

程式人《十分鐘系列》



用十分鐘快速掌握

《數學的整體結構》

陳鍾誠

2016 年 11 月 8 日

從小學到大學

- 我學了很多數學！

甚至到了碩博士

- 還是一直在學數學 ...

不過直到最近

- 我才發現自己所學的數學 ...
- 毫無系統可言！

舉例而言

- 當我看到一些名詞

像是

- 群、體、環、模
- 向量、張量、場
- 拓撲學、分析學、希爾伯特空間

我就開始不知所措

因為

- 腦海裡搜尋不到這些詞的意義 …
- 就算曾經學過，也沒真正把定義搞清楚 …

所以

- 常常拿香蕉比雞腿，搞得
數學跟玄學沒兩樣 ...

最近

- 我決定把自己所會的數學，
全部寫成程式 ...

於是

- 開始不斷釐清

這些名詞的意義...

慢慢地

- 我開始瞭解，整個數學領域的大架構了 ...

現在

- 就讓我帶領大家，一起來場
數學巡禮吧！

話說

- 我們所學的數學 ...

和數學系所學的數學

非常不一樣

因為

- 我們學數學是為了《應用》...

但是數學系的數學

- 其實比較在意《系統性與優美性》...

正因為如此

- 我們學不好數學，也是理所當然的 ...

因為任何事情

- 當我們只看到《有甚麼用》的時候，就已經開始扭曲了！

舉例而言

- 資訊系的數學，通常會有
 - 微積分、線性代數
 - 離散數學、工程數學
 - 機率統計、數值分析

而這些數學

- 大部分都是對電腦領域有用的
數學！

但是數學系的課程

- 卻通常分為下列三大領域：

- 分析

- 代數

- 幾何

以下是成功大學數學系的課程

G. 分析領域

向量分析，初等分析，金融市場與金融數學導論，高等微積分（一），高等微積分（一），高等微積分（二），高等微積分（二），高等微積分實習（一），高等微積分實習（二），偏微分方程導論，動態系統，通過問題學數學，傅立葉分析與應用，微分方程導論，微分方程導論，微分方程導論實習，微積分（一），微積分（一），微積分（二），微積分實習（一），微積分實習（二），實變數函數論，數學導論，複變數函數論，應用分析

H. 代數領域

代數組合，代數學（一），代數學（一），代數學（二），代數學實習（一），伽羅瓦理論，伽羅瓦理論入門，計算代數，矩陣群，組合與圖論，群表現導論，解析幾何與矩陣，數論，數論導論，線性代數（一），線性代數（一），線性代數（二），線性代數（二），線性代數實習（一），線性代數實習（二），賽局論，離散數學

I. 幾何領域

拓樸學，金融市場與金融數學導論，非歐幾何，流形上的微積分，流形導論，幾何學（一），幾何學（二）

當然也會有應用部分

J. 機率與統計領域

金融市場與金融數學導論，統計導論，線性模式，機率導論，機率導論，機率導論實習，隨機過程，應用機率

K. 計算與應用數學領域

凸分析導論，金融市場與金融數學導論，金融數學導論，科學計算軟體，計算機概論與程式語言，語音訊號處理，數值分析導論，數值微分方程導論，數學建模，數學規劃導論，應用數學方法，應用線性代數

問題是

- 《分析、代數、幾何》

到底學些甚麼呢？

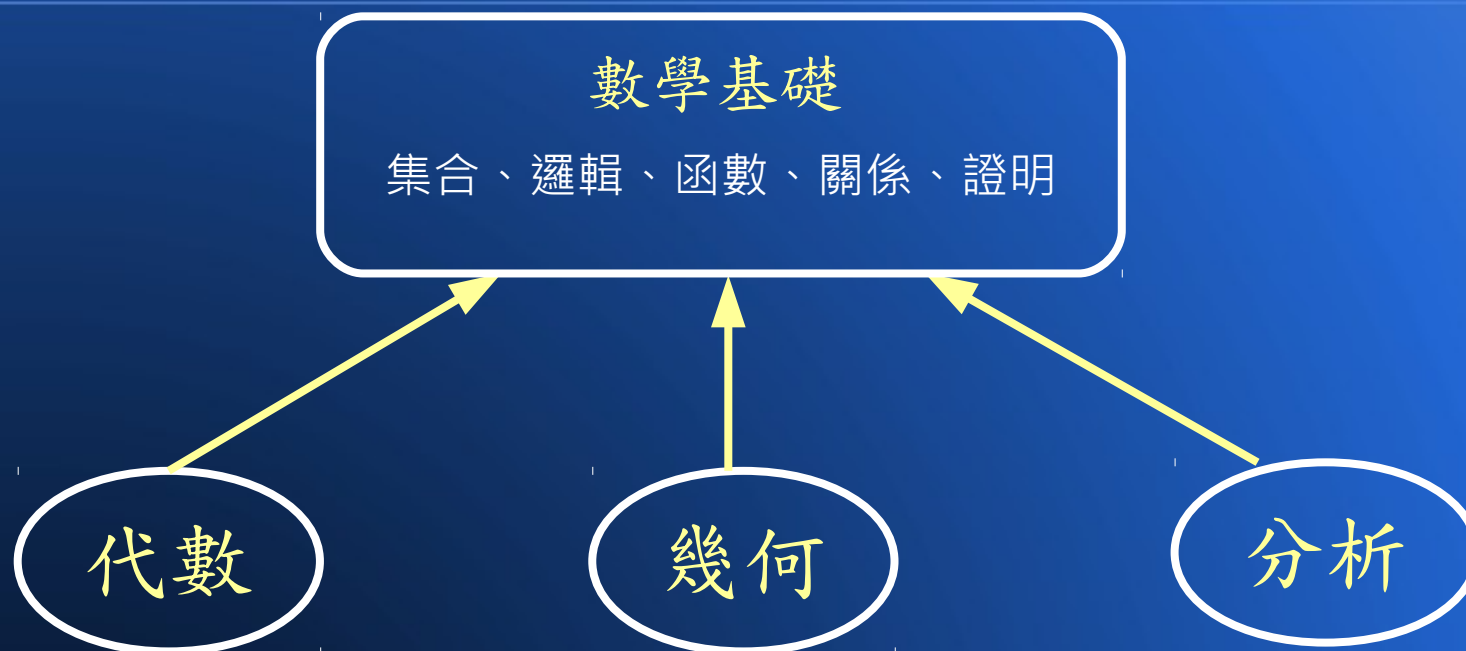
數學的整體架構

- 到底有甚麼系統性呢？

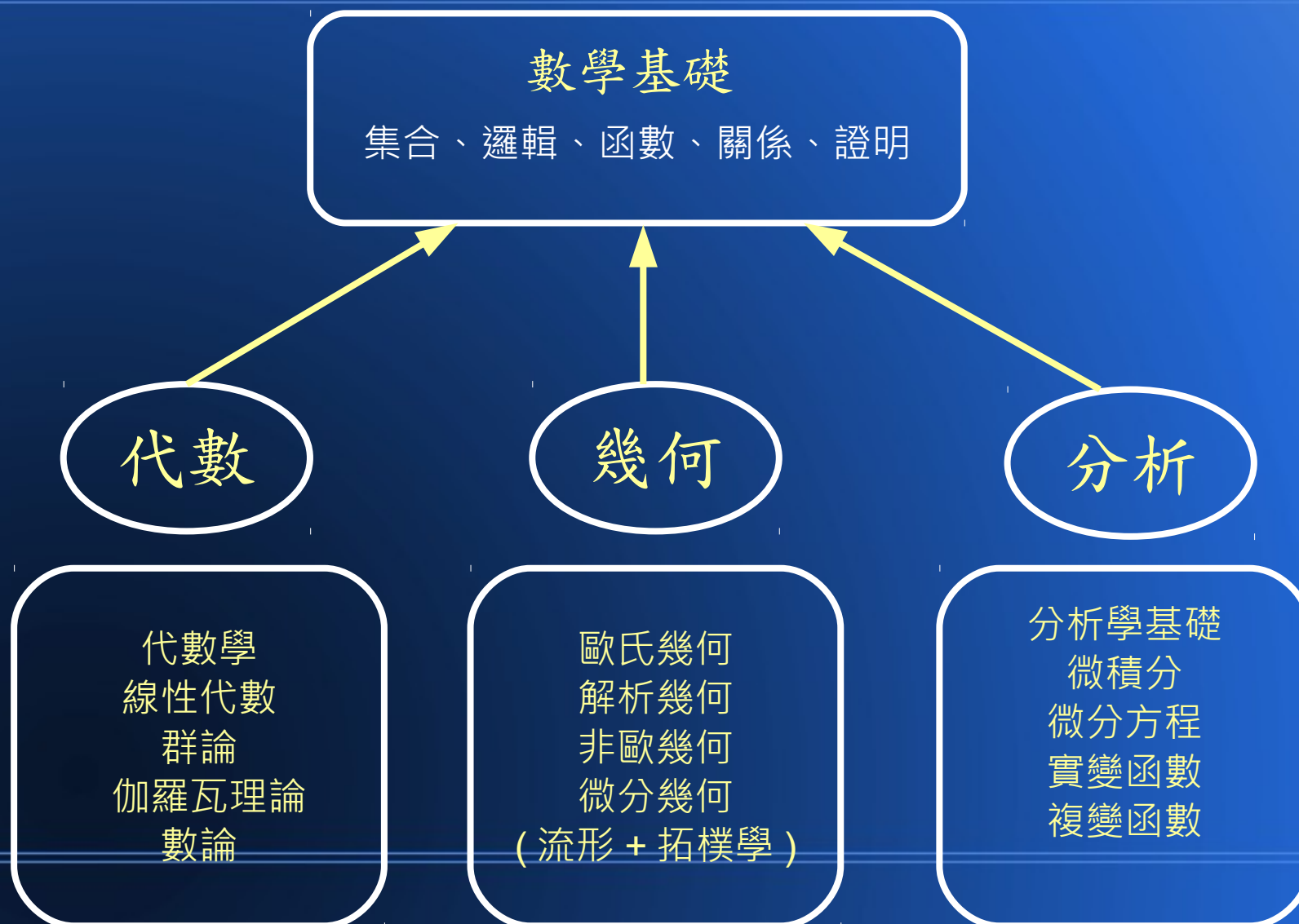
經過我歸納之後

- 逐漸整理出一套系統...

