№1

$k=2, n=5$

ИС	КС	
00	00000	c_1
01	10110	c_2
10	01011	c_3
11	11101	c_4

$d_{min}=3 \Rightarrow t \le \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor = 1 \Rightarrow$ исправляет 1 ошибку

1. $P_e = 1 - \underset{(0 \text{ ош.})}{(1-p)^5} - \underset{(1 \text{ ош.})}{5p(1-p)^4} \approx 10^{-5}$

2. $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$G \cdot H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = c_1$
$0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = c_3$
$1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = c_2$
$1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = c_4$

№2

1. (⇒) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ ⓢ $d(x,y)=w(x+y)=0 \Rightarrow x+y=0 \pmod 2$, т.е. каждый бит
$\begin{array}{cc} x_i & y_i \\ 0+0=0 \\ 1+1=0 \end{array} \Rightarrow x=y$

ⓔ $d(x,y)=w(x+x)=w(0)=0$, ч.т.д.

2. $d(x,y) \ge 0$ — по опр.

3. Коммутативность: $d(x,y)=w(x+y)=w(y+x)=d(y,x)$ (коммут-ть слож.), ч.т.д.

4. (⇒) $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$ $\qquad d(x,z)=w(x+z)$, для каждого бита ≠ случаи: 1) $x_i=z_i \Rightarrow d(x,z)=0$, т.е. нер-во выполнено.

Ⅱ) $x_i \ne z_i \Rightarrow$ слева „1"; $x_i \ne y_i, y_i \ne z_i \Rightarrow$ справа $1+1=2 \Rightarrow 1 \le 2$, нер вып.
$x_i \ne y_i, y_i = z_i$ или $x_i = y_i, y_i \ne z_i \Rightarrow$ справа „1" $\Rightarrow$ нер вып., ч.т.д.

№3

Д-во: ∃ слово $\tilde{c}$, котор. нельзя однозначно декодировать, т.е. $d(c_1, \tilde{c})=d(c_2, \tilde{c})=t$
$d_{min} \le d(c_1, c_2) \le d(c_1, \tilde{c})+d(\tilde{c}, c_2)=2t$, $t \le \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor$

1) ∃ $d_{min}=2k$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow t \le \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor = \frac{d_{min}}{2} - 1 \Rightarrow d_{min} \le 2t \le d_{min}-2 \Rightarrow ?! \Rightarrow \nexists \tilde{c}$

№4

$k=3, n=6$
$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$
$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ИС	КС		
000	000000	c_1	$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = c_1$
100	110100	c_2	$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 = c_5$
010	011010	c_3	$0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = c_3$
110	100110	c_4	$0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 = c_7$
001	101001	c_5	$1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = c_2$
101	011101	c_6	$1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 = c_6$
011	110011	c_7	$1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = c_4$
111	000111	c_8	$1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 = c_8$

$G \cdot H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$