Algebraische Gruppen

Niclas Rist

Algebra Seminar SS24

§ 1 Kategorien, Funktoren & natürliche Transformationen

Definition 1.1 Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und einer Klasse von *Morphismen* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für je zwei Objekte $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Morphismen

$$(A \xrightarrow{f} B) := (f : A \longrightarrow B) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

werden auch *Pfeile* genannt. Sie unterliegen den folgenden Axiomen:

1. Morphismen können *verknüpft* werden, für Morphismen $f : A \to B,\ g : B \to C$ erhalten wir $g \circ f : A \to C$, und die Komposition ist assoziativ, d.h. für $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2. Für jedes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es einen *Identitätsmorphismus* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, sodass für alle $f : A \to X$ und $g : Y \to A$, mit $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $B \xrightarrow{g} A$ gibt, genannt die *Inverse* von f, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gilt.

Bemerkung 1.2 Bemerke, dass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ Klassen und keine Mengen sind. Dadurch werden Mengentheoretische Paradoxa umgangen (z.B. die Menge aller Mengen), diese sind für uns aber nicht weiter von Belang. Man kann noch anmerken, dass viele Kategorien jedoch *lokal klein* sind, d.h. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist tatsächlich eine Menge für alle $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Beispiel 1.3 Einige Beispiele von Kategorien sind die Folgenden.

Kategorie	**Objekte**	**Morphismen**	**Isomorphismen**
Set	Mengen	Abbildungen	Bijektive Abb.
Grp	Gruppen	Gruppenhom.	Gruppeniso.
Top	Topologische Räume	stetige Abbildungen	Homöomorphismen
$\mathbf{Vec}_k$	Vektorräume über k	k-lineare Abbildungen	k-Isomorphismen
k-**Alg**	Algebren über k	k-Alg. Hom.	k-Isomorphismen

Bemerkung 1.4 Falls $f : A \to B$ ein Isomorphismus ist und g_1, g_2 zwei Inverse von f, dann gilt

$$g_2 = g_2 \circ \mathrm{id}_B = g_2 \circ (f \circ g_1) = (g_2 \circ f) \circ g_1 = \mathrm{id}_A \circ g_1 = g_1.$$

Inverse Morphismen sind also eindeutig, sofern sie existieren.

Erinnerung 1.5 Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

1. Eine *R-Algebra* ist ein (nicht unbedingt kommutativer) Ring A mit Einselement, der auch ein R-Modul ist, sodass die Multiplikation in A bilinear ist:

$$\lambda x \cdot y = x \cdot \lambda y = \lambda \cdot (xy)$$

   für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda \in R$.

2. Das *Zentrum* einer R-Algebra A ist die Unteralgebra

$$Z(A) := \{a \in A \mid ax = xa \text{ für alle } x \in A\}.$$

3. Der sogenannte *Strukturhomomorphismus*

$$\varphi : R \longrightarrow A, \qquad \lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$$

   ist ein Ringhomomorphismus von R in das Zentrum $Z(A)$ von A.

4. Ein Morphismus zwischen k-Algebren A und B ist ein Ringhomomorphismus

$$\xi : A \longrightarrow B, \qquad \text{mit} \qquad \xi \circ \varphi_A = \varphi_B.$$

Definition 1.6 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (op von engl. 'opposite') ist die Kategorie mit umgekehrten Pfeilen. Ausgedrückt mit den Klassen der Objekte und Morphismen,

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Beispiel 1.7 Man kann sich überlegen, wie die duale Kategorie der k-Algebren aussieht. Dies führt auf die Kategorie der k-Co-Algebren, welche wir mit noch mehr Struktur als Hopf-Algebren (welche gerade gleichzeitig Co-Algebren und Algebren, sg. Bi-Algebren sind, zusätzlich ausgestattet mit einer Antipode) im Zusammenhang mit Koordinatenringen affiner algebraischer Gruppen wiederentdecken werden.

Definition 1.8 Ein *(kovarianter) Funktor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist eine Zuweisung von Objekten, als auch von Pfeilen zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Sie weißt jedem $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $\mathcal{F}(A) \in \mathcal{D}$ und jedem Pfeil $(f : A \to B) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ zwischen Objekten $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Pfeil $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ in $\mathcal{D}$ zu, sodass die folgenden Axiome erfüllt sind

1. $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, C)$.

