Corso di Laurea Triennale in Matematica

Geometria 3
Topologia

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2024–2025

Spazi topologici

Def. Sia X un insieme. L'insieme

$$\mathcal{P}(X) = \{U \mid U \subset X\}$$

i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di X è detto *insieme delle parti* (o *insieme potenza*) di X.

Oss. $\mathcal{P}(X) \cong \{0,1\}^X = \{\text{funzioni } X \to \{0,1\}\} \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Leggi di De Morgan.
$$X - \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (X - U_\alpha)$$
$$X - \bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (X - U_\alpha).$$

Def. Una *topologia* su X è una famiglia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X che soddisfa:

(*1*) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(*2*) $X \in \mathcal{T}$

(*3*) $\forall \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$

(*4*) $\forall U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.

Uno *spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$ è un insieme X munito di una topologia $\mathcal{T}$ su X. Gli elementi di X sono detti *punti*. Scriveremo X anziché $(X, \mathcal{T})$ se $\mathcal{T}$ è sottinteso.

Def. $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico.

- $U \subset X$ è detto *aperto* in $X \Leftrightarrow U \in \mathcal{T}$.
- $C \subset X$ è detto *chiuso* in $X \Leftrightarrow X - C$ aperto $\Leftrightarrow X - C \in \mathcal{T}$.

Oss. Per una topologia $\mathcal{T}$ su X abbiamo:

(*1*) $\emptyset$ è aperto e chiuso in X

(*2*) X è aperto e chiuso in X

(*3*) unioni arbitrarie di aperti di X sono aperte in X

(*4*) intersezioni finite di aperti di X sono aperte in X (per induzione):
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall U_1 \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

(*3'*) intersezioni arbitrarie di chiusi sono chiuse:
$\forall \{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ famiglia di chiusi in $X \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ chiuso in X

(*4'*) unioni finite di chiusi sono chiuse:
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall C_1 \dots, C_n$ chiusi in $X \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ chiuso in X.

Oss. Per determinare $\mathcal{T}$ è sufficiente dichiarare gli aperti (oppure i chiusi) in modo che siano soddisfatte le proprietà precedenti.

Esempio. I seguenti esempi sono basilari e verranno usati spesso.

(*1*) Topologia banale su X: $\mathcal{T}_{\text{ban}} = \{\emptyset, X\} \rightsquigarrow X_{\text{ban}} = (X, \mathcal{T}_{\text{ban}})$.
È la topologia minimale, gli unici aperti sono il vuoto e lo spazio.

(*2*) Topologia discreta su X: $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow X_{\text{dis}} = (X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$.
È la topologia massimale, tutti i sottoinsiemi sono aperti e chiusi.

(*3*) Topologia cofinita su X: $\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X \mid X - U \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\} \rightsquigarrow X_{\text{cof}} = (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$.
Gli aperti sono i complementari dei sottoinsiemi finiti e il vuoto.
I chiusi sono i sottoinsiemi finiti e X.

Oss.

(*1*) X discreto $\Leftrightarrow$ i singoletti dei punti sono aperti.

(*2*) $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{T}_{\text{cof}} \Leftrightarrow X$ finito.

Basi di topologie

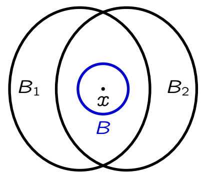
Def. Una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti di uno spazio topologico X è detta *base* per X se $\forall\, U \subset X$ aperto, $\exists\, \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ t.c. $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono detti *aperti basici*.

In altre parole $\mathcal{B}$ è base per $X \Leftrightarrow$ gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti e ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Oss. Per definizione di base, se $\mathcal{B}$ è base per X allora $U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in U$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset U$.

Esempio. La famiglia dei singoletti $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è base per la topologia discreta.

Teor. *Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora $\exists\, \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ topologia su X t.c. $\mathcal{B}$ è base per $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$*



(1) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$

(2) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall\, x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$ *t.c.* $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Inoltre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è unica (topologia generata da $\mathcal{B}$).

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Segue subito dalla definizione e osservazione precedente.
$\boxed{\Leftarrow}$ Definiamo

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B\in J} B \;\middle|\; J \subset \mathcal{B} \right\}$$

l'insieme di tutte e sole le unioni di elementi di $\mathcal{B}$.

Oss. Per definizione di $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \forall\, x \in U$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset U$.

Mostriamo che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è una topologia su X.

