

# Моделирование колесных роботов

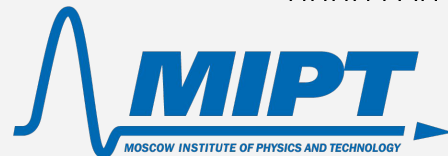
Лекция 3. Кинематические модели.  
Вероятностные модели движения.

Олег Шипитько

Москва, 2023



ИППИ РАН





# СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ

## 1. Кинематические модели колесных роботов

- a. Дифференциальный привод
- b. Трицикл
- c. Принцип Аккермана
- d. Омни- и меканум- колеса

## 2. Вероятностные модели движения

- a. Одометрическая модель
- b. Скоростная модель

# РЕКУРСИВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА ПОЗЫ

$$p(\mathbf{x}_t | map, \mathbf{z}_t, \mathbf{u}_t) = C \cdot p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, map) \int_S p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} | map, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

$C$  – коэффициент нормализации

$S$  – пространство поз робота

$p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, map)$  – модель измерения

$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})$  – модель движения

$p(\mathbf{x}_{t-1} | map, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$  – предыдущее состояние системы (поза робота)

# ФИЛЬТР КАЛМАНА

Предсказание:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{B}_t \vec{\mathbf{u}}_t$$

$$\hat{\Sigma}_t = \mathbf{F}_t \Sigma_{t-1} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{Q}_t$$

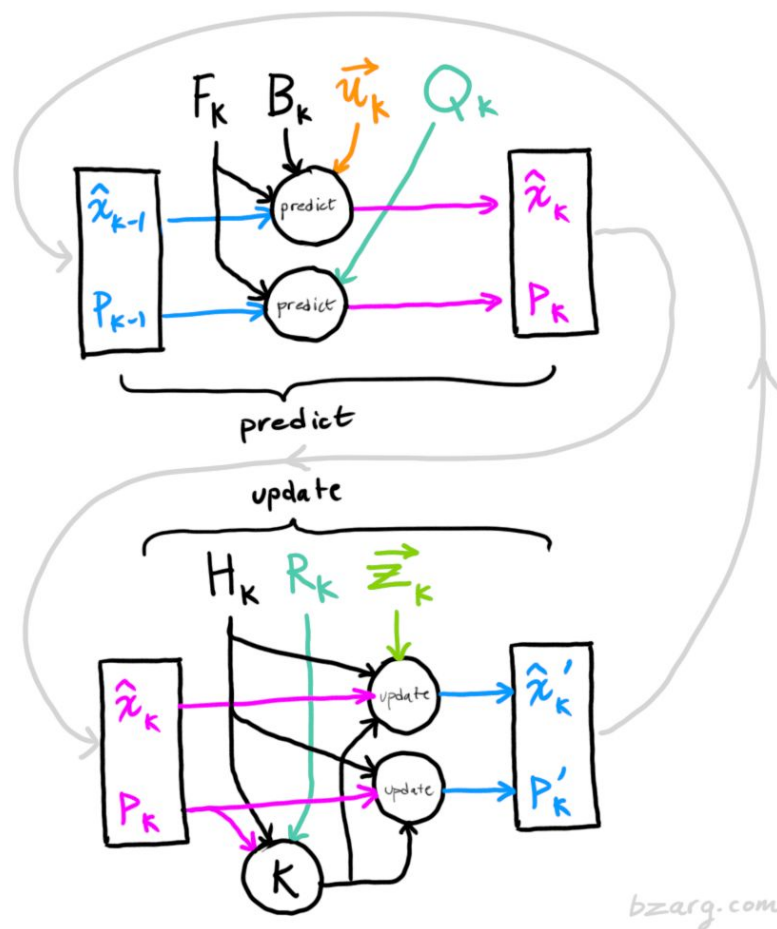
Коррекция:

$$\mathbf{K}' = \hat{\Sigma}_t \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \hat{\Sigma}_t \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

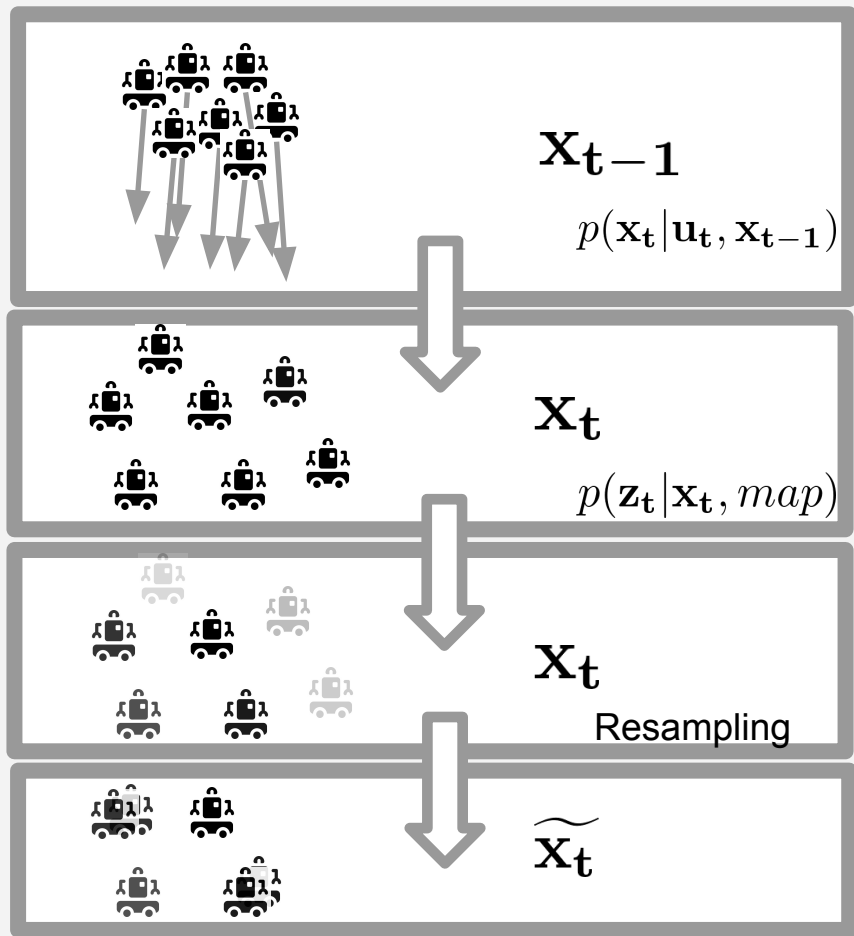
$$\mathbf{x}'_t = \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}' (\vec{\mathbf{z}}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t)$$

$$\Sigma'_t = \hat{\Sigma}_t - \mathbf{K}' \mathbf{H}_t \hat{\Sigma}_t$$

## Kalman Filter Information Flow



# ФИЛЬТР ЧАСТИЦ



## Algorithm 1 Generic Monte-Carlo localization algorithm

```

1: procedure MCL( $\mathbf{x}_{t-1}, m, \mathbf{u}_t, \mathbf{z}_t$ )
2:    $\{\mathbf{x}_t^n\} = \{\widetilde{\mathbf{x}}_t^n\} = \emptyset$ 
3:   for  $n = 1$  to  $N$  do
4:     sample  $x_t^n \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}^n)$ 
5:      $w_t^n = p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t^n, \text{map})$ 
6:      $\{\widetilde{\mathbf{x}}_t^n\} = \{\mathbf{x}_t^n\} + \langle x_t^n, w_t^n \rangle$ 
7:   end for
8:   for  $n = 1$  to  $N$  do
9:     draw  $i$  with probability  $\propto \widetilde{w}_t^i$ 
10:     $\{\mathbf{x}_t^n\} = \{\widetilde{\mathbf{x}}_t^n\} + \langle \widetilde{x}_t^i, \widetilde{w}_t^i \rangle$ 
11:  end for
12:  return  $\{\mathbf{x}_t^n\}$ 
13: end procedure
  
```

Model labels on the right side of the algorithm steps:

- Step 4: Модель движения
- Step 5: Модель наблюдения
- Step 9: Ресемплинг

# РЕКУРСИВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА ПОЗЫ

$$p(\mathbf{x}_t | map, \mathbf{z}_t, \mathbf{u}_t) = C \cdot p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, map) \int_S p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} | map, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

$C$  – коэффициент нормализации

$S$  – пространство поз робота

$p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, map)$  – модель измерения

$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})$  – модель движения

$p(\mathbf{x}_{t-1} | map, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$  – предыдущее состояние системы (поза робота)

# РЕКУРСИВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА ПОЗЫ

$$p(\mathbf{x}_t | map, \mathbf{z}_t, \mathbf{u}_t) = C \cdot p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, map) \int_S p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} | map, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

