Algebraische Gruppen

Niclas Rist

Sommersemester 2024

§ 1 Kategorien, Funktoren & natürliche Transformationen

Definition 1.1 Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und einer Klasse von *Morphismen* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für je zwei Objekte $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Morphismen

$$(A \xrightarrow{f} B) := (f : A \longrightarrow B) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

werden auch *Pfeile* genannt. Sie unterliegen den folgenden Axiomen:

1. Morphismen können *verknüpft* werden, für Morphismen $f : A \to B,\ g : B \to C$ erhalten wir $g \circ f : A \to C$, und die Komposition ist assoziativ, d.h. für $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2. Für jedes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es einen *Identitätsmorphismus* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, sodass für alle $f : A \to X$ und $g : Y \to A$, mit $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $B \xrightarrow{g} A$ gibt, genannt die *Inverse* von f, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gilt.

Bemerkung 1.2 Bemerke, dass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ Klassen und keine Mengen sind. Dadurch werden Mengentheoretische Paradoxa umgangen, diese sind für uns aber nicht weiter von Belang. Man kann noch anmerken, dass viele Kategorien aber *lokal klein* sind, d.h. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist tatsächlich eine Menge für alle $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Beispiel 1.3 Einige Beispiele von Kategorien sind die Folgenden.

Kategorie	**Objekte**	**Morphismen**	**Isomorphismen**
Set	Mengen	Abbildungen	Bijektive Abb.
Grp	Gruppen	Gruppenhom.	Gruppeniso.
Top	Topologische Räume	stetige Abbildungen	Homöomorphismen
$\mathbf{Vec}_k$	Vektorräume über k	k-lineare Abbildungen	k-Isomorphismen
k-**Alg**	Algebren über k	k-Alg. Hom.	k-Isomorphismen

Bemerkung 1.4 Falls $f : A \to B$ ein Isomorphismus ist und g_1, g_2 zwei Inverse von f, dann gilt

$$g_2 = g_2 \circ \mathrm{id}_B = g_2 \circ (f \circ g_1) = (g_2 \circ f) \circ g_1 = \mathrm{id}_A \circ g_1 = g_1.$$

Inverse Morphismen sind also eindeutig, sofern sie existieren.

Erinnerung 1.5 Sei R ein kommutativer Ring.

1. Eine *R-Algebra* ist ein (nicht unbedingt kommutativer) Ring A mit Einselement, der auch ein R-Modul ist, sodass die Multiplikation in A bilinear ist:

$$\lambda x \cdot y = x \cdot \lambda y = \lambda \cdot (xy)$$

für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda \in R$.

2. Das *Zentrum* einer R-Algebra A ist die Unteralgebra

$$Z(A) := \{a \in A \mid ax = xa \text{ für alle } x \in A\}.$$

3. Der sogenannte *Strukturhomomorphismus*

$$\varphi : R \longrightarrow A, \qquad \lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$$

ist ein Ringhomomorphismus von R in das Zentrum $Z(A)$ von A.

Definition 1.6 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (op von engl. 'opposite') ist die Kategorie mit umgekehrten Pfeilen. Ausgedrückt mit den Klassen der Objekte und Morphismen,

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Definition 1.7 Ein *(kovarianter) Funktor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist eine Zuweisung von Objekten, als auch von Pfeilen zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Sie weißt jedem $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $\mathcal{F}(A) \in \mathcal{D}$ und jedem Pfeil $(f : A \to B) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ zwischen Objekten $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Pfeil $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ in $\mathcal{D}$ zu, sodass die folgenden Axiome erfüllt sind

1. $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, C)$.
2. $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Ein *kontravarianter Funktor* $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}$. Also erfüllt $\mathcal{T}$ die obigen Eigenschaften, außer dass nun gilt:

$$\mathcal{T}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{T}(B), \mathcal{T}(A)) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}(g \circ f) = \mathcal{T}(f) \circ \mathcal{T}(g).$$

