow\ U = \bigcup_{a \in A} [a, a'[$

$\forall\, b \in B\ \exists\, b' > b$ t.c. $[b, b'[\subset \mathbb{R}_\ell - A \ \rightsquigarrow\ V = \bigcup_{b \in B} [b, b'[$

aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Oss. Per scegliere gli a' e b' occorre l'*Assioma della scelta*.

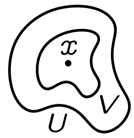
Teor. *Ogni spazio metrizzabile è T_4.*

Dim. (X, d) spazio metrico $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.
$\forall\, A, B \subset X$ chiusi non vuoti disgiunti $\rightsquigarrow$

$$U = \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\}$$
$$V = \{x \in X \mid d(x, A) > d(x, B)\}.$$

Disuguaglianze continue strette incompatibili $\Rightarrow U, V$ aperti e $U \cap V = \emptyset$.
A e B chiusi disgiunti $\Rightarrow A \subset U$ e $B \subset V$. Quindi X è T_4. $\square$

Oss. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ e i loro sottospazi sono T_4 perché metrizzabili.
In particolare I^n, B^n, S^n e T^n sono T_4.



Prop. *Sia X spazio T_3. $\forall\, x \in X$, $\forall\, U \subset X$ intorno aperto di x, $\exists\, V \subset X$ intorno aperto di x t.c. $\mathrm{Cl}_X V \subset U$.*

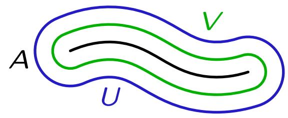
Dim. $A := X - U$ chiuso e $x \in X - A \Rightarrow \exists\, V, W \subset X$ aperti t.c. $x \in V$, $A \subset W$, $V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subset X - W \subset X - A = U$ e $X - W$ chiuso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X V \subset X - W \subset U$. $\square$

Cor. *Supponiamo che X sia T_1. Allora X è $T_3 \Leftrightarrow$ ogni punto $x \in X$ ammette base di intorni chiusi.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Per la Prop. la famiglia degli intorni chiusi di x è base di intorni.
$\boxed{\Leftarrow}$ X è T_1 per ipotesi. $\forall\, A \subset X$ chiuso, $\forall\, x \in X - A$, $\exists\, W \subset X$ intorno chiuso di x t.c. $W \subset X - A$ (aperto) $\rightsquigarrow U = \mathrm{Int}_X W$, $V = X - W$ aperti t.c. $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Per gli spazi T_4 valgono enunciati analoghi, le dimostrazioni sono simili e vengono lasciate per Esercizio.

Prop. *Sia X spazio T_4. $\forall\, A \subset X$ chiuso, $\forall\, U \subset X$ intorno aperto di A $\exists\, V \subset X$ intorno aperto di A t.c. $\mathrm{Cl}_X V \subset U$.*



Cor. *Supponiamo che X sia T_1. Allora X è $T_4 \Leftrightarrow$ ogni chiuso $A \subset X$ ammette base di intorni chiusi.*

Assiomi di numerabilità

Def. Un insieme A è *numerabile* se $\exists\, \varphi : A \to \mathbb{N}$ iniettiva.

Oss. A numerabile $\Leftrightarrow$ A finito oppure in biiezione con $\mathbb{N}$.

Oss. A numerabile $\Leftrightarrow \exists\, \psi : \mathbb{N} \to A$ suriettiva.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili. Si può dimostrare che sono numerabili le unioni numerabili di insiemi numerabili e i prodotti finiti di insiemi numerabili $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^n$ numerabile. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non è numerabile. $\mathbb{R}$ non è numerabile (Cantor).

Def. Uno spazio topologico X è detto:

I-Numerabile se ogni punto $x \in X$ ammette base di intorni numerabile

$$\mathcal{J}_x = \{J_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

II-Numerabile se X ammette base numerabile

$$\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Oss. Metrizzabile $\Rightarrow$ I-numerabile: $\mathcal{J}_x = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esempio. $\mathbb{R}_\ell$ I-numerabile: $\mathcal{J}_x = \left\{\left[x, x+\frac{1}{n}\right[\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
$\mathbb{R}_\ell$ non II-numerabile (lo mostreremo più avanti).

Esempio. $\mathbb{R}_{\text{dis}}$ non II-numerabile.

Prop. *II-numerabile $\Rightarrow$ I-numerabile.*

Dim. X spazio II-numerabile, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base numerabile per X $\rightsquigarrow$ $\forall\, x \in X$, $\mathcal{J}_x = \{B_n \in \mathcal{B} \mid x \in B_n\}$ base di intorni numerabile di x. $\square$

N.B. I-numerabile $\not\Rightarrow$ II-numerabile.

Def. $D \subset X$ è *denso* in X se $\mathrm{Cl}_X D = X$.

Prop. *$D \subset X$ è denso $\Leftrightarrow$ $\forall\, U \subset X$ aperto non vuoto si ha $D \cap U \neq \emptyset$.*

Dim. Segue subito dalla caratterizzazione dei punti della chiusura. $\square$

Oss. Se su X è data una base, è sufficiente considerare aperti basici.

Esempio. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ denso numerabile. $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ denso numerabile.

Esempio. $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ aperto denso.

Def. Uno spazio top. X è *separabile* se X ammette un denso numerabile.

Esempio. $\mathbb{R}^n$ separabile: $\mathbb{Q}^n$ denso numerabile.

Esempio. $\mathbb{R}_\ell$ separabile: $\mathbb{Q}$ denso numerabile.

Prop. *I-numerabile e II-numerabile sono proprietà topologiche ereditarie. Separabile è una proprietà topologica.*

N.B. Separabile *non* è ereditaria.

Prop. *Ogni spazio topologico II-numerabile è separabile.*

Dim. X II-numerabile, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base numerabile di aperti non vuoti $\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, a_n \in B_n \rightsquigarrow D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ denso numerabile. $\square$

N.B. Separabile $\not\Rightarrow$ II-numerabile.

N.B. Si usa l'Assioma della scelta.

Teor. *Ogni spazio metrizzabile separabile è II-numerabile.*

Dim. (X, d) spazio metrico, $D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso numerabile in $X \rightsquigarrow$

$$\mathcal{B} = \left\{ B_d\Big(a_n, \frac{1}{k}\Big) \;\middle|\; n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

famiglia numerabile di bocce aperte, mostriamo che è base.
$\forall\, U \subset X$ aperto, $\forall\, x \in U \Rightarrow \exists\, r > 0$ t.c. $B_d(x, r) \subset U \rightsquigarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$
$\rightsquigarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \in B_d(x, \frac{1}{k}) \Rightarrow x \in B_d(a_n, \frac{1}{k}) \subset B_d(x, r) \subset U$. □

Cor. *X metrizzabile separabile e $Y \subset X \Rightarrow Y$ II-numerabile e separabile.*

Dim. X II-numerabile $\Rightarrow Y$ II-numerabile $\Rightarrow Y$ separabile. □

Cor. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, B^n, S^n *e* T^n *sono I-numerabili, II-numerabili e separabili.*

Successioni

Def. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ in uno spazio top. X *converge* a $x \in X$ se $\forall\, U \subset X$ intorno di x, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ t.c. $x_n \in U\ \forall\, n \geqslant N$, e scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

N.B. Non è detto che il limite esista e se esiste non è detto che sia unico. Vale l'unicità del limite negli spazi di Hausdorff.

Esempio. $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_{\text{ban}}$ converge a $\forall\, x \in X_{\text{ban}}$.

Prop. *Sia (X, d) spazio metrico. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a $x \in X \Leftrightarrow$*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

La dimostrazione è semplice e nota dall'Analisi.

Prop. *Supponiamo X spazio metrizzabile e $A \subset X$ non vuoto.
$\forall\, x \in X$ si ha $x \in \mathrm{Cl}_X A \Leftrightarrow \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.*

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$ Si usa il fatto che $x \in \mathrm{Cl}_X A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Scegliamo distanza d su X. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, a_n \in A \cap B_d(x, \frac{1}{n})$. □

Cor. *Supponiamo X metrizzabile. $D \subset X$ è denso in $X \Leftrightarrow$
$\forall\, x \in X$, $\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.*

Oss. Generalizza il fatto che ogni numero reale è limite di numeri razionali.

Spazi compatti

Def. Un *ricoprimento aperto* di uno spazio topologico X è una famiglia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di aperti di X, con A insieme arbitrario, t.c.

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X.$$

Un *sottoricoprimento* di $\mathcal{U}$ per X è una sottofamiglia $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A'}$, con $A' \subset A$, che sia a sua volta un ricoprimento aperto, ossia

$$\bigcup_{\alpha\in A'} U_\alpha = X.$$

Un sottoricoprimento $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ è *finito* se A' è un insieme finito.

Def. Uno spazio topologico X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un *sottoricoprimento finito*.

N.B. Si chiama anche *compattezza per ricoprimenti*, in contrasto con la *compattezza per successioni* usata in Analisi che richiameremo più avanti.

Oss. X compatto $\Leftrightarrow \forall\,\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di X, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ t.c.

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X.$$

Oss. X non compatto $\Leftrightarrow \exists\,\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di X t.c. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ si ha

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \subsetneq X.$$

Oss.

X_{ban} compatto $\forall\, X$.
X finito $\Rightarrow X$ compatto.
X_{dis} compatto $\Leftrightarrow X_{\text{dis}}$ finito: $\{\{x\}\}_{x\in X_{\text{dis}}}$ ricoprimento aperto di X_{dis}.
$\mathbb{R}^n$ non compatto $\forall\, n \geqslant 1$: $\{B(0,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ non ha sottoricoprimenti finiti.
$\mathbb{R}_\ell$ non compatto: $\{[k, k+1[\}_{k\in\mathbb{Z}}$ non ha sottoricoprimenti finiti.

La dimostrazione della Proposizione seguente è lasciata per Esercizio.

Prop. *La compattezza è una proprietà topologica.*

Def. Sia $\mathcal{B}$ base per X. Un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di X è *basico* se $U_\alpha \in \mathcal{B}\ \forall\, \alpha \in A$.

Prop. *Sia $\mathcal{B}$ base per X. Allora X è compatto $\Leftrightarrow$ ogni ricoprimento basico di X ammette un sottoricoprimento finito.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Evidente.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\,\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow$

$$\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists\, \alpha \in A \text{ t.c. } B \subset U_\alpha\}$$

ricoprimento basico di $X \rightsquigarrow \{B_1, \ldots, B_n\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ $\Rightarrow \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists\, \alpha_i \in A$ t.c. $B_i \subset U_{\alpha_i} \Rightarrow \{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. $\square$

Lem. *$I = [0, 1]$ è compatto come sottospazio di $\mathbb{R}$.*

Dim. Gli intervalli del tipo $[0, b[$, $]a, 1]$, $]a, b[$, $\forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant 1$ sono base per $[0, 1]$, ottenuta intersecando la base di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ con $[0, 1]$.

$\forall \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento basico per $[0, 1]$ consideriamo

$$T := \left\{ t \in [0, 1] \;\middle|\; \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, \alpha_1 \dots, \alpha_n \in A \text{ t.c. } [0, t] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \right\}.$$

In altre parole: $t \in T \Leftrightarrow [0, t]$ finitamente ricoperto da aperti di $\mathcal{U}$.

$\exists\, a < b$ t.c. $U_0 = [0, a[$ e $U_1 =]b, 1] \in \mathcal{U} \Rightarrow U_0 \subset T \neq \emptyset$.

$s := \sup T > 0$. Mostriamo che $s = 1$. Se per assurdo $s < 1 \Rightarrow$ $\exists\, \alpha \in A$ t.c. $s \in U_\alpha \Rightarrow \exists\, t \in T \cap U_\alpha$, $\exists\, s' \in U_\alpha$ t.c. $s' > s \rightsquigarrow$ $[0, s'] = [0, t] \cup [t, s'] \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \cup U_\alpha \Rightarrow s' \in T$ contraddizione.

$\exists\, t \in T \cap U_1 \rightsquigarrow [0, 1] = [0, t] \cup [t, 1] = U_{\alpha_1} \cdots \cup U_{\alpha_n} \cup U_1$. $\square$

Oss. $[0, 1]_\ell \subset \mathbb{R}_\ell$ *non* è compatto nella topologia di Sorgenfrey

$$\mathcal{U} = \left\{ \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1} \right[\right\}_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\{1\}\}.$$

Proprietà degli spazi compatti

Teor. *X compatto e $Y \subset X$ chiuso $\Rightarrow Y$ compatto.*

Dim. $\forall \mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $Y \Rightarrow \forall\, \alpha \in A$, $\exists\, U_\alpha \subset X$ aperto t.c. $V_\alpha = U_\alpha \cap Y \Rightarrow \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{X - Y\}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}, X - Y\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $X \Rightarrow$ $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ per Y. $\square$

Oss. Non vale implicazione inversa: $\mathbb{R}_{\text{ban}}$ compatto, $Y = \{0\} \subset \mathbb{R}_{\text{ban}}$ compatto non chiuso.