2. $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Ein *kontravarianter Funktor* $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}$. Also erfüllt $\mathcal{T}$ die obigen Eigenschaften, außer dass nun gilt:

$$\mathcal{T}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{T}(B), \mathcal{T}(A)) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}(f \circ g) = \mathcal{T}(g) \circ \mathcal{T}(f).$$

Beispiel 1.9

1. Der *Vergiss-Funktor* forget : $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, $(G, +) \mapsto G$ 'vergisst' einen Teil der Struktur den die Objekte einer Kategorie besitzen.

2. Der zur Abelisierung gehörende Funktor $(\ \cdot\ )_{\mathrm{ab}} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$, $G \mapsto {}^{G}/_{[G,G]}$, wobei $[G, G]$ die kommutator Untergruppe erzeugt von $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ bezeichnet. Auf Morphismen ist dieser gegeben durch

$$(f : G \to H) \mapsto (G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}},\ [g] \mapsto [f(g)]).$$

3. Der kontravariante *Dualraum-Funktor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_k}(\ \cdot\ , k) : \mathbf{Vec}_k \to \mathbf{Vec}_k, \qquad V \mapsto V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k).$$

   Auf Morphismen wirkt dieser durch

$$(f : V \to W) \mapsto (f^* : W^* \to V^*,\ \varphi \mapsto \varphi \circ f).$$

Wir verlassen die Funktoren mit folgendem Hilfsresultat.

Lemma 1.10 Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein *volltreuer*[1] Funktor. Dann gilt:

$$\mathcal{F}(A) \cong_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad A \cong_{\mathcal{C}} B.$$

Beweis. Es gelte $\mathcal{F}(A) \cong_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B)$, dann gibt es Morphismen

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\ \gamma\ } \mathcal{F}(Y) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\ \delta\ } \mathcal{F}(X)$$

sodass $\gamma \circ \delta = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$ und $\delta \circ \gamma = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(Y)}$. Da $\mathcal{F}$ voll ist, gibt es

$$X \xrightarrow{\ \alpha\ } Y \qquad \text{und} \qquad Y \xrightarrow{\ \beta\ } X$$

mit $\gamma = \mathcal{F}(\alpha)$ und $\delta = \mathcal{F}(\beta)$. Dann sind $\alpha \circ \beta$ und id_X zwei Morphismen mit

$$\mathcal{F}(\alpha \circ \beta) = \mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$$

und da $\mathcal{F}$ treu ist, folgt $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_X$. Analog gilt $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_Y$. □

Definition 1.11 Eine *natürliche Transformation* $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{T}$ ist eine Abbildung zwischen zwei Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{T} : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$. Sie weißt jedem Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus

$$(\eta_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{T}(A)) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{T}(A))$$

[1] heißt bijektiv auf den Morphismen

in $\mathcal{D}$ zu, sodass das folgende Diagramm für alle $(f : A \to B) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ kommutiert.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \\ B \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{T}(A) \arrow[d, "\mathcal{T}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & \mathcal{T}(B) \end{tikzcd}$$

Der Morphismus η_A wird *Komponente* von η in $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ genannt. Eine natürliche Transformation heißt *natürlicher Isomorphismus*, wenn alle Komponenten η_A Isomorphismen sind.

Bemerkung 1.12 Natürliche Transformationen werden auch als *Morphismen von Funktoren* bezeichnet. Dies rührt daher, dass man sogenannte *Funktorkategorien* $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ definieren kann. Als Objekte haben diese Funktoren zwischen zwei Kategorien und Morphismen sind gerade die natürlichen Transformationen zwischen Funktoren.

Beispiel 1.13 Betrachte den Bidualraum-Funktor $(\,\cdot\,)^{**} : \mathbf{Vec}_k \to \mathbf{Vec}_k$, gegeben durch

$$V \to V^{**}, \qquad (f : V \to W) \mapsto \begin{cases} f^{**} : V^{**} \to W^{**}, \\ (\delta : V^* \to k) \mapsto (\varphi \mapsto \delta(\varphi \circ f)) \end{cases}$$

Weiter sei $\mathrm{id} : \mathbf{Vec}_k \to \mathbf{Vec}_k$ der Identitätsfunktor. Dann ist $\eta : \mathrm{id} \to (\,\cdot\,)^{**}$ gegeben durch

$$\eta_V : V \longrightarrow V^{**}, \qquad v \mapsto \begin{cases} ev_v : V^* \to k \\ \varphi \mapsto \varphi(v) \end{cases}$$

eine natürliche Transformation zwischen den beiden Funktoren.