Beispiel 1.8

1. Der *Vergiss-Funktor* forget : **Grp** $\to$ **Set**, $(G, +) \mapsto G$ 'vergisst' einen Teil der Struktur den die Objekte einer Kategorie besitzen.
2. Der zur Abelisierung gehörende Funktor $(\ \cdot\ )_{\mathrm{ab}}$: **Grp** $\to$ **Ab**, $G \mapsto G/[G, G]$, wobei $[G, G]$ die kommutator Untergruppe erzeugt von $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ bezeichnet. Auf Morphismen

ist dieser gegeben durch

$$(f : G \to H) \mapsto (G_{\text{ab}} \to H_{\text{ab}},\ [g] \mapsto [f(g)]).$$

3. Der kontravariante *Dualraum-Funktor* $(\,\cdot\,)^* : \mathbf{Vec}_k \to \mathbf{Vec}_k,\ V \mapsto V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$. Auf Morphismen wirkt dieser durch

$$(f : V \to W) \mapsto (f^* : W^* \to V^*,\ \varphi \mapsto \varphi \circ f).$$

Definition 1.9 Eine *natürliche Transformation* $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{T}$ ist eine Abbildung zwischen zwei Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{T} : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$. Sie weißt jedem Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus

$$(\eta_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{T}(A)) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{T}(A))$$

in $\mathcal{D}$ zu, sodass das folgende Diagramm für alle $(f : A \to B) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ kommutiert.

$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow f \\ B \end{array} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{T}(A) \arrow[d, "\mathcal{T}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & \mathcal{T}(B) \end{tikzcd}$$

Der Morphismus η_A wird *Komponente* von η in $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ genannt. Eine natürliche Transformation heißt *natürlicher Isomorphismus*, wenn alle Komponenten η_A Isomorphismen sind.

Bemerkung 1.10 Natürliche Transformationen werden auch *Morphismen von Funktoren* genannt, es macht also auch Sinn eine Kategorie von Funktoren zu definieren.

Beispiel 1.11 Betrachte den Bidualraum-Funktor $(\,\cdot\,)^{**} : \mathbf{Vec}_k \to \mathbf{Vec}_k$, gegeben durch

$$V \to V^{**}, \qquad (f : V \to W) \mapsto \begin{cases} f^{**} : V^{**} \to W^{**}, \\ (\delta : V^* \to k) \mapsto (\varphi \mapsto \delta(\varphi \circ f)) \end{cases}$$

Weiter sei $\mathrm{id} : \mathbf{Vec}_k \to \mathbf{Vec}_k$ der Identitätsfunktor. Dann ist $\eta : \mathrm{id} \to (\,\cdot\,)^{**}$ gegeben durch

$$\eta_V : V \longrightarrow V^{**}, \qquad v \mapsto \begin{cases} ev_v : V^* \to k \\ \varphi \mapsto \varphi(v) \end{cases}$$

eine natürliche Transformation zwischen den beiden Funktoren.

Bemerkung 1.12 Beschränkt man sich in obigem Beispiel auf <u>endlichdimensionale</u> Vektorräume, so sind V und sein Bidualraum V^{**} natürlich isomorph mit η. Nun ist auch V isomorph zu seinem Dualraum V^* aber nicht natürlich isomorph! Der Isomorphismus $V \to V^*$ hängt von der Wahl einer Basis in V ab, aber es gibt keine 'natürliche' Wahl.

Definition 1.13 Eine *Äquivalenz von Kategorien* $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besteht aus (kovarianten) Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{T} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ so, dass $\mathcal{F} \circ \mathcal{T}$ und $\mathcal{T} \circ \mathcal{F}$ natürlich isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, bzw. $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ sind. Sind die Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{T}$ kontravariant, so spricht man von einer *Antiäquivalenz* oder *Dualität*.