Teor. *X compatto e $f : X \to Y$ continua e suriettiva $\Rightarrow Y$ compatto.*

Dim. $\forall \mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $Y \Rightarrow U_\alpha := f^{-1}(V_\alpha)$ aperto in X e $V_\alpha = f(U_\alpha)$ perché f suriettiva. $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di X $\rightsquigarrow \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $X \Rightarrow \{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ per $Y = f(X)$. $\square$

Cor. *X compatto $\Rightarrow X/\!\sim$ compatto.*

Cor. *X compatto e $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow f(X) \subset Y$ compatto.*

Oss. In altre parole: L'immagine continua di un compatto è compatta.

Teor. *X spazio di Hausdorff, $Y \subset X$ sottospazio compatto, $x \in X - Y \Rightarrow$ $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Dim. $\forall\, y \in Y$, $\exists\, U_y, V_y \subset X$ aperti t.c. $x \in U_y$, $y \in V_y$, $U_y \cap V_y = \emptyset \rightsquigarrow$ $\{V_y \cap Y\}_{y \in Y}$ ricoprimento aperto di $Y \rightsquigarrow \{V_{y_1} \cap Y, \dots, V_{y_n} \cap Y\}$ sottoricoprimento finito $\rightsquigarrow$

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

aperti in X t.c. $x \in U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Teor. *X spazio di Hausdorff e $Y \subset X$ sottospazio compatto $\Rightarrow$ Y chiuso.*

Dim. $\forall\, x \in X - Y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ $x \in U \subset X - V \subset X - Y \Rightarrow X - Y$ aperto. $\square$

Teor. *$f : X \to Y$ continua e biiettiva con X compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow$ f omeomorfismo.*

Dim. Basta far vedere che f è chiusa. $\forall\, A \subset X$ chiuso $\Rightarrow A$ compatto $\Rightarrow$ $f(A) \subset Y$ compatto $\Rightarrow f(A)$ chiuso in Y. $\square$

Cor. *$f : X \to Y$ continua e iniettiva con X compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow$ f immersione.*

Dim. $f(X) \subset Y$ di Hausdorff (T_2 ereditaria), $f|_{f(X)} : X \to f(X)$ continua e biiettiva quindi omeo per il Teorema. $\square$

Lem. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow X$ è T_3.*

Dim. X è $T_2 \Rightarrow T_1$. $\forall\, Y \subset X$ chiuso $\Rightarrow Y$ compatto, $\forall\, x \in X - Y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Def. Uno spazio X è *localmente compatto* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, J \subset X$ intorno compatto di x in X.

Oss. Compatto $\Rightarrow$ loc. compatto.

N.B. In genere le proprietà locali sono espresse in termini di basi di intorni aventi tali proprietà. Localmente compatto è un'eccezione.

Lem. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow \forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti.*

Dim. Ogni punto ammette base di intorni chiusi, quindi compatti
(vedi Lezione 9: caratterizzazione di T_3 mediante basi di intorni chiusi). $\square$

Cor. *X localmente compatto di Hausdorff $\Rightarrow \forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in X.*

Dim. $\forall\, x \in X$, $\exists\, J \subset X$ intorno compatto di x in $X \Rightarrow \exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in J e quindi in X. $\square$

Cor. *X localmente compatto di Hausdorff $\Rightarrow X$ è T_3.*

Teor. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow X$ è T_4.*

Dim. X è T_3. $\forall\, P, Y \subset X$ chiusi t.c. $P \cap Y = \emptyset \Rightarrow \forall\, y \in Y$, $\exists\, U_y, V_y \subset X$ aperti t.c. $P \subset U_y$, $y \in V_y$, $U_y \cap V_y = \emptyset \rightsquigarrow \{V_y \cap Y\}_{y \in Y}$ ricoprimento aperto di Y compatto $\rightsquigarrow \{V_{y_1} \cap Y, \ldots, V_{y_n} \cap Y\}$ sottoricoprimento finito

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

aperti in X t.c. $P \subset U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Lavoro di gruppo. Esiste un omeomorfismo tra $[0,1[$ e S^1?

Compattezza dei prodotti finiti

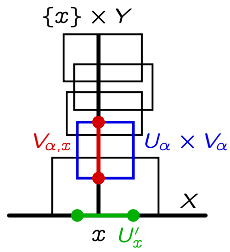
Teor. *$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, X_1, \dots, X_n$ spazi top. compatti $\Rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ compatto.*

Dim. Basta dimostrarlo per $n = 2$ e fare induzione su n.
Supponiamo X e Y compatti e dimostriamo che $X \times Y$ è compatto.
$\forall\, \mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto basico di $X \times Y$, $\forall\, x \in X \rightsquigarrow$

$$V_{\alpha,x} := (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (\{x\} \times Y) \;\;\Rightarrow$$

$\mathcal{V}_x = \{V_{\alpha,x}\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $\{x\} \times Y \cong Y \overset{Y \text{ cpt}}{\Longrightarrow} \exists\, A_x \subset A$ finito t.c. $\mathcal{V}'_x = \{V_{\alpha,x}\}_{\alpha \in A_x}$ sottoricoprimento di $\mathcal{V}_x$ e $\emptyset \notin \mathcal{V}'_x \Rightarrow x \in U_\alpha$, $\forall\, \alpha \in A_x$

$$\Rightarrow \;\; x \in U'_x := \bigcap_{\alpha \in A_x} U_\alpha \quad \text{(intersezione finita)} \;\; \Rightarrow$$



U'_x aperto in $X \rightsquigarrow \mathcal{U} = \{U'_x\}_{x \in X}$ ricoprimento aperto di X $\overset{X \text{ cpt}}{\rightsquigarrow} \{U'_{x_1}, \dots, U'_{x_k}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $X \rightsquigarrow$

$$A' := \bigcup_{i=1}^{k} A_{x_i} \subset A \;\; \text{sottoinsieme finito} \;\; \Rightarrow$$

$\mathcal{W}' = \{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{W}$, infatti:
$\forall\, (x, y) \in X \times Y \rightsquigarrow x \in U'_{x_i} \rightsquigarrow (x_i, y) \in V_{\alpha, x_i}$ per un certo $\alpha \in A_{x_i} \subset A'$
$\Rightarrow (x, y) \in U'_{x_i} \times V_\alpha \subset U_\alpha \times V_\alpha \in \mathcal{W}'$. Quindi $X \times Y$ è compatto. $\square$

Cor. *I^n compatto $\forall\, n \geqslant 1$.*

Def. Il *diametro* di uno spazio metrico (X, d) è definito come

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

X è *limitato* se $\operatorname{diam}(X) < \infty$.

Teorema di Heine-Borel. *$X \subset \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ X è chiuso e limitato.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ X compatto e $\mathbb{R}^n$ di Hausdorff $\Rightarrow$ X chiuso in $\mathbb{R}^n$.
$\{B(0, k) \cap X\}_{k \in \mathbb{N}}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow$ sottoricoprimento finito $\Rightarrow X \subset B(0, k)$ con k massimo raggio $\Rightarrow X$ limitato.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $X \subset B(0, k) \subset [-k, k]^n \Rightarrow X$ chiuso in $[-k, k]^n \cong I^n$ compatto $\Rightarrow X$ compatto. $\square$

Cor. *B^n, S^n e T^n sono compatti.*

Cor. *$\mathbb{R}^n$ è localmente compatto.*

Cor. *$X \subset \mathbb{R}$ compatto non vuoto $\Rightarrow X$ ha massimo e minimo.*

Dim. X chiuso e limitato $\Rightarrow \sup X \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}} X = X \Rightarrow \sup X = \max X$. $\square$

Cor. *$f : X \to \mathbb{R}$ continua e X compatto $\Rightarrow f$ ha massimo e minimo.*

Dim. $f(X) \subset \mathbb{R}$ compatto $\Rightarrow f(X)$ ha max e min $\Rightarrow f$ ha max e min. $\square$

Enunciamo senza dimostrazione il seguente teorema di compattezza per prodotti arbitrari di spazi compatti.

Teorema di Tychonoff. *$\{X_i\}_{i \in I}$ spazi compatti $\Rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ compatto.*

Esempio. Il cubo di Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ è compatto.

Compattezza per successioni

Def. Uno spazio X è *compatto per successioni* o *sequenzialmente compatto* se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente.

N.B. La compattezza per ricoprimenti e la compattezza per successioni sono nozioni distinte e in generale nessuna delle due implica l'altra. Esistono esempi di spazi compatti ma non compatti per successioni e viceversa.

Il seguente teorema è noto dall'Analisi e non lo dimostriamo.

Teorema di Bolzano-Weierstrass. *$X \subset \mathbb{R}^n$ è compatto per successioni $\Leftrightarrow$ X è chiuso e limitato.*

Dai teoremi di Heine-Borel e Bolzano-Weierstrass si ha:

Cor. *$X \subset \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ X è compatto per successioni.*

In generale vale il teorema seguente che enunciamo senza dimostrazione.

Teor. *Uno spazio metrizzabile è compatto $\Leftrightarrow$ è compatto per successioni.*

Relazione d'equivalenza indotta

Def. $f\colon X \to Y \rightsquigarrow \sim_f\colon \forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \sim_f x_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$ *relazione d'equivalenza indotta da f.*

Oss. $f\colon X \to Y$ continua $\rightsquigarrow \bar{f}\colon X/{\sim_f} \to Y$, $\bar{f}([x]) := f(x)$ ben definita, continua e iniettiva, infatti $f = \bar{f} \circ \pi$. $\bar{f}$ è detta f *passata al quoziente.*

Oss. $f\colon X \to Y$ continua, $X/{\sim_f}$ compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow$
$\bar{f}\colon X/{\sim_f} \to Y$ immersione ($\bar{f}$ omeo se f è anche suriettiva).

Def. $A \subset X \rightsquigarrow X/A \overset{\text{def}}{=} X/(a_1 \sim a_2, \forall\, a_1, a_2 \in A)$. $A \in X/A$ è un punto.

Esempio. $[0,1]/\{0,1\} = [0,1]/(0 \sim 1) \cong S^1$

$$f\colon [0,1] \to S^1, \quad f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

identifica 0 e 1 $\Rightarrow \bar{f}\colon [0,1]/\{0,1\} \to S^1$ omeo.

Spazi proiettivi

Caso reale. $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
$\pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ continua e suriettiva $\Rightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ compatto.
Infatti $[x] = \pi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$, $\forall\, [x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Oss. $\forall\, x, y \in S^n$, $[x] = [y] \Leftrightarrow x = \pm y$.

Immersione in $\mathbb{R}^N$. $\forall\, i, j \in \{0, \ldots, n\} \rightsquigarrow$

$$\varphi_{ij} : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}$$

$$\varphi_{ij}([x_0, \ldots, x_n]) := \frac{x_i x_j}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}$$

ben definita e continua perché $\varphi_{ij} \circ \pi$ è continua.

$$\varphi_{ij}([x]) = \varphi_{ij}([y]),\ \forall\, i, j \in \{0, \ldots, n\} \ \Rightarrow\ [x] = [y].$$

$\varphi : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ con componenti φ_{ij} (in un certo ordine) continua iniettiva $\Rightarrow \varphi$ immersione $\Rightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ metrizzabile ($\Rightarrow$ di Hausdorff) e II-numerabile.

Retta proiettiva reale. $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1/(x \sim -x,\ \forall\, x \in S^1) \cong I/\{0, 1\} \cong S^1$

Caso complesso. $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$.
$\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ continua e suriettiva $\Rightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ compatto.
Infatti $[x] = \pi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$, $\forall\, [x] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Oss. $\forall\, x, y \in S^{2n+1}$, $[x] = [y] \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in S^1 \subset \mathbb{C}$ t.c. $x = \alpha y$.

Immersione in $\mathbb{C}^N$. $\forall\, i, j \in \{0, \ldots, n\} \rightsquigarrow$

$$\varphi_{ij} : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}$$

$$\varphi_{ij}([x_0, \ldots, x_n]) := \frac{x_i \bar{x}_j}{|x_0|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

ben definita e continua perché $\varphi_{ij} \circ \pi$ è continua.

$$\varphi_{ij}([x]) = \varphi_{ij}([y]),\ \forall\, i, j \in \{0, \ldots, n\} \ \Rightarrow\ [x] = [y].$$

$\varphi : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}^{(n+1)^2}$ con componenti φ_{ij} (in un certo ordine) continua iniettiva $\Rightarrow \varphi$ immersione $\Rightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ metrizzabile ($\Rightarrow$ di Hausdorff) e II-numerabile.

Incollamenti topologici

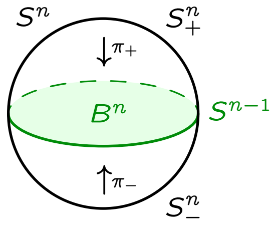
Incollamento di due spazi. $A \subset X$, $f: A \to Y \rightsquigarrow$

$$X \cup_f Y \overset{\text{def}}{=} (X \sqcup Y)/(a \sim f(a),\ \forall\, a \in A) \quad \textit{(incollamento mediante } f\textit{)}$$

$$f: A \xrightarrow{\cong} f(A) \text{ omeo} \rightsquigarrow X \cup_A Y := X \cup_f Y \ \textit{(incollamento lungo } A\textit{).}$$

Esempio. $S^n_\pm := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_{n+1} \geqslant 0\}$ emisferi

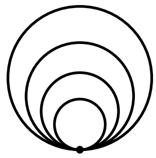
$$\pi_\pm : S^n_\pm \xrightarrow{\cong} B^n \quad \text{omeo}$$
$$\pi_\pm(x_1 \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$
$$\pi_\pm^{-1}(x) = \left(x,\ \pm\sqrt{1 - \|x\|^2}\right)$$
$$S^n = S^n_+ \cup S^n_- \qquad S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$$
$$S^n \cong B^n \cup_{S^{n-1}} B^n$$



Unione puntata. Dati $x_0 \in X$, $y_0 \in Y \rightsquigarrow$

$$X \vee Y \overset{\text{def}}{=} (X \sqcup Y)/(x_0 \sim y_0) \quad \textit{unione puntata} \text{ di } X \text{ e } Y$$

Esempio. $\vee_n S^1$ unione puntata di n copie di S^1
(bouquet di circonferenze).