Bemerkung 1.14 Beschränkt man sich in obigem Beispiel auf <u>endlichdimensionale</u> Vektorräume, so sind V und sein Bidualraum V^{**} natürlich isomorph mit η. Nun ist auch V isomorph zu seinem Dualraum V^* aber nicht natürlich isomorph! Der Isomorphismus $V \to V^*$ hängt von der Wahl einer Basis in V ab, aber es gibt keine 'natürliche' Wahl.

Definition 1.15 Eine *Äquivalenz von Kategorien* $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besteht aus (kovarianten) Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{T} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ so, dass $\mathcal{F} \circ \mathcal{T}$ und $\mathcal{T} \circ \mathcal{F}$ natürlich isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, bzw. $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ sind. Sind die Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{T}$ kontravariant, so spricht man von einer *Antivalenz* oder *Dualität*.

Definition 1.16 Sei $\mathcal{C}$ eine (lokal kleine) Kategorie, dann ist für jedes Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$h^A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

ein kovarianter Funktor, gegeben auf Objekten durch

$$X \;\mapsto\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$$

und auf Morphismen durch

$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ g \mapsto g \circ f \end{pmatrix}$$

Ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ heißt *darstellbar*, wenn es ein Objekt A in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt, sodass $\mathcal{F}$ isomorph zu h^A ist. Wir sagen dann, A stellt $\mathcal{F}$ dar.

Definition 1.17 Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor und $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Jede natürliche Transformation $\eta : h^A \to \mathcal{F}$ definiert ein Element in $\mathcal{F}(A)$ wie folgt

$$a_\eta := \eta_A(\mathrm{id}_A) \in \mathcal{F}(A).$$

Umgekehrt definiert jedes Element $a \in \mathcal{F}(A)$ eine natürliche Transformation $\eta^a : h^A \to \mathcal{F}$ durch

$$\eta^a_X : h^A(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X), \qquad g \mapsto \mathcal{F}(g)(a).$$

Bemerkung 1.18 In obiger Definition ist $g \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, X)$. Da $\mathcal{F}$ ein kovarianter Funktor ist, ist $\mathcal{F}(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(X))$ und damit $\mathcal{F}(g)(a)$ tatsächlich in $\mathcal{F}(X)$.

Lemma 1.19 (Yoneda) Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie $\mathbf{Set}$ und $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt mit Hom-Funktor $h^A : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Dann ist die Abbildung

$$\theta : \mathrm{Nat}(h^A, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(A), \qquad \eta \mapsto a_\eta = \eta_A(\mathrm{id}_A)$$

eine Bijektion; ihre Inverse ist gegeben durch die Abbildung

$$\xi : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathrm{Nat}(h^A, \mathcal{F}), \qquad a \mapsto \eta^a$$

Ohne Beweis. □

Korollar 1.20 Sei $\mathcal{C}$ eine (lokal kleine) Kategorie. Für jedes Paar $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gilt

$$\mathrm{Nat}(h^A, h^B) \cong \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(B, A).$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall des Yoneda-Lemma mit $\mathcal{F} = h^B$. □

Bemerkung 1.21 Insbesondere erhalten wir aus Korollar 1.20, dass der Funktor

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\vee, \qquad A \mapsto h^A,$$

von der Kategorie $\mathcal{C}$ in die Funktorkategorie $\mathcal{C}^\vee = \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$ kontravariant und volltreu ist. Durch Einschränkung erhalten wir eine Dualität zwischen der Kategorie $\mathcal{C}$ und der (vollen[1] Unter-) Kategorie der darstellbaren Funktoren $\mathcal{C}^\vee_{\mathrm{rep}}$. Weiter gilt mit Lemma 1.10 für $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$h^A \cong_{\mathcal{C}^\vee} h^B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cong_\mathcal{C} B.$$

[1] eine Unterkategorie $\mathcal{U}$ (ist das was man sich auch darunter vorstellt) heißt voll, wenn für alle Objektpaare in $\mathcal{C}$ gilt $\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(A, B) = \mathrm{Hom}_\mathcal{K}(A, B)$.

§ 2 Affine Varietäten und Funktoren

Durchweg ist k ein Körper und 'Ring' heißt kommutativer Ring mit 1.

Definition 2.1

1. Eine *affine Varietät* ist eine Teilmenge des k^n definiert durch die Nullstellen einer Menge von Polynomen in $k[X_1, \dots, X_n]$. Für $S \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ist also

$$V(S) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in S\}$$

die affine Varietät $V(S)$.

2. Umgekehrt ist für eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ die Menge

$$I(V) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

das sogenannte *Verschwindungsideal* zu V.