Definition 1.14 Sei $\mathcal{C}$ eine (lokal kleine) Kategorie, dann ist für jedes Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$h^A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

ein kovarianter Funktor, gegeben auf Objekten durch

$$X \;\mapsto\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$$

und auf Morphismen durch

$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \quad \mapsto \quad \left(\begin{matrix} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ g \mapsto g \circ f \end{matrix}\right)$$

Ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ heißt *darstellbar*, wenn es ein Objekt A in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt, sodass $\mathcal{F}$ isomorph zu h^A ist.

Definition 1.15 Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor und $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Jede natürliche Transformation $\eta : h^A \to \mathcal{F}$ definiert ein Element in $\mathcal{F}(A)$ wie folgt

$$a_\eta := \eta_A(\mathrm{id}_A) \in \mathcal{F}(A).$$

Umgekehrt definiert jedes Element $a \in \mathcal{F}(A)$ eine natürliche Transformation $\eta_a : h^A \to \mathcal{F}$ durch

$$\eta_X^a : h^A(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X), \qquad g \mapsto \mathcal{F}(g)(a).$$

Bemerkung 1.16 In obiger Definition ist $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$. Da $\mathcal{F}$ ein kovarianter Funktor ist, ist $\mathcal{F}(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(X))$ und damit $\mathcal{F}(g)(a)$ tatsächlich in $\mathcal{F}(X)$. Die Abbildung η_X^a ist also wohldefiniert.

Lemma 1.17 (Yoneda) Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie **Set** und $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt mit Hom-Funktor $h^A : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Dann ist die Abbildung

$$\theta : \mathrm{Nat}(h^A, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(A), \qquad \eta \mapsto a_\eta = \eta_A(\mathrm{id}_A)$$

eine Bijektion; ihre Inverse ist gegeben durch die Abbildung

$$\xi : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathrm{Nat}(h^A, \mathcal{F}), \qquad a \mapsto \eta_a$$

Beweis. Zu zeigen ist

1. θ und ξ sind zueinander invers,
2. η_a ist natürliche Transformation. □

Korollar 1.18 Sei $\mathcal{C}$ eine (lokal kleine) Kategorie. Für jedes Paar $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Nat}(h^A, h^B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A).$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall des Yoneda-Lemma mit $\mathcal{F} = h^B$. □

Bemerkung 1.19 Korollar 1.18 kann auch so ausgedrückt werden, dass wir einen volltreuen, kontravarianten Funktor von der Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie $\mathcal{C}^\vee$ der Funktoren zwischen $\mathcal{C}$ und **Set** erhalten. Dieser ist gegeben durch

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\vee, \qquad A \rightsquigarrow h^A.$$

Betrachtet man die Unterkategorie der darstellbaren Funktoren $\mathcal{C}^\vee_{\text{rep}}$, so sind also $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^\vee_{\text{rep}}$ zueinander duale Kategorien.

§ 2 Affine Varietäten und Funktoren

Durchweg ist k ein kommutativer Körper und 'Ring' heißt kommutativer Ring mit 1.

Definition 2.1

1. Eine *affine Varietät* ist eine Teilmenge des k^n definiert durch die Nullstellen einer Menge von Polynomen in $k[X_1, \ldots, X_n]$. Für $S \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ist also

   $$V(S) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in S\}$$

   die affine Varietät $V(S)$.

2. Umgekehrt ist für eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ die Menge

   $$I(V) := \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

   das sogenannte *Verschwindungsideal.*

Bemerke, dass jede affine Varietät von endlich vielen Polynomen definiert wird. Dies folgt aus dem Hilbertschen Basissatz, der besagt, dass jedes Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ endlich erzeugt ist.

Satz 2.2 (Hilbertscher Nullstellensatz) Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist $I(V(I)) = \sqrt{I}$, also $= I$ gdw. I ein Radikalideal ist.

Bemerkung 2.3 Der Hilbertsche Nullstellensatz ist ein erster Ansatz, geometrische Objekte (Varietäten) mit algebraischen Objekten (Radikalidealen) zu verknüpfen. Weiter kann man jeder affinen Varietät ihren Koordinatenring zuweisen um diese Verknüpfung weiter auszubauen, man kann dann zeigen:

Proposition 2.4 Die Kategorie der affinen Varietäten über k ist antiäquivalent oder dual zur Kategorie der endlich erzeugten, reduzierten k-Algebren.