Autoincollamento. $A \subset X$, $f: A \to X \rightsquigarrow$

$$X/\!\sim_f = X/(a \sim f(a),\ \forall\, a \in A)$$

Immersione del toro in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}_+ :=]0, +\infty[\cong \mathbb{R}$$

$$f: S^1 \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 - \{0\} \quad \text{omeo}$$
$$f((x_1, x_2), y) = (x_1 y, x_2 y)$$
$$f^{-1}(v) = \left(\frac{v}{\|v\|},\ \|v\|\right)$$

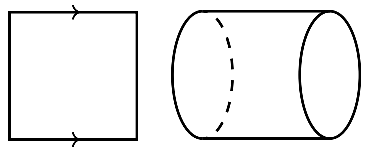
Identifichiamo S^1 con la circonferenza in $\mathbb{R}^2$ di centro $(2,0)$ e raggio 1

$$S^1 \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$$
$$T^2 = S^1 \times S^1 \subset S^1 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \cong (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$
$$\varphi: T^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{immersione}$$
$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1(y_1 + 2), x_2(y_1 + 2), y_2)$$

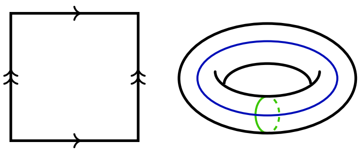
Oss. Si generalizza ad un'immersione $T^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (induzione su $n \geqslant 1$).

Quozienti del quadrato

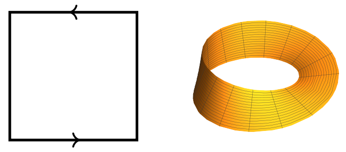
Incolliamo i lati linearmente a due a due seguendo le frecce.



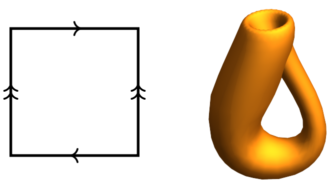
$I \times S^1$
Anello o cilindro



$T^2 = S^1 \times S^1$
Toro



Mb
Striscia di Möbius



Kl
Bottiglia di Klein

Alcuni omeomorfismi degli spazi Euclidei

$\forall\, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ continua $\rightsquigarrow$ $T_f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}$

$$T_f(x, y) = (x, y + f(x))$$

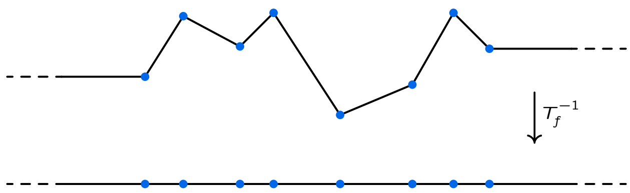
T_f continua e $T_f^{-1} = T_{-f} \Rightarrow T_f$ omeomorfismo.
$T_f(x, 0) = (x, f(x))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow T_f(\mathbb{R}^n \times \{0\}) =$ grafico di f.

Sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}^2$. $A = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ punti distinti. A meno di rotazione e riordinamento, possiamo assumere $a_i < a_j$, $\forall\, i < j$.

F = spezzata ottenuta congiungendo i punti di A e prolungandola indefinitamente con due semirette orizzontali.

$F =$ grafico di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow T_f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$ omeo t.c.

$$T_f^{-1}(A) \subset (\text{asse } x).$$

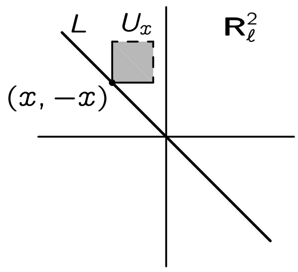


Il piano di Sorgenfrey

Il *piano di Sorgenfrey* è il prodotto topologico $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$.
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_\ell$ denso $\Rightarrow \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}_\ell^2$ denso $\Rightarrow \mathbb{R}_\ell^2$ separabile.

$$L := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_\ell^2 \qquad \text{seconda diagonale}$$

$$U_x := [x, x+1[\times [-x, -x+1[\qquad \text{aperto basico in } \mathbb{R}_\ell^2$$



$U_x \cap L = \{(x, -x)\}$ aperto in L, $\forall\,(x, -x) \in L \Rightarrow L \cong \mathbb{R}_{\text{dis}}$ discreto $\Rightarrow$ L non II-numerabile $\Rightarrow \mathbb{R}_\ell^2$ non II-numerabile (II-num. ereditaria) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_\ell^2$ non metrizzabile (metrizzabile separabile $\Rightarrow$ II-num.) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_\ell$ non metrizzabile e non II-numerabile.

Considerando i punti razionali e quelli irrazionali su L si ottengono due chiusi non separabili con aperti disgiunti, dimostrando che $\mathbb{R}_\ell^2$ non è T_4. Ricordando che $\mathbb{R}_\ell$ è T_4 si ha un esempio di spazio prodotto di due spazi T_4 che non è T_4, ossia T_4 non si preserva a meno di prodotti.

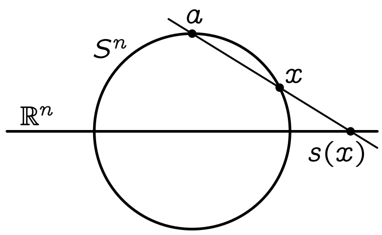
Proiezione stereografica

$a = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$
$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identificato con l'iperpiano di equazione $x_{n+1} = 0$.
$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n - \{a\} \rightsquigarrow s(x) = L(a, x) \cap \mathbb{R}^n$, intersezione della retta $L(a, x)$ con $\mathbb{R}^n$. Si ottiene la formula seguente per $s(x)$.

Def. L'applicazione

$$s : S^n - \{a\} \to \mathbb{R}^n$$
$$s(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}}$$

è detta *proiezione stereografica dal punto a*.

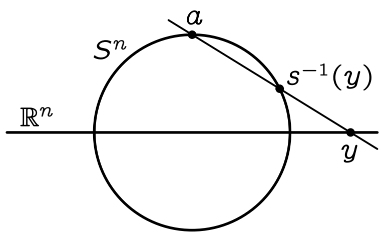


Quindi s è continua e con alcuni calcoli lasciati per esercizio si determina l'applicazione inversa, anch'essa continua.

Prop. *La proiezione stereografica è un omeomorfismo con inversa*

$$s^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n - \{a\}$$
$$s^{-1}(y) = \frac{(2y, \|y\|^2 - 1)}{\|y\|^2 + 1}$$

$\forall\, y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.



Oss. $S^n - \{a\} \cong \mathbb{R}^n$.

Oss. $s^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n - \{a\}$ aperto denso in S^n.

Oss. $s(0, \ldots, 0, -1) = 0$.

Oss. Più in generale si può considerare la proiezione stereografica da un punto qualunque $u \in S^n$ verso l'iperpiano ortogonale $u^\perp \cong \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Idea euristica.

$\lim_{x \to a} s(x) = \infty \overset{\text{Idea}}{\rightsquigarrow} a \in S^n$ corrisponde al "punto all'infinito" di $\mathbb{R}^n$.

Compattificazione di Alexandrov

Def. Una *compattificazione* di uno spazio topologico non compatto X è un'immersione di X come sottospazio denso di uno spazio compatto $\overline{X}$.

Teorema di Alexandrov. *X spazio topologico T_2 localmente compatto non compatto $\Rightarrow \exists\, \widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ compattificazione T_2 di X, con $\infty \notin X$. Inoltre $\widehat{X}$ è unico a meno di omeomorfismi.*

Def. $\widehat{X}$ è detto *compattificazione di Alexandrov* o *compattificazione con un punto* di X. ∞ è il *punto all'infinito di X* e lo indicheremo anche ∞_X.

Dim. Poniamo $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$, dove ∞ indica un punto t.c. $\infty \notin X$.

<u>*Topologia di $\widehat{X}$*</u>. $U \subset \widehat{X}$ aperto $\overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a)\ U \subset X \text{ aperto in } X, & \infty \notin U \\ b)\ X - U \subset X \text{ compatto}, & \infty \in U \end{cases}$

Gli aperti di $\widehat{X}$ sono gli aperti di X e i complementari dei compatti di X. Verifichiamo che è una topologia.

1) $\emptyset$ e $\widehat{X}$ aperti rispettivamente di tipo (a) e (b).

2) $\forall \{U_i\}_{i\in I}$ famiglia di aperti di $\widehat{X}$ poniamo

$I_0 := \{i \in I \mid \infty \notin U_i\} \rightsquigarrow U_0 := \bigcup_{i\in I_0} U_i \subset X$ aperto (a)

$I_\infty := \{i \in I \mid \infty \in U_i\} \rightsquigarrow U_\infty := \bigcup_{i\in I_\infty} U_i$ e $U := \bigcup_{i\in I} U_i = U_0 \cup U_\infty$

$I_\infty = \emptyset \Rightarrow U = U_0$ aperto. Supponiamo $I_\infty \neq \emptyset \Rightarrow \infty \in U_\infty$.

$X - U_\infty = X - \bigcup_{i\in I_\infty} U_i = \bigcap_{i\in I_\infty} \underbrace{(X - U_i)}_{\text{compatto}} \subset X \underset{X\ T_2}{\text{compatto}} \Rightarrow U_\infty$ aperto (b).

$X - U = \underbrace{(X - U_0)}_{\text{chiuso in } X} \cap \underbrace{(X - U_\infty)}_{\text{compatto}} \subset X$ compatto $\Rightarrow U$ aperto (b).

3) $\forall\, U, V \subset \widehat{X}$ aperti. Entrambi (a) $\Rightarrow U \cap V$ aperto (a).

U tipo (a) e V tipo (b) $\Rightarrow K := X - V \subset X$ compatto e
$V_0 := X \cap V = X - K$ aperto in $X \Rightarrow U \cap V = U \cap V_0$ aperto (a).

Entrambi (b) $\Rightarrow X - (U \cap V) = \underbrace{(X - U)}_{\text{compatto}} \cup \underbrace{(X - V)}_{\text{compatto}} \Rightarrow U \cap V$ ap. (b).

<u>*$\widehat{X}$ compatto*</u>. $\forall \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di $\widehat{X} \Rightarrow \exists\, i_\infty \in I$ t.c. $\infty \in U_{i_\infty}$

$\rightsquigarrow K := X - U_{i_\infty} \subset X$ compatto $\rightsquigarrow K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \Rightarrow$
$\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, U_{i_\infty}\}$ sottoricoprimento finito.

<u>*X denso in $\widehat{X}$*</u>. $\forall\, \emptyset \neq U \subset \widehat{X}$ aperto. U tipo (a) $\Rightarrow U \cap X = U \neq \emptyset$.

U tipo (b) $\rightsquigarrow \underset{\text{cpt}}{K} := X - U \subsetneq \underset{\substack{\text{non}\\ \text{cpt}}}{X} \Rightarrow U \cap X = X - K \neq \emptyset$.

$\underline{T_2}$. $\forall x \neq y \in \widehat{X}$. $x, y \in X \Rightarrow \exists\, U, V$ aperti (*a*) t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap Y = \emptyset$.

$x \in X$ e $y = \infty \Rightarrow \exists\, W \subset \underset{\substack{\text{loc.}\\ \text{cpt}}}{X}$ intorno compatto di $x \rightsquigarrow$

$U := \mathrm{Int}_X W$, $V := \widehat{X} - W$ aperti in $\widehat{X}$ t.c. $x \in U$, $\infty \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Unicità. $\widehat{X}' = X \cup \{\infty'\}$, $\infty' \notin X$, altra compattificazione T_2 di $X \rightsquigarrow$

$$g : \widehat{X} \to \widehat{X}', \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \neq \infty \\ \infty', & x = \infty \end{cases}$$

$\forall\, V \subset \widehat{X}'$ aperto. $\infty' \notin V \Rightarrow V \subset X \Rightarrow g^{-1}(V) = V$ aperto (*a*).

$\infty' \in V \Rightarrow K = \underbrace{\widehat{X}' - V}_{\text{chiuso in } \widehat{X}'} \subset X$ compatto $\Rightarrow g^{-1}(V) = \widehat{X} - K$ aperto (*b*).

g continua e biiettiva, $\widehat{X}$ compatto, $\widehat{X}'$ $T_2 \Rightarrow g$ omeomorfismo. □

Oss. $X \subset \widehat{X}$ aperto denso.

Applicazioni proprie

Def. $f : X \to Y$ è *propria* se $\forall\, K \subset Y$ compatto $\Rightarrow f^{-1}(K) \subset X$ compatto.