這套系統的大架構如下



更細的架構如下



現在、就讓我們說明一下

- 這些領域的整體架構好了！

整個數學體系

- 是建立在《集合》上的一個《邏輯系統》
- 其主要的研究對象通常可以表示為《函數》或《關係》

數學基礎

集合、邏輯、函數、關係、證明

- 這些體系必須建構在嚴格的《證明》之上！

因此、數學的基礎包含

- 集合、邏輯、函數、關係
- 還有《證明》這些事情！

數學基礎

集合、邏輯、函數、關係、證明

通常《數學導論》這門課

- 就會涵蓋《集合、邏輯》
還有《函數、關係、證明》
等主題！

- 1 Logic and Language of Proof
- 2 Sets
- 3 Mathematical Induction
- 4 Relations and Orders
- 5 Functions
- 6 Selected Topics

- ❖ 用數學歸納法、直接證明法、及反證法來證明數學定理。
- ❖ 建立真值表，並且以真值表來檢驗敘述、性質、及其他的邏輯項目。
- ❖ 瞭解直覺集合論並使用集合論建立證明。
- ❖ 以歸納法做簡單的數論證明。
- ❖ 以直接證明法及反證法做實值函數論的證明。
- ❖ 瞭解是什麼完全的、嚴謹的數學證明。

有了上述基礎之後

- 就可以開始進入《代數、幾何、分析》等三大《純數學領域》！

代數學

- 研究的是《加減乘除》這些運算的數學結構！

代數

代數學
線性代數
群論
伽羅瓦理論
數論

幾何學

- 則是研究《空間》的結構，包含：

- 直的歐氏空間

- 彎的曲面空間

（包含可微分的黎曼空間）

幾何

歐氏幾何
解析幾何
非歐幾何
微分幾何
(流形 + 拓樸學)

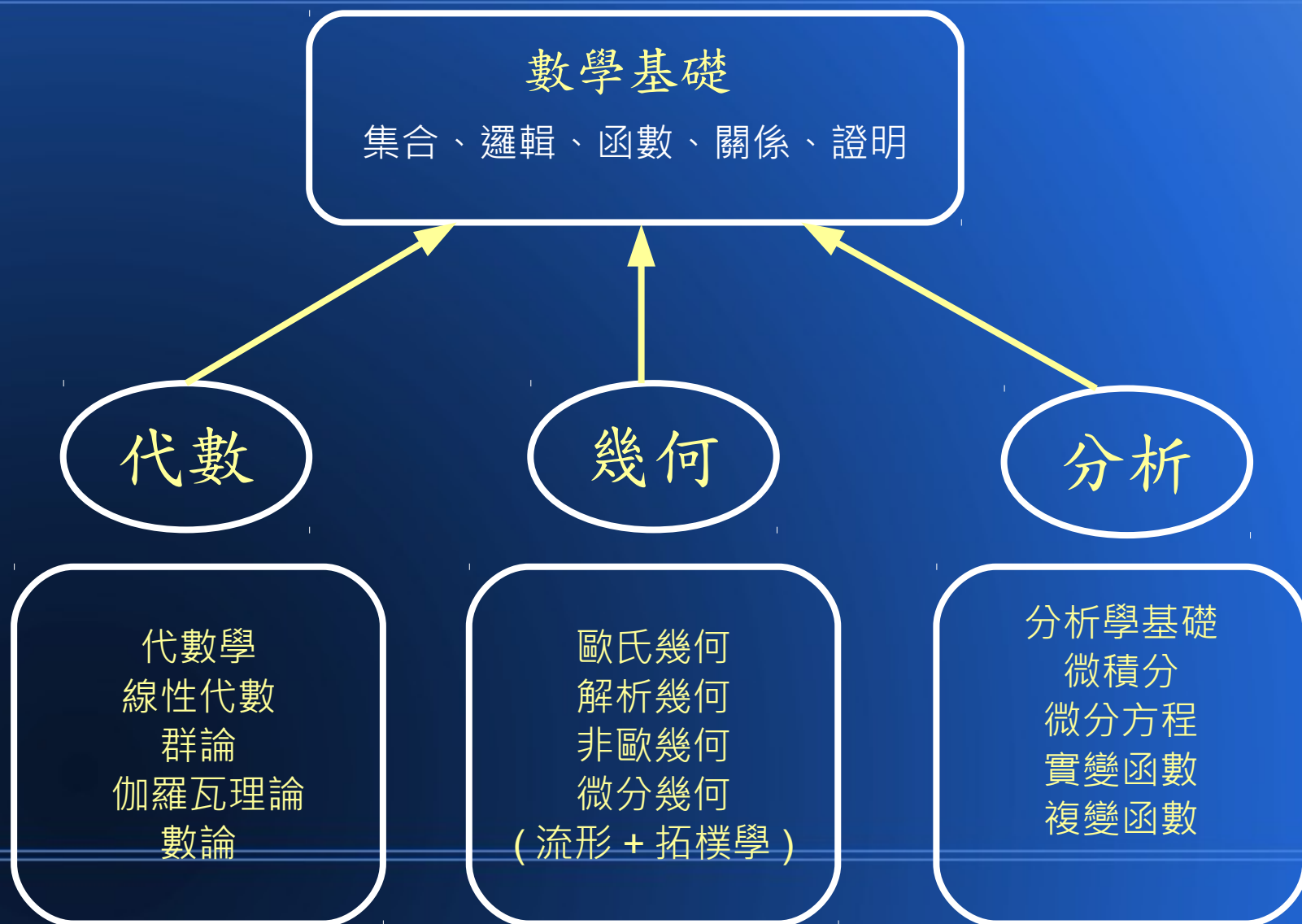
而分析學

- 研究的對象是《連續函數》
特別是《可微分的函數》
- 加入了《微分》和《積分》
這兩個重要的運算！

分析

分析學基礎
微積分
微分方程
實變函數
複變函數

於是數學的整體的框架就浮現了



有了上述大框架後

- 讓我們進一步仔細看每個部份！

讓我們先從《代數》開始

代數學

- 是研究《加減乘除》等數學結構的學問！

加減乘除

- 通常會運作在《數》的上面！
- 像是：整數 N 、有理數 Q 、實數 R 、
複數 C 等等 ...

如果我們把焦點

- 只放在一個運算上面，像是
 - 《加法》

那麼我們會看到

- 《加法運算》具有某些《代數特性》！

像是實數的加法、就具有

- 封閉性 : $a+b$ 也是實數
- 結合性 : $(a+b)+c=a+(b+c)$
- 單位元素 : $a+0 = 0+a = a$
- 反元素 : $a+(-a) = (-a)+a = 0$
- 交換性 : $a+b = b+a$

這種單一運算的特性

- 會形成《群論》中的那些結構，像是：
 - 群、交換群、半群、么半群
 - 原群、擬群、么擬群
 - 李群、廣群、拓撲群、...

這麼多種類的群

- 通常是由《封閉、結合、交換、單位元素、反元素》當中某些性質形成的！

假如我們把群的概念數學化

- 就可以用一個集合 S 加上一個運算。表示
- 也就是 $G = (S, \circ)$

像是具有下列四項特性者稱為 《群 Group》

- 封閉性： $(a \circ b) \text{ in } S$
- 結合性： $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- 單位元素： $a \circ e = e \circ a = a$
- 反元素： $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

然後只有前兩項者稱為 SemiGroup (半群)

- 封閉性： $(a \circ b) \text{ in } S$
- 結合性： $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- ~~● 單位元素： $a \circ e = e \circ a = a$~~
- ~~● 反元素： $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = a$~~

有《單位元素》的半群稱為 Monoid (么半群)

- 封閉性： $(a \circ b) \text{ in } S$
- 結合性： $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- 單位元素： $a \circ e = e \circ a = a$
- ~~反元素： $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = a$~~

四者均有者當然還是 Group (群)

- 封閉性： $(a \circ b) \text{ in } S$
- 結合性： $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- 單位元素： $a \circ e = e \circ a = a$
- 反元素： $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

再加上《交換律》者稱為 Abelian Group（交換群，阿貝爾群）

- 封閉性： $(a \circ b) \text{ in } S$
- 結合性： $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- 單位元素： $a \circ e = e \circ a = a$
- 反元素： $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$
- 交換性： $a \circ b = b \circ a$