Bemerke, dass jede affine Varietät von endlich vielen Polynomen definiert wird. Dies folgt aus dem Hilbertschen Basissatz, der besagt, dass jedes Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n]$ endlich erzeugt ist.

Satz 2.2 (Hilbertscher Nullstellensatz) Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist $I(V(I)) = \sqrt{I}$, also $= I$ gdw. I ein Radikalideal ist.

Bemerkung 2.3 Der Hilbertsche Nullstellensatz ist ein erster Ansatz, geometrische Objekte (affine Varietäten) mit algebraischen Objekten (Radikalidealen) zu verknüpfen. Weiter kann man jeder affinen Varietät V ihren Koordinatenring $k[V] = k[X_1, \dots, X_n]/_{I(V)}$ zuweisen um diese Verknüpfung weiter auszubauen. Man kann dann zeigen:

Proposition 2.4 Die Kategorie der affinen Varietäten über algebraisch abgeschlossem Körper k ist dual (oder antivalent) zur Kategorie der endlich erzeugten, reduzierten k-Algebren.

Ohne Beweis. □

Wir wollen nun versuchen, uns von der Einschränkung dass k algebraisch abgeschlossen ist zu lösen. Jedoch haben wir dann den Hilbertschen Nullstellensatz nicht mehr zur Verfügung.

Beispiel 2.5 Sei $I = \left\langle X^2 + 1 \right\rangle \trianglelefteq k[X]$ Ideal.

1. Für $k = \mathbb{R}$ ist $V(I) = \emptyset$, damit $I(V(I)) = I(\emptyset) = k[X] \neq I$.

2. Für $k = \mathbb{C}$ ist hingegen $V(I) = \{-i, i\}$ und damit

$$I(V(I)) = \langle X - i \rangle \cap \langle X + i \rangle = \left\langle X^2 + 1 \right\rangle = I.$$

Es fehlen unserer Geometrie also Punkte, die aus algebraischer Sicht vorhanden sein sollten. Wir wollen im folgenden daher die geometrischen Objekte über beliebigen Körper- und sogar k-Algebraerweiterungen betrachten. Dies wollen wir tun, indem wir die algebraischen Informationen abstrakter in Funktoren verschlüsseln. Der Vorteil liegt dann darin, dass wir nicht an *eine* Körpererweiterung gebunden sind, sondern alle (in gewisser Weise) *simultan* betrachten können.

Definition 2.6 1. Ein k-*Funktor* $\mathcal{F}$ ist ein Funktor von der Kategorie der (endlich erzeugten) k-Algebren in die Kategorie **Set**, also ein Funktor der Form $\mathcal{F} : k\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$.

2. Zu einer k-Algebra $A \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ betrachte den k-Funktor

$$h^A : k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Set}, \qquad R \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, R).$$

Ein k-Funktor $\mathcal{F}$ heißt *affin*, wenn es eine endlich erzeugte k-Algebra A gibt, mit $h^A \cong \mathcal{F}$. Die Algebra A *repräsentiert* also den k-Funktor $\mathcal{F}$ und ist als solche eindeutig bis auf Isomorphismus (cf. Bemerkung 1.21); A wird auch *Koordinatenring* oder *Koordinatenalgebra* von $\mathcal{F}$ genannt. Wir bezeichnen A auch mit $A = k[\mathcal{F}]$.

3. Ein Morphismus von affinen k-Funktoren ist eine natürliche Transformation $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Diese korrespondiert nach Korollar 1.20 zu einem eindeutigen k-Algebrahomomorphismus

$$\varphi : k[\mathcal{G}] \to k[\mathcal{F}].$$

Definition 2.7 Sei k ein Körper, $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal und $A = {}^{k[X_1, \ldots, X_n]}/_I$ Faktorring. Für jede k-Algebra $R \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ definieren wir die Menge

$$V_R(I) := \{x \in R^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\},$$

genannt die Menge der R-*wertigen Punkte* von A.

Bemerkung 2.8 Sei $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal, definiere den k-Funktor

$$V_{(\,.\,)}(I) : k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Set}, \qquad R \mapsto V_R(I).$$

Bezeichne weiter mit ev_x den Auswertungshomomorphismus, gegeben durch

$$ev_x : A = {}^{k[X_1, \ldots, X_n]}/_I \longrightarrow R, \qquad f \mapsto f(x),$$

dann erhalten wir für jedes $R \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ eine Bijektion

$$V_R(I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, R), \qquad x \mapsto ev_x.$$

Wir nennen den Funktor $V_{(\,.\,)}(I)$ auch den *Punktfunktor* zu I. Nach Definition 1.16 wird dieser durch die k-Algebra $A = {}^{k[X_1, \ldots, X_n]}/_I$ dargestellt, da nach obigem gilt: $V_{(\,.\,)}(I) \cong h^A$.