$C$  – коэффициент нормализации

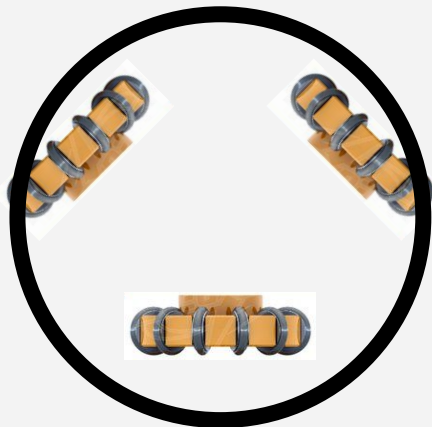
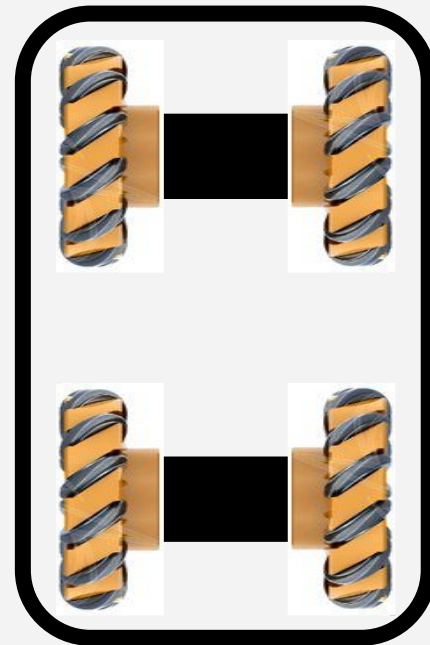
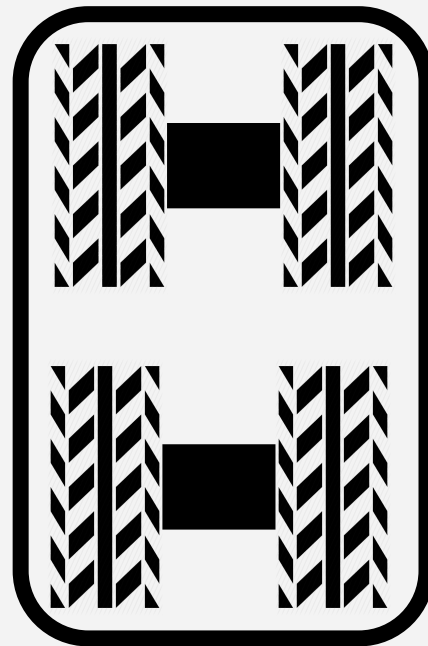
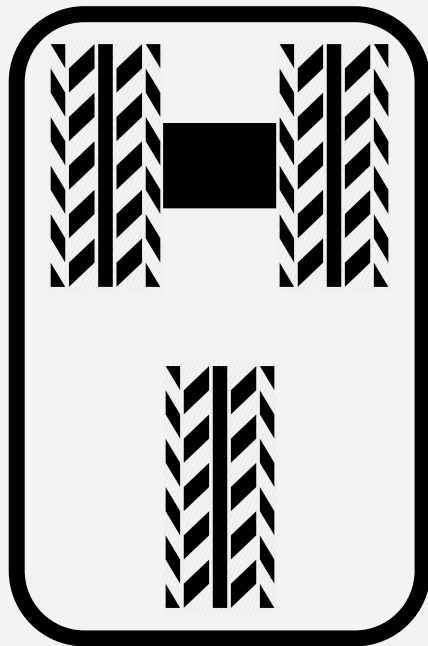
$S$  – пространство поз робота

$p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, map)$  – модель измерения

$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})$  – модель движения

$p(\mathbf{x}_{t-1} | map, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$  – предыдущее состояние системы (поза робота)

# (некоторые) ВИДЫ СХЕМ КОЛЕСНЫХ РОБОТОВ



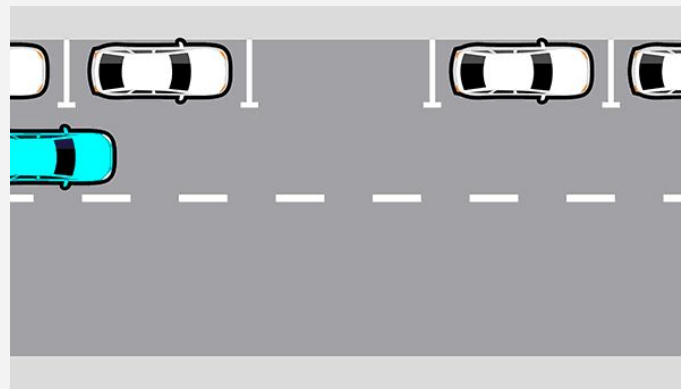


# ГОЛОНОМНОСТЬ

- ❑ Робот является **голономным** если число управляемых степеней свободы = общему количеству степеней свободы.



- ❑ **Неголономная система** — механическая система, на которую, кроме геометрических, накладываются и кинематические связи. Математически неголономные связи выражаются неинтегрируемыми уравнениями.



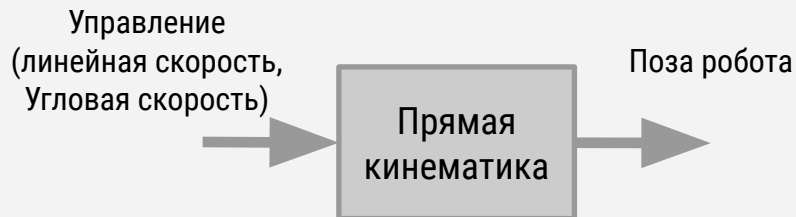
# ГОЛОНОМНОСТЬ

- ❑ **Голономные** связи — ограничивают допустимое пространство состояний (геометрию).
- ❑ Например, если есть грузовик и прицеп, не все углы между ними возможны. Это голономное ограничение.

- ❑ **Неголономные** связи — ограничивают пространство управления относительно текущего состояния.
- ❑ Например, машина не может поехать в сторону.

# ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ

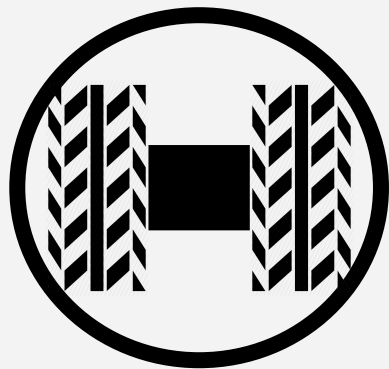
❑ **Прямая задача кинематики** — имея параметры управления (например, скорости колес) и время движения, найти позу в которую переместился робот.



❑ **Обратная задача кинематики** — найти параметры управления, которые переводят робота в заданную позу за заданное время.



# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИВОД

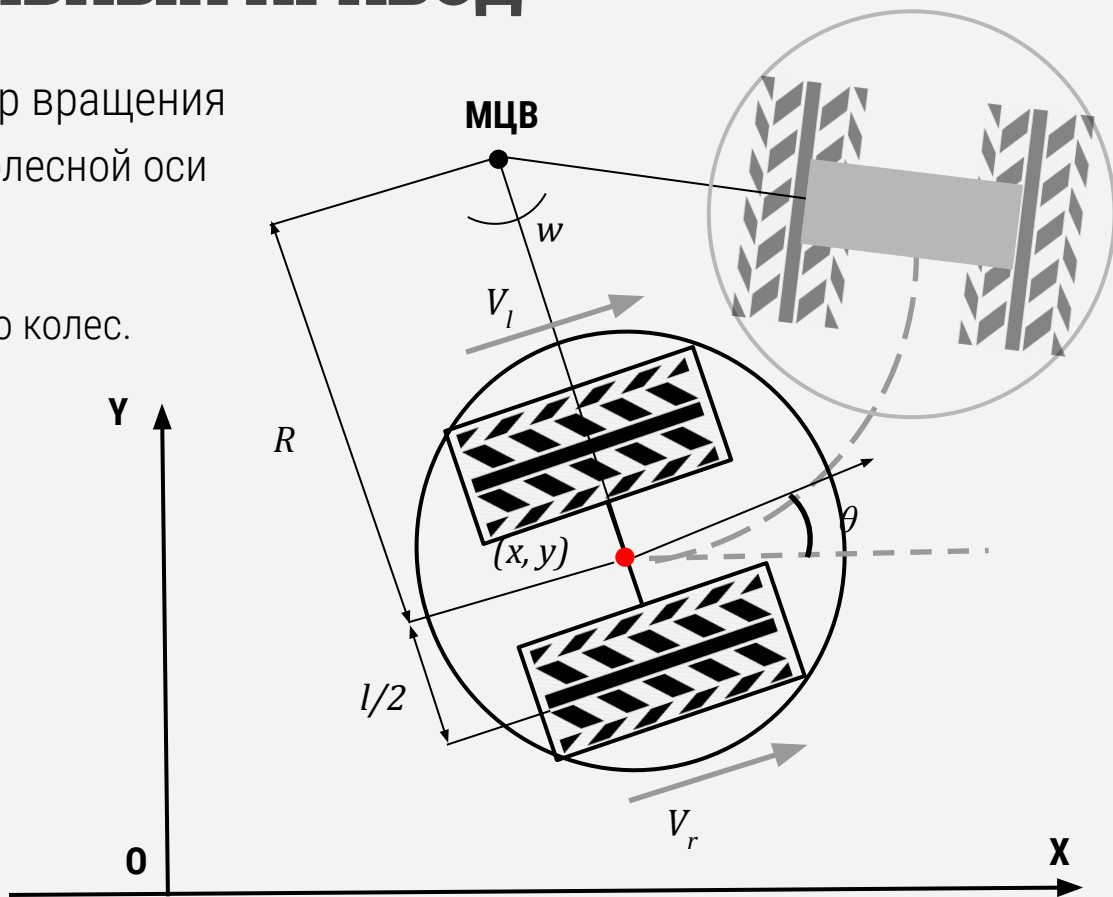


# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИВОД

**МЦВ (ИСС)** — мгновенный центр вращения

$(x, y, \theta)$  — координаты центра колесной оси

$V_r$  }  
 $V_l$  } — скорости правого и левого колес.  
Контролируемые величины.