Oss. In altre parole $f : X \to Y$ è propria se la preimmagine di qualunque compatto è compatta.

Oss. $f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow f$ propria.

Teor. *X, Y spazi T_2 loc. compatti non compatti, $f : X \to Y$ continua e propria $\Rightarrow \widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ estensione di f t.c. $f(\infty_X) = \infty_Y$ continua.*

Dim. $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$, $\quad \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \infty_X \\ \infty_Y & x = \infty_X \end{cases}$

$\forall\, V \subset \widehat{Y}$ aperto. V aperto (*a*) $\Rightarrow \widehat{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \subset X$ aperto (*a*).
V aperto (*b*) $\Rightarrow K := \widehat{Y} - V = Y - V \subset Y$ compatto $\overset{\text{propria}}{\Longrightarrow}$

$\widehat{f}^{-1}(K) = f^{-1}(K) \subset X$ compatto $\Rightarrow \widehat{f}^{-1}(V) = \widehat{X} - f^{-1}(K)$ aperto (*b*). □

Cor. *$f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow \widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ omeomorfismo.*

Cor. *X compatto T_2, $a \in X$ t.c. $X_0 = X - \{a\}$ non compatto $\Rightarrow \widehat{X_0} = X$.*

Cor. $\widehat{\mathbb{R}}^n \cong S^n$, $\forall\, n \geqslant 1$.

Dim. $\mathbb{R}^n \cong S^n - \{a\} \Rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n \cong \widehat{S^n - \{a\}} = S^n$. □

Oss. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, \tilde{f} : \widehat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ estensione continua di f t.c. $\tilde{f}(\infty) = a$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f$ propria $\rightsquigarrow \widehat{f} : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$, $\widehat{f}(\infty) = \infty$.

Spazi proiettivi

Carte affini. Poniamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Per $i = 0, \dots, n$ definiamo

$H_i \stackrel{\text{def}}{=} \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{K}\mathrm{P}^n \mid x_i = 0\} \cong \mathbb{K}\mathrm{P}^{n-1}$ iperpiano proiettivo

$U_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}\mathrm{P}^n - H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{K}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}$ aperto denso

$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n \quad \text{omeo } \textit{(carta affine)}$$

$$\varphi_i([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

$$\varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

Oss. $U_i \cong \mathbb{K}^n$ è uno spazio affine e $\mathbb{K}\mathrm{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$.

Oss. $\mathbb{K}\mathrm{P}^n = U_0 \cup H_0$ compattificazione di $\mathbb{K}^n \cong U_0$ $(n \geqslant 1)$.

Oss. Per $n = 1$, $H_0 = \{[0, 1]\}$ è un punto $\Rightarrow \mathbb{K}\mathrm{P}^1 = U_0 \cup \{[0, 1]\} \cong \widehat{\mathbb{K}}$ compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{K}$.

Retta proiettiva reale. $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong \widehat{\mathbb{R}} \cong S^1$.

Retta proiettiva complessa. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong \widehat{\mathbb{C}} \cong \widehat{\mathbb{R}^2} \cong S^2$.

N.B. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ e $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ non sono omeomorfi a sfere per $n > 1$.

Spazi connessi

Def. Uno spazio topologico X è *connesso* se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi di X sono $\emptyset$ e X. Uno spazio non connesso è detto *sconnesso*.

Prop. *X sconnesso $\Leftrightarrow \exists\, \emptyset \neq U \subsetneq X$ aperto e chiuso $\Leftrightarrow$ X è unione di due aperti non vuoti disgiunti.*

Dim. Primo $\Leftrightarrow$ per definizione. Dimostriamo il secondo.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\emptyset \neq U \subsetneq X$ aperto e chiuso $\rightsquigarrow V := X - U \neq \emptyset$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $X = U \cup V$ con $U, V \subset X$ aperti non vuoti disgiunti $\Rightarrow$
$\emptyset \neq U \subsetneq X$ aperto e chiuso. $\square$

Cor. *X connesso $\Leftrightarrow \forall\, U, V \subset X$ aperti t.c. $U \cup V = X$ e $U \cap V = \emptyset$ si ha $U = \emptyset$ oppure $V = \emptyset$.*

Esempi.

1) $[0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ sconnesso.

2) $\mathbb{R}_\ell$ sconnesso: $\mathbb{R}_\ell =]-\infty, 0[\cup [0, +\infty[$ aperti non vuoti disgiunti.

3) $\forall\, X_{\text{ban}}$ connesso.

4) X_{dis} connesso $\Leftrightarrow |X_{\text{dis}}| = 1$.

5) $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ connesso $\Rightarrow |A| = 1$ (unione banale).

Teor. *$I = [0,1]$ è connesso con la topologia Euclidea.*

Dim. Per assurdo $I = U \cup V$ aperti non vuoti disgiunti $\Rightarrow U, V$ chiusi limitati. Sia $0 \in U \rightsquigarrow \nu = \min V > 0 \Rightarrow [0, \nu[\subset U \Rightarrow \mathrm{Cl}_I [0, \nu[= [0, \nu] \subset U \Rightarrow \nu \in U \cap V \neq \emptyset$ contraddizione. $\square$

Teor. *$f : X \to Y$ continua suriettiva e X connesso $\Rightarrow Y$ connesso.*

Dim. $\forall\, \emptyset \neq V \subset Y$ aperto e chiuso $\rightsquigarrow \emptyset \neq U := f^{-1}(V) \subset X$ aperto e chiuso $\Rightarrow U = X \Rightarrow V = f(U) = f(X) = Y \Rightarrow Y$ connesso. $\square$

Cor. *$f : X \to Y$ continua e X connesso $\Rightarrow f(X) \subset Y$ connesso.*

Oss. Immagine continua di un connesso è connessa.

Teor. *$X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ con X_α connesso $\forall\, \alpha \in A$ e $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow X$ connesso.*

Dim. $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$. Per assurdo $X = U \cup V$ aperti non vuoti disgiunti con $x_0 \in U$, $x_1 \in V \rightsquigarrow x_1 \in X_{\alpha_1} \Rightarrow U' = X_{\alpha_1} \cap U$, $V' = X_{\alpha_1} \cap V$ aperti non vuoti disgiunti in X_{α_1} t.c. $X_{\alpha_1} = U' \cup V'$ contraddizione. $\square$

Prop. *$Y \subset X$ sottospazio connesso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X Y$ connesso.*

Dim. $\forall\, \emptyset \neq U \subset \mathrm{Cl}_X Y$ aperto e chiuso in $\mathrm{Cl}_X Y \Rightarrow U$ chiuso in X e $\exists\, \tilde{U} \subset X$ aperto in X t.c. $U = \tilde{U} \cap \mathrm{Cl}_X Y \Rightarrow U \cap Y = \tilde{U} \cap Y \neq \emptyset$ aperto e chiuso in $Y \Rightarrow U \cap Y = Y \subset U \Rightarrow \mathrm{Cl}_X Y \subset U \Rightarrow \mathrm{Cl}_X Y = U$. $\square$

Componenti connesse.

Def. Dato uno spazio topologico X, la *componente connessa* di $x \in X$ è

$$\mathcal{C}_x(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{x \in C \subset X \\ C \text{ conn.}}} C$$

Teor. *Valgono le seguenti proprietà:*

1) $x \in \mathcal{C}_x(X) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$;

2) $\mathcal{C}_x(X)$ *è il più grande sottospazio connesso di* X *che contiene* x;

3) $\forall\, x, y \in X$, $\mathcal{C}_x(X) \cap \mathcal{C}_y(X) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{C}_x(X) = \mathcal{C}_y(X)$;

4) $\mathcal{C}_x(X)$ *chiuso in* X, $\forall\, x \in X$.

Dim.

1) $\{x\}$ connesso quindi è nell'unione.

2) $\mathcal{C}_x(X)$ connesso perché unione di connessi con intersezione non vuota.

3) $\boxed{\Leftarrow}$ Ovvio.
$\boxed{\Rightarrow}$ $x, y \in \mathcal{C}_x(X) \cup \mathcal{C}_y(X)$ connesso $\Rightarrow \mathcal{C}_x(X) \cup \mathcal{C}_y(X) \subset \mathcal{C}_x(X) \Rightarrow \mathcal{C}_y(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$ e similmente per l'altra inclusione.

4) $x \in \mathrm{Cl}_X(\mathcal{C}_x(X))$ connesso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X(\mathcal{C}_x(X)) \subset \mathcal{C}_x(X) \Rightarrow$
$\mathrm{Cl}_X(\mathcal{C}_x(X)) = \mathcal{C}_x(X)$ chiuso. $\square$

Def. $\mathcal{C}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{C}_x(X) \mid x \in X\}$ *insieme delle componenti connesse di* X.

Oss. $\mathcal{C}(X)$ è una partizione di X in sottospazi chiusi disgiunti.

Oss. X connesso $\Leftrightarrow$ X ha un'unica componente connessa.

Oss. $\mathcal{C}(X)$ finito $\Rightarrow \mathcal{C}_x(X)$ aperto in X, $\forall\, x \in X \Rightarrow X$ unione topologica delle sue componenti connesse.

Def. Uno spazio topologico X è *localmente connesso* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni aperti connessi di x in X.

Teor. X *loc. connesso* $\Rightarrow \mathcal{C}_x(X)$ *aperto in* X, $\forall\, x \in X$.

Dim. $\forall\, y \in \mathcal{C}_x(X)$, $\exists\, J \subset X$ intorno conn. di $y \Rightarrow J \subset \mathcal{C}_y(X) = \mathcal{C}_x(X)$. $\square$

Cor. X *loc. conn.* $\Rightarrow$ X *unione topologica delle sue componenti connesse.*

Oss. Connesso e loc. connesso sono proprietà topologiche.

Esempi.

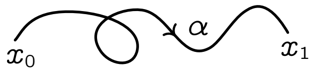
1) $X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_3(X) = [2,3]$, $\mathcal{C}(X) = \{[0,1], [2,3]\}$.

2) $X = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_0(X) = \{0\}$ non è aperto in X.

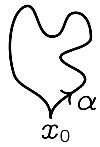
Cammini continui

Def. Un *cammino* continuo in uno spazio topologico X è un'applicazione continua $\alpha : I \to X$. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$ sono gli *estremi* di α, x_0 *punto iniziale*, x_1 *punto terminale*, α cammino tra x_0 e x_1.
Un cammino $\alpha : I \to X$ è detto *cappio* se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ (*punto base*).

I cammini saranno sempre considerati continui.



Cappio costante. $x_0 \in X \rightsquigarrow \gamma_{x_0} : I \to X$, $\gamma_{x_0}(t) = x_0$, $\forall\, t \in I$.

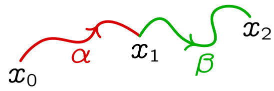


Concatenazione di cammini. $\alpha, \beta : I \to X$ cammini t.c.

$$\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = \beta(0) = x_1,\ \beta(1) = x_2 \rightsquigarrow$$

$$\alpha * \beta : I \to X$$

$$(\alpha * \beta)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$



Oss. $\alpha \cdot \beta$ continua in $t = \frac{1}{2}$ perché $\alpha(1) = \beta(0)$.

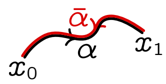
Def. $\alpha * \beta$ si chiama *concatenazione* di α e β.

Oss. α e β cappi $\Rightarrow$ $\alpha \cdot \beta$ cappio.

Cammino inverso. $\alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1 \rightsquigarrow$

$$\bar{\alpha} : I \to X$$

$$\bar{\alpha}(t) \overset{\text{def}}{=} \alpha(1-t)$$



Si ha $\bar{\alpha}(0) = x_1$ e $\bar{\alpha}(1) = x_0$.

Def. $\bar{\alpha}$ è detto *cammino inverso* di α.

Oss. α cappio $\Rightarrow$ $\bar{\alpha}$ cappio.

Spazi connessi per archi

Def. Uno spazio topologico X è *connesso per archi (cpa)* se $\forall\, x_0, x_1 \in X$ $\exists\, \alpha : I \to X$ cammino continuo t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$.

Teor. *X connesso per archi $\Rightarrow$ X connesso.*

Dim. Per assurdo X sconnesso $\rightsquigarrow X = U \cup V$ aperti non vuoti disgiunti. Scegliamo $x_0 \in U$, $x_1 \in V \rightsquigarrow \alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1 \Rightarrow 0 \in \tilde{U} := \alpha^{-1}(U)$, $1 \in \tilde{V} := \alpha^{-1}(V) \subset I$ aperti non vuoti disgiunti e $I = \tilde{U} \cup \tilde{V} \Rightarrow I$ sconnesso, contraddizione. $\square$

Teor. *$f : X \to Y$ continua suriettiva e X cpa $\Rightarrow$ Y cpa.*

Dim. $\forall\, y_0, y_1 \in Y \rightsquigarrow x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $x_1 \in f^{-1}(y_1) \rightsquigarrow \alpha : I \to X$ t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1 \rightsquigarrow \beta = f \circ \alpha : I \to Y$ t.c. $\beta(0) = y_0$, $\beta(1) = y_1$. $\square$

Cor. *$f : X \to Y$ continua e X cpa $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ cpa.*

Oss. Immagine continua di un connesso per archi è connessa per archi.