Beweis. 1. *Injektivität:* Sei $X_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ die i-te Koordinatenfunktion und x_i ihr Bild im Faktorring $A = {}^{k[X_1, \ldots, X_n]}/_I$. Für $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V_R(I)$ ist

$$ev_v(x_i) = x_i(v) = X_i(v) = v_i,$$

also

$$v = (ev_v(x_i), \ldots, ev_v(x_n)).$$

Damit ist v eindeutig durch ev_v festgelegt, die Abbildung also injektiv.

2. *Surjektivität:* Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, R)$ und

$$x := (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \in R^n.$$

Betrachte $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X_1, \dots, X_n], R)$, gegeben durch die Komposition

$$k[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\text{proj.}} k[X_1, \dots, X_n]/I = A \xrightarrow{\varphi} R.$$

Dann gilt $\varphi(x_i) = \widetilde{\varphi}(X_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\widetilde{\varphi}(f) = 0$ für jedes $f \in I$, also folgt

$$f(x) = f(\widetilde{\varphi}(X_1), \dots, \widetilde{\varphi}(X_n)) = \widetilde{\varphi}(f) = 0,$$

da φ k-Algebrahomomorphismus. Also ist $x \in V_R(I)$ und $ev_x = \varphi$. □

Beispiel 2.9 Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ den k-Funktor

$$\mathbb{A}^n : k\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}, \qquad R \mapsto R^n$$

dieser ist wegen $R^n \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X_1, \dots, X_n], R)$ ein affiner k-Funktor und wird repräsentiert vom Polynomring $k[X_1, \dots, X_n]$ in n Variablen.

Bemerkung 2.10 Aus dem Yoneda Lemma, bzw. Bemerkung 1.21 folgt für $\mathcal{C} = k\text{-}\mathbf{Alg}$, dass die Zuweisung $A \mapsto h^A$ ein kontravarianter, volltreuer Funktor zwischen den k-Algebren und der Kategorie der k-Funktoren ist. Durch Einschränkung erhalten wir, dass die *endlich erzeugten* k-Algebren dual zu den affinen k-Funktoren sind. Insbesondere verlieren wir keine Informationen beim Übergang der endlich erzeugten k-Algebra A zum affinen k-Funktor h^A. Gleichzeitig haben wir unser Problem von früher gelöst, dass die k-Punkte $V_k(I)$ für beliebigen Körper k nicht genug Informationen enthalten.

Bemerkung 2.11 Tatsächlich haben wir sogar noch mehr gewonnen. Wir haben nicht nur die Kategorie der affinen k-Funktoren zur Verfügung sondern sogar die ganze Kategorie der k-Funktoren. Dies führt uns in die Richtung der Theorie der (affinen) Schemata.

§ 3 Algebraische Gruppen

Definition 3.1

1. Ein *k-Gruppenfunktor* $\mathcal{G}$ ist ein Funktor von der Kategorie der k-Algebren in die Kategorie **Grp** der Gruppen. Jedem k-Gruppenfunktor liegt ein k-Funktor $\mathcal{G}^{\mathbf{Set}}$ zugrunde durch die Komposition

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathbf{Grp} \xrightarrow{\text{forget}} \mathbf{Set}.$$

2. Eine *affine algebraische Gruppe* ist ein k-Gruppenfunktor $\mathcal{G}$ sodass der zugrundeliegende k-Funktor $\mathcal{G}^{\mathbf{Set}} = \text{forget} \circ \mathcal{G}$ affin ist.

3. Wenn $\mathcal{G}$ eine affine algebraische Gruppe ist, dann wird $\mathcal{G}^{\mathbf{Set}}$ von einer eindeutigen endlich erzeugten k-Algebra A repräsentiert. Diese wird *Koordinatenring*, oder *Koordinatenalgebra* von $\mathcal{G}$ genannt und wird mit $k[\mathcal{G}]$ bezeichnet.

´

4. Morphismen zwischen affinen algebraischen Gruppen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ sind (wie bei k-Funktoren) natürliche Transformationen zwischen den k-Gruppenfunktoren.

