Tóm tắt bài toán

Cho một nhóm người gồm:

- N người thuộc đội Sao - Những người luôn nói thật
- M người thuộc đội Trăng - Những người luôn nói dối.
- 01 giám khảo là người nói thật khi được hỏi lần đầu, lần thứ 3, lần thứ 5, … và nói dối ở những lần còn lại.

Bạn được yêu cầu xác định tất cả vai của mọi người bằng cách hỏi mỗi người tối đa hai câu hỏi về 2 người khác nhau và không thể hỏi về chính người được hỏi. Câu hỏi có 2 dạng:

- X có thuộc đội Sao không?
- X có thuộc đội Trăng không?

Định nghĩa và thuật giải

Định nghĩa:

- K là tổng số người (K = N + M + 1)
- $S = (a_0, a_1, \ldots, a_{K-1})$ là dãy cần tìm (a[i] chỉ người thứ i là giám khảo hay thuộc đội Moon hoặc đội Star).
- $State(S) = (ans_0^{pre}, ans_0^{next}, ans_1^{pre}, ans_1^{next}, \ldots, ans_{K-1}^{pre}, ans_{K-1}^{next})$ là dãy các câu trả lời của $a_0, a_1, \ldots, a_{K-1}$. Với mỗi người hỏi 2 câu:
  - Người phía trước (pre) có thuộc Team star không?
  - Người phía sau (next) có thuộc Team star không?

Thuật toán 1:

- Tìm ra $State(S)$
- Tìm cặp $(ans_{i-1}^{next}, ans_i^{pre})$ thoả mãn $ans_{i-1}^{next} \oplus ans_i^{pre}$
- Gắn $a_i = Judge$
- Tìm lần lượt $a_{i+1}, \ldots, a_{K-1}, a_0, \ldots, a_{i-1}$ dựa trên cạnh nối.
- Trả về cấu hình S

Chứng minh

Bổ đề 1: Tồn tại duy nhất cặp (X, Judge) thoả mãn cặp trả lời của X đối Judge và ngược lại là (True, False) hoặc (False, True).

Chứng minh dựa trên bảng chân lý.

Bổ đề 2: Tồn tại duy nhất cặp một giá trị của a_{i+1} khi biết a_i và câu trả lời của cặp đó.

Chứng minh dựa trên bảng chân lý.

X	Y	Ask X: is Y star?	Ask Y: is X star?
Moon	Moon	True	True
Moon	Star	False	False
Star	Star	True	True
Moon	Judge (nói thật)	True	False
Star	Judge (nói thật)	False	True
Judge (nói dối)	Moon	True	True
Judge (nói dối)	Star	False	False

Từ hai bổ đề trên, ta có thể khẳng định giá trị a_i là đúng. Và các giá trị tiếp theo là xác định và duy nhất. Do đó, thuật toán luôn đưa ra kết quả đúng đắn.