Gruppo fondamentale

Def. Uno spazio puntato (X, x_0) è uno spazio topologico X con un punto base $x_0 \in X$. Un'applicazione tra spazi puntati $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è un'applicazione $f: X \to Y$ t.c. $f(x_0) = y_0$.

Def. Lo spazio dei cappi di (X, x_0) è

$$\Omega(X, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha : I \to X \mid \alpha \text{ continua e } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \}.$$

 $\gamma_{x_0}: I \to X$, $\gamma_{x_0}(t) = x_0$, $\forall t \in I$ è detto cappio banale.

Relazione d'equivalenza su $\Omega(X,x_0)$: omotopia di cappi \sim

$$orall lpha_0, lpha_1 \in \Omega(X, x_0), \ lpha_0 \sim lpha_1 \Leftrightarrow \exists \, H \colon I^2 o X \ ext{omotopia rel } \{0, 1\}$$
 $a_0 = lpha_0, \ h_1 = lpha_1$ $a_0 = a_0, \ h_2 = a_1$ $a_1 = a_2$ $a_2 = a_2$ $a_3 = a_3$ $a_4 = a_4$ $a_5 = a_5$ $a_5 = a$

 $[\alpha]$ classe di equivalenza di $\alpha \in \Omega(X, x_0)$.

Def. Il gruppo fondamentale di (X, x_0) è l'insieme quoziente

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(X, x_0) / \sim = \{ [\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0) \}.$$

Teor. $\pi_1(X,x_0)$ è un gruppo rispetto all'operazione binaria

$$[\alpha][\beta] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha * \beta], \ \forall [\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0).$$

L'elemento neutro è $1 = [\gamma_{x_0}]$ e si ha $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$.

Dim. $[\alpha][\beta]$ Ben definito Mostriamo che non dipende dai rappresentanti.

$$egin{aligned} lpha_0 & \stackrel{\mathcal{H}}{\sim} lpha_1 & \leadsto & \mathcal{H} \colon I^2 \to X \ eta_0 & \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} eta_1 & \leadsto & \mathcal{K} \colon I^2 \to X \ \end{aligned} \quad \text{omotopie rel } \{0,1\}.$$

$$eta_0 \overset{\mathcal{K}}{\sim} eta_1 \quad \leadsto \quad \mathcal{K} : I^2
ightarrow X ig)$$
 $L: I^2
ightarrow X \quad L(t,s) = egin{cases} H(2t,s), & 0 \leqslant t \leqslant rac{1}{2} \ K(2t-1,s), & rac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$
 $x_0 st eta_0 \sim lpha_1 st eta_1
ightarrow [lpha_0][eta_0] = [lpha_1][eta_1]$

$$\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1 \Rightarrow [\alpha_0][\beta_0] = [\alpha_1][\beta_1]$$

$$x_0egin{bmatrix} lpha_1 & eta_1 \ H & K \ lpha_0 & eta_0 & L \ \end{bmatrix}$$

Proprietà associativa

$$[\alpha]([\beta][\gamma]) = [\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma]$$
$$= ([\alpha][\beta])[\gamma]$$

$$lpha st (eta st \gamma) \ x_0 igg[egin{array}{c} lpha eta eta \ lpha eta \ lpha eta \ lpha st eta \ lpha \ lp$$

Elemento neutro

$$egin{aligned} & [\gamma_{x_0}][lpha] = [\gamma_{x_0} * lpha] = [lpha] \ & [lpha][\gamma_{x_0}] = [lpha * \gamma_{x_0}] = [lpha] \end{aligned} \qquad \qquad x_0 igg|_{\substack{\gamma_{x_0} = lpha \ \gamma_{x_0} * lpha}} x$$

Inverso

$$egin{align} [lpha][lpha]^{-1} &= [lpha*arlpha] &= [\gamma_{x_0}] \ [lpha]^{-1}[lpha] &= [arlpha*lpha] &= [\gamma_{x_0}] \ \end{array} \qquad egin{align} x_0 \ \sum_{lpha & arlpha \ lpha*arlpha}^{arlpha} \ \end{array} \ _{lpha} \ = [\gamma_{x_0}] \ \end{array}$$

Oss. Analoghe proprietà algebriche valgono anche per prodotti di cammini (quando il prodotto è definito). La dimostrazione è la stessa.

Oss. $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = 0$ (l'unico cappio è quello banale).

Funtorialità.

Def. Data $f:(X,x_0)\to (Y,y_0)$ continua definiamo l'omomorfismo indotto

$$f_*:\pi_1(X,x_0) o\pi_1(Y,y_0)$$

$$f_*([lpha])\stackrel{\mathsf{def}}{=}[f\circlpha]$$

Teor. f_* è un omomorfismo di gruppi.

 $Dim. f_*$ ben definita perché $\simeq_{\{0,1\}}$ compositiva.

Scrivendo esplicitamente la definizione si verifica subito l'identità

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta).$$

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha * \beta])$$

$$= [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)]$$

$$= [(f \circ \alpha)][(f \circ \beta)] = f_*([\alpha])f_*([\beta]).$$

Teor (di funtorialità). Valgono le proprietà sequenti:

1) $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$.

2) $f:(X,x_0) \rightarrow (Y,y_0) \ e \ g:(Y,y_0) \rightarrow (Z,z_0) \ continue \Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$

Dim. 1) Immediata. Dimostriamo 2).

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)]$$
$$= g_*(f_*([\alpha])) = (g_* \circ f_*)([\alpha]).$$

Oss. $f: (X, x_0) \xrightarrow{\cong} (Y, y_0)$ omeo $\Rightarrow f_*: \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$ isomorfismo con inversa $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Quindi π_1 è un *invariante topologico*.

Oss. $c: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ costante $\Rightarrow c_* = 1$ (omomorfismo banale).

Teor (Invarianza omotopica). $f, g: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ continue t.c. $f \simeq_{x_0} g \Rightarrow f_* = g_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Dim. L'omotopia è compositiva.

Oss. I e I^2 connessi per archi $\Rightarrow \Omega(X,x_0) = \Omega(\mathcal{P}_{x_0}(X),x_0) \Rightarrow \pi_1(X,x_0) = \pi_1(\mathcal{P}_{x_0}(X),x_0)$

Per studiare π_1 possiamo restringerci a spazi connessi per archi.