Bemerkung 3.2 Die Eindeutigkeit des Koordinatenrings folgt wie bei k-Funktoren aus Bemerkung 1.21 bzw. im wesentlichen aus Lemma 1.10, es arbeitet aber wieder einmal das Yoneda-Lemma im Hintergrund!

Beispiel 3.3

1. Der Funktor definiert durch
$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto (R, +)$$
wird mit $\mathbb{G}_a$ bezeichnet. Für jedes $R \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ können wir $\mathbb{G}_a$ mit $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], R)$ identifizieren. Für den Koordinatenring $k[\mathbb{G}_a]$ gilt dann
$$k[\mathbb{G}_a] \cong k[X].$$
Die affine algebraische Gruppe $\mathbb{G}_a$ wird *additive (algebraische) Gruppe über* k genannt.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte SL_n als den Funktor
$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto \mathrm{SL}_n(R).$$
Damit wird SL_n zu einer affinen algebraischen Gruppe mit
$$k[\mathrm{SL}_n] \cong {}^{k[X_{11}, \ldots, X_{nn}]}\!/\!_{(\det(X_{ij}) - 1)}.$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte GL_n als den Funktor
$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto \mathrm{GL}_n(R).$$
Damit wird auch GL_n zu einer algebraischen Gruppe mithilfe des Tricks von Rabinowitsch
$$k[\mathrm{GL}_n] \cong {}^{k[X_1, \ldots, X_n, t]}\!/\!_{(t \cdot \det(X_{ij}) - 1)}.$$

4. Der Funktor GL_1 wird auch mit $\mathbb{G}_m$ bezeichnet und entspricht dem Funktor
$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto (R^\times, \cdot\,).$$
Für den Koordinatenring gilt dann
$$k[\mathbb{G}_m] \cong {}^{k[X, t]}\!/\!_{(t \cdot X - 1)} \cong k[X, X^{-1}].$$
Die algebraische Gruppe $\mathbb{G}_m$ wird *multiplikative (algebraische) Gruppe über* k genannt.

5. Der Funktor SL_1 widerum entspricht dem Funktor
$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto \{*\}$$

und wird deshalb die *triviale algebraische Gruppe* $*$ *über* k genannt. Es gilt weiter

$$k[*] \cong {}^{k[X]}/_{(X-1)} \cong k.$$

6. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere den mit μ_n bezeichneten Funktor

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto \{r \in R \mid r^n = 1\}.$$

   μ_n wird die *algebraische Gruppe der* n*-ten Einheitswurzeln über* k genannt und es gilt

$$k[\mu_n] \cong {}^{k[X]}/_{(X^n-1)}.$$

Definition 3.4 Sei $\mathcal{G}$ ein k-Gruppenfunktor. Für jedes $R \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ ist $\mathcal{G}(R)$ also eine Gruppe. Die Multiplikation, die Inverse und das neutrale Element in $\mathcal{G}(R)$ definieren natürliche Transformationen

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}, \\ \iota : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}, \\ e : * &\longrightarrow \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Nach Korollar 1.20 induzieren diese (eindeutige) Co-Morphismen auf der k-Algebra $k[\mathcal{G}]$

$$\begin{aligned} \Delta : k[\mathcal{G}] &\longrightarrow k[\mathcal{G}] \otimes_k k[\mathcal{G}], \\ S : k[\mathcal{G}] &\longrightarrow k[\mathcal{G}], \\ \varepsilon : k[\mathcal{G}] &\longrightarrow k[1] = k. \end{aligned}$$

Diese heißen *Comultiplikation*, *Coinverse* und *Coeinheit*.

Beispiel 3.5 1. Betrachte die additive algebraische Gruppe $\mathcal{G} = \mathbb{G}_a : R \mapsto (R, +)$ mit darstellender Algebra $k[\mathbb{G}_a] \cong k[X]$ dem Polynomring in einer Variablen. Dann ist für jede k-Algebra $R \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ folgende Abbildung eine Bijektion

$$\beta : \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], R) \longrightarrow (R, +), \qquad \varphi \mapsto \varphi(X).$$

Für $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$ gilt

$$k[\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a] \cong k[X] \otimes_k k[X] \cong k[X \otimes 1, 1 \otimes X]$$

und analog ist folgende Abbildung eine Bijektion

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X \otimes 1, 1 \otimes X], R) \longrightarrow (R \times R, +), \qquad \varphi \mapsto (\varphi(X \otimes 1), \varphi(1 \otimes X)).$$