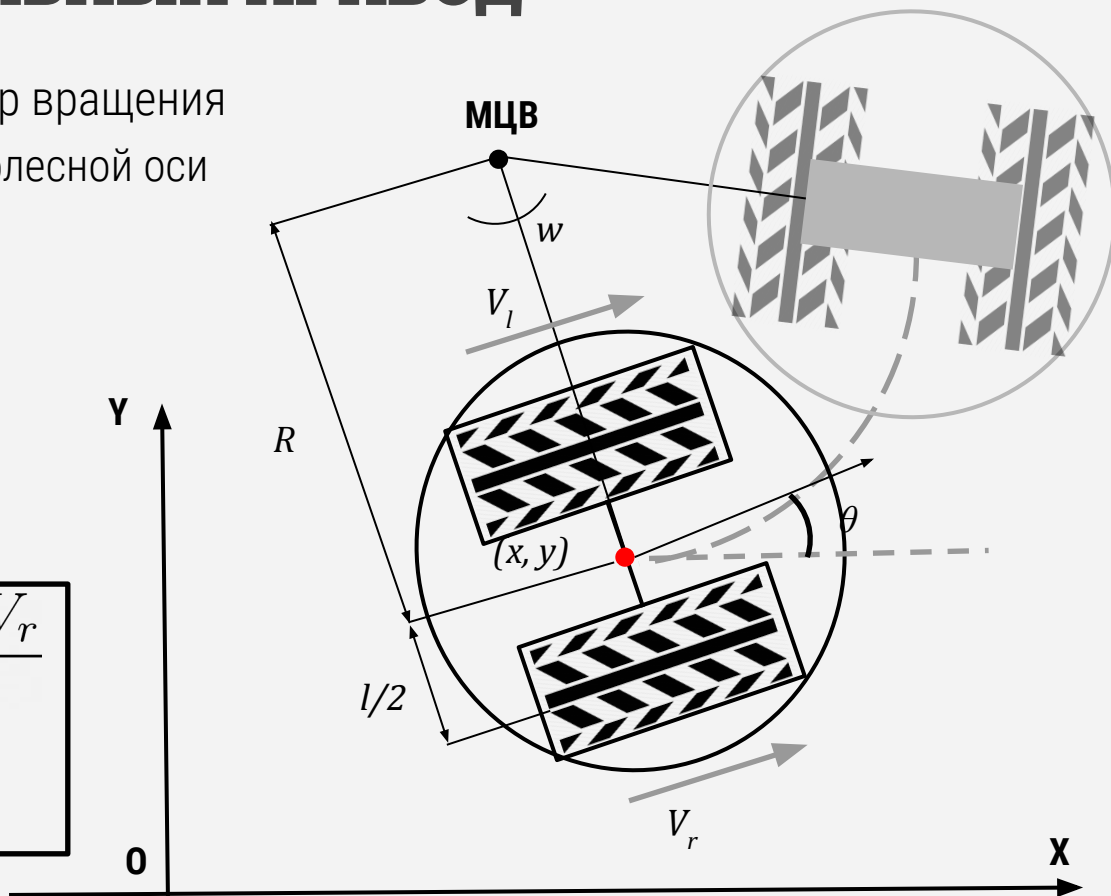
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИВОД

**МЦВ (ИСС)** – мгновенный центр вращения

$(x, y, \theta)$  – координаты центра колесной оси

$$w(R + \frac{l}{2}) = V_r$$
$$w(R - \frac{l}{2}) = V_l$$

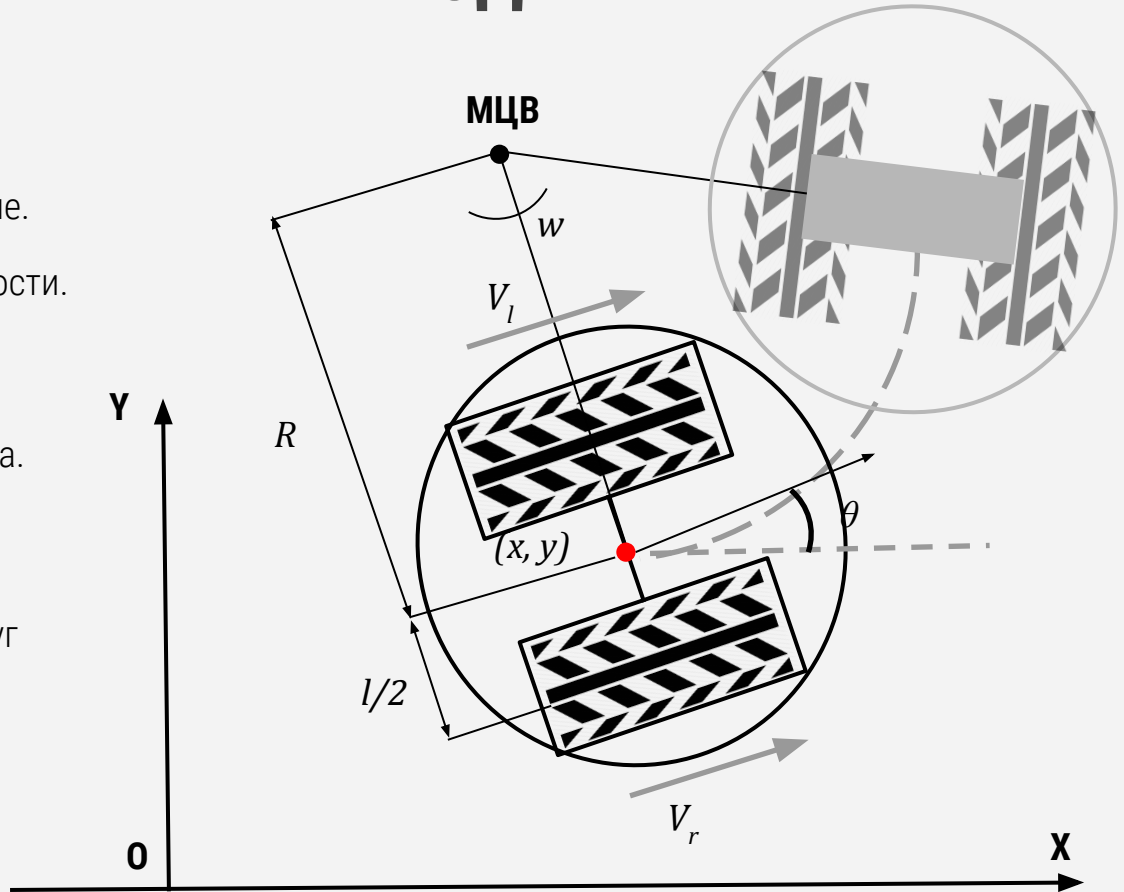
$$w = \frac{V_r - V_l}{l} \quad V = \frac{V_l + V_r}{2}$$
$$R = \frac{l}{2} \frac{V_r + V_l}{V_r - V_l}$$



# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИВОД

3 случая движения:

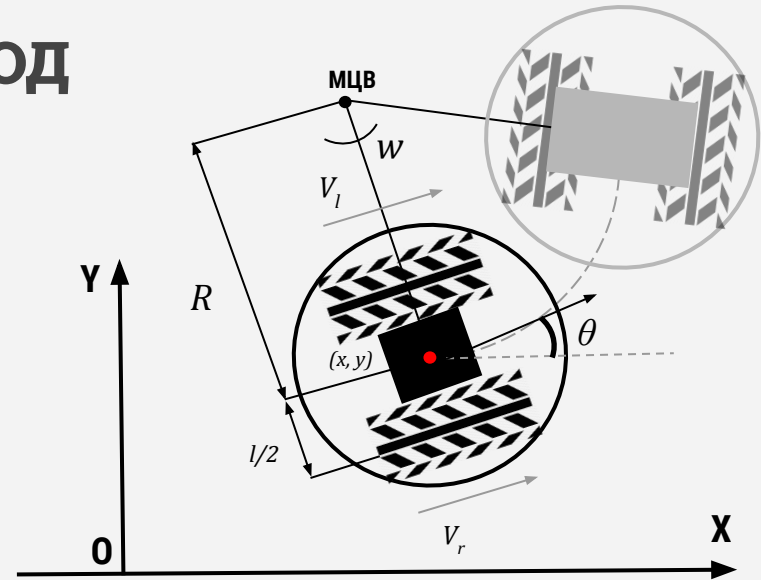
- ❑  $V_l = V_r$  — прямолинейное движение.  
Радиус вращения равен бесконечности.  
Угловая скорость — нулевая.
- ❑  $V_l = -V_r$  — вращение вокруг центра.  
Радиус вращения нулевой.
- ❑  $V_l = 0$  ( $V_r = 0$ ) — вращение вокруг левого (правого) колеса. Радиус вращения равен  $l/2$ .



# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИВОД ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА

$$ICC = [x - R \sin(\theta), y + R \cos(\theta)]$$

В момент времени  $t + \delta t$  положение робота определяется как:



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega \delta t) & -\sin(\omega \delta t) & 0 \\ \sin(\omega \delta t) & \cos(\omega \delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - ICC_x \\ y - ICC_y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ICC_x \\ ICC_y \\ \omega \delta t \end{bmatrix}$$



# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИВОД ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА

$$x(t) = \int_0^t V(t) \cos[\theta(t)] dt$$

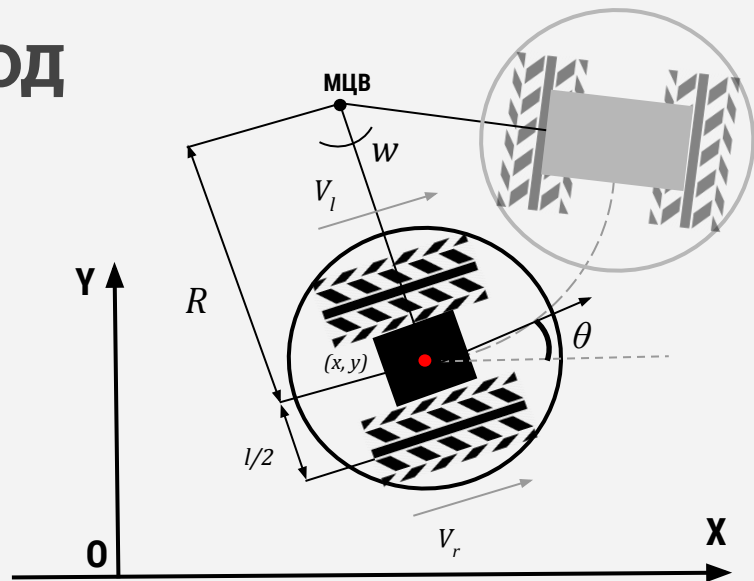
$$y(t) = \int_0^t V(t) \sin[\theta(t)] dt$$

$$\Theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [v_r(t) + v_l(t)] \cos[\theta(t)] dt$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [v_r(t) + v_l(t)] \sin[\theta(t)] dt$$