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ottenuto con $J = \emptyset$

(2) $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ottenuto con $J = \mathcal{B}$ in virtù di (1)

(3) $\forall\, \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \forall \alpha \in A$, $\exists\, J_\alpha \subset \mathcal{B}$ t.c.
$U_\alpha = \bigcup_{B\in J_\alpha} B \;\Rightarrow\; \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{B\in J} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ con $J = \bigcup_{\alpha\in A} J_\alpha \subset \mathcal{B}$

(4) $\forall\, U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $\forall\, x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_1 \subset U_1$ e $x \in B_2 \subset U_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \underset{(2)}{\Rightarrow} \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

$\forall\, B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ottenuto con $J = \{B\} \Rightarrow \mathcal{B}$ è base per $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

L'unicità segue subito dalle due osservazioni precedenti. $\square$

Topologie notevoli su $\mathbb{R}$

Topologia Euclidea su $\mathbb{R}$. $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a < b\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$. Infatti

(1) L'unione di tutti gli intervalli aperti limitati è $\mathbb{R}$

(2) L'intersezione di due intervalli aperti limitati è vuota oppure un intervallo aperto limitato ($\in \mathcal{B}$).

Si ha: $U \subset \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow \forall\, x \in U\ \exists\, a < b$ t.c. $x \in\,]a, b[\, \subset U$.

$]a, +\infty[\, = \bigcup_{b>a}]a, b[$, $]-\infty, b[$ aperti.

$\{a\}$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ chiusi (ma esistono molti altri chiusi).

$[a, b[$ e $]a, b]$ non sono né aperti né chiusi in $\mathbb{R}$, $\forall a < b$.

Retta di Sorgenfrey. $\mathcal{B}_\ell = \{[a, b[\mid a < b\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$ detta *topologia di Sorgenfrey* o *topologia degli intervalli aperti a destra*. Denotiamo con $\mathbb{R}_\ell$ questo spazio topologico (*retta di Sorgenfrey*).

Oss. $]a, b[\, = \bigcup_{c \in]a,b[} [c, b[$ aperto in $\mathbb{R}_\ell \Rightarrow$ aperti Euclidei sono aperti in $\mathbb{R}_\ell$ (ma non viceversa). I chiusi Euclidei di $\mathbb{R}$ sono chiusi in $\mathbb{R}_\ell$.

$[a, +\infty[\, = \bigcup_{c>a} [a, c[$ aperto in $\mathbb{R}_\ell$.

$[a, b]$ chiuso in $\mathbb{R}_\ell$ (perché chiuso in $\mathbb{R}$).

$[a, b[\, = \mathbb{R}_\ell - \big(]-\infty, a[\, \cup [b, +\infty[\big) \Rightarrow [a, b[$ chiuso (e aperto) in $\mathbb{R}_\ell$.

Intorni e basi di intorni

Def. X spazio topologico, $J \subset X$ è *intorno* di $x \in X$ se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $x \in U \subset J$.

Esempio. $U \subset X$ aperto non vuoto è intorno di ogni suo punto (*intorno aperto*).
$[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ è intorno di 0, e di ogni $x \in\,]-1, 1[$, ma non di -1 e di 1. Infatti $-1 \in\,]a, b[\, \subset [-1, 1]$ è impossibile.

Oss. $U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow \forall\, x \in U$, $\exists\, J \subset X$ intorno di x in X t.c. $J \subset U$.

Def. X spazio topologico, $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $x \in X$ è *base di intorni* (o *sistema fondamentale di intorni*) di x se $\forall\, L \subset X$ intorno di x, $\exists\, J \in \mathcal{J}$ t.c. $x \in J \subset L$.

Oss. Nella definizione possiamo limitarci a L intorno aperto di x.

Esempio. $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{J}_x = \left\{ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ base d'intorni di x.

Def. $J \subset X$ è *intorno* di $A \subset X$ se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $A \subset U \subset J$.

Def. $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $A \subset X$ è *base di intorni* (o *sistema fondamentale di intorni*) di A se $\forall\, L \subset X$ intorno (aperto) di A, $\exists\, J \in \mathcal{J}$ t.c. $A \subset J \subset L$.

Operatori topologici

X spazio topologico, $A \subset X$ sottoinsieme di X.

Def (Interno)**.** Si chiama *interno* di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Int}_X A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ aperto}}} U$$

unione di tutti gli aperti di X contenuti in A.

Oss. $\mathrm{Int}_X A$ è il più grande aperto di X contenuto in A.
$\mathrm{Int}_X A \subset A$ e vale $= \Leftrightarrow A$ aperto in X.
$U \subset A$ e U aperto in $X \Rightarrow U \subset \mathrm{Int}_X A$.
$x \in \mathrm{Int}_X A \Leftrightarrow \exists\, U \subset X$ intorno di x in X t.c. $U \subset A$.