Die natürliche Transformation $\mu : \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ induziert dann für jede k-Algebra R einen Morphismus

$$\mu_R : \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X \otimes 1, 1 \otimes X], R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], R)$$

und wir erhalten das kommutative Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X\otimes 1, 1\otimes X], R) \arrow[r, "\mu_R"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], R) \arrow[d, "\beta"] \\
(R\times R, +) \arrow[r, "\text{Addition}"] & (R, +)
\end{tikzcd}
$$

Insgesamt haben wir

$$\mu_R(\varphi)(X) = \varphi(X\otimes 1) + \varphi(1\otimes X) = \varphi(X\otimes 1 + 1\otimes X)$$

für jede k-Algebra R. Nach Lemma 1.19 ist die Comultiplikation gegeben durch

$$\Delta = \mu_{k[\mathcal{G}]\otimes k[\mathcal{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathcal{G}]\otimes k[\mathcal{G}]}) = \mu_{k[X]\otimes k[X]}(\mathrm{id}_{k[X]\otimes k[X]}),$$

also

$$\Delta(X) = X\otimes 1 + 1\otimes X.$$

Dadurch ist Δ als k-Algebrahomomorphismus bereits festgelegt. Analog erhält man

$$S(X) = -X \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(X) = 0.$$

2. Für die multiplikative Guppe $\mathbb{G}_m : R \to (R^\times, \ \cdot \ )$, mit darstellender k-Algebra gegeben durch $k[\mathbb{G}_m] = k[X, X^{-1}]$, ist die Multiplikation gegeben durch

$$\mu_R(\varphi)(X) = \varphi(X\otimes 1)\varphi(1\otimes X) = \varphi((X\otimes 1)(1\otimes X)) = \varphi(X\otimes X),$$

für jede k-Algebra R. Die Comultiplikation ist dann gegeben durch

$$\Delta(X) = X\otimes X.$$

Die Coinverse und Coeinheit sind gegeben durch

$$S(X) = X^{-1} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(X) = 1.$$

3. Für die affine algebraische Gruppe GL_n mit darstellender Algebra gegeben durch

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[X_{ij}, d]/(d\cdot\det(X_{ij}) - 1)$$

erhalten wir folgende Operationen

$$
\begin{aligned}
\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}\otimes X_{kj} \quad &\text{bzw.} \quad \Delta(d) = d\otimes d,\\
S(X_{ij}) = d\cdot a_{ij} \quad &\text{bzw.} \quad S(d) = \det(X_{ij}),\\
\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij} \quad &\text{bzw.} \quad \varepsilon(d) = 1.
\end{aligned}
$$

dabei bezeichnen die a_{ij} die Einträge der Adjunkten[1].

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Adjunkte`

Lemma 3.6 Sei $\mathcal{G}$ ein k-Funktor. Dann ist $\mathcal{G} = \mathcal{H}^{\mathbf{Set}}$ für einen k-Gruppenfunktor $\mathcal{H}$ genau dann, wenn es natürliche Transformationen

$$\mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$
$$\iota : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$
$$e : * \longrightarrow \mathcal{G}$$

gibt, sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \arrow[r, "\mathrm{id}\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{id}"'] & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{G} \times \mathcal{G} \arrow[r, "\mu"] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \times * \arrow[r, "\mathrm{id}\times e"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{G} \arrow[r, equal] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
* \times \mathcal{G} \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{G} \arrow[r, equal] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "(\mathrm{id},\iota)"] \arrow[d] & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \arrow[d, "\mu"] \\
* \arrow[r, "e"] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "(\iota,\mathrm{id})"] \arrow[d] & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \arrow[d, "\mu"] \\
* \arrow[r, "e"] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Beweis. Kommt unser Funktor bereits von einem Gruppenfunktor, so ist die Aussage klar. Haben wir andererseits einen k-Funktor zusammen mit natürlichen Transformationen μ, ι und e sodass die Diagramme kommutieren, so definieren diese natürlichen Transformationen eine Gruppenstruktur auf den Mengen $\mathcal{G}(R)$ für jede k-Algebra R. $\square$

Bemerkung 3.7 Dies ist tatsächlich Relikt einer allgemeineren Konstruktion, nämlich Gruppenobjekte in allgemeinen Kategorien. Wir haben zum Beispiel schon die Gruppenobjekte in der Kategorie **Diff** der glatten Mannigfaltigkeiten, nämlich Liegruppen kennengelernt. In der Kategorie **Top** der topologischen Räume sind Gruppenobjekte die topologischen Gruppen. Insbesondere sind nach obigem Lemma algebraische Gruppen genau die Gruppenobjekte in der Kategorie der k-Algebren.