現在、我們已經瞭解了

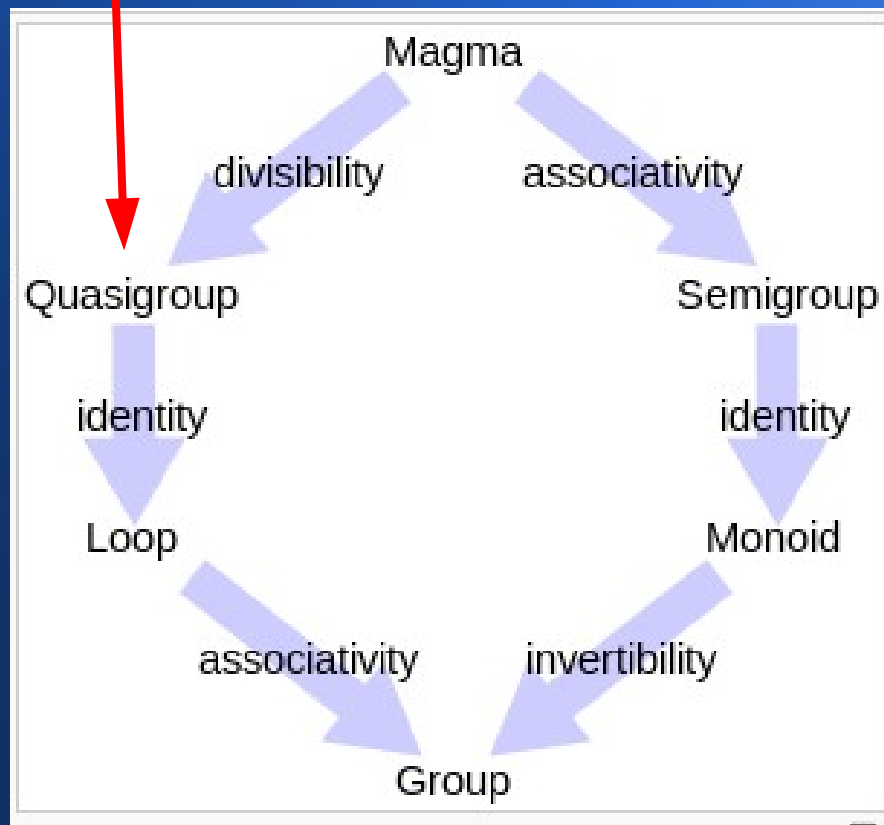
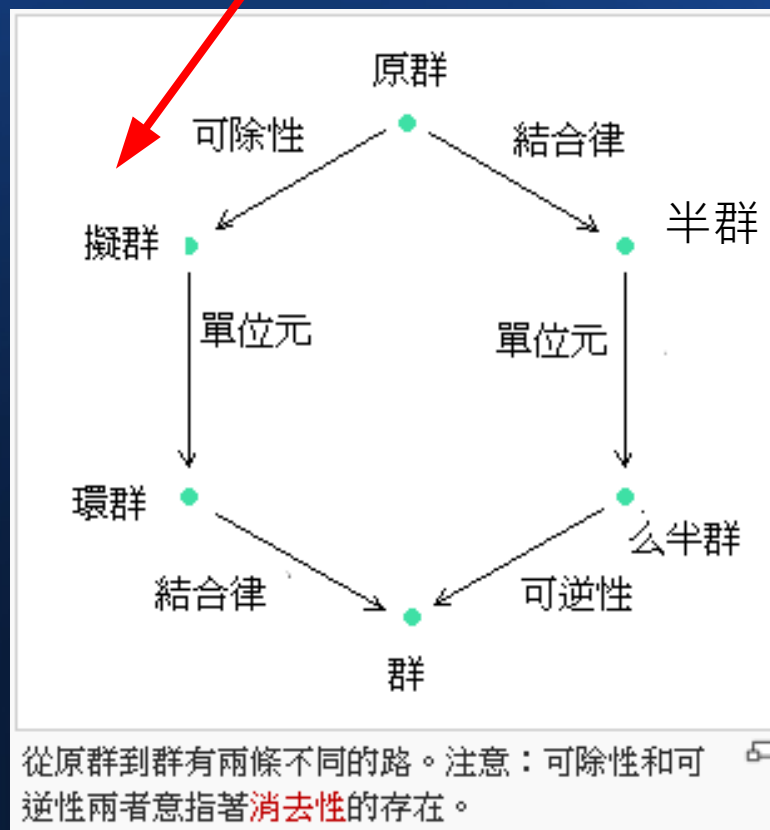
- 群論的基本分類了！
 - 群：Group
 - 半群：Semi Group
 - 么半群：Monoid
 - 交換群：Abelian Group

如果我們把《結合律》從群中拿掉

- 就會得到《環群》 Loop

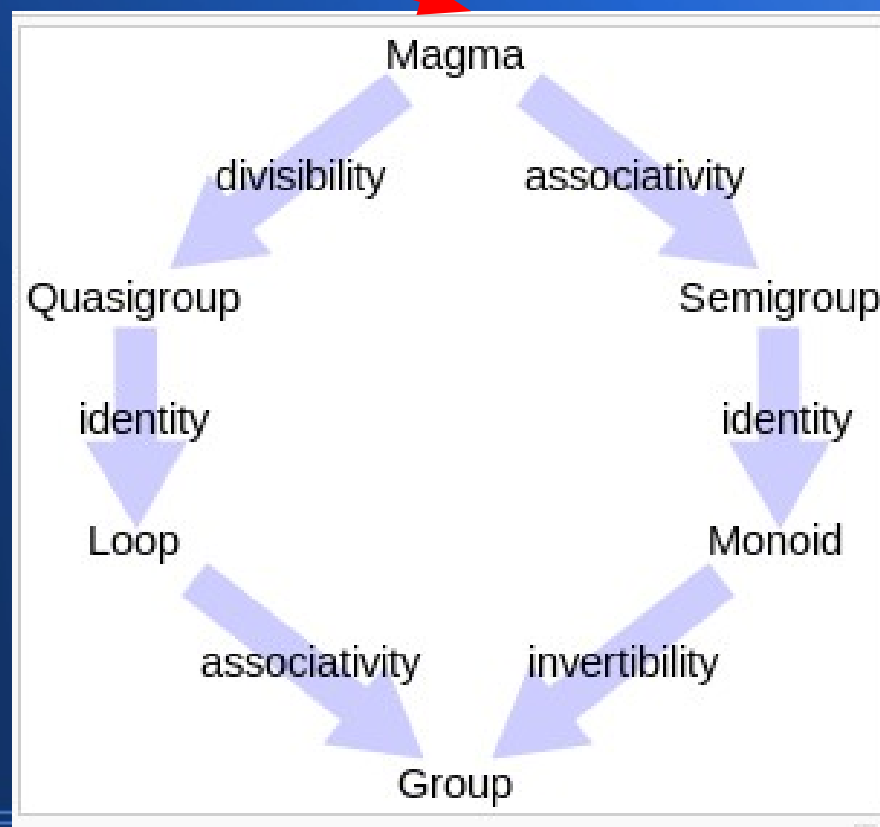
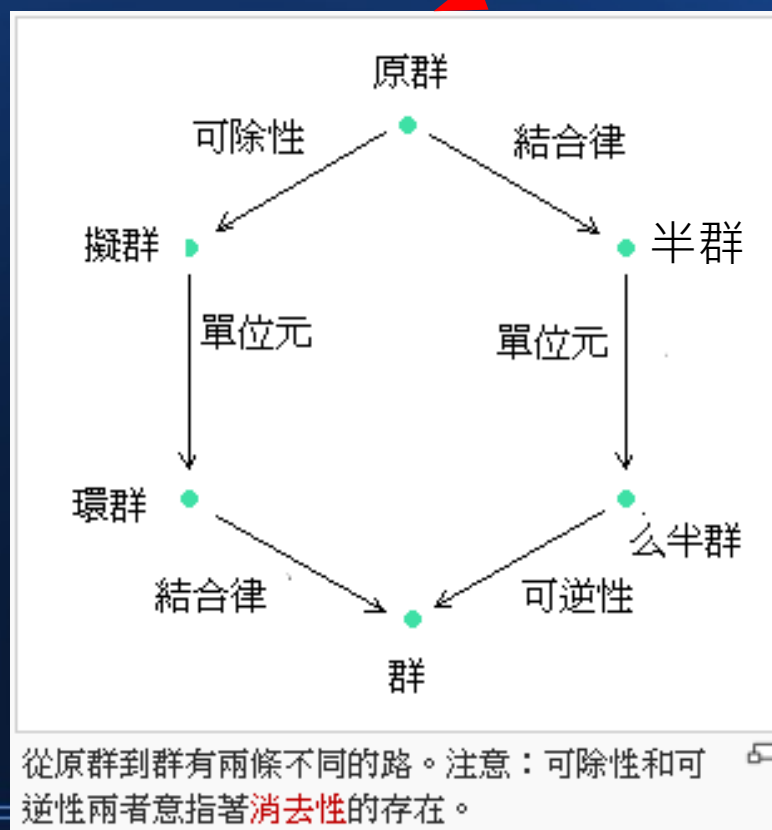
類似群的結構				
	完全性	結合律	單位元	除法
群	是	是	是	是
么半群	是	是	是	否
半群	是	是	否	否
環群	是	否	是	是
擬群	是	否	否	是
原群	是	否	否	否
廣群	否	是	是	是
範疇	否	是	是	否