$$\Theta(t) = \frac{1}{l} \int_0^t [v_r(t) - v_l(t)] dt$$



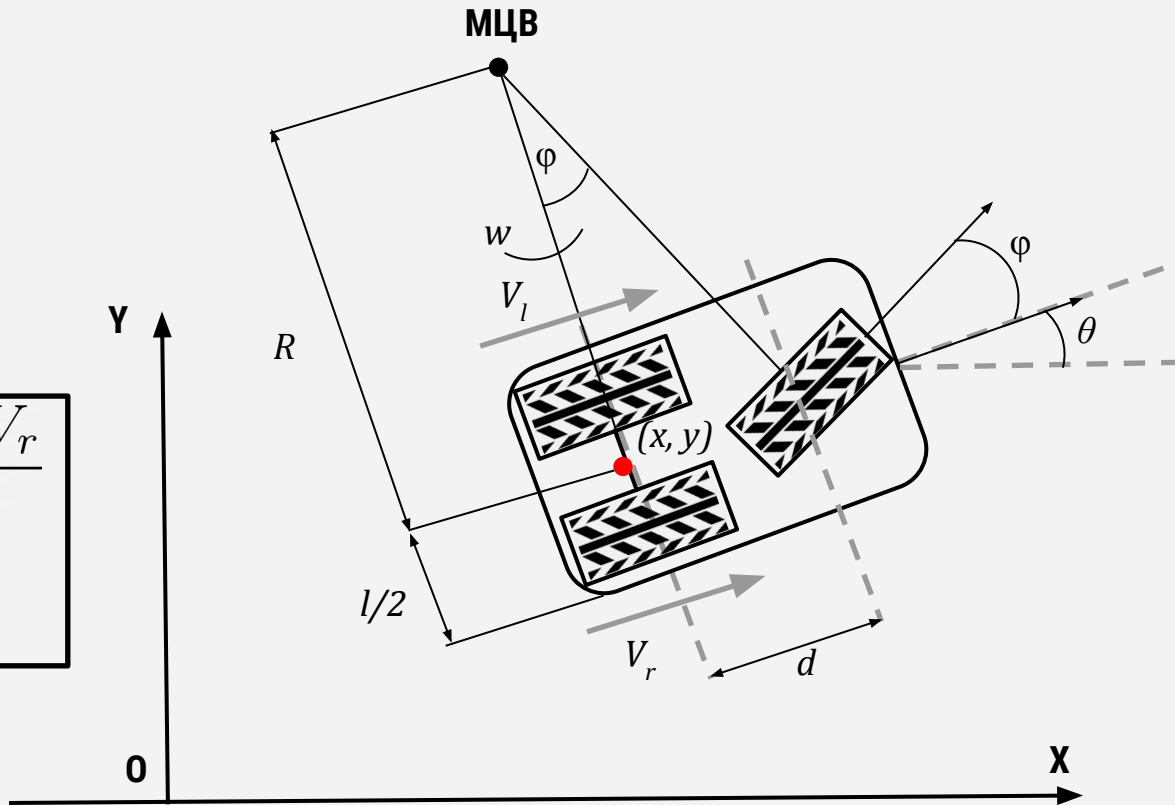
# ТРИЦИКЛ

$$w(R + \frac{l}{2}) = V_r$$

$$w(R - \frac{l}{2}) = V_l$$

$$w = \frac{V_r - V_l}{l} \quad V = \frac{V_l + V_r}{2}$$

$$R = \frac{l}{2} \frac{V_r + V_l}{V_r - V_l}$$

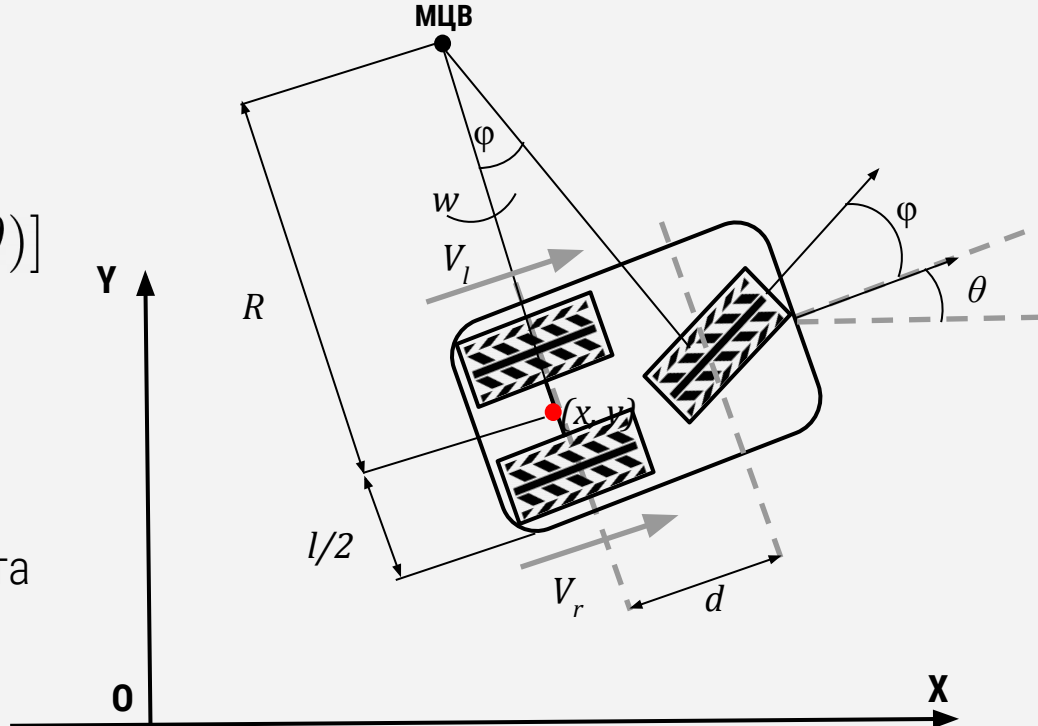


# ТРИЦИКЛ

$$ICC = [x - R \sin(\theta), y + R \cos(\theta)]$$

$$R = \frac{d}{\tan \varphi}$$

В момент времени  $t + \delta t$  положение робота определяется как:



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega \delta t) & -\sin(\omega \delta t) & 0 \\ \sin(\omega \delta t) & \cos(\omega \delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - ICC_x \\ y - ICC_y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ICC_x \\ ICC_y \\ \omega \delta t \end{bmatrix}$$

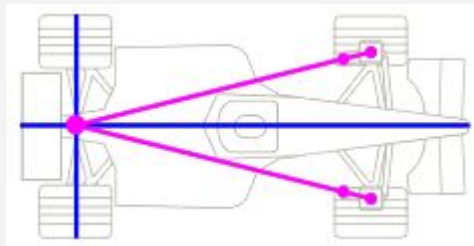
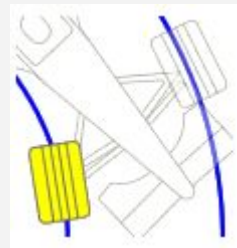
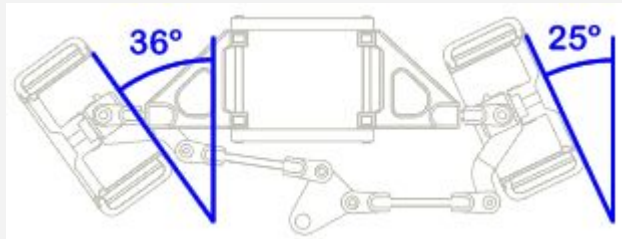
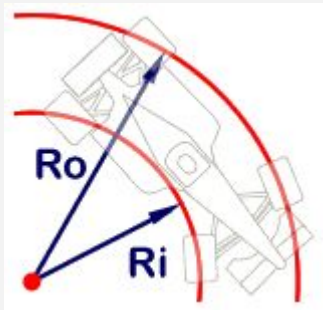
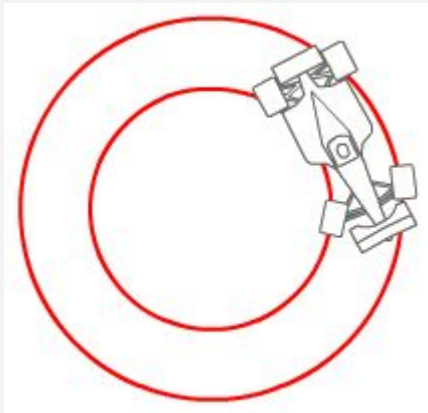
# ТРИЦИКЛ

Особенности:

- ❑ Нельзя развернуться на месте
- ❑ При использовании 4 колес необходим дифференциал для задних колес и схема Аккермана для рулевых колес

# ПРИНЦИП АККЕРМАНА

Принцип рулевой геометрии, разработанный чтобы позволить рулевым колесам проходить окружности разного радиуса и избегать бокового скольжения колес.