Def. $U \subset \mathbb{R}^n$ è *convesso* se $\forall\, x_0, x_1 \in U \Rightarrow$ il segmento $[x_0, x_1] \subset U$.

Oss. $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ U cpa. Infatti $\forall\, x_0, x_1 \in U \rightsquigarrow$

$$\alpha : I \to U$$
$$\alpha(t) = (1-t)x_0 + t x_1 \quad (\textit{combinazione convessa} \text{ di } x_0 \text{ e } x_1)$$

parametrizza il segmento $[x_0, x_1]$ quindi è un cammino in U tra x_0 e x_1.

Esempi.

1) Ogni intervallo $J \subset \mathbb{R}$ è convesso quindi cpa.

2) $\mathbb{R}^n - \{0\}$ cpa $\forall\, n \geqslant 2$. $\forall\, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ se $[x_0, x_1]$ non passa per 0 determina un cammino. Se $[x_0, x_1]$ passa per 0 $\rightsquigarrow [x_0, x_2] \cup [x_2, x_1]$.

3) S^n cpa $\forall\, n \geqslant 1$. $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ continua e suriettiva.

4) $\mathbb{RP}^n$ e $\mathbb{CP}^n$ cpa $\forall\, n \geqslant 0$. $\pi : \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{KP}^n$ continua e suriettiva.

Lem. *X spazio topologico e $x_0 \in X$. X cpa $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in X$, $\exists\, \alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Per definizione.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x, y \in X \rightsquigarrow \alpha, \beta : I \to X$ cammini t.c. $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$, $\alpha(1) = x$, $\beta(1) = y \Rightarrow \gamma := \bar{\alpha} * \beta : I \to X$ t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. $\square$

Teor. *$X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ con X_i cpa $\forall\, i \in I$ e $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \neq \emptyset \Rightarrow X$ cpa.*

Dim. $x_0 \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$. $\forall\, x \in X \rightsquigarrow x \in X_i \rightsquigarrow$ cammino tra x_0 e x in $X_i \subset X$. $\square$

Componenti connesse per archi.

Def. Dato uno spazio X, la *componente connessa per archi* di $x \in X$ è

$$\mathcal{P}_x(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{x \in P \subset X \\ P \text{ cpa}}} P$$

Teor. *Valgono le seguenti proprietà:*

1) $x \in \mathcal{P}_x(X) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$;

2) *$\mathcal{P}_x(X)$ è il più grande sottospazio cpa di X che contiene x;*

3) $\forall\, x, y \in X$, $\mathcal{P}_x(X) \cap \mathcal{P}_y(X) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{P}_y(X)$;

4) $\mathcal{P}_x(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$, $\forall\, x \in X$.

Dim. Esercizio (simile al caso di $\mathcal{C}_x(X)$). $\square$

N.B. Le componenti cpa non sono necessariamente chiuse né aperte.

Def. $\mathcal{P}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{P}_x(X) \mid x \in X\}$ *insieme delle componenti connesse per archi di* X.

Oss. $\mathcal{P}(X)$ è una partizione di X in sottospazi disgiunti.

Oss. X cpa $\Leftrightarrow$ X ha un'unica componente cpa.

Def. Uno spazio topologico X è *localmente connesso per archi* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni aperti connessi per archi di x in X.

Oss. Loc. cpa $\Rightarrow$ loc. connesso.

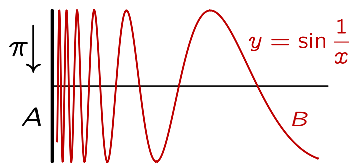
Teor. *X loc. cpa $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{C}_x(X)$ aperto e chiuso in X, $\forall\, x \in X$.*

Dim. $\forall\, y \in \mathcal{P}_x(X) \rightsquigarrow J \subset X$ intorno cpa di $y \Rightarrow J \subset \mathcal{P}_y(X) = \mathcal{P}_x(X)$ $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X)$ aperto in X, $\forall\, x \in X$.

$X - \mathcal{P}_x(X)$ aperto $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X)$ aperto e chiuso non vuoto in X quindi in $\mathcal{C}_x(X)$ (connesso) $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{C}_x(X)$. □

Cor. *X loc. cpa $\Rightarrow$ X è unione topologica delle sue componenti cpa.*

Spazio connesso ma non connesso per archi.



$A = \{0\} \times [-1, 1]$ cpa

$B = \left\{\left(x, \sin\dfrac{1}{x}\right) \,\middle|\, x > 0\right\} \cong \,]0, +\infty[$ cpa

$X \overset{\text{def}}{=} A \cup B = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2} B \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow X$ connesso.

X non cpa, infatti se per assurdo $\alpha : I \to X$ cammino t.c.
$\alpha(0) = (0, 0)$, $\alpha(1) = (1, \sin 1) \Rightarrow \pi(\alpha(I)) = [0, a]$ con $a \geqslant 1 \Rightarrow$
α percorre infiniti max loc. $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{t \to 0^+} \alpha(t) \Rightarrow \alpha$ non continua.

$\mathcal{P}(X) = \{A, B\}$, $\mathcal{C}(X) = \{X\}$.

Oss. X non è loc. connesso. I punti di A non hanno intorni connessi.

Componenti connesse degli aperti di $\mathbb{R}^n$

Cor. *X connesso e loc. cpa $\Rightarrow$ X cpa.*

Prop. *X loc. cpa e II-numerabile $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(X) = \mathcal{C}(X)$ numerabile.*

Dim. X è unione topologica delle componenti cpa e queste sono aperte.
$\forall\, P \in \mathcal{P}(X)$ scegliamo $a_P \in P$ (assioma della scelta).
$A := \{a_P \mid P \in \mathcal{P}(X)\} \subset X$ sottospazio discreto $\Rightarrow$ A è $\underset{\text{proprietà ereditaria}}{II\text{-numerabile}}$ $\Rightarrow$
$A \cong \mathcal{P}(X)$ al più numerabile $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(X)$ al più numerabile. $\square$

Oss. $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow$ U loc. cpa. $\forall\, x \in U$ $\exists\, r_x > 0$ t.c. $B(x, r_x) \subset U \Rightarrow$
$\mathcal{J}_x = \{B(x, r) \mid 0 < r < r_x\}$ base di intorni aperti convessi quindi cpa.

Cor. *$U \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow$ U unione numerabile di aperti disgiunti e connessi per archi e $\mathcal{P}(U) = \mathcal{C}(U)$.*

Teor. *$X \subset \mathbb{R}$ connesso $\Leftrightarrow$ X è un punto o un intervallo $\Leftrightarrow$ $X \subset \mathbb{R}$ cpa.*

Dim. I punti e gli intervalli sono cpa quindi connessi. Resta da dimostrare che $X \subset \mathbb{R}$ connesso e $\# X > 1 \Rightarrow X$ intervallo.
Per assurdo, supponiamo che $\exists\, a < b < c$ t.c. $a, c \in X$ e $b \notin X$ $\Rightarrow$
$a \in U := \,]-\infty, b[\, \cap X = \,]-\infty, b] \cap X$ aperto e chiuso non vuoto in X t.c. $c \notin U \Rightarrow X$ sconnesso, contraddizione. $\square$

Teor (dei valori intermedi)**.** *$f\colon X \to \mathbb{R}$ continua non costante con X connesso $\Rightarrow$ $f(X)$ intervallo.*

Cor. *$U \subset \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow$ U unione numerabile di intervalli aperti disgiunti.*

Lem. *$f : [a, b] \to [c, d]$ continua e biiettiva $\Rightarrow$ $f(\{a, b\}) = \{c, d\}$.*

Dim. Per assurdo, $c < f(a) < d \Rightarrow f(]a, b]) = [c, f(a)[\, \cup \,]f(a), d]$ connesso, contraddizione. Analogamente per $f(b)$. $\square$

Teor. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e biiettiva $\Rightarrow$ f omeomorfismo.*

Dim. $\forall\, a < b \Rightarrow f([a, b]) = [c, d] \Rightarrow f(]a, b[) = \,]c, d[\, \Rightarrow f$ aperta. $\square$

N.B. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e biiettiva $\Rightarrow$ f omeomorfismo, ma non abbiamo gli strumenti per dimostrarlo se $n \geqslant 2$.

Omotopia

X, Y spazi topologici, $I = [0,1]$.

Def. Un'*omotopìa* da X a Y è un'applicazione continua $H: X \times I \to Y$.

$H: X \times I \to Y \rightsquigarrow h_s : X \to Y$, $h_s(x) := H(x,s)$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, s \in I$.

N.B. Assumeremo *continue* tutte le applicazioni tra spazi topologici.

Def. $f, g : X \to Y$ sono *omòtope* se $\exists\, H : X \times I \to Y$ t.c. $h_0 = f$ e $h_1 = g$. Se f e g sono omotope scriviamo $f \simeq g$.

Oss. $f \simeq g \Leftrightarrow \exists\, H: X \times I \to Y$ t.c. $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, $\forall\, x \in X$. Durante l'omotopia f si "deforma" in g in modo continuo.

Oss. Un'omotopia $H: X \times I \to Y$ è un cammino nello spazio delle applicazioni continue $C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ continua}\}$.

Def. $f, g : X \to Y$ sono *omotope relativamente ad* $A \subset X$ se $f|_A = g|_A$ e $\exists\, H: X \times I \to Y$ t.c. $h_0 = f$, $h_1 = g$ e $h_s|_A = f|_A$, $\forall\, s \in I$.
Scriviamo $f \simeq_A g$ oppure $f \simeq g$ (rel A).

Oss. $f \simeq_A g \Leftrightarrow \exists\, H: X \times I \to Y$ t.c. $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $\forall\, x \in X$, e $H(x,s) = f(x)$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, s \in I$.
Durante l'omotopia relativa f si "deforma" in g senza modifiche su $A \subset X$.

Per le omotopie consideriamo le operazioni tra cammini.

Def.

1) $f : X \to Y \rightsquigarrow H_f : X \times I \to Y$, $H_f(x,s) \overset{\text{def}}{=} f(x)$ *omotopia stazionaria*.

2) $H: X \times I \to Y \rightsquigarrow \bar{H} : X \times I \to Y$ *omotopia inversa*

$$\bar{H}(x,s) \overset{\text{def}}{=} H(x, 1-s).$$

3) $H, K : X \times I \to Y$ t.c. $h_1 = k_0 : X \to Y \rightsquigarrow$

$$H * K : X \times I \to Y \text{ concatenazione di } H \text{ e } K$$

$$(H*K)(x,s) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} H(x,2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ K(x, 2s-1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

Oss. $\simeq$ e $\simeq_A$ sono relazioni d'equivalenza su $C(X,Y)$.

Oss. $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1 : X \to Y$ e $g_0 \overset{G}{\simeq} g_1 : Y \to Z \Rightarrow g_0 \circ f_0 \overset{H}{\simeq} g_1 \circ f_1$
($\simeq$ è *compositiva*) $\qquad H(x,s) = G(F(x,s),s)$.

Def. $f : X \to Y$ è un'*equivalenza omotopica* tra X e Y se $\exists\, g : Y \to X$ t.c. $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ e $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. g è detta *inversa omotopica* di f.

N.B. L'inversa omotopica se esiste non è necessariamente unica, né iniettiva, né suriettiva.

Def. Diciamo che X e Y sono *omotopicamente equivalenti* o che *hanno lo stesso tipo d'omotopia* se $\exists\, f : X \to Y$ equivalenza omotopica, $X \simeq Y$.

Oss. $f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow f$ equivalenza omotopica con inversa omotopica $f^{-1} : Y \to X$. Quindi $X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$.

Oss. $\simeq$ relazione d'equivalenza tra spazi topologici più debole di omeo.

N.B. Indichiamo un punto o uno spazio puntiforme non specifico con $*$.

Def. Uno spazio top. è *contraibile* se ha il tipo d'omotopia di un punto.

Oss. In altre parole X contraibile $\Leftrightarrow X \simeq *$.

Prop. *X contraibile $\Leftrightarrow \mathrm{id}_X \simeq$ costante.*

In inglese un'applicazione omotopa a costante è detta *null-homotopic*.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $j : X \to *$ equivalenza omotopica, $i : * \to X$ inversa omotopica di $j \Rightarrow \mathrm{id}_X \simeq i \circ j =$ costante.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathrm{id}_X \simeq c \colon X \to X$ costante, $c(x) = x_0$, $\forall\, x \in X \rightsquigarrow i \colon \{x_0\} \to X$, $i(x_0) = x_0$, $j : X \to \{x_0\} \Rightarrow j \circ i = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$, $i \circ j = c \simeq \mathrm{id}_X \Rightarrow j$ equivalenza omotopica $\Rightarrow X \simeq \{x_0\}$. $\square$

Esempio. $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow U$ contraibile: scegliamo $u_0 \in U \rightsquigarrow$
$H \colon U \times I \to U$, $H(x, s) = (1 - s)x + su_0 \Rightarrow h_0 = \mathrm{id}_U$, $h_1 = u_0$.
$\mathbb{R}^n$, B^n e I^n contraibili.