而且《沒結合律的那些群》 也都有自己的名字



您或許會注意到最上面那個《原群》

- 那是《一個集合》加上《具有封閉性的運算》！



所以您可以看到

- 數學其實是很有系統的！

有了單一運算的群概念之後

- 就可以擴充到具有《兩個運算》
的《體 Field》結構了！

那兩個運算是《加法和乘法》

而且加法和乘法

- 各自形成一個《交換群》
- 於是因為反元素存在
 - 就可以導出《減法和除法》
- 這種結構我們就稱為《體》

讓我們舉一個簡單的例子

- 就用《實數、加法、乘法》所形成的《體》為例好了！
- 也就是 $\langle \mathbb{R}, +, * \rangle$

《實數的加法》形成《交換群》

- 封閉性 : $a+b$ 也是實數
- 結合性 : $(a+b)+c=a+(b+c)$
- 單位元素 : $a+0 = 0+a = a$
- 反元素 : $a+(-a) = (-a)+a = 0$
- 交換性 : $a+b = b+a$

《實數的乘法》也形成《交換群》

- 封閉性 : $a*b$ 也是實數
- 結合性 : $(a*b)*c=a*(b*c)$
- 單位元素 : $a*1 = 1*a = a$
- 反元素 : $a*(1/a) = (1/a)*a = 1$
- 交換性 : $a*b = b*a$

注意：乘法必須排除 0 之後，才有反元素，形成交換群

而且實數加法和乘法之間

- 滿足分配律： $a*(b+c) = a*b+a*c$

$$(b+c)*a = b*a+c*a$$

- 這種具有《一個集合 + 兩個交換群》的結構，就稱為《體 Field》

體的數學條件如下

- 我們寫成 $\langle R, +, * \rangle$
 - 其中 $\langle R, + \rangle$ 是個交換群
 - 而 $\langle R - 0, * \rangle$ 也是交換群
 - 而且 $+$ 對 $*$ 滿足分配律

$$\begin{aligned}a*(b+c) &= a*b+a*c \\ (b+c)*a &= b*a+c*a\end{aligned}$$

必須注意的是乘法要排除 0 之後才滿足交換群的條件

現在、我們已經瞭解

- 甚麼是《群》、甚麼是《體》了！

除了《實數體》之外

- 《複數 C 》搭配《 $+$, $*$ 》也可以形成《複數體 $(C, +, *)$ 》！
- 《有理數 Q 》搭配《 $+$, $*$ 》也可以形成《有理數 $(Q, +, *)$ 》！

但是對《整數》的話

- 其《乘法反元素》可能不會是整數
- 因此無法形成《體結構》。

這種缺乏《乘法反元素》的《缺陷體》

- 稱為《環 Ring》

環的乘法運算

- 也就是像（整數，乘法）這種結構
- 形成《么半群》，而非《群》

舉例而言

- 整數環 $(\mathbb{Z}, +, *)$ 就是一種環結構
- 這是因為因為乘法反元素 $1/a$ 可能不是整數，不屬於 \mathbb{Z} 的緣故！

接著、在線性代數裏

- 我們會看到一種《具有兩個集合和兩個運算的結構》稱為《模 Module》
- 《模》可以寫成 $\langle R, M, +, * \rangle$

模 $\langle R, M, +, * \rangle$ 的定義如下

- R 是一個環， M 是個交換群，而且滿足
 - $r*(x+y)=r*x+r*y$
 - $(r+s)*x=r*x+s*x$
 - $(r*s)*x = r*(s*x)$
 - $1*x = x$

以上的 (r, s 是 R 的成員)，(x, y 是 M 的成員)

其實說穿了

- 《模》只是把《常量，向量，加法、乘法》結構給抽象化了！
- 《 $R, M, +, *$ 》中 R 為常量， M 為向量

接著數學家們再繼續擴充

- 把《矩陣概念也抽象化》，在雙線性映射 $A \times A \rightarrow A$ 的領域裏加入下列法則：
 - 右結合性： $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
 - 左結合性： $z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$
 - 常相容性： $(ax) \cdot (by) = (ab) (x \cdot y)$
- 這種結構就稱為《代數 Algebra》

由於《線性代數》

- 符合上面的 Algebra 結構
 - 其中的雙線性映射就是矩陣

所以才會稱為《線性代數》

於是你差不多

- 看完主要的代數結構了
- 只差《偏序》的格狀架構 Lattice 沒提到而已

Algebraic structures

Group-like [hide]

Semigroup / Monoid
Racks and quandles
Quasigroup and loop
Abelian group · Magma · Lie group
Group theory

Ring-like [hide]

Ring · Semiring · Near-ring · Commutative ring
· Integral domain · Field · Division ring
Ring theory

Lattice-like [hide]

Lattice · Semilattice
Map of lattices
Lattice theory

Module-like [hide]

Module · Group with operators · Vector space
Linear algebra

Algebra-like [hide]

Algebra
Associative · Non-associative ·
Composition algebra
Lie algebra · Graded · Bialgebra