Esempio. $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}[0,1] =]0,1[$, $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}\{0\} = \emptyset$, $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}_\ell}[0,1] = [0,1[$

Def (Chiusura)**.** Si chiama *chiusura* di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Cl}_X A \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{C \supset A \\ C \text{ chiuso}}} C$$

intersezione di tutti i chiusi di X che contengono A.

Oss. $\mathrm{Cl}_X A$ è il più piccolo chiuso di X che contiene A.
$A \subset \mathrm{Cl}_X A$ e vale $= \Leftrightarrow A$ chiuso in X.
$A \subset C$ e C chiuso in $X \Rightarrow \mathrm{Cl}_X A \subset C$.

Prop. *$x \in \mathrm{Cl}_X A \Leftrightarrow \forall\, U \subset X$ intorno (aperto) di x in X si ha $U \cap A \neq \emptyset$.*

Dim. Senza perdita di generalità basta considerare U intorno aperto di x.
$\boxed{\Rightarrow}$ Per assurdo, supponiamo $U \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset X - U$ chiuso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X A \subset X - U \Rightarrow x \in X - U$ assurdo perché $x \in U$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Per assurdo, supponiamo $x \notin \mathrm{Cl}_X A \Rightarrow x \in U := X - \mathrm{Cl}_X A$ aperto $\Rightarrow U \cap A \subset U \cap \mathrm{Cl}_X A = \emptyset \Rightarrow U \cap A = \emptyset$ assurdo. □

Def (Frontiera)**.** Si chiama *frontiera* (o *bordo*) di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Fr}_X A \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Cl}_X A \cap \mathrm{Cl}_X(X - A)$$

intersezione delle chiusure di A e del complementare.

Si usa anche la notazione $\mathrm{Fr}_X A = \partial_X A = \partial A$.

Oss. $\mathrm{Fr}_X A$ è chiuso in X e $\mathrm{Fr}_X A \subset \mathrm{Cl}_X A$.
$x \in \mathrm{Fr}_X A \Leftrightarrow \forall\, U \subset X$ intorno di x in X, si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Teor. *$\mathrm{Fr}_X A = \mathrm{Cl}_X A - \mathrm{Int}_X A$.*

Dim. Mostriamo le due inclusioni.
$\boxed{\subset}$ Sappiamo $\mathrm{Fr}_X A \subset \mathrm{Cl}_X A$. Resta da dimostrare $\mathrm{Fr}_X A \cap \mathrm{Int}_X A = \emptyset$. Per assurdo se $\exists\, x \in \mathrm{Fr}_X A \cap \mathrm{Int}_X A \Rightarrow \mathrm{Int}_X A \cap (X - A) \neq \emptyset$ assurdo.

$\boxed{\supset}$ $\forall\, x \in \mathrm{Cl}_X A - \mathrm{Int}_X A$, $\forall\, U \subset X$ intorno aperto di x in X dimostriamo $U \cap (X - A) \neq \emptyset$. Supponiamo per assurdo $U \cap (X - A) = \emptyset \Rightarrow U \subset A \Rightarrow U \subset \mathrm{Int}_X A \Rightarrow x \in \mathrm{Int}_X A$ assurdo. Quindi $x \in \mathrm{Cl}_X(X - A)$ e per ipotesi $x \in \mathrm{Cl}_X A \Rightarrow x \in \mathrm{Cl}_X A \cap \mathrm{Cl}_X(X - A) = \mathrm{Fr}_X A$. □

Sottospazi topologici

Teor. *Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottoinsieme. Allora la famiglia*
$$\mathcal{T}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \{U \cap Y \mid U \subset X \text{ aperto}\}$$
è una topologia su Y detta topologia indotta da X o topologia relativa o anche topologia di sottospazio.

Dim. Dimostriamo che valgono le proprietà della definizione di topologia.

(1) $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

(2) $Y = X \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

(3) $\forall \{V_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}_Y \ \exists \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ aperti di X t.c. $V_\alpha = U_\alpha \cap Y \ \forall \alpha \in A \Rightarrow$
$$\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

(4) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y \ \exists U_1, U_2$ aperti in X t.c. $V_1 = U_1 \cap Y$ e $V_2 = U_2 \cap Y \Rightarrow$ $V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. □

Def. $Y \subset X$ con la topologia relativa è detto *sottospazio topologico*.

Oss.

(1) Qualunque sottoinsieme di uno spazio topologico è un sottospazio topologico con la topologia relativa.

(2) Un sottospazio topologico $Y \subset X$ è a sua volta uno spazio topologico.