Ohne Beweis. $\square$

Wir wollen nun versuchen, uns von der Einschränkung dass k algebraisch abgeschlossen ist zu lösen. Jedoch haben wir dann den Hilbertschen Nullstellensatz nicht mehr zur Verfügung.

Beispiel 2.5 Sei $I = \langle X^2 + 1 \rangle \trianglelefteq k[X]$ Ideal.

1. Für $k = \mathbb{R}$ ist $V(I) = \emptyset$, damit $I(V(I)) = I(\emptyset) = k[X] \neq I$.

2. Für $k = \mathbb{C}$ ist aber $V(I) = \{-i, i\}$ und damit

$$I(V(I)) = \langle X - i \rangle \cap \langle X + i \rangle = \left\langle X^2 + 1 \right\rangle = I.$$

Die Geometrie wird also nicht mehr genügend Informationen enthalten in dem Sinne, dass Punkte die wir sehen sollten fehlen. Wir wollen im Folgenden die geometrischen Objekte über allen Körpererweiterungen und sogar k-Algebraerweiterungen *gleichzeitig* betrachten. Dafür bietet sich das Konzept von Funktoren passend an.

Definition 2.6 Sei k ein (beliebiger) Körper, $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal und $A = k[X_1, \ldots, X_n]/_I$. Für jede k-Algebra $R \in k$-**Alg** definieren wir die Menge

$$V_R(I) := \{x \in R^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\},$$

genannt die *R-wertigen Punkte* von A.

Bemerkung 2.7 Bezeichne mit ev_x den Auswertungshomomorphismus, gegeben durch

$$ev_x : A \longrightarrow R, \qquad f \mapsto f(x),$$

dann erhalten wir eine Bijektion

$$V_R(I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, R), \qquad x \mapsto ev_x.$$

Wir können die Menge $V_R(I)$ also mit den k-Algebra Homomorphismen $A \to R$ identifizieren.

Definition 2.8

1. Ein *k-Funktor* $\mathcal{F}$ ist ein Funktor von der Kategorie der k-Algebren in die Kategorie **Set**, also ein Funktor der Form $\mathcal{F} : k\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$.
2. Zu einer k-Algebra $A \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ betrachte den Hom-Funktor

$$h^A : k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Set}, \qquad R \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, R).$$

Ein k-Funktor $\mathcal{F}$ heißt *affin*, wenn es eine endlich erzeugte k-Algebra A gibt, mit $h^A \cong \mathcal{F}$. Die Algebra A *repräsentiert* also den k-Funktor $\mathcal{F}$; A wird auch *Koordinatenring* oder *Koordinatenalgebra* von $\mathcal{F}$ genannt. Wir schreiben $A = k[\mathcal{F}]$.

§ 3 Algebraische Gruppen

Definition 3.1

1. Ein *k-Gruppenfunktor* $\mathcal{G}$ ist ein Funktor von der Kategorie der k-Algebren in die Kategorie **Grp** der Gruppen. Jedem k-Gruppenfunktor liegt ein k-Funktor $\mathcal{G}^{\mathbf{Set}}$ zugrunde durch die Komposition

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathbf{Grp} \xrightarrow{\text{forget}} \mathbf{Set}.$$

2. Eine *affine algebraische Gruppe* ist ein k-Gruppenfunktor $\mathcal{G}$ sodass der zugrundeliegende k-Funktor $\mathcal{G}^{\mathbf{Set}}$ affin ist.

3. Wenn $\mathcal{G}$ eine affine algebraische Gruppe ist, dann wird $\mathcal{G}^{\mathbf{Set}}$ von einer eindeutigen endlich erzeugten k-Algebra A repräsentiert. Diese wird *Koordinatenring*, oder *Koordinatenalgebra* von $\mathcal{G}$ genannt und bezeichnet mit $k[\mathcal{G}]$.