這些結構的特性與定理

- 大致上就是《抽象代數》所研究的對象了！

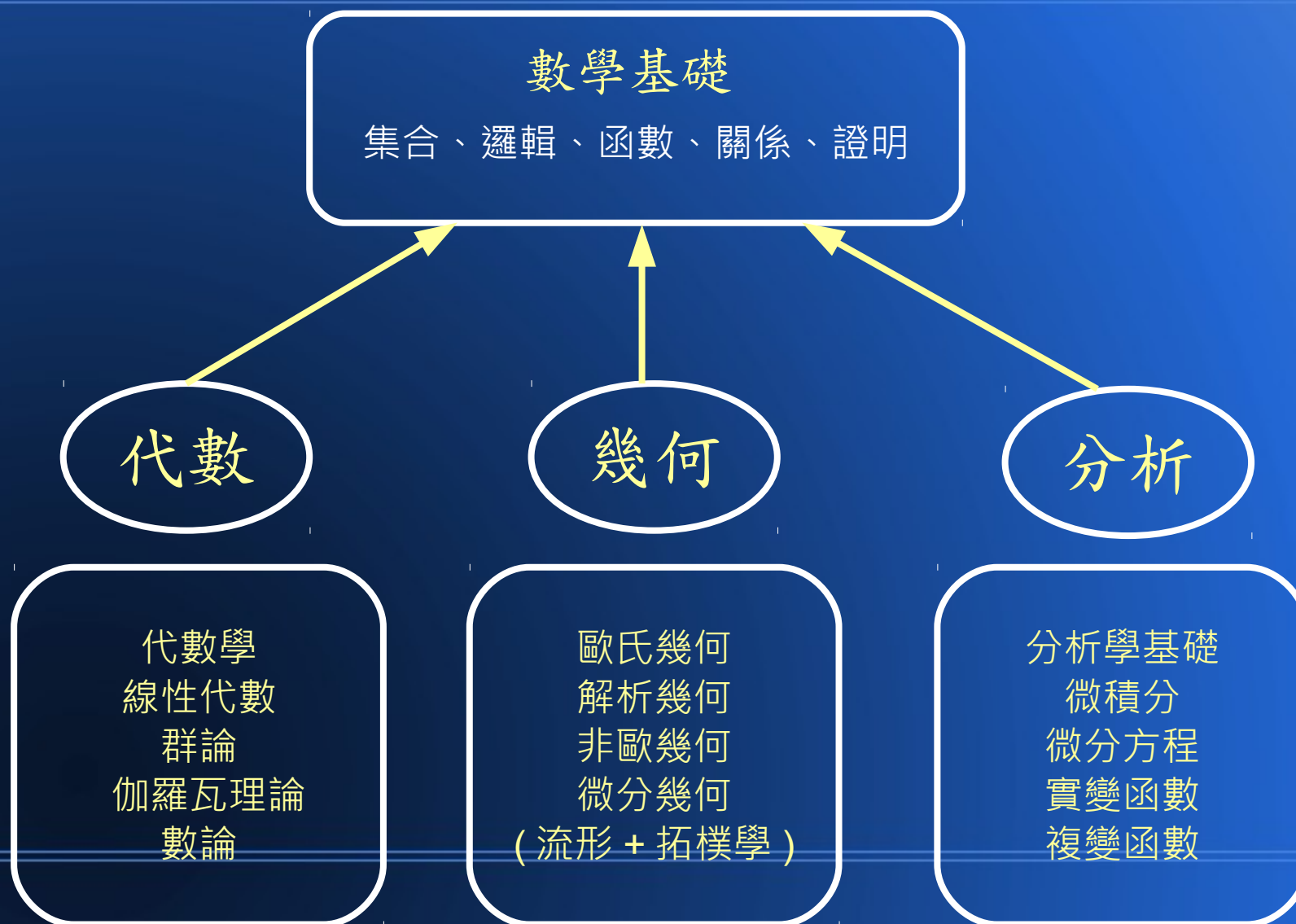
現在、我們大致可以理解

- 代數學討論的標的物
- 像是《群、體、環、模、代數》
等分類體系了！

讓我們再度回到上面那個

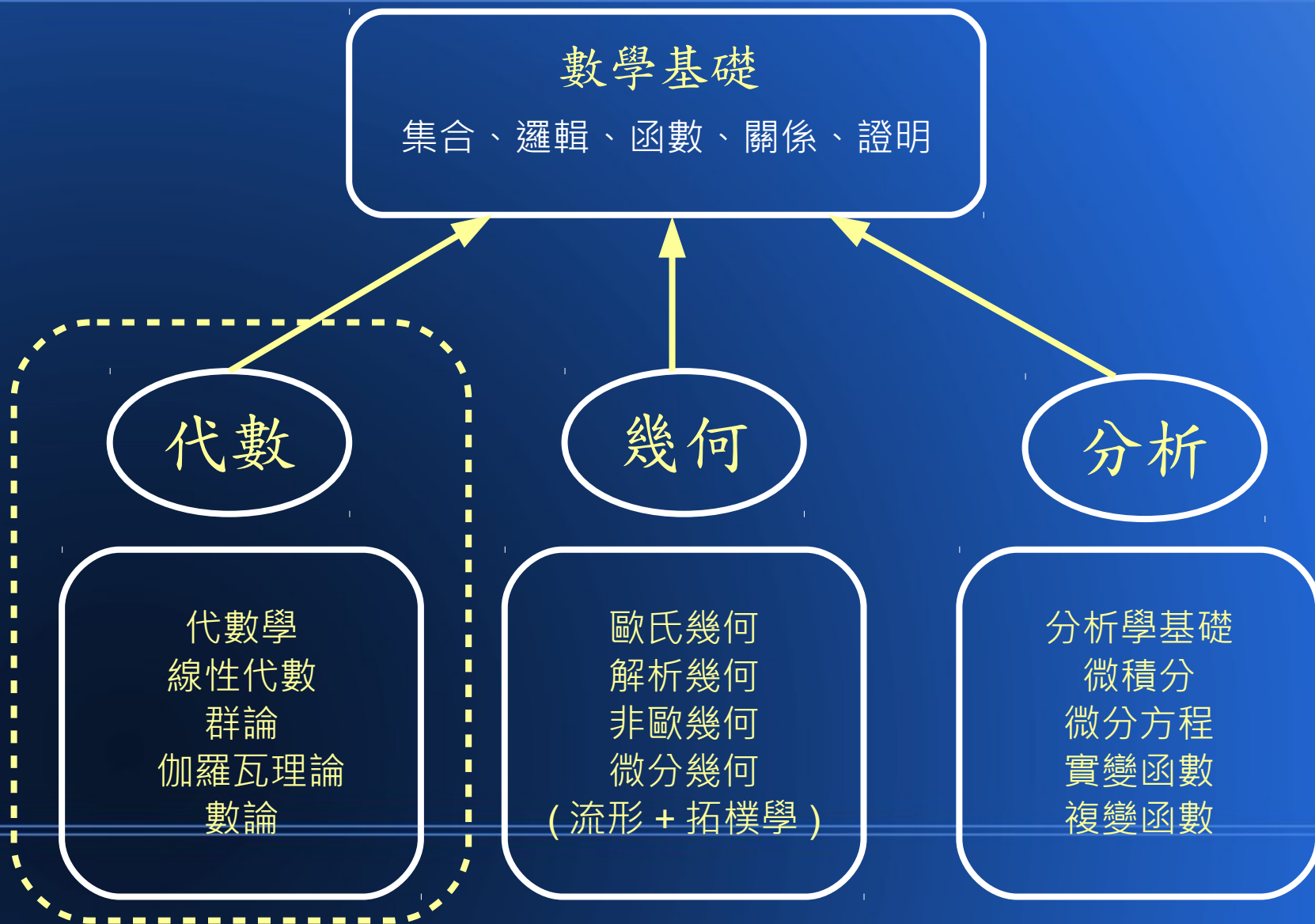
- 數學的整體大架構上！

回顧一下整體結構

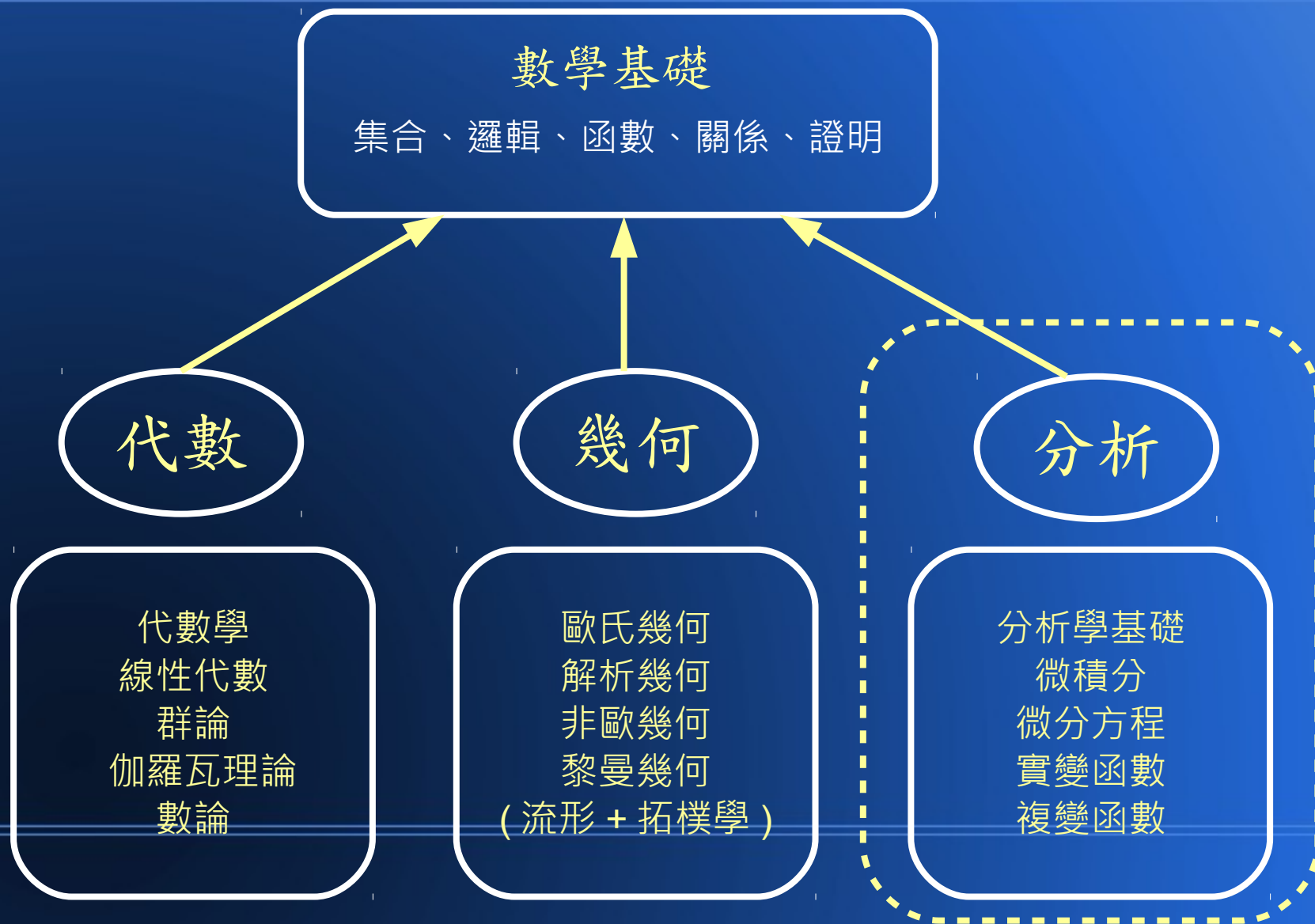


還有我們已經介紹的

《代數學與群體環等結構》



接著讓我們將焦點轉到《分析學》



分析學研究的主要對象

- 是函數 $f(x, y, \dots)$
- 特別是那些《連續》
且《可微分》的函數！

分析

分析學基礎
微積分
微分方程
實變函數
複變函數

分析學研究的主要運算

- 是《微分》和《積分》兩個運算！

《微分》和《積分》

- 兩者互為反運算，也就是

– f 積分後再微分 = f

$$\frac{d(\int_a^x f(x)dx)}{dx} = f(x)$$

- 這就是《微積分基本定理》！

所以

- 《微分》和《積分》的關係，就和
 - 《加法》與《減法》
 - 《乘法》與《除法》

等運算是非常類似的！

對於《加減乘除》

- 我們可以列出方程式並求解：

$$3x + 5y = 2$$

$$5x + 8y = 3$$

有唯一解 $x = -1, y = 1$

而對於《微分和積分》

- 我們也可以列出微分方程：

$$y' = y - y^2$$

- 然後求解：

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right) y' = 1$$

$$\ln |y| - \ln |y-1| = x + c$$

$$\ln \left| \frac{y}{y-1} \right| = x + c$$

$$\left| \frac{y}{y-1} \right| = e^{x+c}$$

$$\frac{y}{y-1} = \pm e^{x+c}$$

$$\frac{y}{y-1} = ke^x$$

$$y = \frac{ke^x}{ke^x - 1} = \frac{ke^x - 1 + 1}{ke^x - 1} = 1 + \frac{1}{ke^x - 1}$$

對於多變數函數

- 也有《偏微分》與《多重積分》

定義：偏導數

$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ 在點 $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 對 x_k 的偏導數定義為

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{\vec{a}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{h}$$

$$\int \cdots \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

甚至對於向量

- 也有向量的運算與積分，像是：

- 內積： $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$

- 外積： $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \hat{i}$

- 通量： $\Phi_F(S) = \int_S \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$

- 環量： $\text{Circ}_{\mathbf{F}}(C) = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{l}$

甚至可以衍生出更高階的運算

- 像是：

- 梯度：

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

- 散度：

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\vec{s}}{V}$$

- 旋度：

$$\nabla \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{n} = \left(\lim_{C \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{l}}{U} \right) \cdot \hat{n}$$

