程式人

用十分鐘理解

《微分方程》

陳鍾誠

2019 年 5 月 30 日

微積分

- 就已經很讓人頭痛了！

而工程數學裡的微分方程

- 則會讓人的腦袋爆炸！

但是有些領域

- 就是會有些方程式看不懂

那些看不懂的方程式

通常是微分方程

特別是在物理學領域

- 還有電腦的《深度學習神經網路》領域

像是如何用牛頓定律

- 推導出行星軌道為橢圓

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

→

克卜勒第一定律推導 [編輯]

設定 $u = \frac{1}{r}$ 。這樣，角速度是

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2} = \frac{\ell u^2}{m} 。$$

對時間微分和對角度微分有如下關係：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell u^2}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} 。$$

→

再求解剩餘的常係數齊次線性全微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = 0 。$$

它的解為

$$u = C\ \cos(\theta - \theta_0) ；$$

這些方程

- 在我們中學的時候
  通常都不會教 …

為何不教

- 因為裏面的微分方程太難

  中學的數學沒教過！

但是這件事對科學史很重要

- 因為牛頓透過微積分把重力的影響清楚地展現在天體運行的領域！

牛頓曾經在《流數法》

(Method of Fluxions)

- 這本微積分創始書籍裏列出下列微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y$$

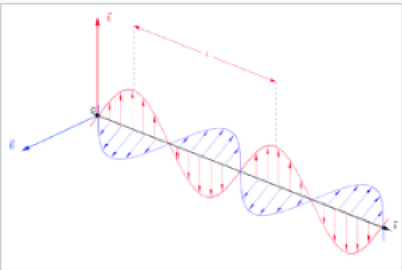
另外在電磁學領域

馬克士威透過方程組
推導出了電磁波動方程式

名稱	微分形式
高斯定律	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$
高斯磁定律	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
法拉第電磁感應定律	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
馬克士威-安培定律	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

描述在自由空間裏的電磁波 [編輯]

主條目：電磁波方程式



電磁波是橫波，電場方向與磁場方向相互垂直，又都垂直於傳播方向。

在自由空間裏，不需要考慮到介電質或磁化物質。假設源電流和源電荷為零，則馬克士威方程組寫為[註 4][7]:209-213

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0、$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0、$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}、$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}。$$

從這方程組，應用一些向量恆等式，經過一番運算，可以得到電場與磁場的波動方程式：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0、$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0。$$

對於這兩個波動方程式，平面行進正弦波是個解答波，其電場和磁場相互垂直，並且分別垂直於行進的方向，因此是個橫波。電場與磁場同相位地以光速 c 傳播：[註 5]

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}。$$

甚至在量子力學領域

- 微分方程也很有影響力

薛定諤的波動方程

- 是一個量子力學裡的偏微分方程式

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \ ;$$

不含時間 t 的駐波

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

含時間 t 的波動

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) \ ;$$

這些都是物理學上的微分方程

少了這些微分方程的物理學

- 總是覺得缺了點甚麼

  或者根本搔不到癢處

不懂微分方程

- 似乎註定無法成為物理學家

還記得前一陣子

- 我看到了楊振寧的故事

楊振寧年輕的時候

- 原本想成為《實驗物理學家》

但無奈的是

- 他的實驗能力不只很差

根本可以說是個災難！

他到了哪裡

- 哪裡就發生實驗意外或爆炸

有一次

- 他的實驗中有台機器故障

  怎麼修都修不好 ...

此時、他一個同學經過

- 看了一下說，這簡單：

  然後踹了一腳，機器就開始動起來了！

不久之後

- 那台機器又故障了！

楊振寧想說

- 我也來踹一下看看 ….

無奈的是

- 同學踹可以，楊振寧踹就不行 ...

  機器還是一動也不動

正在發愁之時

- 他的那位同學又來了

楊振寧趕快求救

於是他的同學

- 又對機器踹了一腳 ...

然後

- 機器又開始回復運轉了...