(3) $V \subset Y$ aperto in $Y \Leftrightarrow \exists\, U \subset X$ aperto in X t.c. $V = U \cap Y$.

(4) $C \subset Y$ chiuso in $Y \Leftrightarrow \exists\, A \subset X$ chiuso in X t.c. $C = A \cap Y$.

(5) I sottoinsiemi di uno spazio topologico saranno sempre considerati con la topologia relativa, se non specificato diversamente.

Esempi. $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ è un importante sottospazio topologico e lo consideriamo con la topologia Euclidea indotta da $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}_+ := [0,+\infty[\subset \mathbb{R}$ è un altro esempio interessante.

Prop. *$Y \subset X$ sottospazio topologico e $\mathcal{B}$ base per $X \Rightarrow$*
$$\mathcal{B}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$
base per Y.

Dim. Esercizio (usare le definizioni di topologia relativa e di base).

Prop. *$Y \subset X$ sottospazio, $y \in Y$ e $\mathcal{J}_y$ base di intorni di y in $X \Rightarrow$*
$$\mathcal{J}_{Y,y} \stackrel{\text{def}}{=} \{J \cap Y \mid J \in \mathcal{J}_y\}$$
base di intorni di y in Y.

Dim. Esercizio (usare le definizioni).

Spazi metrici

Def. Sia X un insieme non vuoto. Una funzione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è detta *metrica* o *distanza* su X se valgono le seguenti proprietà $\forall\, x, y, z \in X$:

(*1*) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(*2*) $d(x, y) = d(y, x)$

(*3*) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Oss. $d \geqslant 0$ infatti $\forall\, x, y \in X$ si ha

$$0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Def. Uno *spazio metrico* (X, d) è un insieme non vuoto X munito di una metrica d su X.

Esempio. Per ogni insieme non vuoto X consideriamo la *metrica discreta*

$$d_{\text{dis}} : X \times X \to \mathbb{R}$$

$$d_{\text{dis}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

(X, d_{dis}) è detto *spazio metrico discreto*.

Esempio. *Metrica Euclidea* su $\mathbb{R}$: $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Def. (X, d) spazio metrico, $x \in X$, $r > 0$. Il sottoinsieme

$$B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subset X$$

è detto *boccia aperta di centro x e raggio r*.

$$\bar{B}_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\} \subset X$$

è detto *boccia chiusa di centro x e raggio r*.

Oss. $x \in B_d(x, r) \subset \bar{B}_d(x, r)$.

Teor. (X, d) *spazio metrico* $\Rightarrow$

$$\mathcal{B}_d := \{B_d(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$$

base per una topologia $\mathcal{T}_d$ su X (topologia indotta da d o top. metrica).

Dim. Oss. precedente $\Rightarrow \bigcup\limits_{x,r} B(x, r) = X$ (proprietà (*1*) delle basi).

$\forall\, x_1, x_2 \in X\ \forall\, r_1, r_2 > 0\ \forall\, y \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \rightsquigarrow$

$$r := \min(r_1 - d(x_1, y), r_2 - d(x_2, y)) > 0$$

$\forall\, z \in B(y, r) \Rightarrow d(x_1, z) \leqslant d(x_1, y) + d(y, z) < d(x_1, y) + r \leqslant r_1 \Rightarrow z \in B(x_1, r_1)$ e similmente $z \in B(x_2, r_2) \Rightarrow$

$$y \in B(y, r) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \quad \text{(proprietà (2) delle basi).} \quad \square$$

Oss. $U \in \mathcal{T}_d \Leftrightarrow \forall\, x \in U\ \exists\, r > 0$ t.c. $B_d(x, r) \subset U$.

Def. Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è detto *spazio metrizzabile* se esiste una metrica d su X che induce la topologia di X, ossia $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Esempio. Gli intervalli aperti limitati di $\mathbb{R}$ sono le bocce aperte rispetto alla metrica Euclidea $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ metrizzabile.

Oss. X_{dis} metrizzabile perché $B_{d_{\text{dis}}}(x,1) = \{x\}$, $\forall\, x \in X$.

Oss. X_{ban} non metrizzabile se $|X| \geqslant 2$.

Spazi Euclidei. Su $\mathbb{R}^n$ consideriamo la *metrica Euclidea*

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ricordiamo che la disuguaglianza triangolare consegue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$.

Def. La topologia su $\mathbb{R}^n$ indotta dalla metrica Euclidea si chiama *topologia Euclidea*.

Oss. Consideriamo sempre $\mathbb{R}^n$ con la topologia Euclidea, se non specificato diversamente.