等等

然後數學家們

- 又在這個領域證明了很多定理

像是《旋度定理》

斯托克定理 (Stokes theorem) – 又稱「旋度定理」

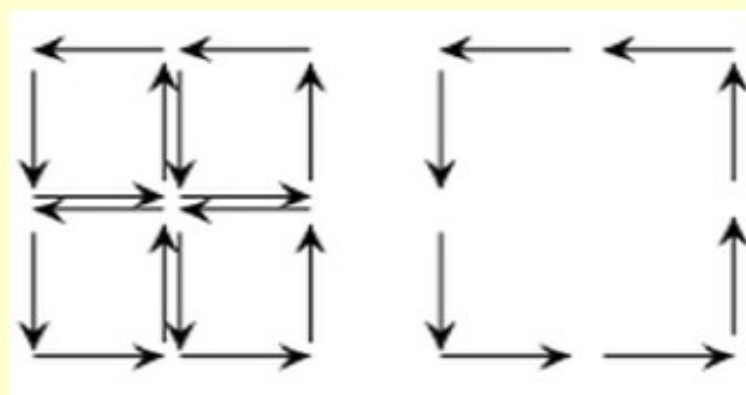
$$\int_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{s} = \oint_C F \cdot d\vec{l}$$

直覺意義：

1. S 是空間中的一個曲面，而 C 是環繞 S 邊緣的封閉曲線。插圖 11: 斯托克定理的適用情況

2. S 表面上的旋度總和 $\int_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{s}$ ，等於 S 邊緣任一封閉曲線 C 的通量總和 $\oint_C F \cdot d\vec{l}$ 。

證明的想法：在上圖中， S 曲面內方格的向量會互相取消，於是只要計算延著邊緣環繞線 C 的向量內積總和 $\oint_C F \cdot d\vec{l}$ ，就可以算出整體的旋量 $\int_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{s}$ 。



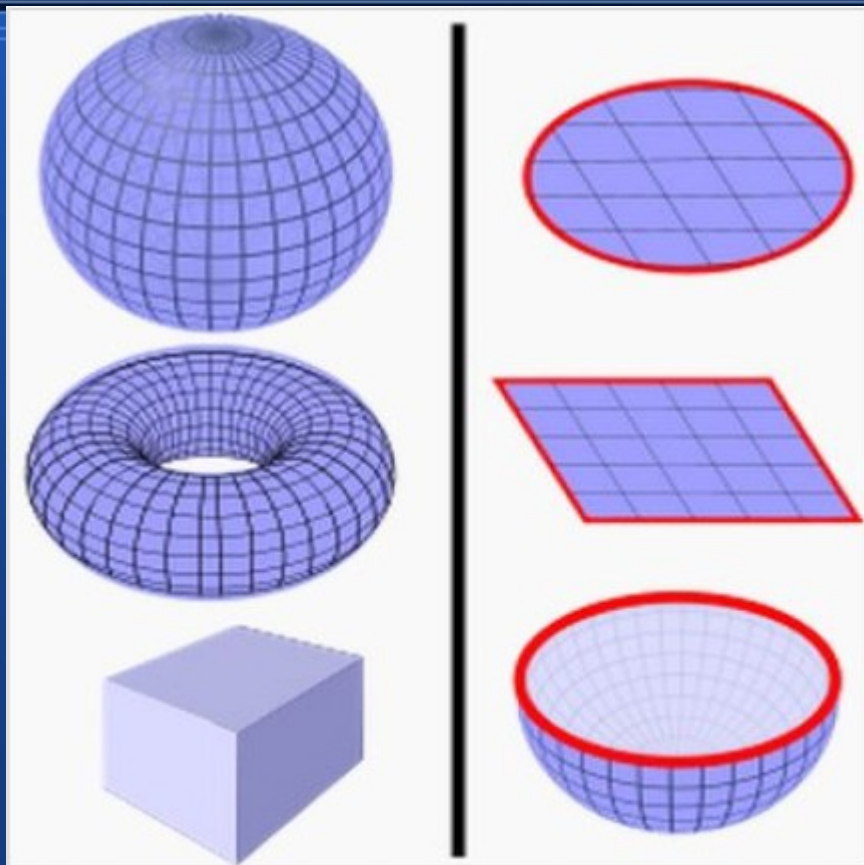
還有《散度定理》等等

散度

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\vec{s}}{V}$$

散度定理

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$$



散度定理可以用來計算穿過閉曲面的通量，例如，任何左邊的曲面；散度定理不可以用來計算穿過具有邊界的曲面，例如，任何右邊的曲面。在這圖內，曲面以藍色顯示，邊界以紅色顯示。

這些微積分的内容

- 基本上都屬於《分析學》的領域

好了

- 現在我們已經介紹完
 - 分析學
 - 代數學
- 兩個領域了！

剩下的最後一個

- 就是《幾何學》了！

幾何領域探討的對象

- 主要是《空間 space》

幾何

歐氏幾何
解析幾何
非歐幾何
微分幾何
(流形 + 拓樸學)

歐氏幾何

- 探討的是《剛硬的不可彎曲空間》
- 通常以《直角坐標系》為基礎！

非歐幾何

- 則是探討《有彎曲度的空間》，像是

《球面、雙曲面、或其他可微分的曲面》

其中《可微分的曲面》

- 就是《微分幾何》的主要研究對象！

至於拓樸學

- 則是研究連續空間的幾何學，
不管是否可微分都要研究！

拓樸學裏的幾何

- 探討的是一種
 - 可以《無限拉伸、壓縮或扭曲》
 - 但是不可以《撕開或挖破》的幾何學！

這種可任意扭曲的變形

- 所形成的等價類別稱為《同胚 Homeomorphism》

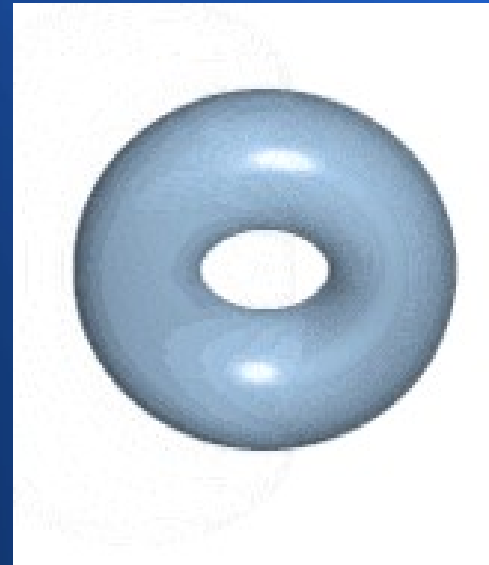
兩個拓撲空間 $\{X, T_X\}$ 和 $\{Y, T_Y\}$ 之間的函數 $f: X \rightarrow Y$ 稱為**同胚**，如果它具有下列性質：

- f 是雙射（單射和滿射）；
- f 是連續的；
- 反函數 f^{-1} 也是連續的（ f 是開映射）。

滿足以上三個性質的函數有時稱為**雙連續**。**自同胚**就是從一個拓撲空間到它本身的同胚。同胚形成了所有拓撲空間的類上的等價關係。所得到的等價類稱為**同胚類**。