Beispiel 3.2 1. Der Funktor definiert durch

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto (R, +)$$

wird mit $\mathbb{G}_a$ bezeichnet. Für jedes $R \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ können wir $\mathbb{G}_a$ mit $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[t], R)$ identifizieren. Für den Koordinatenring $k[\mathbb{G}_a]$ gilt dann

$$k[\mathbb{G}_a] \cong k[X].$$

Die affine algebraische Gruppe $\mathbb{G}_a$ wird *additive (algebraische) Gruppe über k* genannt.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte SL_n als den Funktor

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto \mathrm{SL}_n(R).$$

Damit wird SL_n zu einer algebraischen Gruppe mit

$$k[\mathrm{SL}_n] \cong k[X_1, \ldots, X_n] / (\det(X_{ij}) - 1).$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte GL_n als den Funktor

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto \mathrm{GL}_n(R).$$

Damit wird auch GL_n zu einer algebraischen Gruppe mit

$$k[\mathrm{GL}_n] \cong k[X_1, \ldots, X_n, t] / (t \cdot \det(X_{ij}) - 1).$$

4. Der Funktor GL_1 wird auch mit $\mathbb{G}_m$ bezeichnet und entspricht dem Funktor

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto (R^{\times}, \cdot\,).$$

Für den Koordinatenring gilt dann

$$k[\mathbb{G}_m] \cong k[X, t] / (t \cdot X - 1) \cong k[X, X^{-1}].$$

Die algebraische Gruppe $\mathbb{G}_m$ wird *multiplikative (algebraische) Gruppe über k* genannt.

5. Der Funktor SL_1 widerum entspricht dem Funktor

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto \{*\}$$

und wird deshalb die *triviale algebraische Gruppe über k* genannt. Es gilt weiter

$$k[1] \cong k[X] / (X - 1) \cong k.$$

6. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere den mit μ_n bezeichneten Funktor

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \qquad R \mapsto \{r \in R \mid r^n = 1\}.$$

μ_n wird die *algebraische Gruppe der n-ten Einheitswurzeln über k* genannt und es gilt

$$k[\mu_n] \cong {}^{k[X]}/_{(X^n - 1)}.$$

Definition 3.3 Sei $\mathcal{G}$ ein k-Gruppenfunktor. Die Multiplikation, die Inverse und das neutrale Element jedes Objekts in $\mathcal{G}(R)$ definiert natürliche Transformationen

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}, \\ \iota : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}, \\ e : * &\longrightarrow \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Nach Korollar 1.18 induzieren diese Morphismen auf der k-Algebra $k[\mathcal{G}]$

$$\begin{aligned} \Delta : k[\mathcal{G}] &\longrightarrow k[\mathcal{G}] \otimes_k k[\mathcal{G}], \\ S : k[\mathcal{G}] &\longrightarrow k[\mathcal{G}], \\ \epsilon : k[\mathcal{G}] &\longrightarrow k. \end{aligned}$$

Diese heißen *Comultiplikation*, *Coinverse* und *Coeinheit*.

Beispiel 3.4 1. Betrachte die additive algebraische Gruppe $\mathcal{G} = \mathbb{G}_a : R \longrightarrow (R, +)$ mit darstellender Algebra $k[\mathbb{G}_a] \cong k[X]$ dem Polynomring in einer Variablen. Dann ist für jede k-Algebra $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$ folgende Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], R) \longrightarrow (R, +), \qquad \varphi \mapsto \varphi(X).$$

Für $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$ gilt

$$k[\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a] \cong k[X] \otimes_k k[X] \cong k[X_1, X_2]$$

und analog ist folgende Abbildung eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X_1, X_2], R) \longrightarrow (R \times R, +), \qquad \varphi \mapsto (\varphi(X_1), \varphi(X_2)).$$