In modo simile si definisce la topologia Euclidea su $\mathbb{C}^n$ come quella indotta dalla metrica Euclidea

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Prop. *Sia (X,d) spazio metrico e $Y \subset X$ sottospazio topologico. Allora la restrizione $d_Y = d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ è una metrica su Y che induce la topologia di sottospazio.*

Dim. Che d_Y sia una metrica segue subito dal fatto che lo è d.

Che la topologia indotta su Y da d_Y sia la topologia di sottospazio segue subito dall'uguaglianza

$$B_{d_Y}(y,r) = B_d(y,r) \cap Y,$$

$\forall\, y \in Y$ e $\forall\, r > 0$, che è di immediata verifica. $\square$

Cor. *X spazio metrizzabile e $Y \subset X$ sottospazio $\Rightarrow$ Y metrizzabile.*

Sottospazi notevoli di $\mathbb{R}^n$

$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^n$ *disco* o *boccia n-dimensionale*.
$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *sfera* o *ipersfera n-dimensionale*.
$I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ *intervallo (chiuso)*.
$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ *semiretta (chiusa)*.

Oss. $S^n \subset B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
$B^0 = \{0\}$.
$B^1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.
B^2 è il disco chiuso unitario in $\mathbb{R}^2$.
B^3 è la boccia chiusa unitaria in $\mathbb{R}^3$.
$S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ è uno spazio discreto con due punti.
$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ è la circonferenza unitaria.
$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ è la sfera unitaria.

Oss. I, $\mathbb{R}_+$, S^n, B^n sono metrizzabili con la metrica Euclidea.

Applicazioni continue

Def. Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f: X \to Y$ è *continua* se $\forall V \subset Y$ aperto in Y si ha $f^{-1}(V) \subset X$ aperto in X.

In altre parole $f: X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow$ le preimmagini tramite f degli aperti sono aperti.

Oss. $f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$. Quindi $f: X \to Y$ continua $\Leftrightarrow$ $\forall C \subset Y$ chiuso in Y si ha $f^{-1}(C) \subset X$ chiuso in X.

Prop. *$f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ continue $\Rightarrow$ $g \circ f: X \to Z$ continua.*

Dim. Segue subito dal fatto che $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ $\forall V \subset Z$. $\square$

Oss. $c: X \to Y$ costante $\Rightarrow$ c continua.
$\mathrm{id}_X : X \to X$ continua per ogni spazio topologico X.
$Y \subset X$ sottospazio top. $\Rightarrow$ mappa d'inclusione $i_Y : Y \hookrightarrow X$ continua.
Restrizioni di applicazioni continue a sottospazi del dominio o del codominio sono continue.
$\forall\ f : X_{\mathrm{dis}} \to Y$ è continua.
$\forall\ f : X \to Y_{\mathrm{ban}}$ è continua.

Def. $f: X \to Y$ è *aperta* se $\forall U \subset X$ aperto in X si ha $f(U)$ aperto in Y.
$f: X \to Y$ è *chiusa* se $\forall C \subset X$ chiuso in X si ha $f(C)$ chiuso in Y.

$f: X \to Y$ aperta $\Leftrightarrow$ f manda aperti in aperti.
$f: X \to Y$ chiusa $\Leftrightarrow$ f manda chiusi in chiusi.

Oss. Una costante $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e chiusa, ma non aperta.
$f: X \to Y$ aperta $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ aperto.
$f: X \to Y$ chiusa $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ chiuso.
$A \subset X$ aperto (risp. chiuso) $\Leftrightarrow$ inclusione $i_A : A \hookrightarrow X$ aperta (risp. chiusa).

Esempio. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_{\mathrm{dis}} \to \mathbb{R}$ continua e biiettiva ma l'inversa non è continua.

Def. Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f: X \to Y$ è detta *omeomorfismo* se valgono le seguenti:

(*1*) f è biiettiva

(*2*) f è continua

(*3*) f^{-1} è continua.

Diciamo che X e Y sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo $f: X \to Y$ e in tal caso scriviamo $X \cong Y$.

N. B. Gli omeomorfismi si chiamano anche applicazioni *bicontinue*.

Oss. $\mathrm{id}_X : X \to X$ omeomorfismo per ogni spazio X (stessa topologia).
$f: X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow$ $f^{-1}: Y \to X$ omeomorfismo.
$f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ omeomorfismi $\Rightarrow$ $g \circ f: X \to Z$ omeomorfismo.
L'omeomorfismo è una *relazione d'equivalenza* tra spazi topologici.