Prop. *X contraibile $\Rightarrow X$ connesso per archi.*

Dim. $H \colon X \times I \to X$ t.c. $h_0 = x_0$ costante e $h_1 = \mathrm{id}_X$. $\forall\, x \in X \rightsquigarrow \gamma_x : I \to X$, $\gamma_x(t) = H(x, t) \Rightarrow \gamma_x(0) = x_0$, $\gamma_x(1) = x \Rightarrow X$ cpa. $\square$

Def. $r : X \to A$ è una *retrazione* continua se $A \subset X$ e $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Def. $H \colon X \times I \to X$ *(retrazione per) deformazione forte* (risp. *debole*) di X su $A \subset X$ se:
1) $h_0 = \mathrm{id}_X$

2) $h_s|_A = \mathrm{id}_A$, $\forall\, s \in I$ (risp. per $s = 1$)

3) $h_1(X) = A$.

X si retrae per deformazione su A e scriviamo $X \searrow A$ se $\exists\, H$ deformazione.

Oss. Nell'esempio precedente H è retrazione per deformazione forte del convesso U su un suo punto.

Oss. H deformazione di X su $A \Rightarrow r := h_1| : X \to A$ retrazione.

Oss. X contraibile $\Leftrightarrow X$ ammette deformazione debole su un punto.

Oss. $X \searrow A \Rightarrow i_A : A \overset{\simeq}{\hookrightarrow} X$ ha inversa omotopica $r : X \overset{\simeq}{\to} A \Rightarrow X \simeq A$.

Oss. Retrazione per deformazione $=$ omotopia tra id_X e retrazione.

Rivestimenti

X e Y spazi topologici.

Def. $p\colon X \to Y$ *rivestimento* se p continua e $\exists\, J = J_{\mathrm{dis}}$ t.c.
$\forall\, y \in Y\ \exists\, V \subset Y$ intorno aperto di y con

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{j \in J} U_j,\quad U_j \subset X \text{ aperto } \forall\, j \in J \text{ e}$$

$$p_j := p|_{U_j} : U_j \xrightarrow{\cong} V \text{ omeo } \forall\, j \in J.$$

Terminologia: X *spazio totale*; Y *base di* p; $p^{-1}(y)$ *fibra* di y; J *fibra tipo*; V *aperto banalizzante*; U_j *foglio*; $p_j^{-1} : V \xrightarrow{\cong} U_j$ *inversa locale* di p.

Oss. $p^{-1}(y) \cap U_j = \{p_j^{-1}(y)\}$, $\forall\, j \in J \Rightarrow p^{-1}(y) \cong J_{\mathrm{dis}}$, $\forall\, y \in Y$.

Oss. $\varphi\colon V \times J_{\mathrm{dis}} \xrightarrow{\cong} p^{-1}(V)$, $\varphi(y,j) := p_j^{-1}(y)$ omeo e $p \circ \varphi = \pi_V$.

Oss. p rivestimento $\Rightarrow$ p omeo loc. e suriettiva $\Rightarrow$ p aperta.

Oss. X II-numerabile $\Rightarrow$ J numerabile.

Def. Un rivestimento $p\colon X \to Y$ è:
1) *connesso* (risp. *connesso per archi*) se X è connesso (risp. cpa);
2) *finito* se $d(p) := |J| < \infty$ (*grado* o *numero di fogli* di p);
3) *infinito* se $d(p) = \infty$;
4) *banale* se Y aperto banalizzante per p.

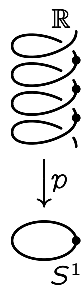
Oss. p banale $\Leftrightarrow \exists\, \varphi\colon Y \times J_{\mathrm{dis}} \xrightarrow{\cong} X$ omeo t.c. $p \circ \varphi = \pi_Y$.

Oss. $p\colon X \to Y$ rivestimento ad un foglio $\Leftrightarrow$ p omeo.

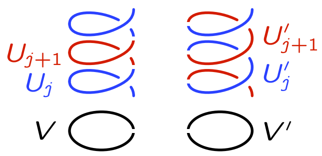
Rivestimento universale di S^1. $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.
$p^{-1}(1,0) = \mathbb{Z}$, $p^{-1}(-1,0) = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. p di periodo 1: $p(t+1) = p(t)$.
$V = S^1 - \{(1,0)\} \cong \mathbb{R}$, $V' = S^1 - \{(-1,0)\} \cong \mathbb{R}$ (proiezione stereografica).

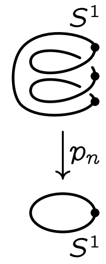
$$p^{-1}(V) = \mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} U_j \qquad U_j := \,]j, j+1[$$

$$p^{-1}(V') = \mathbb{R} - \left(\mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\right) = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} U'_j \qquad U'_j := \,]j - \tfrac{1}{2}, j + \tfrac{1}{2}[$$



$S^1 = V \cup V'$. $p|_{U_j} : U_j \to V$ e $p|_{U'_j} : U'_j \to V'$ continue biiettive
$\Rightarrow$ omeo $\Rightarrow$ V e V' banalizzanti $\Rightarrow$ p rivestimento con fibra $\mathbb{Z}$.



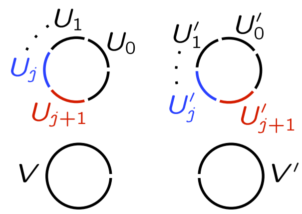


Esempio. $q_n : S^1 \to S^1$, $q_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $S^1 \subset \mathbb{C}$.
$J = q_n^{-1}(1) = \{\text{radici } n\text{-esime di } 1\} \cong \mathbb{Z}_n \Rightarrow d(q_n) = n$.
V, V' aperti banalizzanti. Per $j = 0, \ldots, n-1$ consideriamo

$$U_j = \left\{ z \in S^1 \;\middle|\; \arg z \in \left] \tfrac{2j\pi}{n}, \tfrac{2(j+1)\pi}{n} \right[\right\}$$

$$U'_j = \left\{ z \in S^1 \;\middle|\; \arg z \in \left] \tfrac{(2j-1)\pi}{n}, \tfrac{(2j+1)\pi}{n} \right[\right\}$$

$q_n|_{U_j} : U_j \to V$ e $q_n|_{U'_j} : U'_j \to V'$ omeo con inversa $\sqrt[n]{z}$.



Rivestimento doppio di $\mathbb{RP}^n$. $p_n = \pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{RP}^n$, $p_n(x) = [x]$.
$p_n^{-1}([x]) = \{\pm x\} \Rightarrow d(p) = 2$.
$H_i : x_i = 0$ iperpiano in $\mathbb{RP}^n \Rightarrow H_i \cong \mathbb{RP}^{n-1} \rightsquigarrow V_i = \mathbb{RP}^n - H_i \underset{\text{carta affine}}{\cong} \mathbb{R}^n$.
$\mathbb{RP}^n = V_0 \cup \cdots \cup V_n$. $U_{i,\pm} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$ aperti in S^n.
$p_{n,i,\pm} = p|_{U_{i,\pm}} : U_{i,\pm} \to V_i$, $p_{n,i,\pm}^{-1}([x_0, \ldots, x_n]) = \pm\,\mathrm{sgn}(x_i)(x_0, \ldots, x_n)$.

Def. Siano $p\colon X \to Y$ rivestimento e $f : Z \to Y$ continua.
$\tilde{f} : Z \to X$ è un *sollevamento di f* se $\tilde{f}$ è continua e $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Lemma del numero di Lebesgue. *Sia* (X, d) *spazio metrico compatto,* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *ricoprimento aperto.* $\exists\, \delta > 0$ *t.c.* $\forall\, S \subset X$, $\operatorname{diam} S < \delta \Rightarrow S \subset U_\alpha$ *per un certo* $\alpha \in A$.

Def. δ è detto *numero di Lebesgue* del ricoprimento aperto.

Dim. Se $\exists\, \alpha \in A$ t.c. $U_\alpha = X \rightsquigarrow \delta = 1$ numero di Lebesgue.
Supponiamo $\emptyset \neq U_\alpha \subsetneq X$, $\forall\, \alpha \in A$. $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento.
$K_i = X - U_{\alpha_i}$ chiuso $\Rightarrow K_i$ compatto e $\bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i = X - \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = \emptyset \rightsquigarrow$

$$\bar{d} : X \to \mathbb{R}$$

$$\bar{d}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, K_i) \quad \text{(distanza media)}$$

$\Rightarrow \bar{d}(x) > 0$, $\forall\, x \in X \Rightarrow \delta := \min \bar{d} > 0$. $\forall\, S \subset X$ t.c. $\operatorname{diam} S < \delta \Rightarrow S \subset B_d(s, \delta)$ con $s \in S$. $\exists\, i$ t.c. $\delta \leqslant \bar{d}(s) \leqslant d(s, K_i) \Rightarrow B_d(s, \delta) \cap K_i = \emptyset \Rightarrow S \subset B_d(s, \delta) \subset X - K_i = U_{\alpha_i} \Rightarrow \delta$ numero di Lebesgue. $\square$

Teorema di sollevamento dei cammini

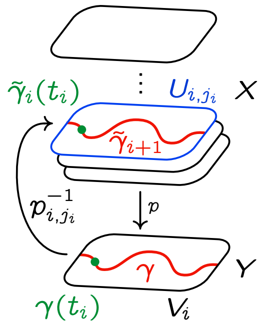
Teor. *$p\colon X \to Y$ rivestimento. $\forall\, \gamma\colon I \to Y$ continua, con $\gamma(0) = y_0$, $\forall\, x_0 \in p^{-1}(y_0) \Rightarrow \exists!\, \tilde{\gamma}_{x_0}\colon I \to X$ sollevamento di γ t.c. $\tilde{\gamma}_{x_0}(0) = x_0$.*

Dim. J fibra di p. $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento di Y con aperti banalizzanti p. $\{\gamma^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $I \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue $\rightsquigarrow 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ suddivisione di I t.c. $t_i - t_{i-1} < \delta \Rightarrow \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V_{\alpha_i} =: V_i$ per un certo $\alpha_i \in A \Rightarrow \gamma(t_i) \in V_{i-1} \cap V_i$, $i \geqslant 1$.

$$p^{-1}(V_i) = \bigsqcup_{j\in J} U_{i,j}, \qquad p_{i,j} := p|_{U_{i,j}} : U_{i,j} \xrightarrow{\cong} V_i, \qquad U_{i,j} \text{ fogli di } p$$

$\boxed{\textit{Esistenza}}$ Def. ricorsiva: $\tilde{\gamma}_i : [0, t_i] \to X$ t.c. $\tilde{\gamma}_i(0) = x_0$, $p \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma|_{[0,t_i]}$. $\tilde{\gamma}_0\colon \{0\} \to X$, $\tilde{\gamma}_0(0) := x_0$. Supponiamo di aver definito $\tilde{\gamma}_i \Rightarrow \exists!\, j_i \in J$ t.c. $\tilde{\gamma}_i(t_i) \in U_{i,j_i}$ dato che $\gamma(t_i) \in V_i$.

$$\tilde{\gamma}_{i+1} := \begin{cases} \tilde{\gamma}_i, & \text{su } [0, t_i] \\ p_{i,j_i}^{-1} \circ \gamma, & \text{su } [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$



$p_{i,j_i}(\tilde{\gamma}_i(t_i)) = p(\tilde{\gamma}_i(t_i)) = \gamma(t_i) \Rightarrow \tilde{\gamma}_i(t_i) = p_{i,j_i}^{-1}(\gamma(t_i)) \Rightarrow \tilde{\gamma}_{i+1}$ continua. $\tilde{\gamma}_{i+1}$ sollevamento di γ su $[0, t_{i+1}]$ t.c. $\tilde{\gamma}_{i+1}(0) = x_0 \rightsquigarrow \tilde{\gamma}_{x_0} := \tilde{\gamma}_n$.

$\boxed{\textit{Unicità}}$ $\forall\, \tilde{\gamma}'$ sollevamento continuo t.c. $\tilde{\gamma}'(0) = x_0$. Per induzione se $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}_i$ su $[0, t_i] \Rightarrow \tilde{\gamma}'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_{i,j_i}$ perché $\tilde{\gamma}'([t_i, t_{i+1}])$ connesso $\Rightarrow p_{i,j_i} \circ \tilde{\gamma}' = \gamma$ su $[t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \tilde{\gamma}' = p_{i,j_i}^{-1} \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ su $[t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}_{x_0}$. $\square$

Oss. γ cappio $\Rightarrow \tilde{\gamma}_{x_0}$ cammino non necessariamente cappio.

Esempio. $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

$$\gamma : I \to S^1,\ \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = p(t) \Rightarrow \tilde{\gamma}_0(t) = t$$

Omotopie di cammini e di cappi

$I^2 = I \times I \subset \mathbb{R}^2$ *quadrato unitario* con coordinate $(t, s) \in I^2$.

$$H\colon I^2 \to X \quad \text{continua}$$
$$(t, s) \mapsto H(t, s) =: h_s(t)$$
$$\gamma_0 := h_0,\ \ \gamma_1 := h_1$$

Def. $H\colon I^2 \to X$ è detta *omotopia*

di cammini $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ H rel $\{0, 1\}$: $h_s(0) = x_0$, $h_s(1) = x_1$, $\forall\, s \in I$. $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

di cappi $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ H rel $\{0, 1\}$: $h_s(0) = h_s(1) = x_0$, $\forall\, s \in I$. $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

libera di cappi $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ h_s cappio: $h_s(0) = h_s(1)$, $\forall\, s \in I$.