所以

- 咖啡杯和甜甜圈，其實是同胚的！

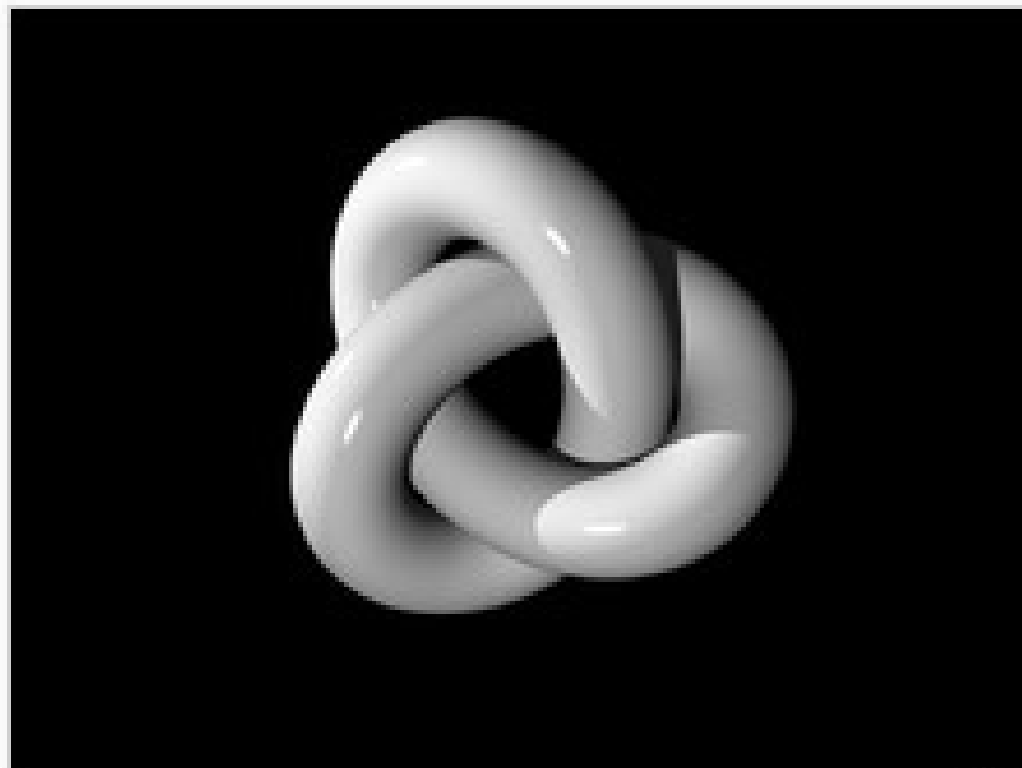


但是更高維的同胚

- 其實很難想像！

像是《三葉結》與《圓》同胚

- 這件事情
我就很難理解了！



三葉結與圓同胚。雖然這表面上不合理，但是在四維空間中很容易把三葉結連續變形成一個圓。

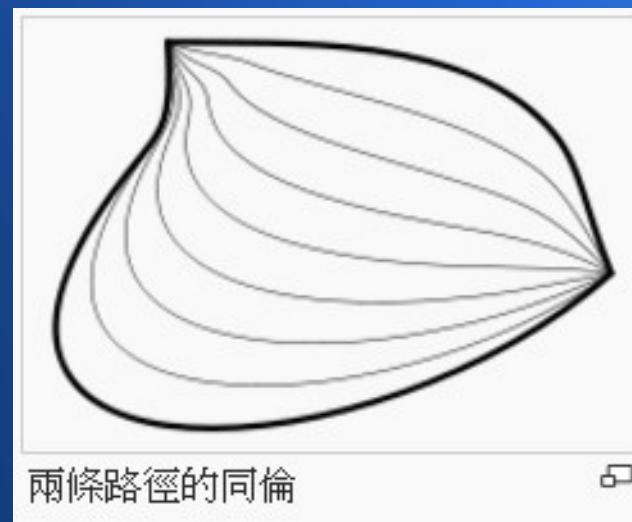
除了同胚以外

- 另一個拓撲學概念是 《同倫 Homotopy》

給定兩個拓撲空間 X 和 Y 。考慮兩個連續函數 $f, g : X \rightarrow Y$ ，若存在一個連續映射 $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ 使得

- $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x)$
- $\forall x \in X, H(x, 1) = g(x)$

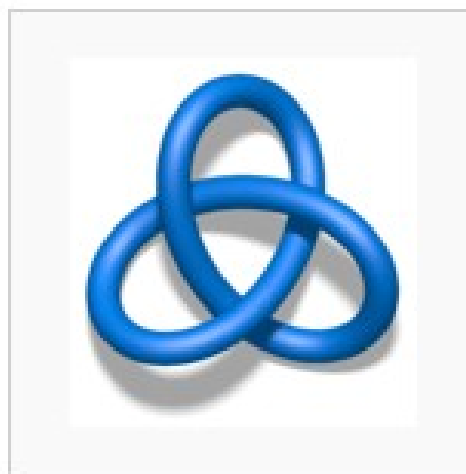
則稱 f, g (在 Y 裡) 同倫。



《同倫》基本上是有路徑將兩空間對應起來的意思！

像是三葉結和圓

- 就同胚但不同倫



The unknot is not equivalent to the trefoil knot since one cannot be deformed into the other through a continuous path of embeddings. Thus they are not ambient-isotopic.

好了！

- 還是不要再講那個我都搞不懂的拓樸學了！

讓我們看看《幾何學的研究對象》

- 也就是空間的分類吧！

所謂的空間 Space

- 在物理學或傳統幾何學中，是由一堆點所形成的，像是
 - 一維空間（線）
 - 二維空間（面）
 - 三維空間（體）

但是在數學上

- 把空間更加抽象化了！

所以才能容納像前述《拓樸學裏的那種空間》！

數學裏的空間

- 是《一群點加上鄰域概念》所形成的
- 所以 $\text{Space} = \text{Point} + \text{Neighbor}$

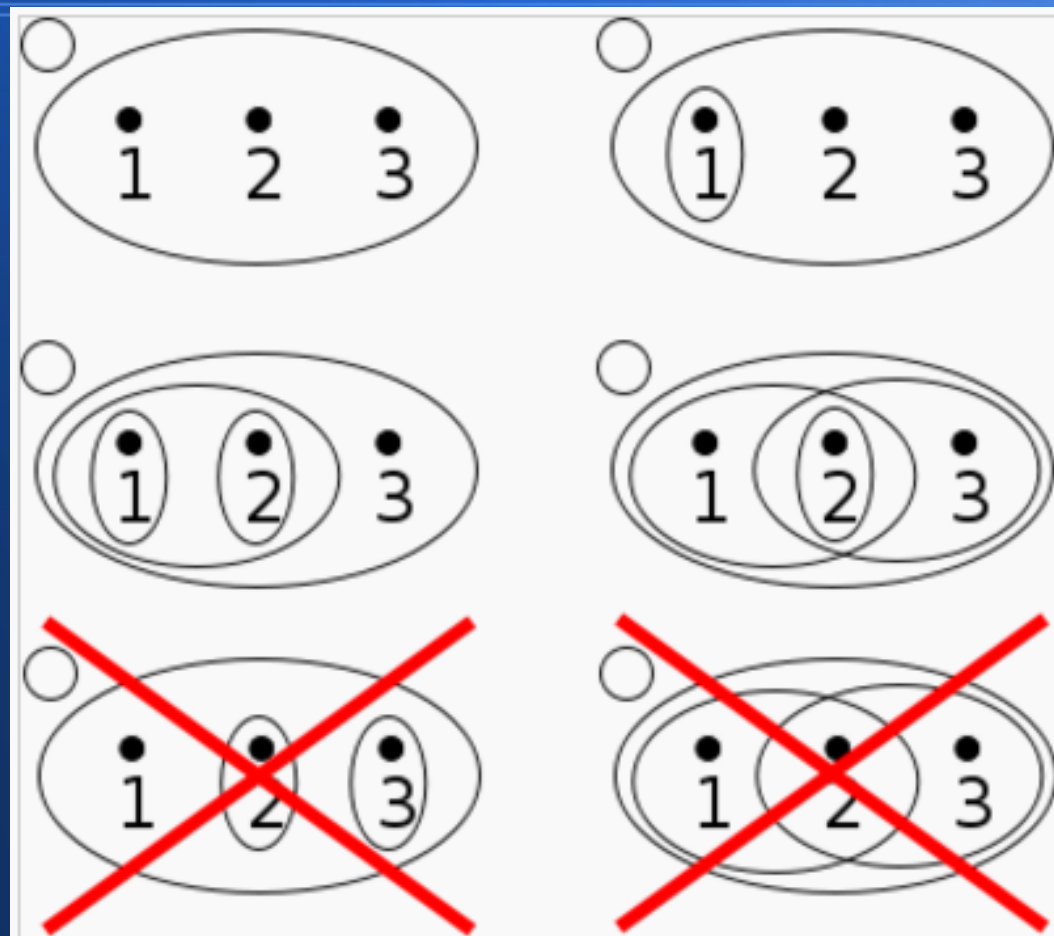
$$S = (P, N)$$

在拓樸空間 Topological Space 裏

- 那些點和鄰域，加上了一些《拓樸性質》限制：
 - 1. 點 x 是自己鄰域 N 的成員
 - 2. 包含 x 鄰域 N 的空間 N^+ 也是 x 的鄰域
 - 3. 兩個 x 鄰域 N_1 與 N_2 的交集 N 也是 x 的鄰域
 - 4. 某鄰域 N 包含 M ，則 N 是 M 內所有點的鄰域

所以在下圖中

- 最下面兩個不是拓撲空間
- 是因為缺了某些鄰域集合的原因



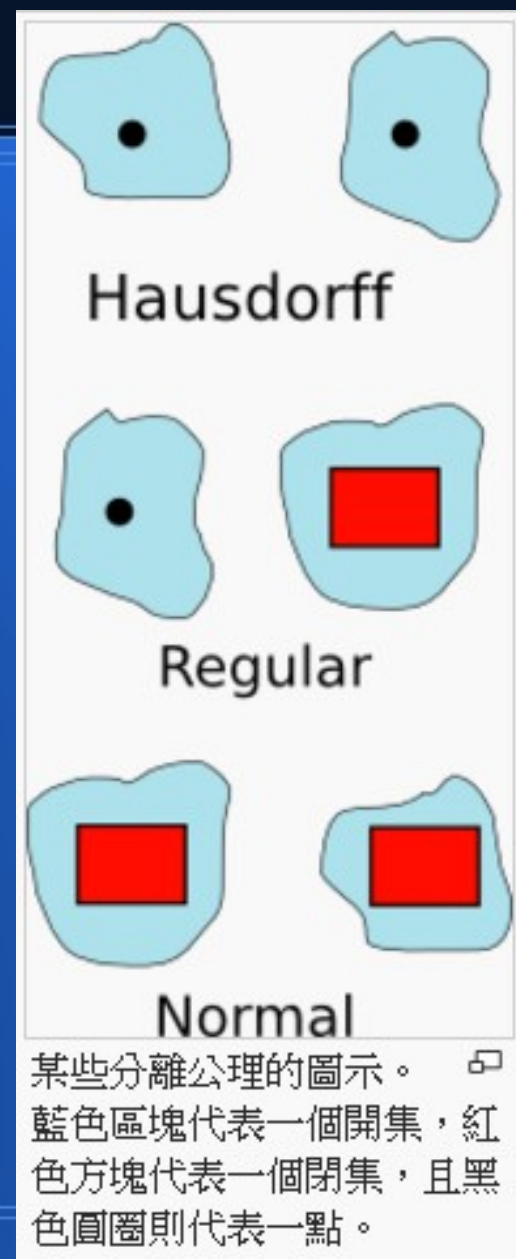
上圖為三點集合 $\{1, 2, 3\}$ 上四個拓撲的例子和兩個反例。左下角的集合並不是個拓撲空間，因為缺少 $\{2\}$ 和 $\{3\}$ 的聯集 $\{2, 3\}$ ；右下角的集合也不是個拓撲空間，因為缺少 $\{1, 2\}$ 和 $\{2, 3\}$ 的交集 $\{2\}$ 。