楊振寧覺得

- 自己實在是沒辦法成為
  - 《實驗物理學家》

於是下定決心

- 改去專研理論

於是後來才會和李政道一起研究

- 發展出《宇稱不守恒》原理
- 而且得到了諾貝爾獎！

其實

- 李政道也是個理論物理學家
- 實驗同樣也不太行 …

所以當他們倆人想要檢驗

- 弱交互作用中的

  《宇稱是否守恆》

- 兩人都知道該做甚麼實驗

  但是卻都不會做！

1927年，尤金·維格納提出了宇稱守恆原理[2]，即系統在經過鏡像變換前後運動規律基本保持不變，只是左右相反，例如順時針旋轉的錶針在經過鏡像變換後則會逆時針旋轉。

這項原理得到物理學家的普遍認同，且經過實驗證實在電磁交互作用及強交互作用中成立。但到了20世紀50年代中期，當時觀察到的一些現象展示著這一原理在弱交互作用中可能並不成立。其中較為有代表性的現象就是Θ-τ問題。Θ^+和τ^+是兩種性質幾乎完全相同的奇介子，它們惟一的不同就是發生衰變後終態的宇稱不相同。[3]如果宇稱守恆的話，那麼Θ^+和τ^+會發生如下的衰變：

$$\Theta^+ \to \pi^+ + \pi^0$$

$$\tau^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

於是李楊兩人

- 想要請《實驗物理學家》幫忙
- 無奈厲害的實驗物理學家都很忙，沒人願意做這個實驗

後來他們兩人想到

- 有一位學姊叫《吳建雄》
- 實驗技術非常高明 ...

吳健雄

吳健雄1958年於哥倫比亞大學

出生	1912年5月31日 中國江蘇省太倉縣瀏河鎮
逝世	1997年2月16日（84歲） 美國紐約州紐約市
母校	國立中央大學 加州大學柏克萊分校
知名於	曼哈頓工程 宇稱不守恆 β衰變
配偶	袁家騮
獎項	科姆斯托克物理學獎（1964年） 博納獎（1975年） 美國國家科學獎章（1975年） 沃爾夫物理學獎（1978年）