Teorema di sollevamento delle omotopie

Teor. *$p\colon X \to Y$ rivestimento. $\forall\, H\colon I^2 \to Y$ continua, con $H(0,0) = y_0$, $\forall\, x_0 \in p^{-1}(y_0) \Rightarrow \exists!\, \tilde{H}\colon I^2 \to X$ sollevamento di H t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$. Inoltre H rel $\{0,1\} \Rightarrow \tilde{H}$ rel $\{0,1\}$.*

Dim. L'idea è simile al caso dei cammini e manteniamo la notazione. $\{H^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $I^2 \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue $\rightsquigarrow 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ suddivisione di I t.c. $t_i - t_{i-1} < \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$.
Numeriamo i rettangoli $[t_i, t_{i+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$ secondo l'ordine lessicografico

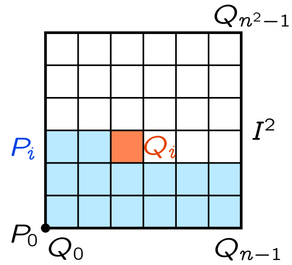
$$(i,k) < (i',k') \Leftrightarrow k < k' \text{ oppure } k = k' \text{ e } i < i' \rightsquigarrow Q_0, \dots, Q_{n^2-1}$$

$\operatorname{diam} Q_i < \delta \Rightarrow H(Q_i) \subset V_i$.

$$P_0 := \{(0,0)\}$$

$$P_i := \bigcup_{k=0}^{i-1} Q_k \Rightarrow T_i := P_i \cap Q_i = \begin{cases} 1 \text{ vertice } (i=0) \\ 1 \text{ lato} \\ 2 \text{ lati consecutivi} \end{cases}$$

$T_i \neq \emptyset$ connesso per archi.



$\boxed{\textit{Esistenza}}$ Def. ricorsiva: $\tilde{H}_i\colon P_i \to X$ t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$, $p \circ \tilde{H}_i = H|_{P_i}$.
$\tilde{H}_0\colon P_0 \to X$, $\tilde{H}_0(0,0) := x_0$. Supponiamo di aver definito $\tilde{H}_i \Rightarrow \exists!\, j_i \in J$ t.c. $\tilde{H}(T_i) \subset U_{i,j_i}$ dato che $H(T_i) \subset H(Q_i) \subset V_i$ e T_i connesso.

$$\tilde{H}_{i+1} := \begin{cases} \tilde{H}_i, & \text{su } P_i \\ p_{i,j_i}^{-1} \circ H, & \text{su } Q_i. \end{cases}$$

$p_{i,j_i} \circ \tilde{H}_i|_{T_i} = p \circ \tilde{H}_i|_{T_i} = H|_{T_i} \Rightarrow \tilde{H}_i|_{T_i} = p_{i,j_i}^{-1} \circ H|_{T_i} \Rightarrow \tilde{H}_{i+1}$ continua.
$\tilde{H}_{i+1}$ sollevamento di H su P_{i+1} t.c. $\tilde{H}_{i+1}(0,0) = x_0 \rightsquigarrow \tilde{H} := \tilde{H}_{n^2}$.

$\boxed{\textit{Unicità}}$ $\forall\, \tilde{H}'$ sollevamento continuo t.c. $\tilde{H}'(0,0) = x_0$. Per induzione se $\tilde{H}' = \tilde{H}_i$ su $P_i \Rightarrow \tilde{H}'(Q_i) \subset U_{i,j_i}$ perché $\tilde{H}'(Q_i)$ connesso $\Rightarrow$
$p_{i,j_i} \circ \tilde{H}' = H$ su $Q_i \Rightarrow \tilde{H}' = p_{i,j_i}^{-1} \circ H = \tilde{H}$ su $Q_i \Rightarrow \tilde{H}' = \tilde{H}$.

$\boxed{\textit{Rel } \{0,1\}}$ $H(\{0\} \times I) = y_0 \Rightarrow \tilde{H}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(y_0)$.
$x_0 \in \tilde{H}(\{0\} \times I)$ connesso e $p^{-1}(y_0)$ discreto $\Rightarrow \tilde{H}(\{0\} \times I) = x_0$.
Analogamente si ha $\tilde{H}(\{1\} \times I) = x_1$, con $p(x_1) = y_1 = H(\{1\} \times I)$. $\square$

Gruppo fondamentale

Def. Uno *spazio puntato* (X, x_0) è uno spazio topologico X con un *punto base* $x_0 \in X$. Un'applicazione tra spazi puntati $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è un'applicazione $f : X \to Y$ t.c. $f(x_0) = y_0$.

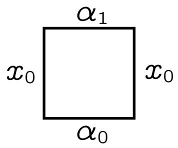
Def. Lo *spazio dei cappi* di (X, x_0) è

$$\Omega(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha : I \to X \mid \alpha \text{ continua e } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

$\gamma_{x_0} : I \to X$, $\gamma_{x_0}(t) = x_0$, $\forall\, t \in I$ è detto *cappio banale.*

Relazione d'equivalenza su $\Omega(X, x_0)$: omotopia di cappi $\sim$

$$\forall\, \alpha_0, \alpha_1 \in \Omega(X, x_0),\ \ \alpha_0 \sim \alpha_1 \Leftrightarrow \exists\, H : I^2 \to X \ \text{ omotopia rel } \{0, 1\}$$



$$h_0 = \alpha_0,\ \ h_1 = \alpha_1$$
$$h_s(0) = h_s(1) = x_0,\ \ \forall\, s \in I.$$

$[\alpha]$ *classe di equivalenza* di $\alpha \in \Omega(X, x_0)$.

Def. Il *gruppo fondamentale* di (X, x_0) è l'insieme quoziente

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \Omega(X, x_0)/\!\sim\ = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0)\}.$$

Teor. *$\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo rispetto all'operazione binaria*

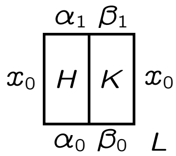
$$[\alpha][\beta] \overset{\text{def}}{=} [\alpha * \beta],\ \ \forall\, [\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0).$$

L'elemento neutro è $1 = [\gamma_{x_0}]$ *e si ha* $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$.

Dim. $\boxed{[\alpha][\beta] \text{ Ben definito}}$ Mostriamo che non dipende dai rappresentanti.

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_0 \overset{H}{\sim} \alpha_1 & \rightsquigarrow & H : I^2 \to X \\ \beta_0 \overset{K}{\sim} \beta_1 & \rightsquigarrow & K : I^2 \to X \end{array}\right\} \text{ omotopie rel}\,\{0, 1\}.$$

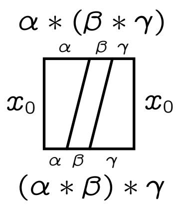
$$L : I^2 \to X \quad L(t, s) = \begin{cases} H(2t, s), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$



$$\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1 \Rightarrow [\alpha_0][\beta_0] = [\alpha_1][\beta_1]$$

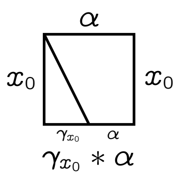
$\boxed{\text{Proprietà associativa}}$

$$\begin{aligned} [\alpha]([\beta][\gamma]) &= [\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma] \\ &= ([\alpha][\beta])[\gamma] \end{aligned}$$



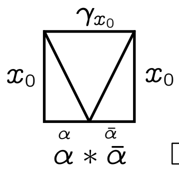
$\boxed{\text{Elemento neutro}}$

$$[\gamma_{x_0}][\alpha] = [\gamma_{x_0} * \alpha] = [\alpha]$$
$$[\alpha][\gamma_{x_0}] = [\alpha * \gamma_{x_0}] = [\alpha]$$



Inverso

$$[\alpha][\alpha]^{-1} = [\alpha * \bar{\alpha}] = [\gamma_{x_0}]$$
$$[\alpha]^{-1}[\alpha] = [\bar{\alpha} * \alpha] = [\gamma_{x_0}]$$



$\alpha * \bar{\alpha}$ □

Oss. Analoghe proprietà algebriche valgono anche per prodotti di cammini (quando il prodotto è definito). La dimostrazione è la stessa.

Oss. $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = 0$ (l'unico cappio è quello banale).

Funtorialità.

Def. Data $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ continua definiamo l'*omomorfismo indotto*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$f_*([\alpha]) \overset{\text{def}}{=} [f \circ \alpha]$$

Teor. *f_* è un omomorfismo di gruppi.*

Dim. f_* ben definita perché $\simeq_{\{0,1\}}$ compositiva.
Scrivendo esplicitamente la definizione si verifica subito l'identità

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta).$$

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) &= f_*([\alpha * \beta]) \\ &= [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [(f \circ \alpha)][(f \circ \beta)] = f_*([\alpha])f_*([\beta]). \end{aligned}$$ □

Teor (di funtorialità)**.** *Valgono le proprietà seguenti:*
1) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.
2) $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *e* $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *continue* $\Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Dim. 1) Immediata. Dimostriamo *2*).

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= g_*(f_*([\alpha])) = (g_* \circ f_*)([\alpha]). \end{aligned}$$ □

Oss. $f : (X, x_0) \xrightarrow{\cong} (Y, y_0)$ omeo $\Rightarrow f_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$ isomorfismo con inversa $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Quindi π_1 è un *invariante topologico*.

Oss. $c\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ costante $\Rightarrow c_* = 1$ (omomorfismo banale).

Teor (Invarianza omotopica)**.** $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *continue t.c.* $f \simeq_{x_0} g$ $\Rightarrow f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Dim. L'omotopia è compositiva. □

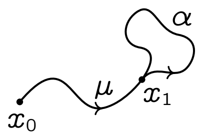
Oss. I e I^2 connessi per archi $\Rightarrow \Omega(X, x_0) = \Omega(\mathcal{P}_{x_0}(X), x_0) \Rightarrow$

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\mathcal{P}_{x_0}(X), x_0)$$

Per studiare π_1 possiamo restringerci a spazi connessi per archi.

Dipendenza dal punto base

$\mu : I \to X$ continua con $\mu(0) = x_0$, $\mu(1) = x_1 \rightsquigarrow$



$$\mu_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$
$$\mu_*([\alpha]) \overset{\text{def}}{=} [\mu * \alpha * \bar{\mu}]$$

Teor. *Valgono le proprietà seguenti:*
1) μ_* ben definita.

2) $\forall\, \mu_0 \simeq_{\{0,1\}} \mu_1 \Rightarrow \mu_{0*} = \mu_{1*}$.

3) $\gamma_{x_0 *} = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

4) $(\mu * \nu)_* = \mu_* \circ \nu_*$ (se la concatenazione è definita).

5) $(\mu_*)^{-1} = \bar{\mu}_*$.

6) μ_* isomorfismo di gruppi.

Dim. (*1*)−(*3*) immediate. (*4*) $\overline{\mu * \nu} = \bar{\nu} * \bar{\mu}$. (*5*) $\mu * \bar{\mu} \sim \gamma_{x_0}$ e (*2*)−(*4*).
(*6*) $\mu_*([\alpha][\beta]) = [\mu * \alpha * \beta * \bar{\mu}] = [\mu * \alpha * \bar{\mu} * \mu * \beta * \bar{\mu}] = \mu_*([\alpha])\, \mu_*([\beta])$. □

Cor. *X connesso per archi, $\forall\, x_0, x_1 \in X \Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.*
$\pi_1(X) := \pi_1(X, x_0)$ ben definito a meno di isomorfismi.

N.B. In generale l'isomorfismo $\mu_* : \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$ dipende da μ.
$\pi_1(X)$ abeliano $\Rightarrow \mu_*$ indipendente da μ (isomorfismo canonico).

Prop. *$X \searrow A$, $a \in A \Rightarrow i_* : \pi_1(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, a)$, con $i : A \hookrightarrow X$ inclusione.*

Dim. $H : X \times I \to X$ deformazione $X \searrow A \rightsquigarrow r := h_1| : X \to A$ retrazione
$\Rightarrow i \circ r = h_1 \simeq_A \mathrm{id}_X$ e $r \circ i = \mathrm{id}_A \Rightarrow i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,a)}$
e $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)} \Rightarrow i_*$ isomorfismo e $i_*^{-1} = r_*$. □

Cor. *$U \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $x_0 \in U \Rightarrow \pi_1(U, x_0) = 0$.*

Dim. $U \searrow \{x_0\}$. □

Oss. $\pi_1(B^n) = \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, $\forall\, n \geqslant 0$.

Enunciamo il seguente teorema senza dimostrarlo.

Teor. *$f : (X, x_0) \xrightarrow{\simeq} (Y, y_0)$ equivalenza omotopica $\Rightarrow$*
$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ isomorfismo.

Cor. *X contraibile $\Rightarrow \pi_1(X) = 0$.*

Def. X è *semplicemente connesso* se $\forall\, x_0, x_1 \in X$, $\exists\, \alpha : I \to X$ continua t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ e α unica a meno di $\simeq_{\{0,1\}}$.

Oss. X semplicemente connesso $\Leftrightarrow X$ cpa e $\forall\, \alpha_0, \alpha_1 : I \to X$ continue t.c. $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = x_0$ e $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = x_1 \Rightarrow \alpha_0 \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1$.

