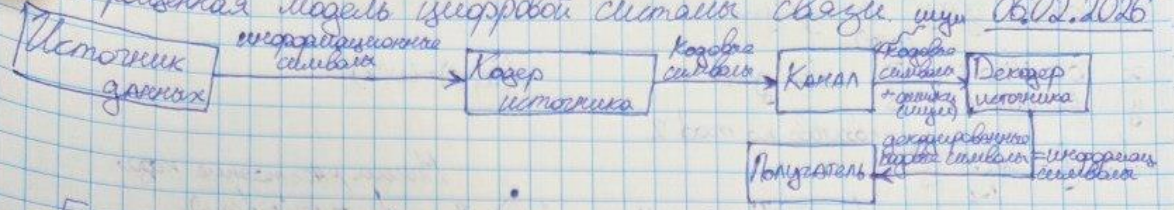
Обработка и интерпретация сигналов

Упрощенная модель цифровой системы связи 06.02.2026



- Будем рассматривать дискретные послед-ти и информ. послед-ти $GF(2)=\{0,1\}$

- Будем рассматривать двоичный симметричный канал
  - Диаграмма состояний:

p - переходная вероятность
вероятность ошибки одного символа

ДСК $p=10^{-3}$
$P_e=p$
$0\to0$
$1\to1$

$\exists p=10^{-3}$, для улучшения качества передачи данных будем 3 раза дублировать кажд. символ: $\underset{\text{источник}}{0011} \to \underset{\text{кодер}}{000\ 000\ 111\ 111}$

$\overset{k}{0} \to \overset{n\text{ - число симв.}}{000}$

$1 \to 111$

инф. символ — кодов. символа

кодирование

$R=\frac{1}{3}$

$P_e=3p^2(1-p)+p^3\sim10^{-6} \Rightarrow$ вер-ть уменьшилась

$\exists\ 000 \to 000$
001
010
100
110
101
011
111

(001, 010, 100) — можем правильно декодировать (можно исправить 1 ошибку)

- $\exists$ другой пример:
  $00\to00000$
  $01\to10110$
  $10\to01011$
  $11\to11101$

Можно показать, что тоже исправляет 1 ошибку

$R=\frac{2}{5}$ - экономнее прошлого кода

- **Опр:** $R=\frac{k}{n}$ — скорость кода

➤ 1948г., Клод Шеннон — Теория информации:
- Кодирование источника (убираем избыточность)
- Канальное кодирование (добавляем избыт.)

- Для ДСК с переходной вероятностью p: пропускная способность: $C=1-h(p)$, где $h(x)=-x\cdot\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)$ ⟵ энтропия двоичного ансамбля

При скорости передачи R меньшей величины пропускной способности C может быть обеспечена сколь угодно малая вероятность ошибки декодирования за счет увеличения длины используемых кодов ($\Rightarrow$ увеличение сложности кодирования и декодирования). Если $R>C$, то надежная передача невозможна.

При $p=10^{-3}$: $C\approx0.98$; т.е. нужно ввести 2% избыточных данных (но неизвестно как).

- **Опр:** Вес Хемминга: Если x - кодовое слово, то $\omega(x)$ — вес Хемминга и определяется как число ненулевых элементов в x. В двоичном случае — число „1".

Расстояние Хемминга между двумя кодовыми словами x и y → d(x,y) – определяется как кол-во элементов слова, которые отличаются друг от друга.

$$\begin{array}{lll} & & w(x) \\ x & 001101 - & 3 \\ y & 101001 - & 3 \end{array}$$ $d(x,y)=2$ $d(x,0)=w(x)$

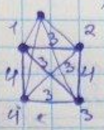
$d(x,y)=w(x+y)$ ← побитово по mod 2

$t=1$

00 → 00000 1
01 → 10110 2
10 → 01011 3
11 → 11101 4

$d(x,y)$:

y \ x	1	2	3	4
1	0	3	3	4
2	3	0	4	3
3	3	4	0	3
4	4	3	3	0



Миним. расстояние кода:
$d_{min}=\min\limits_{x\neq y} d(x,y)$

• **Опр.:** Линейный код – код, в котором сумма двух любых кодовых слов тоже является кодовым словом.

C – мн-во кодовых слов: $\forall x,y \in C: (x+y)\in C$ $\exists z=x+y \in C$ GF(2)

$d(x,y)=w(x+y)=w(z)=w(z+0)=d(z,0)$

$d_{min}=\min\limits_{\substack{x\neq y \\ x,y\in C}} d(x,y)=\min\limits_{\substack{z\in C \\ z\neq 0}} w(z)$

• **Опр.:** Линейный q-ичный $(\overset{\text{код. слов}}{n},\overset{\text{инф. слов}}{k})$-код C – это $\forall$ k-мерное подпространство пространства F_q^n всевозможных векторов длины n.

• **Пример:** $q=3,\ k=2,\ n=5;\ GF(3)=\{0,1,2\}$

F_3^2: $q^k=3^2=9$ — 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22

F_3^5: $q^n=3^5$ — 00000 … 22222 (длина 5)

Каждому из 9 кодовых слов ставим в соответствие один из векторов

• **Пример:**

00000 c_1
10110 $c_2=e_1$
01011 $c_3=e_2$
11101 c_4

$\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}-e_1\\-e_2\end{matrix}$ – базис

$0\cdot e_1+0\cdot e_2=c_1$
$0\cdot e_1+1\cdot e_2=c_3$ – подпр-во
$1\cdot e_1+0\cdot e_2=c_2$
$1\cdot e_1+1\cdot e_2=c_4$

• **Опр.:** Порождающей матрицей (n,k)-кода наз. матрица р-ра k×n, где строки – базисные вектора. G – порожд. матрица

• **Опр.:** Кодовые слова – линейные комбинации базисных векторов.

m – информац. слово: $\overline{m}=(m_1,m_2,\ldots m_k)$
c – кодовое слово: $\overline{c}=m\cdot G$

Предположим, что для некоторого вектора $\overline{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ все кодовые слова удовлетворяют $(\overline{c_i},\overline{h})=c_1\cdot h_1+c_2\cdot h_2+\ldots+c_n\cdot h_n$, $\overline{c_i}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$

• **Пример:**

00000 c_1
10110 c_2
01011 c_3
11101 c_4

$h=[0\,0\,1\,1\,1]$ – ортогонален коду: $G\cdot h^T=0$
→ проверка
n−k – проверок

$\exists H$ – размера $(n-k,n)$ (т.е. 3,5), $G\cdot H^T=0$, $c\cdot H^T=0$
H – проверочная матрица.