Die natürliche Transformation $\mu : \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ induziert dann für jede k-Algebra R einen Morphismus

$$\mu_R : \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X_1, X_2], R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], R)$$

und wir erhalten das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X_1, X_2], R) \arrow[r, "\mu_R"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], R) \arrow[d] \\ (R \times R, +) \arrow[r, "\text{Addition}"] & (R, +) \end{tikzcd}$$

Insgesamt haben wir

$$\mu_R(\varphi)(X) = \varphi(X_1) + \varphi(X_2) = \varphi(X \otimes 1 + 1 \otimes X)$$

für jede k-Algebra R. Nach Lemma 1.17 ist die Comultiplikation gegeben durch

$$\Delta = \mu_{k[\mathcal{G}]\otimes k[\mathcal{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathcal{G}]\otimes k[\mathcal{G}]}),$$

also

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X.$$

Dadurch ist Δ als k-Algebrahomomorphismus bereits festgelegt. Analog erhält man

$$S(X) = -X \qquad \text{und} \qquad \epsilon(X) = 0.$$

2. Für die multiplikative Guppe $\mathbb{G}_m : R \to (R^\times, \ \cdot\ )$, mit darstellender k-Algebra gegeben durch $k[\mathbb{G}_m] = k[X, X^{-1}]$, ist die Multiplikation gegeben durch

$$\mu_R(\varphi)(X) = \varphi(X_1)\varphi(X_2) = \varphi((X \otimes 1)(1 \otimes X)) = \varphi(X \otimes X),$$

für jede k-Algebra R. Die Comultiplikation ist also gegeben durch

$$\Delta(X) = X \otimes X.$$

Die Coinverse und Coeinheit sind gegeben durch

$$S(X) = X^{-1} \qquad \text{und} \qquad \epsilon(X) = 1.$$

Lemma 3.5 Sei $\mathcal{G}$ ein k-Funktor. Dann ist $\mathcal{G} = \mathcal{H}^{\mathbf{Set}}$ für einen k-Gruppenfunktor $\mathcal{H}$ genau dann, wenn es natürliche Transformationen

$$\mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$
$$\iota : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$
$$e : \{*\} \longrightarrow \mathcal{G}$$

gibt, sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \times * \arrow[r, "\mathrm{id}\times e"] \arrow[d, "\cong"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, equal, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} * \times G \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\mathrm{id},\iota)"] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ * \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\iota,\mathrm{id})"] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ * \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd}$$

Beweis. □

Proposition 3.6 Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra mit Multiplikation $m : A \otimes A \to A$. Dann ist A die Koordinatenalgebra einer affinen algebraischen k-Gruppe genau dann, wenn es k-Algebrahomomorphismen

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A,$$
$$S : A \longrightarrow A,$$
$$\epsilon : A \longrightarrow k$$

gibt, sodass die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"] \\ A \arrow[r, "\cong"] & A \otimes k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{id}"] \\ A \arrow[r, "\cong"] & k \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & k \arrow[d, "\eta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m\circ(\mathrm{id}\otimes S)"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & k \arrow[d, "\eta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m\circ(S\otimes\mathrm{id})"] & A \end{tikzcd}$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.5 und Korollar 1.18. Wir müssen lediglich die duale Abbildung zu

$$(\mathrm{id}, \iota) : G \to G \times G$$

bestimmen. Betrachte dazu die Komposition

$$G \xrightarrow{\text{diag}} G \times G \xrightarrow{\text{id} \times \iota} G \times G,$$

mit $\text{diag}_R : G(R) \to G(R) \times G(R),\ g \mapsto (g, g)$. Es ist also zu zeigen, dass die duale Abbildung von $\text{diag} : G \to G \times G$ genau die Abbildung $m : A \otimes A \to A$ ist. Dies folgt aus Lemma 1.17, da

$$\text{diag}_A(\text{id}_A) : A \otimes A \longrightarrow A,\ a \otimes b \mapsto \text{id}_A(a)\text{id}_A(b) = ab = m(a \otimes b). \qquad \square$$