Teor. *X semplicemente connesso $\Leftrightarrow X$ connesso per archi e $\pi_1(X) = 0$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \Rightarrow \alpha \sim \gamma_{x_0} \Rightarrow [\alpha] = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\alpha_0 * \bar{\alpha}_1 \in \Omega(X, x_0) \Rightarrow [\alpha_0 * \bar{\alpha}_1] = [\gamma_{x_0}] \Rightarrow \alpha_0 * \bar{\alpha}_1 * \alpha_1 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_{x_0} * \alpha_1$
$\Rightarrow \alpha_0 \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1$. □

Cor. *$U \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ U semplicemente connesso.*

Oss. B^n e $\mathbb{R}^n$ semplicemente connessi, $\forall\, n \geqslant 0$.

Cor. *X contraibile $\Rightarrow$ X semplicemente connesso.*

Def. Un rivestimento $p\colon X \to Y$ è detto *rivestimento universale di Y* se X è semplicemente connesso.

Funzione di sollevamento. $p\colon X \to Y$ rivestimento
$x_0 \in X$, $y_0 = p(x_0)$, $J = p^{-1}(y_0)$

$$\Phi_p : \pi_1(Y, y_0) \to J$$
$$\Phi_p([\alpha]) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\alpha}_{x_0}(1)$$

con $\tilde{\alpha}_{x_0} : I \to X$ sollevamento di α t.c. $\tilde{\alpha}_{x_0}(0) = x_0$

Teor. *$p\colon X \to Y$ rivestimento universale $\Rightarrow$ Φ_p biiettiva.*

Def. Φ_p è detta *funzione di sollevamento*.

Dim. $\boxed{\text{Ben definita}}$ $\alpha \sim \beta \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0} \sim \tilde{\beta}_{x_0}$ (sollevamento dell'omotopia).

$\boxed{\text{Suriettiva}}$ $\forall\, x_1 \in J \rightsquigarrow \gamma : I \to X$ t.c. $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1 \rightsquigarrow$ $\alpha := p \circ \gamma \in \Omega(Y, y_0)$ e $\tilde{\alpha}_{x_0} = \gamma \Rightarrow \Phi_p([\alpha]) = x_1$.

$\boxed{\text{Iniettiva}}$ $\forall\, [\alpha], [\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$, $\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta]) \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0}(1) = \tilde{\beta}_{x_0}(1) \Rightarrow$ $\tilde{\alpha}_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\beta}_{x_0} \Rightarrow \alpha = p \circ \tilde{\alpha}_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} p \circ \tilde{\beta}_{x_0} = \beta \Rightarrow [\alpha] = [\beta]$. $\square$

Oss. $p\colon X \to Y$ rivestimento univers. $[\alpha] = 1 \Leftrightarrow \Phi_p([\alpha]) = \Phi_p(1) = x_0$.

Calcolo di $\pi_1(S^1)$

Teor. *$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Dim. $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ rivestimento universale $y_0 = (1, 0) \in S^1$. $[\omega] \in \pi_1(S^1, y_0) \rightsquigarrow \tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$ unico sollevamento t.c. $\tilde{\omega}_n(0) = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \tilde{\omega}_n = \tilde{\omega}_0 + n$ perché p ha periodo 1.

$\Phi_p : \pi_1(S^1, y_0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$, $\Phi_p([\omega]) = \tilde{\omega}_0(1)$ biiettiva.

$$\begin{aligned}\Phi_p([\gamma][\omega]) &= (\widetilde{\gamma * \omega})_0(1) = (\tilde{\gamma}_0 * \tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_0(1)})(1) = \tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_0(1)}(1) = \tilde{\gamma}_0(1) + \tilde{\omega}_0(1) = \\ &= \Phi_p([\gamma]) + \Phi_p([\omega]) \Rightarrow \Phi_p \text{ omomorfismo.}\end{aligned}$$ $\square$

Cor. *S^1 non è semplicemente connesso, in particolare non è contraibile.*

Teoremi di non retrazione e di Brouwer

Teorema di non retrazione. *$\nexists$ retrazione continua $r\colon B^2 \to S^1$.*

Dim. Per assurdo, $r\colon B^2 \to S^1$ retrazione $\Rightarrow \mathrm{id}_{\pi_1(S^1)} = 0$. □

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "r\circ i = \mathrm{id}_{S^1}"'] & B^2 \arrow[r, "r"] & S^1 \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} \\ \pi_1(S^1) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "r_*\circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1)}"'] & \pi_1(B^2) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

N.B. Più in generale, $\nexists$ retrazione continua $r\colon B^n \to S^{n-1}$.
Esercizio per $n = 1$.

Teorema del punto fisso di Brouwer. *$\forall\, f\colon B^2 \to B^2$ continua $\Rightarrow$ $\exists\, a \in B^2$ t.c. $f(a) = a$ (punto fisso).*

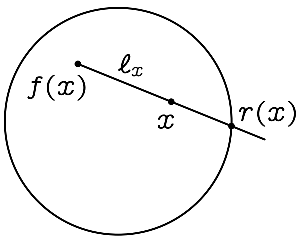
Dim. Per assurdo, $f(x) \neq x$, $\forall\, x \in B^2 \rightsquigarrow$

$$\ell_x := \{t(x - f(x)) + f(x) \mid t > 0\}$$

semiretta aperta con origine in $f(x)$ passante per $x \rightsquigarrow$

$$r\colon B^2 \to S^1$$
$$r(x) = \ell_x \cap S^1$$

retrazione continua, contraddizione. □



N.B. Più in generale, $\forall\, f\colon B^n \to B^n$ continua $\Rightarrow \exists\, a \in B^n$ t.c. $f(a) = a$.
Esercizio per $n = 1$.

Applicazione. $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f \geqslant 1$, sotto certe condizioni sui coefficienti $\exists\, a \in \mathbb{C}$ t.c. $|a| \leqslant 1$ e $f(a) = 0$.

Esempio. $f = x^7 - x^4 - 5x + 3i \in \mathbb{C}[x]$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$ con

$$g(x) = \frac{1}{5}x^7 - \frac{1}{5}x^4 + \frac{3i}{5}.$$

$|x| \leqslant 1 \Rightarrow |g(x)| \leqslant 1 \Rightarrow g\colon B^2 \to B^2$ continua $\Rightarrow \exists\, a \in B^2$ t.c. $g(a) = a$.

Gruppi fondamentali delle sfere

Prop. $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq S^{n-1}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

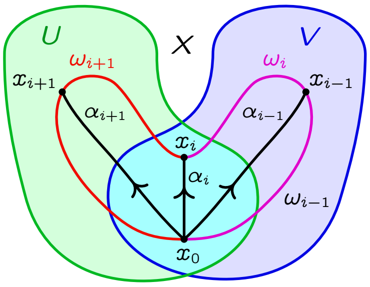
Dim.
$$H\colon (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n - \{0\}$$
$$H(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|}.$$
□

Prop. *Supponiamo* $X = U \cup V$ *con* U, V *e* $U \cap V$ *aperti non vuoti connessi per archi t.c.* $\pi_1(U) = 0$ *e* $\pi_1(V) = 0 \Rightarrow \pi_1(X) = 0$.

Dim. X connesso per archi, $x_0 \in U \cap V$ punto base. $\forall\, [\omega] \in \pi_1(X) \rightsquigarrow$ $\delta > 0$ numero di Lebesgue per $\{\omega^{-1}(U), \omega^{-1}(V)\}$ (ricopr. aperto di I) $\rightsquigarrow$ $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ t.c. $t_i - t_{i-1} < \delta \rightsquigarrow x_i := \omega(t_i)$

$$\omega([t_{i-1}, t_i]) \subset \begin{cases} U \\ V \end{cases}$$

$$\omega_i := \omega|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to X$$



Definiamo $\alpha_i : I \to X$ t.c.
$\alpha_0 = \alpha_n = \gamma_{x_0}$, $\alpha_i(0) = x_0$, $\alpha_i(1) = x_i$

$$\alpha_i(I) \subset \begin{cases} U \cap V, & \text{se } x_i \in U \cap V \\ U, & \text{se } x_i \in U - V \\ V, & \text{se } x_i \in V - U \end{cases}$$

$$\gamma_i := \alpha_{i-1} * \omega_i * \bar{\alpha}_i \ \text{ cappio in } U \text{ o } V \ \Rightarrow [\gamma_i] = 1$$

$$[\omega] = \left[\prod_{i=1}^{n} \omega_i\right] = \left[\prod_{i=1}^{n} \gamma_i\right] = \prod_{i=1}^{n} [\gamma_i] = 1$$ □

Cor. $\pi_1(S^n) = 0$, $\forall\, n \geqslant 2$.

Dim. $a_\pm = (0, \ldots, 0, \pm 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $U_\pm = S^n - \{a_\pm\} \cong \mathbb{R}^n$
$U_+ \cap U_- \cong (\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq S^{n-1}$ connesso per archi per $n \geqslant 2$
$U_+ \cup U_- = S^n \Rightarrow \pi_1(S^n) = 0$. □

Oss. S^n semplicemente connesso $\Leftrightarrow n \geqslant 2$.

Cor. $\forall\, n \geqslant 2$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$\pi_1(\mathbb{R}^n - \{a\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 2 \\ 0, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Invarianza topologica della dimensione. $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow m = n$.

Dim. Per $m = 2$ (ma vale in generale).
$f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ omeo $\Rightarrow f| : \mathbb{R}^2 - \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ omeo $\Rightarrow n \geqslant 2$
$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n - \{f(0)\}) \Rightarrow n = 2$. □

Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto

Teor. $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ *isomorfismo canonico.*

Dim. $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ proiezioni canoniche $\rightsquigarrow$
$p := (p_{1*}, p_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ iso
$p([\omega]) = ([p_1 \circ \omega], [p_2 \circ \omega])$. □

Cor. $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Gruppi fondamentali degli spazi proiettivi

Caso reale.

$$\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

$\boxed{n = 1}$ $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \cong \mathbb{Z}$.
$\boxed{n \geqslant 2}$ $p\colon S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $p(x) = [x]$ rivestimento universale $\Rightarrow$
$\#(\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)) = d(p) = 2 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Oss. $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ generato da $[\omega]$ con

$$\begin{tikzcd} & S^n \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \tilde{\omega}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0 \ldots, 0) \\ \\ \omega(t) = [\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0 \ldots, 0] \end{array}$$

infatti $\Phi_p([\omega]) = -a$, funzione di sollevamento da $a = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$.
ω parametrizza $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n \Rightarrow i_*\colon \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \to \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ suriettiva.
In altre parole $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ è "generato" da $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Caso complesso.

$$\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = 0, \ \forall\, n \geqslant 0.$$

Induzione su n. $n = 0$ banale. Supponiamo $\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$ per $n - 1 \geqslant 0$.
$H\colon x_0 = 0 \Rightarrow H \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \rightsquigarrow U = \mathbb{C}\mathrm{P}^n - H \cong \mathbb{C}^n \Rightarrow \pi_1(U) = 0$
$a = [1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \rightsquigarrow V = \mathbb{C}\mathrm{P}^n - \{a\} \supset H$

$$K\colon V \times I \to V$$

$$K([x_0, x_1, \ldots, x_n], t) = [(1 - t)x_0, x_1 \ldots, x_n]$$

retrazione per deformazione $V \searrow H \Rightarrow \pi_1(V) \cong \pi_1(H) \cong \pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$
$U \cap V \cong \mathbb{C}^n - \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n} - \{0\} \searrow S^{2n-1}$ connesso per archi.

Oss.
$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ non semplicemente connesso $\forall\, n \geqslant 1$
$\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ semplicemente connesso $\forall\, n \geqslant 0$.

Teorema di Borsuk-Ulam

Lem. *H gruppo finito e* $\varphi : H \to \mathbb{Z}$ *omomorfismo* $\Rightarrow \varphi = 0$.

Dim. $\varphi(H)$ sottogruppo finito di $\mathbb{Z} \Rightarrow \varphi(H) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. □

Teorema di Borsuk-Ulam. $\forall f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ *continua* $\Rightarrow \exists\, a \in S^2$ *t.c.*

$$f(a) = f(-a).$$

Dim. Per assurdo, $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in S^2 \rightsquigarrow$

$$g : S^2 \to S^1$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

$g(-x) = -g(x) \rightsquigarrow G : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, $G([x]) = [g(x)]$ continua $\Rightarrow G_* = 0$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \arrow[r, "G_*=0"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] \\
\mathbb{Z}_2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & S^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_2"] & S^1 \arrow[d, "p_1"] \\
I \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \arrow[r, "G"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^1
\end{tikzcd}$$

$$\omega(t) = [\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0]$$
$$\tilde{\omega}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0)$$

$g \circ \tilde{\omega}$ sollevamento di $G \circ \omega$ tramite $p_1 : S^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$. $\tilde{\omega}(1) = -\tilde{\omega}(0) \Rightarrow$ $(g \circ \tilde{\omega})(1) = -(g \circ \tilde{\omega})(0) \Rightarrow G_*([\omega]) = [G \circ \omega] \neq 0$, contraddizione. □

Oss. In ogni istante ci sono due punti antipodali della superficie terrestre con stessa temperatura e pressione atmosferica.

Cor. S^2 *non si può immergere in* $\mathbb{R}^2$.

Oss. Non è possibile realizzare un planisfero continuo di tutta la Terra.