Oss. Data $f: X \to Y$ biiettiva, si ha f^{-1} continua $\Leftrightarrow$ f aperta $\Leftrightarrow$ f chiusa (attenzione, serve biiettiva).
$f: X \to Y$ omeo $\Leftrightarrow$ f continua, biiettiva e aperta (o chiusa).

Cor. *Per ogni spazio X l'insieme*

$$\mathrm{Omeo}(X) \overset{\text{def}}{=} \{f : X \to X \mid f \text{ omeo}\}$$

è un gruppo rispetto a composizione, detto gruppo degli omeomorfismi.

N. B. In generale $\mathrm{Omeo}(X)$ è un gruppo molto grande e molto complicato, quasi mai abeliano (a parte alcuni casi banali).

Def. Una proprietà $\mathcal{P}$ è detta *proprietà topologica* se $\forall\, X, Y$ spazi topologici, X ha $\mathcal{P}$ e $Y \cong X \Rightarrow Y$ ha $\mathcal{P}$.

In altre parole $\mathcal{P}$ è una proprietà topologica se valendo per uno spazio X vale anche per tutti gli spazi omeomorfi a X, ovvero $\mathcal{P}$ è *invariante* a meno di omeomorfismi. Studieremo in seguito importanti proprietà topologiche.
La *Topologia* studia le proprietà topologiche degli spazi. Un problema fondamentale è capire se due spazi topologici X e Y sono omeomorfi.

Prop. *La metrizzabilità è una proprietà topologica.*

Dim. Diamo solo un'idea, lasciando i dettagli per Esercizio.
X metrizzabile e $Y \cong X \Rightarrow \exists\, d_X$ metrica su X che ne induce la topologia e $\exists\, f : Y \to X$ omeo $\rightsquigarrow$

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$$
$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$$

metrica su Y che induce la topologia di Y. □

Def. Dati gli spazi X e Y definiamo l'insieme delle applicazioni continue

$$C(X, Y) \overset{\text{def}}{=} \{f : X \to Y \mid f \text{ continua}\}.$$

Oss. $C(X, Y) \neq \emptyset$ (contiene almeno le costanti).
$\mathrm{Omeo}(X) \subset C(X, X)$.

Prop. *$f : X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow \forall\, x \in X$, $\forall\, V \subset Y$ intorno di $f(x) \in Y$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x in X t.c. $f(U) \subset V$.*

Dim. Non è restrittivo limitarci a considerare solo intorni aperti.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, V \subset Y$ intorno aperto di $f(x) \Rightarrow x \in U := f^{-1}(V) \subset X$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, V \subset Y$ aperto, se $f^{-1}(V) = \emptyset$ allora è aperto.
Se $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in f^{-1}(V) \Rightarrow V$ intorno di $f(x)$ in $Y \Rightarrow \exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f(U) \subset V \Rightarrow x \in U \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ aperto in $X \Rightarrow f$ continua. □

Oss. Nella Prop. possiamo limitarci a considerare intorni U e V aperti e/o basici (se abbiamo preventivamente fissato basi di intorni in X e Y). La dimostrazione richiede solo piccole modifiche.

Continuità negli spazi metrici

Cor. *Siano* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *spazi metrici. Allora* $f : X \to Y$ *è continua* $\Leftrightarrow \forall\, x_0 \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *t.c.* $\forall\, x \in X$ *si abbia che*

$$d_X(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dim. Segue subito dalla Prop. e dall'Oss. usando come intorni basici le bocce aperte $V = B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ e $U = B_{d_X}(x_0, \delta)$. $\square$

Oss. In generale δ dipende da x_0 e da ε.
La definizione di funzione continua generalizza quella studiata in Analisi.
Le funzioni reali di variabili reali la cui continuità è nota dall'Analisi saranno considerate continue senza bisogno di dimostrazione.

Oss. *Applicazioni affini reali* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax + b$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$, sono continue.
Idem per *applicazioni affini complesse* $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.
Affinità reali $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ con $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^n$, sono omeomorfismi (l'inversa è anch'essa affinità quindi continua).
Idem per *affinità complesse* $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.
In particolare, per $b = 0$, le applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono continue e gli automorfismi lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono omeomorfismi (idem su $\mathbb{C}$).