§ 4 Hopf Algebren und Algebraische Gruppen

Definition 4.1 1. Eine k-Algebra A mit k-Algebrahomomorphismen Δ, ϵ, S, sodass die Diagramme aus Satz 3.6 kommutieren heißt *(kommutative) Hopf Algebra.* Drücken wir die Diagramme als Formeln aus, erhalten wir die Axiome

$$(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \circ \text{id}) \circ \Delta,$$
$$m \circ (\text{id} \circ \epsilon) \circ \Delta = \text{id} = m \circ (\epsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta,$$
$$m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta.$$

2. Seien A, B zwei Hopf-Algebren. Ein Hopf-Algebrahomomorphismus $f : A \to B$ ist ein k-Algebrahomomorphismus der mit den Morphismen Δ, ϵ und S verträglich ist. Also

$$\Delta_B \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_A,$$
$$S_B \circ f = f \circ S_A,$$
$$\epsilon_B \circ f = \epsilon_A.$$

Korollar 4.2 Die Kategorie der affinen algebraischen k-Gruppen ist anti-äquivalent (dual) zur Kategorie der kommutativen endlich erzeugten Hopf-Algebren.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.6. $\square$

§ 5 Affine algebraische Gruppen sind linear

Definition 5.1 Sei $\mathcal{G}$ eine affine algebraische Gruppe über k, sowie V ein k-Vektorraum. Eine *Darstellung* von $\mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \text{GL}_V,$$

wobei GL_V den k-Gruppenfunktor

$$\text{GL}_V(R) := \text{GL}(R \otimes_k V)$$

bezeichnet. Dabei ist $R \otimes_k V$ ein freier R-Modul und $\text{GL}(R \otimes_k V)$ bezeichnet die Gruppe der Automorphismen dieses R-Moduls.

Definition 5.2 Sei A eine Hopf-Algebra über k. Ein A-*Comodul* ist ein Paar (V, m), wobei V

ein k-Vektorraum und $m: V \to A \otimes_k V$ eine k-lineare Abbildung ist, sodass gilt

$$(\mathrm{id}_A \otimes m) \circ m = (\Delta \otimes \mathrm{id}_V) \circ m,$$
$$(\epsilon \otimes \mathrm{id}_V) \circ m = \mathrm{id}_V.$$

Als Diagramme ausgedrückt heißt dies, dass die folgenden beiden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "m"] \arrow[d, "m"'] & A \otimes V \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"] \\ A \otimes V \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \otimes V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal] & A \otimes V \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{id}"] \\ V \arrow[r, "\cong"] & k \otimes V \end{tikzcd}$$

Proposition 5.3 Sei $\mathcal{G}$ eine affine algebraische k-Gruppe mit Koordinatenring $A = k[\mathcal{G}]$.

1. Sei $\rho : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$ eine Darstellung und sei m die Einschränkung von

$$\rho_A(\mathrm{id}_A) \in \mathrm{GL}_V(A) = \mathrm{GL}(A \otimes_k V)$$

auf V. Dann ist das Paar V, m ein A-Comodul.

2. Umgekehrt, sei (V, m) ein A-Comodul, und sei $\rho : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$ die *natürliche Darstellung* gegeben durch

$$\rho_R(g) := (g \otimes \mathrm{id}_V) \circ m \qquad \text{für alle } g \in \mathcal{G}(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, R).$$

Dann ist ρ eine Darstellung für $\mathcal{G}$.

Ohne Beweis. □

Satz 5.4 Sei $\mathcal{G}$ eine affine algebraische Gruppe über k. Dann gibt es einen endlich-dimensionalen k-Vektorraum V und einen injektiven Morphismus $\rho : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_V$.

Beweis. □

Korollar 5.5 Affine algebraische Gruppen über k sind linear, d.h. sie sind abgeschlossene Untergruppen einer Gruppe GL_n. Insbesondere sind alle affine algebraische Gruppen Matrixgruppen.

Beispiel 5.6