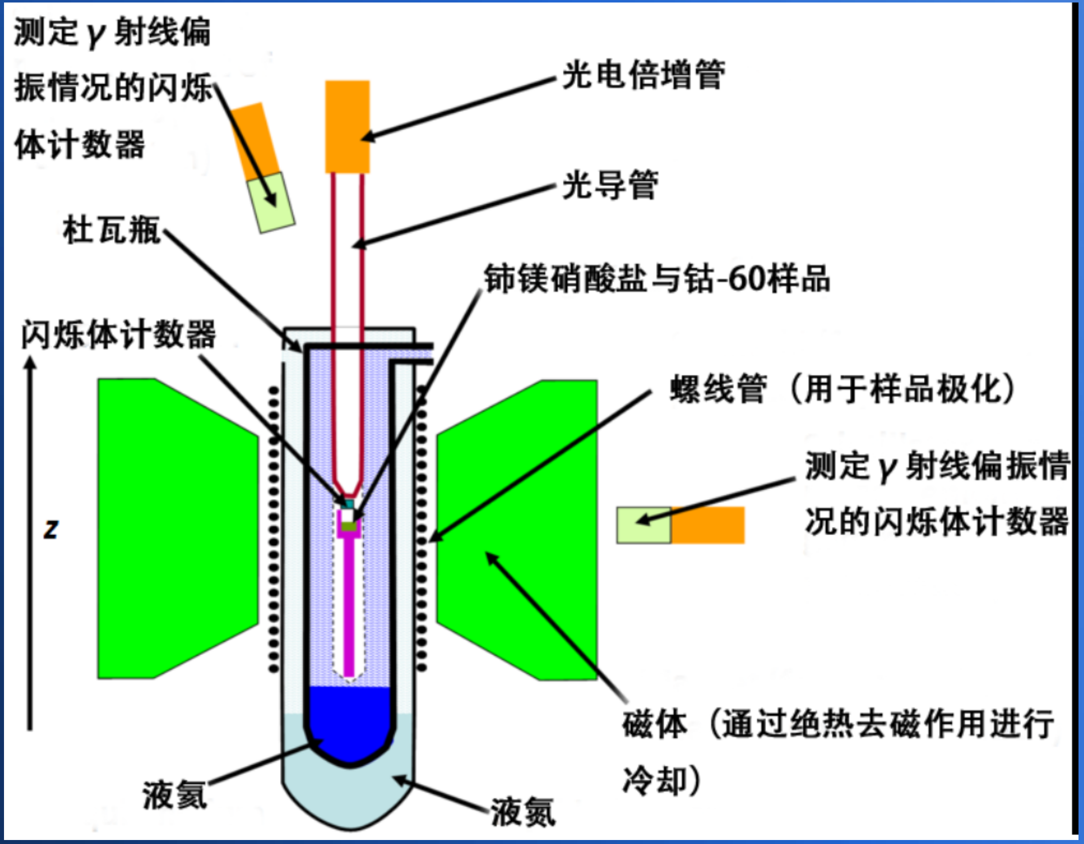
於是李楊兩人

- 跑去拜託學姊

  請她務必幫這個忙

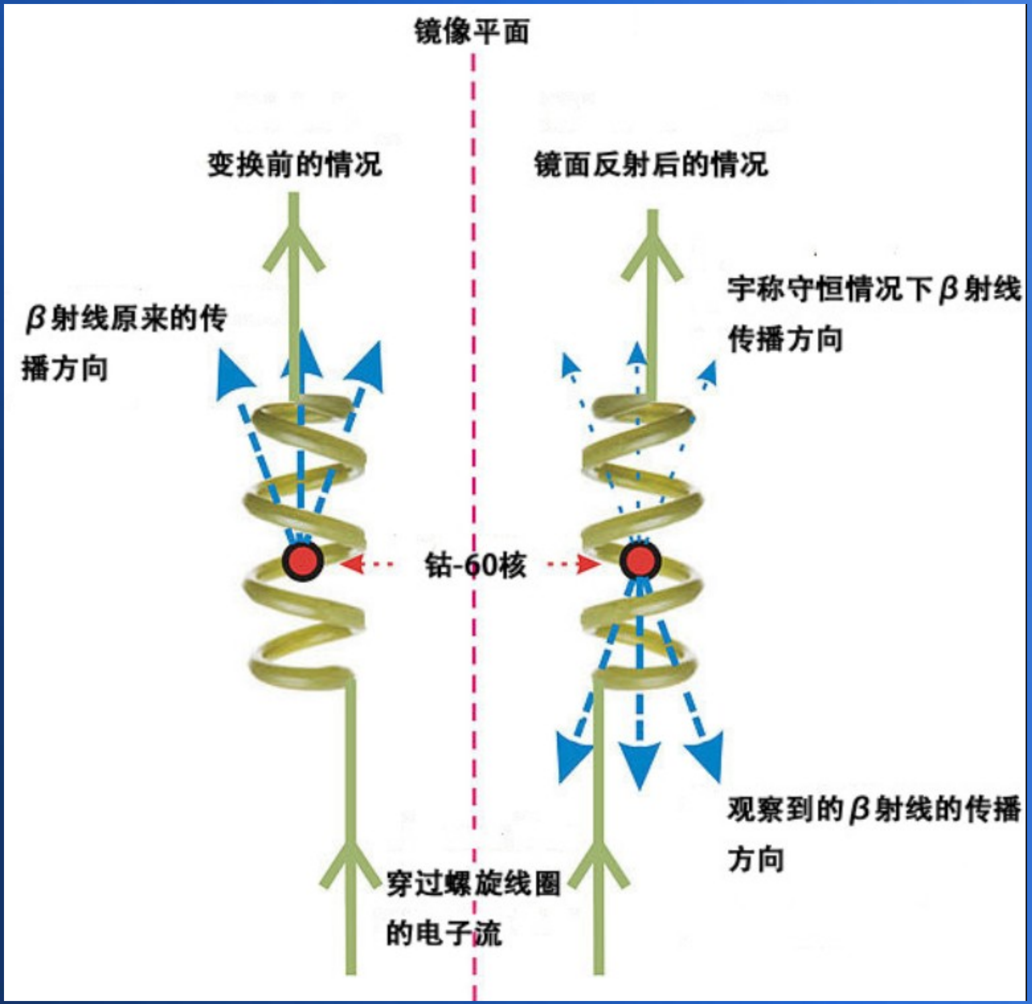
吳健雄一看

- 李楊兩人提出的實驗太難做
- 但是如果稍加修改
- 一樣能驗證
  而且會好做得多！



結果吳健雄一出手

- 就完成了任務
- 用實驗展示了宇稱是不守恆的！



這個實驗

- 後來讓《李楊兩人》一起得了諾貝爾獎！

所以

- 搞理論的不一定要會做實驗
- 但是搞實驗的至少要看懂理論是甚麼吧！

而我們寫程式的

- 就算不會做物理實驗
- 但總可以搞懂理論後寫成程式進行電腦實驗吧！

這就是為甚麼

- 我要學微分方程的原因
- 因為我在寫一個 JavaScript 的科學計算軟體

於是我開始看工程數學聖經

慢慢的我發現

- 微分方程其實沒那麼難！

微分方程求解的起點

- 在於 $f(x) = e^x$ 這個函數

為何 e^x 在微分方程如此重要呢？

那是因為

- e^x 是微積分的不動點

微分形式：$f'(e^x) = e^x$

積分形式：$\int e^x dx = e^x + C$

所以對 $f(x) = e^x$ 而言

$$
\begin{gathered}
f'(x) = e^x \\
f''(x) = e^x \\
\cdots \\
f^n(x) = e^x
\end{gathered}
$$

改寫成微分方程

- 令 y = f(x)，則可得：

$$
\begin{gathered}
f'(x) = e^x \\
f''(x) = e^x \\
\cdots \\
f^n(x) = e^x
\end{gathered}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{gathered}
y' = e^x \\
y'' = e^x \\
\cdots \\
y^n(x) = e^x
\end{gathered}
$$

換句話說

- $y = e^x$ 是下列所有微分方程的解答

$$
\begin{gathered}
y' = e^x \\
y'' = e^x \\
\cdots \\
y^n(x) = e^x
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
y' = y \\
y'' = y \\
\cdots \\
y^n(x) = y^m(x)
\end{gathered}
$$

於是 e^x

- 成為了微分方程裡的神奇函數
- 大部分微分方程都和 e^x 有關

例如

- 一階的線性常微分方程的解法如下：

一階線性常微分方程式 [編輯]

對於一階線性常微分方程式，常用的方法是常數變易法：

對於方程式：$y' + p(x)y + q(x) = 0$

可知其通解：$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$

然後將這個通解代回到原式中，即可求出$C(x)$的值

二階常係數微分方程
可先求特徵多項式解

對於二階常係數齊次常微分方程，常用方法是求出其特征方程的解

對於方程：$y'' + py' + qy = 0$

其特征方程：$r^2 + pr + q = 0$

還記得中學的二次多項式公式嗎？

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

把 x 換成 r, a 換成 1, b 換成 p, c 換成 q 則可得:

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$r1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$r2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

於是 $y'' + py' + qy = 0$ 的解可分成三類

1. 在 $p^2 - 4q > 0$ 的情況下有兩相異實根，微分方程的解為:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2. 在 $p^2 - 4q < 0$ 的情況下有兩相異虛根 (複數根)，微分方程的解為:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

3. 在$p^2 - 4q = 0$ 的情況下，有兩相同實根 ($r1 = r2$)，微分方程的解為:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$$

其中的 1，3 類都是 e^{cx} 形式

- 但是第二類卻是 cos, sin 形式

1. 在 $p^2 - 4q > 0$ 的情況下有兩相異實根，微分方程的解為:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2. 在 $p^2 - 4q < 0$ 的情況下有兩相異虛根 (複數根)，微分方程的解為:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

3. 在$p^2 - 4q = 0$ 的情況下，有兩相同實根 ($r1 = r2$)，微分方程的解為:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$$

為何會出現 cos, sin 形式呢？

- 微分方程的解大部分不是 e^{cx} 形式嗎？

關於這個問題

- 其實和歐拉公式有密切關係

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

你可以透過泰勒展開式導出歐拉公式

把函數e^x 、$\cos x$ 和$\sin x$ 寫成泰勒級數形式：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

將$x = iz$代入e^x 可得：

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \cdots \\
&= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos z + i \sin z
\end{aligned}$$

所以 sin, cos 都是 e^{ix} 形式

- 當然也會是微分方程的解
- 這意味著微分方程會有《波動解》

以上看到的微分方程

- 等號右邊通常是零 $$y'' + py' + qy = 0$$

  這種狀況稱為《齊次》微分方程

- 而 p, q 如果是常數，則稱為《常係數》微分方程

- 所以上面的微分方程為《二階常係數齊次微分方程》

對於非《齊次》的狀況

- 微分方程的解就不限定於 e^{cx} 的形式
- 例如下列微分方程：

$$y' = nx^{n-1}$$

- 其解答為： $y = x^n$

（您可以代入驗證看看）

對於更高階的齊次常係數微分方程

其解答也常是和 e^x, e^{ix} (cos, sin) 有關的

常係數齊次線性微分方程 [編輯]