Esempio. $\exp : \mathbb{R} \to\,]0, +\infty[$, $\exp(x) = e^x$ è continua e infatti è omeo con inversa $\log :]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$, pure essa continua $\Rightarrow \mathbb{R} \cong\,]0, +\infty[$.
$g :]0, 1[\, \to\,]0, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{x}{1 - x}$ omeo con inversa $g^{-1}(y) = \dfrac{y}{1 + y}$.

$$]0, 1[\, \cong\,]a, b[\, \cong\,]a, +\infty[\, \cong\,]-\infty, a[\, \cong \mathbb{R}.$$

$$[0, 1[\, \cong [a, b[\, \cong\,]a, b] \cong [0, +\infty[\, \cong [a, +\infty[\, \cong\,]-\infty, a].$$

$$[0, 1] \cong [a, b] \quad \text{ma} \quad [0, 1] \ncong \mathbb{R} \quad \text{(lo vedremo più avanti).}$$

Chiusura e frontiera negli spazi metrici

Def. Dato (X, d) spazio metrico, $\forall x \in X$ e $\forall A, B \subset X$ non vuoti, definiamo la distanza tra x e A

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \geqslant 0$$

e la distanza tra A e B

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \geqslant 0.$$

Oss. $x \in A \not\Leftarrow\Rightarrow d(x, A) = 0$.
$A \cap B \neq \emptyset \not\Leftarrow\Rightarrow d(A, B) = 0$.
L'inf non è necessariamente un minimo.

Esempio. In $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(0,]0, 1[) = 0$.

Prop. (X, d) *spazio metrico*, $\emptyset \neq A \subset X \Rightarrow$

$$d_A : X \to \mathbb{R}$$
$$d_A(x) = d(x, A)$$

funzione continua.

Oss. In altre parole la distanza da un sottoinsieme è continua.

Dim. $\forall x_0, x \in X$, $\forall a \in A$ per la disuguaglianza triangolare e passando all'inf si ha

$$d(x, a) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, a) \quad \Rightarrow \quad d_A(x) - d_A(x_0) \leqslant d(x, x_0)$$

da cui scambiando x con x_0 si deduce

$$|d_A(x) - d_A(x_0)| \leqslant d(x, x_0).$$

Si ottiene quindi la continuità ponendo $\delta = \varepsilon$. □

Oss. $f : X \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ i sottoinsiemi di X definiti da un'equazione continua $f(x) = \alpha$, o da una disequazione $f(x) \geqslant \alpha$ o $f(x) \leqslant \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, sono chiusi in X in quanto preimmagini di chiusi.
Analogamente i sottoinsiemi di X definiti da $f(x) > \alpha$ o da $f(x) < \alpha$ o da $f(x) \neq \alpha$ sono aperti in X.

Prop. *Siano* (X, d) *uno spazio metrico e* $\emptyset \neq A \subset X$. *Allora*

$$\mathrm{Cl}_X\, A = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}.$$

Dim. Poniamo $C = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ e dimostriamo $\mathrm{Cl}_X\, A = C$.
$\boxed{\subset}$ C chiuso in X perché definito da un'equazione continua.
$A \subset C \Rightarrow \mathrm{Cl}_X\, A \subset C$.

$\boxed{\supset}$ $\forall x \in C$, $\forall r > 0\ \exists a \in A$ t.c. $d(x, a) < r \Rightarrow B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \mathrm{Cl}_X\, A$. □

Cor. $\forall x \in X$ *si ha* $x \in \mathrm{Cl}_X\, A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

Cor. $\forall x \in X$ *si ha* $x \in \mathrm{Fr}_X\, A \Leftrightarrow d(x, A) = d(x, X - A) = 0$.

Cor. $A \subset X$ *chiuso*, $x \in X$ *e* $d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$.

N. B. $\emptyset \neq A, B \subset X$ chiusi e $d(A, B) = 0 \not\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Spazi vettoriali normati

Def. Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso. Una funzione

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

è detta *norma* su V se valgono le seguenti $\forall\, v, w \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$:

(1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V$

(2) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

(3) $\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare per la norma).

Uno *spazio vettoriale normato* $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale reale o complesso V munito di una norma.

Oss. $\|0_V\| = \|0\, 0_V\| = 0\|0_V\| = 0$.
$0 = \|0_V\| = \|v - v\| \leqslant \|v\| + \|-v\| = 2\|v\|$, $\forall\, v \in V \Rightarrow \|\cdot\| \geqslant 0$.

Prop. *Sia V uno spazio vettoriale normato. Allora la funzione*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$d(v, w) = \|v - w\|$$

è una metrica su V. Pertanto V è anche uno spazio metrico e quindi uno spazio topologico.

Dim. Esercizio.

Oss. Si ha: $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leqslant \|v - w\| \Rightarrow \|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ continua. Esercizio.

Def. Due metriche d_1 e d_2 su X sono *equivalenti* se $\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant C_2 d_1(x, y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su V sono *equivalenti* se $\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant C_2\|v\|_1, \quad \forall\, v \in V.$$

Oss. Sono due relazioni d'equivalenza.
Norme equivalenti su V inducono metriche equivalenti. Esercizio.