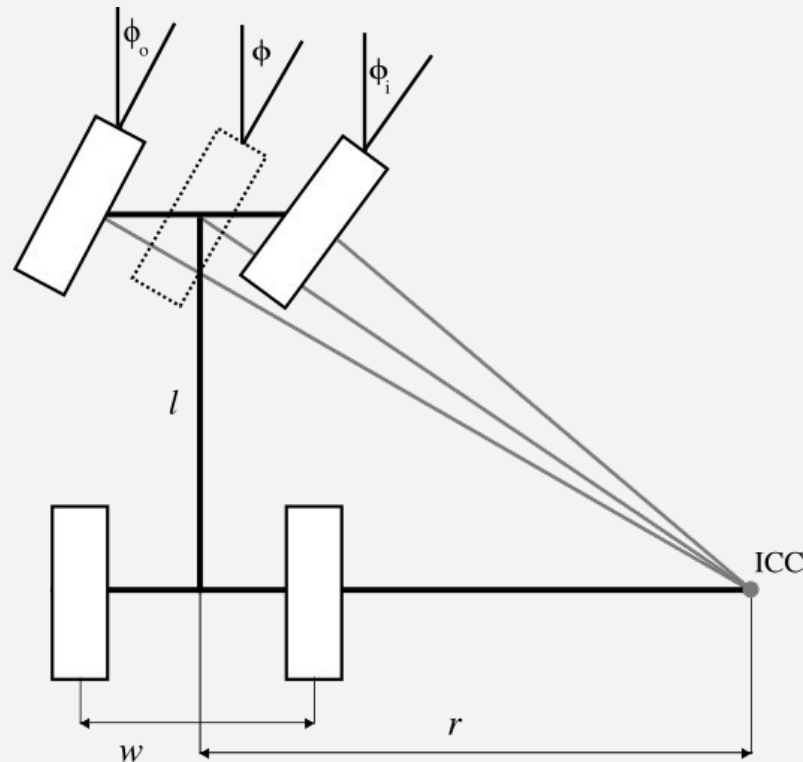


# УПРОЩАЕМ МОДЕЛЬ

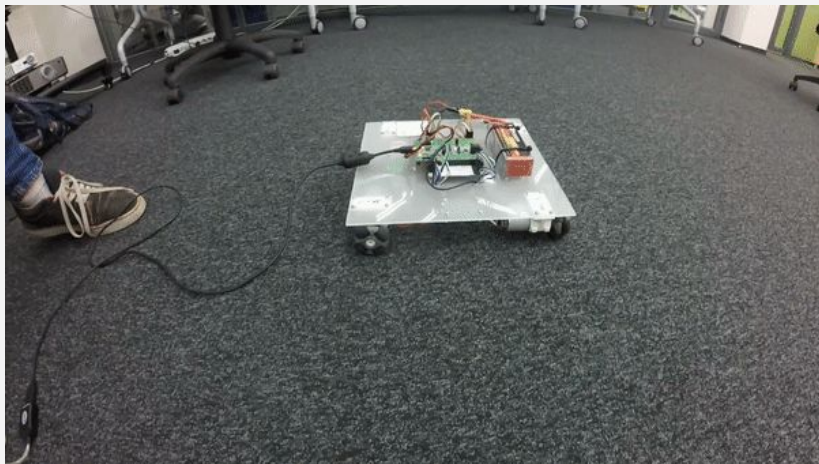
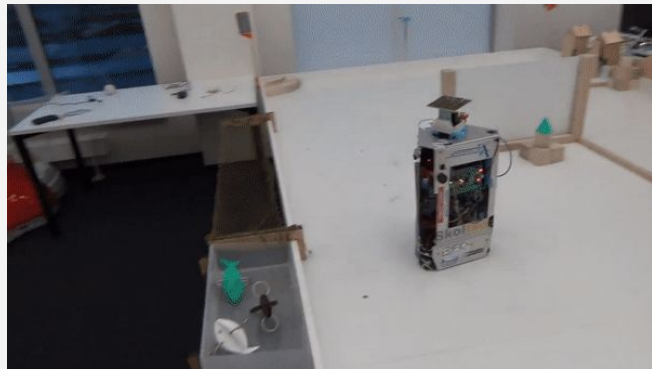
$$\tan(\phi) = \frac{l}{r}$$

$$\tan(\phi_i) = \frac{l}{r - \frac{w}{2}}$$

$$\tan(\phi_o) = \frac{l}{r + \frac{w}{2}}$$



# ОМНИ-КОЛЕСА (ВСЕНАПРАВЛЕННОЕ КОЛЕСО)



# МЕКАНУМ-КОЛЕСА (КОЛЕСО ИЛОНА, ШВЕДСКОЕ КОЛЕСО)

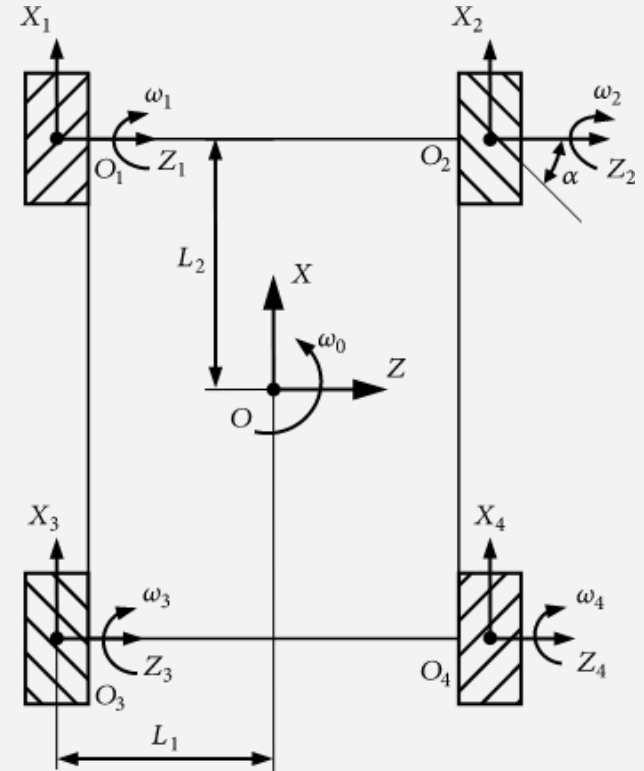




# МЕКАНУМ-КОЛЕСА (КОЛЕСО ИЛОНА, ШВЕДСКОЕ КОЛЕСО)

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_z \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \frac{r}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{L_1 + L_2} & \frac{1}{L_1 + L_2} & -\frac{1}{L_1 + L_2} & \frac{1}{L_1 + L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}$$

Тип движения	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
По прямой	$\omega$	$\omega$	$\omega$	$\omega$
Поперечное движение	$\omega$	$-\omega$	$-\omega$	$\omega$
Движение под $45^\circ$	0	$\omega$	$\omega$	0
Вращение на месте	$\omega$	$-\omega$	$\omega$	$-\omega$



# РЕКУРСИВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

$$p(\mathbf{x}_t | map, \mathbf{z}_t, \mathbf{u}_t) = C \cdot p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, map) \int_S p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} | map, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

$C$  – коэффициент нормализации

$S$  – пространство поз робота

$p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, map)$  – модель измерения

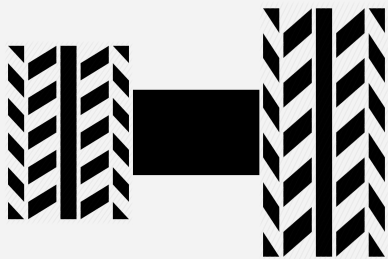
$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})$  – модель движения

$p(\mathbf{x}_{t-1} | map, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$  – предыдущее состояние системы (поза робота)

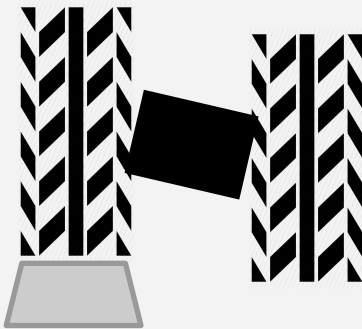
# ПОЧЕМУ НАМ НУЖНЫ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ?

- ❑ Актуаторы как и сенсоры не бывают абсолютно точными
- ❑ Также на точность движения оказывают влияние внешние факторы

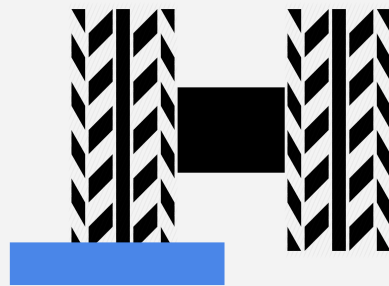
Разность диаметров колес



Препятствия




Проскальзывания на различных поверхностях



# ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

На практике встречаются 2 типа моделей движения:

- ❑ Основанные на показаниях **одометрии**
- ❑ Основанные на управлении **скоростью** (dead reckoning, счисление координат)  
 Исторически применялись в навигации судов
- ❑ Основанные на одометрии модели используются когда робот оснащен энкодерами.
- ❑ Модели основанные на скорости используются, когда энкодеров нет. Они основаны на подсчете перемещения по известной скорости и времени движения.

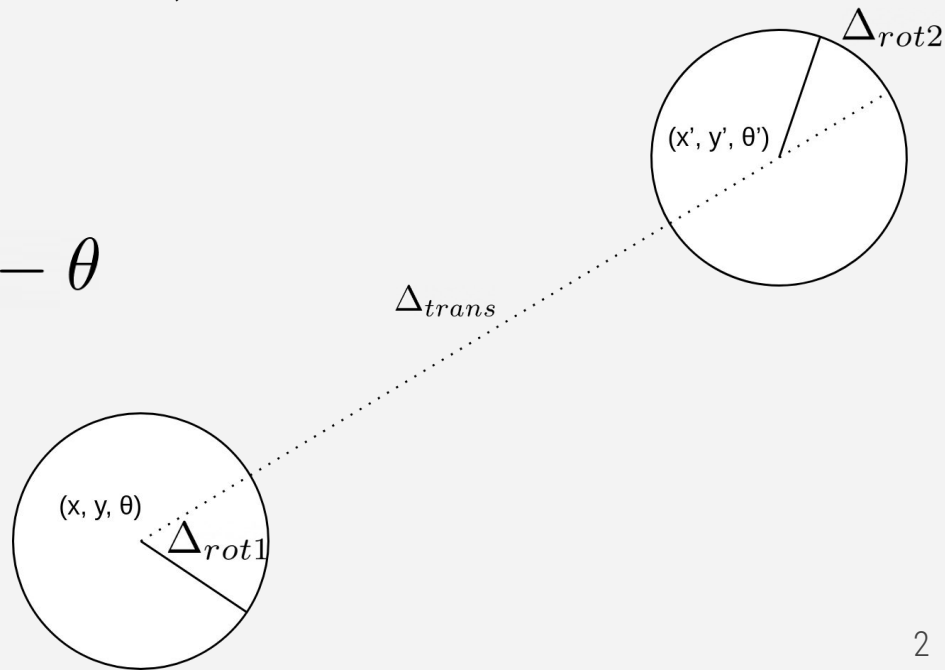
# МОДЕЛЬ НА ОСНОВЕ ОДОМЕТРИИ

- ❑ Робот движется из  $(x, y, \theta)$  в  $(x', y', \theta')$
- ❑ Информация поступающая от энкодеров  $u_t = (\Delta_{trans}, \Delta_{rot1}, \Delta_{rot2})$