Proposition 3.8 Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra mit Multiplikation $m : A \otimes A \to A$. Dann ist A die Koordinatenalgebra einer affinen algebraischen k-Gruppe genau dann, wenn es

k-Algebrahomomorphismen

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A,$$
$$S : A \longrightarrow A,$$
$$\varepsilon : A \longrightarrow k$$

gibt, sodass die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \\
A \arrow[r, "\cong"] & A \otimes k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \\
A \arrow[r, "\cong"] & k \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & k \arrow[d, "\eta"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m\circ(\mathrm{id}\otimes S)"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & k \arrow[d, "\eta"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m\circ(S\otimes\mathrm{id})"] & A
\end{tikzcd}$$

Beweis. Da nach Definition 2.6 die dualen Morphismen auf den Koordinatenringen eindeutig sind (Yoneda im Hintergrund!) folgt diese Proposition bereits aus Lemma 3.6 durch dualisieren. Wir müssen uns lediglich davon überzeugen, dass die zur Abbildung

$$(\mathrm{id}, \iota) : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \times \mathcal{G}$$

duale Abbildung durch $m \circ (\mathrm{id} \otimes S)$ gegeben ist. Betrachte dazu die Komposition

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\mathrm{diag}} G \times \mathcal{G} \xrightarrow{\mathrm{id}\times\iota} \mathcal{G} \times \mathcal{G},$$

mit $\mathrm{diag}_R : \mathcal{G}(R) \to \mathcal{G}(R) \times \mathcal{G}(R),\ g \mapsto (g, g)$. Es ist also zu zeigen, dass die duale Abbildung von $\mathrm{diag} : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ genau die Abbildung $m : A \otimes A \to A$ ist. Dies folgt aus Lemma 1.19, da

$$\mathrm{diag}_A(\mathrm{id}_A) : A \otimes A \longrightarrow A,\ a \otimes b \mapsto \mathrm{id}_A(a)\mathrm{id}_A(b) = ab = m(a \otimes b).$$ □

Bemerkung 3.9 Es ist bemerkenswert wie viel das Yoneda-Lemma im Hintergrund arbeitet und wie viel Theorie wir durch geschickte Definitionen herauskristallisieren können.

§ 4 Hopf Algebren und Algebraische Gruppen

Definition 4.1 1. Eine k-Algebra A mit k-Algebrahomomorphismen Δ, ε, S, sodass die Diagramme aus Proposition 3.8 kommutieren heißt *(kommutative) Hopf Algebra*. Drücken wir die Diagramme als Formeln aus, erhalten wir die Axiome

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \circ \mathrm{id}) \circ \Delta,$$
$$m \circ (\mathrm{id} \circ \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id} = m \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta,$$
$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta.$$

2. Seien A, B zwei Hopf-Algebren. Ein Hopf-Algebrahomomorphismus $f : A \to B$ ist ein k-Algebrahomomorphismus der mit den Morphismen Δ, ε und S verträglich ist. Also

$$\Delta_B \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_A,$$
$$S_B \circ f = f \circ S_A,$$
$$\epsilon_B \circ f = \epsilon_A.$$

Korollar 4.2 Die Kategorie der affinen algebraischen k-Gruppen ist dual (oder antivalent) zur Kategorie der kommutativen endlich erzeugten Hopf-Algebren.

Beweis. Dies ist eine direkte Kosequenz von Proposition 3.8. □

Bemerkung 4.3 Es ist also gleichwertig, einen Funktor $\mathcal{G} : k\textbf{-Alg} \to \textbf{Grp}$ anzugeben, sodass die Komposition forget $\circ\, \mathcal{G}$ darstellbar ist, oder ein Paar (A, Δ) anzugeben, bestehend aus einer k-Algebra A und einem Morphismus $\Delta : A \to A \otimes A$ der $h^A(R)$ für jede k-Algebra R zu einer Gruppe macht.

§ 5 Literatur

Es gibt auf der Homepage von J. S. Milne `https://www.jmilne.org/math/` einige gute Skripte, aber auch Bücher frei Verfügbar. Unter anderem auch über Algebraische Gruppen.

1. J. S. Milne ‘Algebraic groups’ v. 2017: `www.jmilne.org/math/Books/iAG2017.pdf`

2. J. S. Milne ‘Algebraic groups’ v. 2022: `www.jmilne.org/math/Books/iAG2022.pdf`

3. W. C. Waterhouse ‘Introduction to affine group schemes’