一種解線性微分方程的方法是歐拉發現的，他意識到這類方程的解都具有e^{zx}的形式，其中z是某個複數。因此，對於以下方程：

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y = 0$$

我們設$y = e^{zx}$，可得：

$$z^n e^{zx} + A_1 z^{n-1} e^{zx} + \cdots + A_n e^{zx} = 0.$$

兩邊除以e^{zx}，便得到了一個n次方程：

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n = 0.$$

這個方程$F(z) = 0$稱為**特徵方程**。

一般地，把微分方程中以下的項

$$\frac{d^k y}{dx^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

換成z^k，便可得到特徵方程。這個方程有n個解：$z_1, \ldots, z_n$。把任何一個解代入e^{zx}，便可以得到微分方程的一個解：$e^{z_i x}$。由於齊次線性微分方程滿足疊加原理，因此這些函數的任意線性組合仍然滿足微分方程。

但是對於不是常係數的微分方程

- 通常就沒有固定的解法
- 很多時候根本不知道怎麼解
- 不過這才是對數學家有挑戰性的地方

不過某些特殊形式的微分方程有解公式

- 像是：

柯西－歐拉方程

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0$$

勒壤得微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2P(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP(x)}{dx} + n(n+1)P(x) = 0.$$

貝塞爾方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

希爾微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f(t)y = 0$$

但是目前似乎還沒有

- 通用的微分方程求解公式
- 更不要說是偏微分方程的求解公式了

不過還有幾種方式

- 可以找出微分方程的解，只是沒辦法每個都能找到解，像是：
  - 1. 拉普拉斯轉換
  - 2. 冪級數法（泰勒展開式）

而且、沒有公式解的微分方程

- 不代表沒有辦法解
- 因為我們可以用電腦的數值算法，像是搜尋法或疊代法來求解。

像是畢卡德疊代法

- 就用積分的角度進行數值求解

對於形式如下的微分方程

$$y' = f(x, y) \ ; \ y(x_0) = y_0$$

我們可以用下列《畢卡德疊代法》求解：

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

龍格庫塔法

- 則是用微分的角度求解：

令初值問題表述如下。

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

則，對於該問題的RK4由如下方程給出：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

其中

$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right)$$

這樣，下一個值（y_{n+1}）由現在的值（y_n）加上時間間隔（h）和一個估算的斜率的乘積所決定。該斜率是以下斜率的加權平均：

其實

- 就連簡單的多項式，只要次數 n 超過 5 ，就沒有普通函數的公式解

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

這就是所謂的《伽羅瓦理論》

但我們還是可以用

- 像是《二分搜尋法或疊代法》之類的數值分法去找多項式的根。

微分方程也是如此

不過如果想要公式解

- 又不想用手算，也可以用像 SymPy 這樣的套件：

In [1]:
```python
import sympy as sym
sym.init_printing()
t, l = sym.symbols('t lambda')
y = sym.Function('y')(t)
dydt = y.diff(t)
expr = sym.Eq(dydt, -l*y)
expr
```

Out[1]: $$\frac{d}{dt}y(t) = -\lambda y(t)$$

In [2]:
```python
sym.dsolve(expr)
```

Out[2]: $$y(t) = C_1 e^{-\lambda t}$$

https://www.sympy.org/scipy-2017-codegen-tutorial/notebooks/20-ordinary-differential-equations.html

但就算是用 SymPy 套件

- 也不見得都能找到公式解
- 有時只能找到逼近的級數解

```
>>> from sympy import Function, Derivative, pprint, exp
>>> from sympy.solvers.ode import dsolve
>>> from sympy.abc import x
>>> f = Function('f')
>>> eq = exp(x)*(f(x).diff(x)) - f(x)
>>> pprint(dsolve(eq, hint='1st_power_series'))
                          3         4         5
                      C1*x      C1*x      C1*x      / 6\
f(x) = C1 + C1*x - ----- + ----- + ----- + O\x /
                        6        24        60
```

http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am33/SymPy/part2.html

或許哪天

- 我們會用人工智慧的方法

  做出超強的微分方程求解器

  這樣就不用再傷腦筋了！

這就是我所知道的

- 微分方程的故事！

希望你會喜歡

我們下回見

Bye Bye!