$$\Delta_{trans} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

$$\Delta_{rot1} = \text{atan2}(y' - y, x' - x) - \theta$$

$$\Delta_{rot2} = \theta' - \theta - \Delta_{rot1}$$



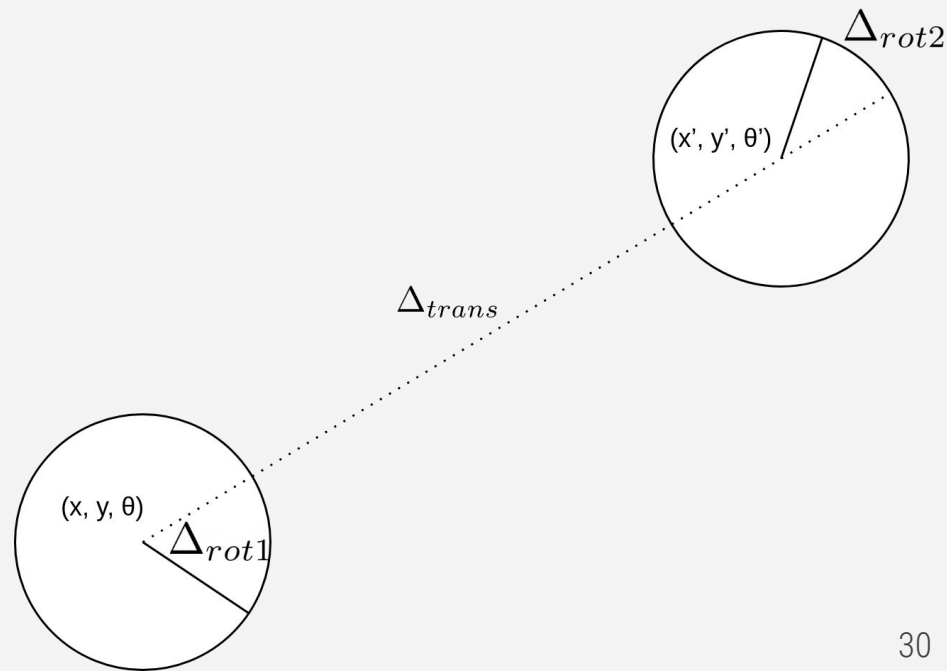
# МОДЕЛЬ ШУМА

Реальное движение подвержено ошибкам (шуму):

$$\hat{\Delta}_{trans} = \Delta_{trans} + \eta_1$$

$$\hat{\Delta}_{rot1} = \Delta_{rot1} + \eta_2$$

$$\hat{\Delta}_{rot2} = \Delta_{rot2} + \eta_3$$



# МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ С ОДНИМ ПОВОРОТОМ

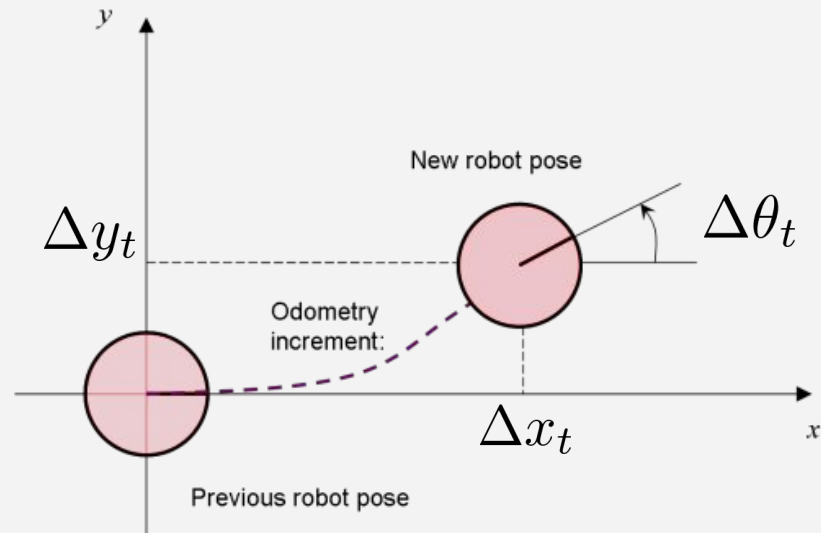
Измерения, получаемые от одометрии:

$$\begin{cases} \Delta x_t = x_t^{odom} - x_{t-1}^{odom}, \\ \Delta y_t = y_t^{odom} - y_{t-1}^{odom}, \\ \Delta \theta_t = \theta_t^{odom} - \theta_{t-1}^{odom}, \end{cases}$$

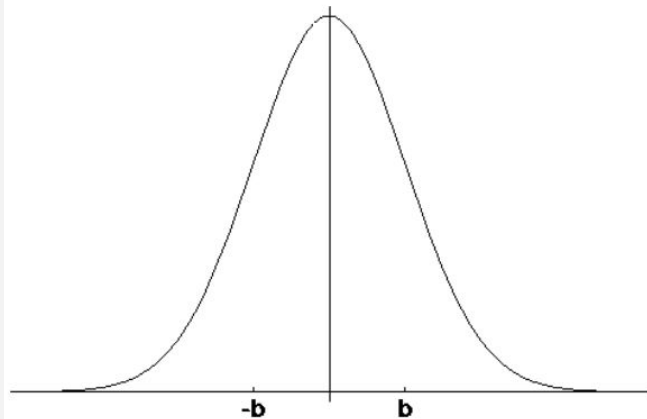
Модель движения:

$$\begin{cases} x_t^n = x_{t-1}^n + d_t^n \sin(\theta_{t-1}^n + \Delta \theta_t^n + \delta_t^n), \\ y_t^n = y_{t-1}^n + d_t^n \cos(\theta_{t-1}^n + \Delta \theta_t^n + \delta_t^n), \\ \theta_t^n = \theta_{t-1}^n + \Delta \theta_t^n + \delta_t^n, \end{cases}$$

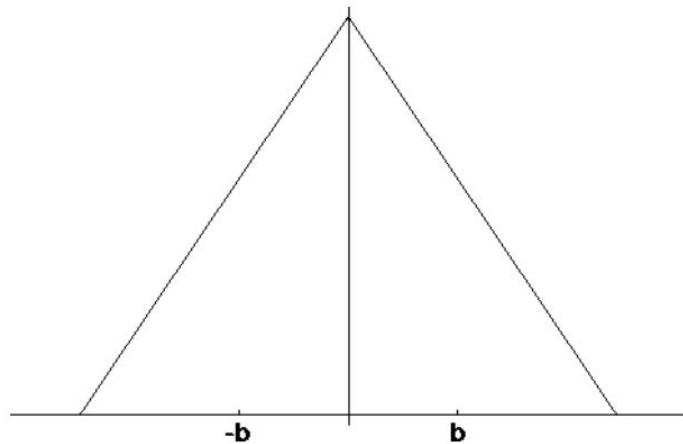
где  $d_t^n = s_t + \eta_t^n s_t$ ,  $s_t = \sqrt{(\Delta x_t)^2 + (\Delta y_t)^2}$ ,  $\delta_t^n$  и  $\eta_t^n$  – нормальный шум с нулевым средним



# ВИДЫ ШУМОВ



$$\varepsilon_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$$



$$\varepsilon_{\sigma^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| > \sqrt{6\sigma^2} \\ \frac{\sqrt{6\sigma^2} - |x|}{6\sigma^2} & \text{if } |x| \leq \sqrt{6\sigma^2} \end{cases}$$



# МОДЕЛИРОВАНИЕ ШУМОВ

1. Algorithm **prob\_normal\_distribution**( $a, b$ ):

2. return  $\frac{1}{\sqrt{2\pi} b^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \right\}$

1. Algorithm **prob\_triangular\_distribution**( $a, b$ ):

2. return  $\max \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{6} b} - \frac{|a|}{6 b^2} \right\}$

## СЭМПЛИРОВАНИЕ ИЗ МОДЕЛИ ШУМОВ

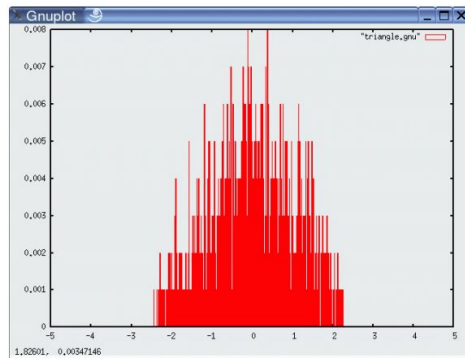
1. Algorithm **sample\_normal\_distribution**( $b$ ):

2. return  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \text{rand}(-b, b)$

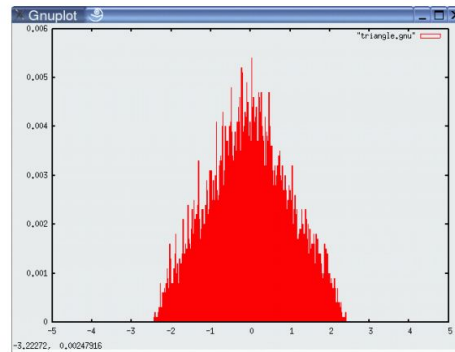
1. Algorithm **sample\_triangular\_distribution**( $b$ ):