Prop. *Metriche equivalenti su un insieme X inducono la stessa topologia.*

Dim. $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ metriche equivalenti $\rightsquigarrow C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1 d_1 \leqslant d_2 \leqslant C_2 d_1 \;\Rightarrow\; B_{d_1}(x, C_2^{-1} r) \subset B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, C_1^{-1} r). \qquad \square$$

Esempio. $\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, definiamo:

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|;$$
$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Sono equivalenti tra loro e alla norma Euclidea $\|\cdot\|$:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

Pertanto su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ potremo usare indifferentemente una di queste norme per rappresentare la topologia Euclidea.

Esempio. Su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ si considera anche la p-*norma* (o *norma* ℓ^p), $\forall\, p \geqslant 1$:

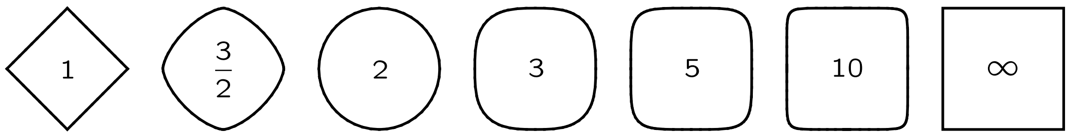
$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si ha subito la disuguaglianza

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$$

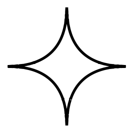
da cui per il Teorema dei due carabinieri

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$



Sfere unitarie $\|x\|_p = 1$ in $\mathbb{R}^2$ per alcuni valori di $p \geqslant 1$.

Oss. $\|\cdot\|_p$ non soddisfa la disuguaglianza triangolare $\forall\, p \in \,]0,1[$.



Enunciamo senza dimostrare il teorema seguente.

Teor. $\dim V < \infty \Rightarrow$ *tutte le norme su* V *sono tra loro equivalenti.*

N. B. $\dim V = \infty \Rightarrow$ esistono norme non equivalenti su V.

Lavoro di gruppo. (a) $B^2 \cong [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. ($b$) $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^2}\, B^2 = S^1$.

Immersioni, immersioni locali e omeo locali

Def. Un'applicazione tra spazi topologici $f : X \to Y$ è detta

(1) *immersione* se $f|_{f(X)} : X \to f(X)$ omeo, dove $f(X) \subset Y$ ha la top. di sottospazio. Scriviamo $f : X \hookrightarrow Y$ e diciamo X *si immerge* in Y.

(2) *immersione locale* se $\forall x \in X$, $\exists U \subset X$ intorno di x t.c. $f|_U : U \to Y$ è un'immersione. Diciamo che X si *immerge localmente* in Y.

(3) *omeomorfismo locale* se $\forall x \in X$, $\exists U \subset X$ intorno di x t.c. $f(U) \subset Y$ intorno di $f(x)$ e $f_{|U} : U \to f(U)$ omeo.

N. B. In inglese: immersione $=$ *embedding*; immersione loc. $=$ *immersion*.

Oss. $X \subset Y$ sottospazio topologico $\Leftrightarrow i_X : X \hookrightarrow Y$ immersione.

Oss. $f : X \hookrightarrow Y$ immersione $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ f continua e iniettiva.
$X \hookrightarrow Y \Leftrightarrow X$ omeomorfo ad un sottospazio di Y e a meno di immersione possiamo considerare $X \subset Y$.
$f : X \to Y$ immersione loc. $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ f continua e loc. iniettiva
($\forall x \in X$, $\exists U \subset X$ intorno di x t.c. $f_{|U} : U \to Y$ iniettiva).
Immersione $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ immersione loc.
$f : X \to Y$ omeo loc. $\Leftrightarrow f : X \to Y$ immersione loc. aperta.

Esempio. $\forall k < n$ consideriamo le *immersioni canoniche*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\hookrightarrow \mathbb{R}^n & \qquad \mathbb{C}^k &\hookrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto (x, 0_{\mathbb{R}^{n-k}}) & \qquad x &\mapsto (x, 0_{\mathbb{C}^{n-k}}). \end{aligned}$$

Abbiamo anche: $B^k \hookrightarrow B^n$, $S^k \hookrightarrow S^n$.
Possiamo considerare $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$, $S^k \subset S^n$, $B^k \subset B^n$, $\forall k < n$.
Queste immersioni sono chiuse.

Lavoro di gruppo. $f : [0, 2\pi[\to S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ omeo?