2. return  $\frac{\sqrt{6}}{2} [\text{rand}(-b, b) + \text{rand}(-b, b)]$

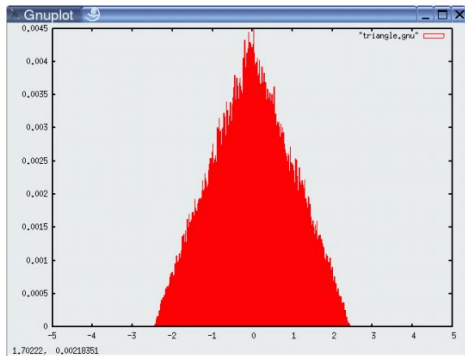
# СЭМПЛИРОВАНИЕ ИЗ МОДЕЛИ ШУМОВ



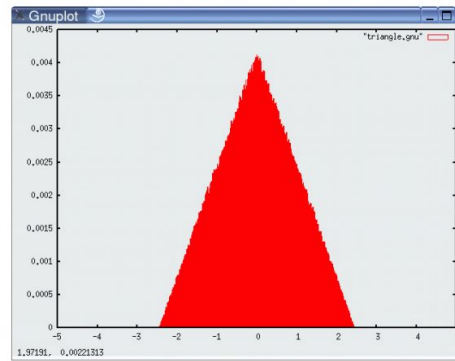
$10^3$  samples



$10^4$  samples



$10^5$  samples



$10^6$  samples

# РАСЧЕТ АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЗЫ

- hypotheses
- odometry
1. Algorithm **motion\_model\_odometry** ( $x, x'$   $\bar{x}, \bar{x}'$ )
  2.  $\delta_{trans} = \sqrt{(\bar{x}' - \bar{x})^2 + (\bar{y}' - \bar{y})^2}$
  3.  $\delta_{rot1} = \text{atan2}(\bar{y}' - \bar{y}, \bar{x}' - \bar{x}) - \bar{\theta}$
  4.  $\delta_{rot2} = \bar{\theta}' - \bar{\theta} - \delta_{rot1}$
  5.  $\hat{\delta}_{trans} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$
  6.  $\hat{\delta}_{rot1} = \text{atan2}(y' - y, x' - x) - \theta$
  7.  $\hat{\delta}_{rot2} = \theta' - \theta - \hat{\delta}_{rot1}$
  8.  $p_1 = \text{prob}(\delta_{rot1} - \hat{\delta}_{rot1}, \alpha_1 | \delta_{rot1} | + \alpha_2 \delta_{trans})$
  9.  $p_2 = \text{prob}(\delta_{trans} - \hat{\delta}_{trans}, \alpha_3 \delta_{trans} + \alpha_4 (| \delta_{rot1} | + | \delta_{rot2} |))$
  10.  $p_3 = \text{prob}(\delta_{rot2} - \hat{\delta}_{rot2}, \alpha_1 | \delta_{rot2} | + \alpha_2 \delta_{trans})$
  11. return  $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$
- odometry params (**u**)
- values of interest (**x, x'**)

# СЭМПЛИРОВАНИЕ ИЗ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

1. Algorithm **sample\_motion\_model**( $u, x$ ):

$$u = \langle \delta_{rot1}, \delta_{rot2}, \delta_{trans} \rangle, x = \langle x, y, \theta \rangle$$

1.  $\hat{\delta}_{rot1} = \delta_{rot1} + \text{sample}(\alpha_1 |\delta_{rot1}| + \alpha_2 \delta_{trans})$

2.  $\hat{\delta}_{trans} = \delta_{trans} + \text{sample}(\alpha_3 \delta_{trans} + \alpha_4 (|\delta_{rot1}| + |\delta_{rot2}|))$

3.  $\hat{\delta}_{rot2} = \delta_{rot2} + \text{sample}(\alpha_1 |\delta_{rot2}| + \alpha_2 \delta_{trans})$

4.  $x' = x + \hat{\delta}_{trans} \cos(\theta + \hat{\delta}_{rot1})$

5.  $y' = y + \hat{\delta}_{trans} \sin(\theta + \hat{\delta}_{rot1})$

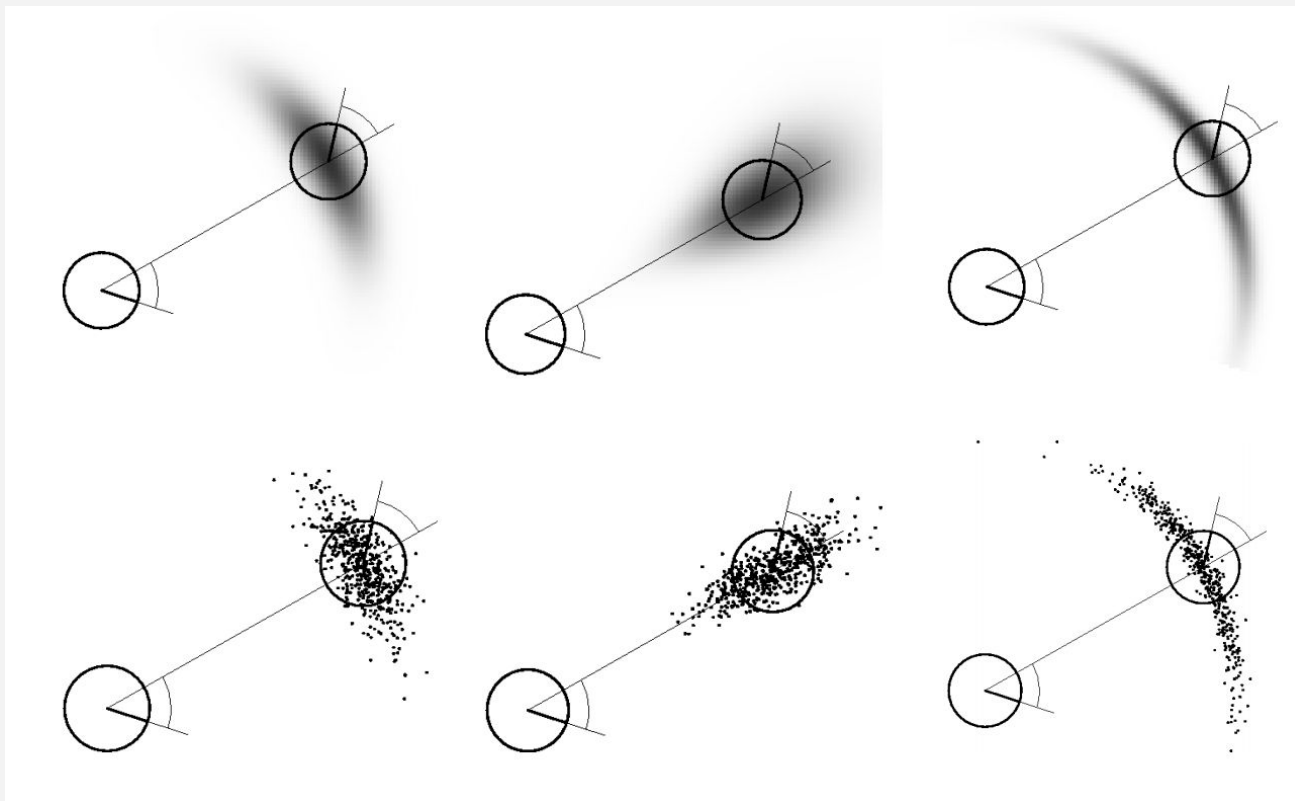
6.  $\theta' = \theta + \hat{\delta}_{rot1} + \hat{\delta}_{rot2}$

7. Return  $\langle x', y', \theta' \rangle$

**sample\_normal\_distribution**

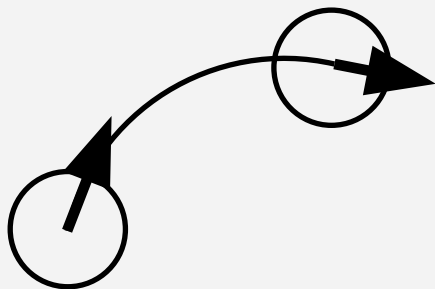


# ПРИМЕР ОДОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ



# МОДЕЛЬ НА ОСНОВЕ СКОРОСТИ

- ❑ Такая модель подразумевает, что мы управляем параметрами движения робота — линейной и угловой скоростью
- ❑ Робот при этом движется по дуге окружности
- ❑ Сигналы управления (передаваемые скорости) подвержены шуму

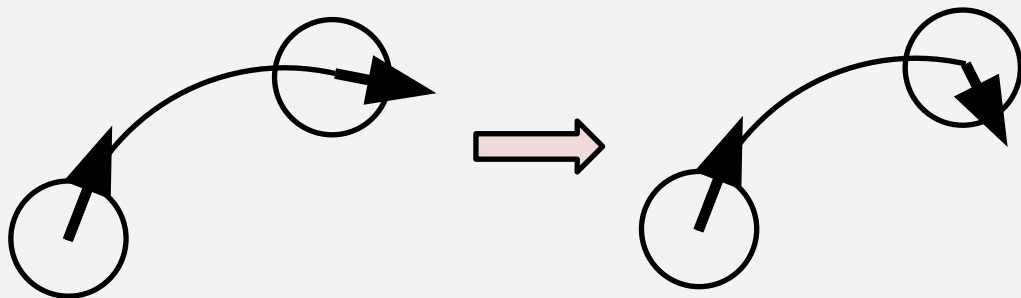


$$\hat{v} = v + \varepsilon_{\alpha_1|v|+\alpha_2|\omega|}$$

$$\hat{\omega} = \omega + \varepsilon_{\alpha_3|v|+\alpha_4|\omega|}$$

# МОДЕЛЬ НА ОСНОВЕ СКОРОСТИ

- Чтобы допустить финальный поворот, вводится третий параметр движения



$$\hat{v} = v + \varepsilon_{\alpha_1|v| + \alpha_2|\omega|}$$

$$\hat{\omega} = \omega + \varepsilon_{\alpha_3|v| + \alpha_4|\omega|}$$

$$\hat{\gamma} = \varepsilon_{\alpha_5|v| + \alpha_6|\omega|}$$



## МОДЕЛЬ НА ОСНОВЕ СКОРОСТИ

$$x' = x - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin \theta + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta + \hat{\omega} \Delta t)$$

$$y' = y + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos \theta - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta + \hat{\omega} \Delta t)$$

$$\theta' = \theta + \hat{\omega} \Delta t + \hat{\gamma} \Delta t$$

# РАСЧЕТ АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЗЫ

1:     **Algorithm motion\_model\_velocity**( $x_t, u_t, x_{t-1}$ ):  $p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$

2:     
$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta}{(y - y') \cos \theta - (x - x') \sin \theta}$$

3:     
$$x^* = \frac{x + x'}{2} + \mu(y - y')$$

4:     
$$y^* = \frac{y + y'}{2} + \mu(x' - x)$$

5:     
$$r^* = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$$

6:     
$$\Delta\theta = \text{atan2}(y' - y^*, x' - x^*) - \text{atan2}(y - y^*, x - x^*)$$

7:     
$$\hat{v} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} r^*$$

8:     
$$\hat{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

9:     
$$\hat{\gamma} = \frac{\theta' - \theta}{\Delta t} - \hat{\omega}$$

10:     **return** **prob**( $v - \hat{v}, \alpha_1 v^2 + \alpha_2 \omega^2$ )  $\cdot$  **prob**( $\omega - \hat{\omega}, \alpha_3 v^2 + \alpha_4 \omega^2$ )  
           $\cdot$  **prob**( $\hat{\gamma}, \alpha_5 v^2 + \alpha_6 \omega^2$ )

# СЭМПЛИРОВАНИЕ ИЗ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

1:      **Algorithm** `sample_motion_model_velocity`( $u_t, x_{t-1}$ ):

2:             $\hat{v} = v + \text{sample}(\alpha_1 v^2 + \alpha_2 \omega^2)$

3:             $\hat{\omega} = \omega + \text{sample}(\alpha_3 v^2 + \alpha_4 \omega^2)$

4:             $\hat{\gamma} = \text{sample}(\alpha_5 v^2 + \alpha_6 \omega^2)$

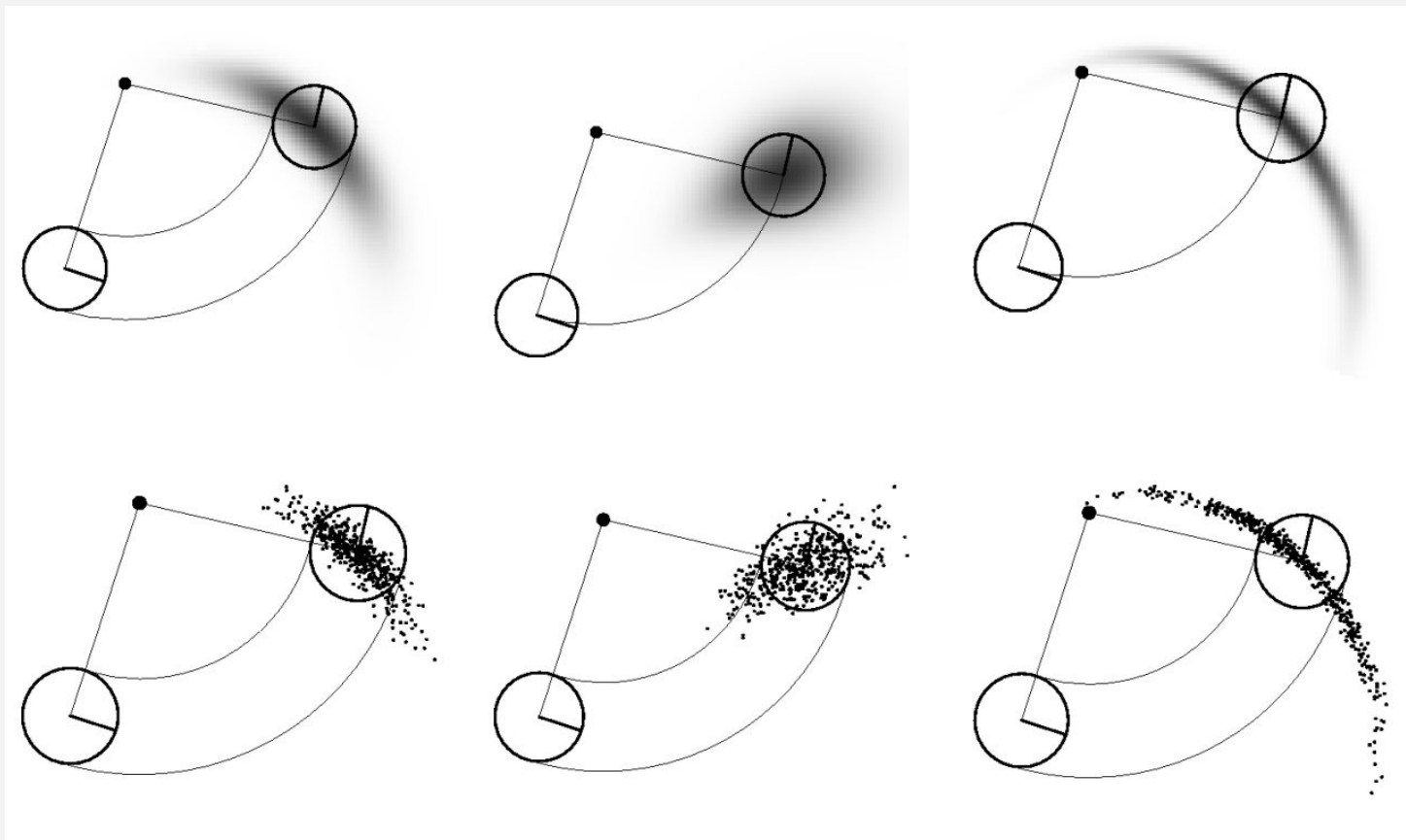
5:             $x' = x - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin \theta + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta + \hat{\omega} \Delta t)$

6:             $y' = y + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos \theta - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta + \hat{\omega} \Delta t)$

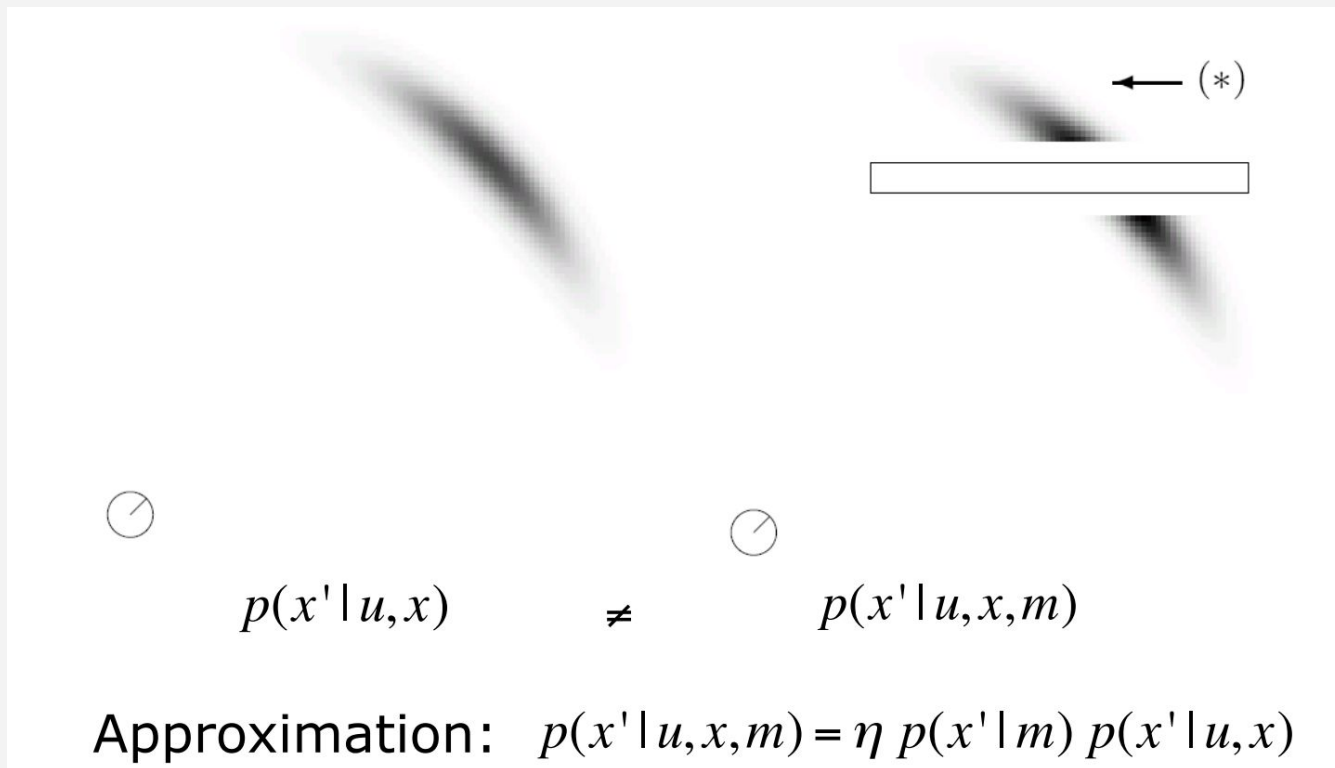
7:             $\theta' = \theta + \hat{\omega} \Delta t + \hat{\gamma} \Delta t$

8:            *return*  $x_t = (x', y', \theta')^T$

# ПРИМЕР МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ПО СКОРОСТИ



# МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ УЧИТЫВАЮЩИЕ ОКРУЖЕНИЕ



# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. [Дифференциальная кинематика](#)



2. [Probabilistic Robotics](#). Глава 5.



3. [Mobility: wheels and whegs](#)



# ИНФОРМАЦИЯ О ПРЕЗЕНТАЦИИ

Эта презентация была подготовлена Олегом Шипитько в рамках курса “Моделирование колесных роботов” кафедры когнитивных технологий Московского физико-технического института (МФТИ). Автор выражает благодарность, авторам, чьи материалы были использованы в презентации. В случае, если вы обнаружили в презентации свои материалы, свяжитесь со мной, для включения в список авторов заимствованных материалов.

This presentation was prepared by Oleg Shipitko as part of the “Mobile Robotics” course at the Department of Cognitive Technologies, Moscow Institute of Physics and Technology. The author is grateful to the authors whose materials were used in the presentation. If you find your materials in a presentation, contact me to be included in the list of contributing authors.