對於這樣的拓樸空間

- 拉伸、扭曲、變形都不影響拓樸性質
- 但是撕開和挖孔的話，就會影響拓樸性質了！

在拓樸空間中

- 有很多種更細的區分方式
- 是由《分離公理》所造成的
- 主要的分別是根据到底是
《點或區域的分離》而定！
- 其中採用《點點分離》方式所定義的空間，稱為 Hausdorff 空間



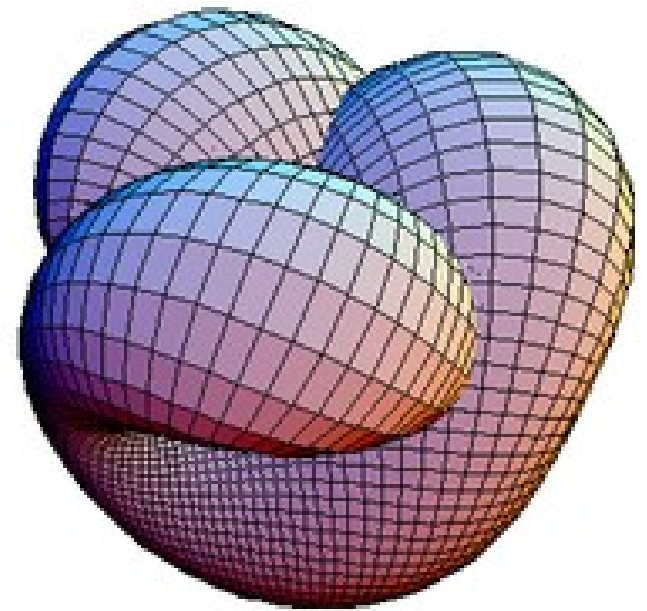
在 Hausdorff 空間中

- 加上《鄰域同胚於歐氏空間》的條件
- 就變成了《流形 Manifold》！

拓樸空間要求定義《鄰域》

- 而《流形》則進一步要求
 - 鄰域要和歐氏空間《同胚》
- n 維流形的任一點之鄰域，
必須和 n 維歐氏空間同胚

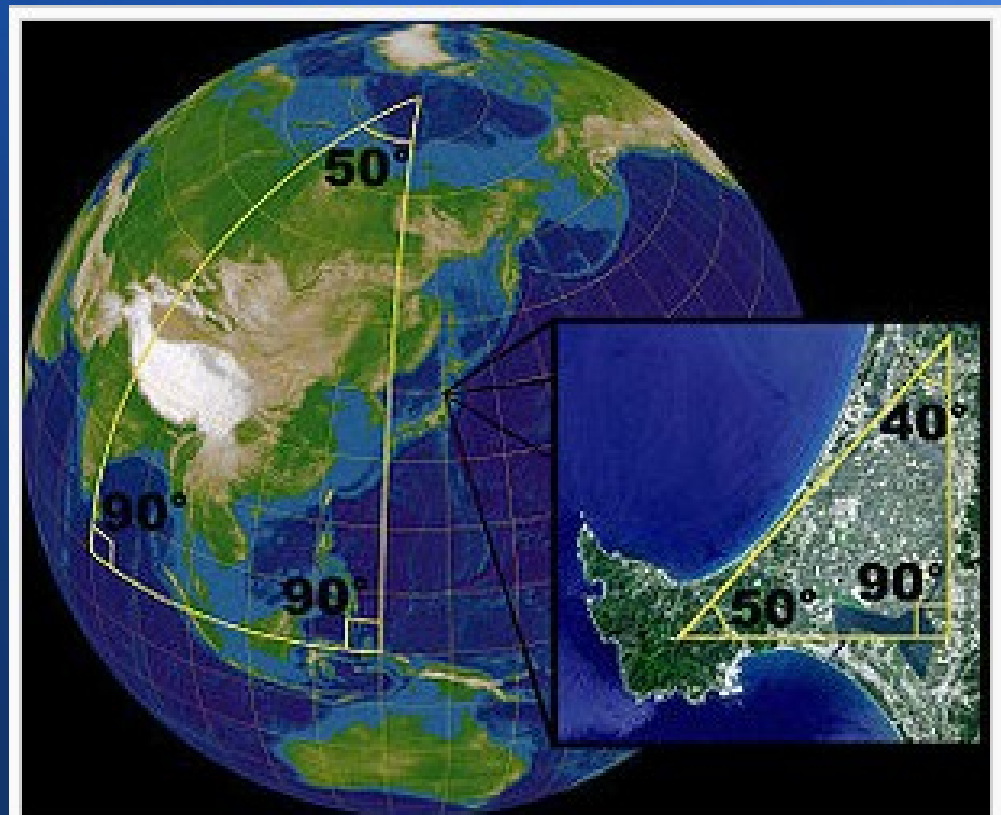
右圖中每一個小格都非常接近二維的歐氏平面



The real projective plane is a two-dimensional manifold that cannot be realized in three dimensions without self-intersection, shown here as Boy's surface.

像是球面的每個小區域

- 都可以映射到
歐氏平面
- 所以球面是個
流形 (Manifold)

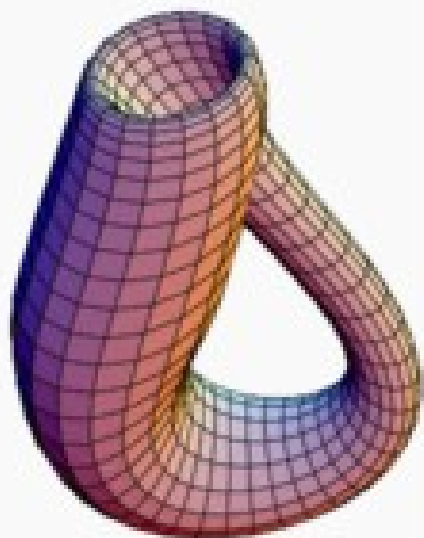


球面(球的表面)為二維的流形，由於它能夠由一群二維的圖形來表示。

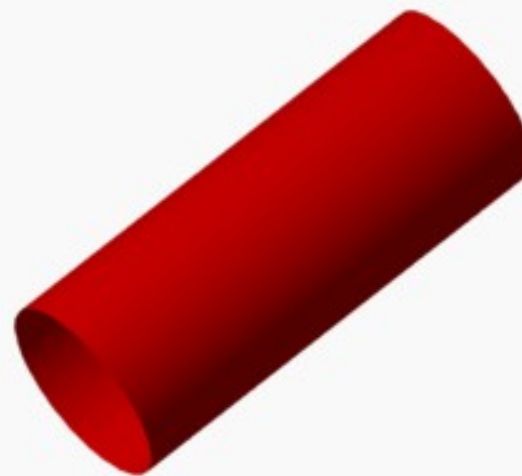


可以拆成數個曲面的空間

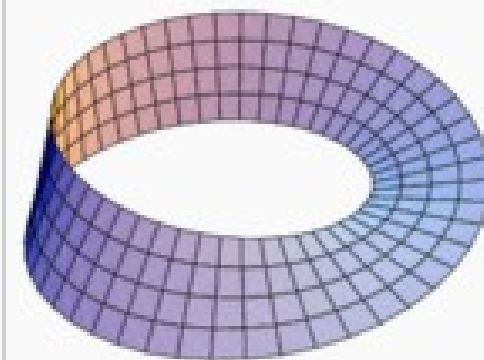
- 基本上都是流形



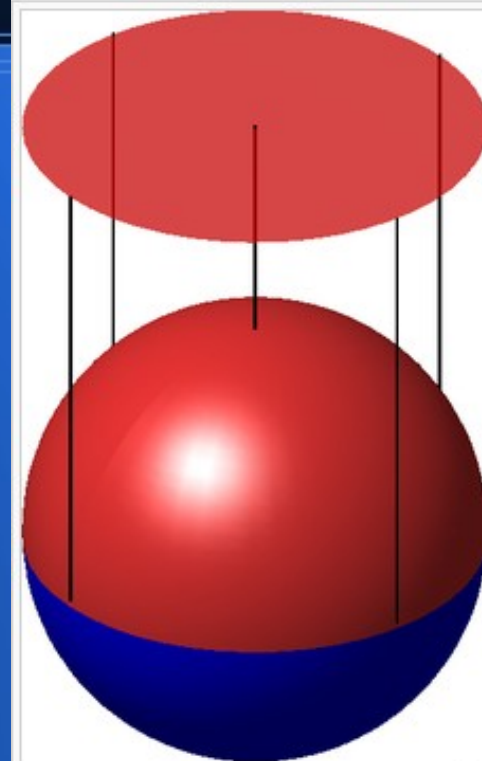
嵌入到三維空間
的克萊因瓶。



有限圓柱面是帶邊界的流形。



莫比烏斯帶



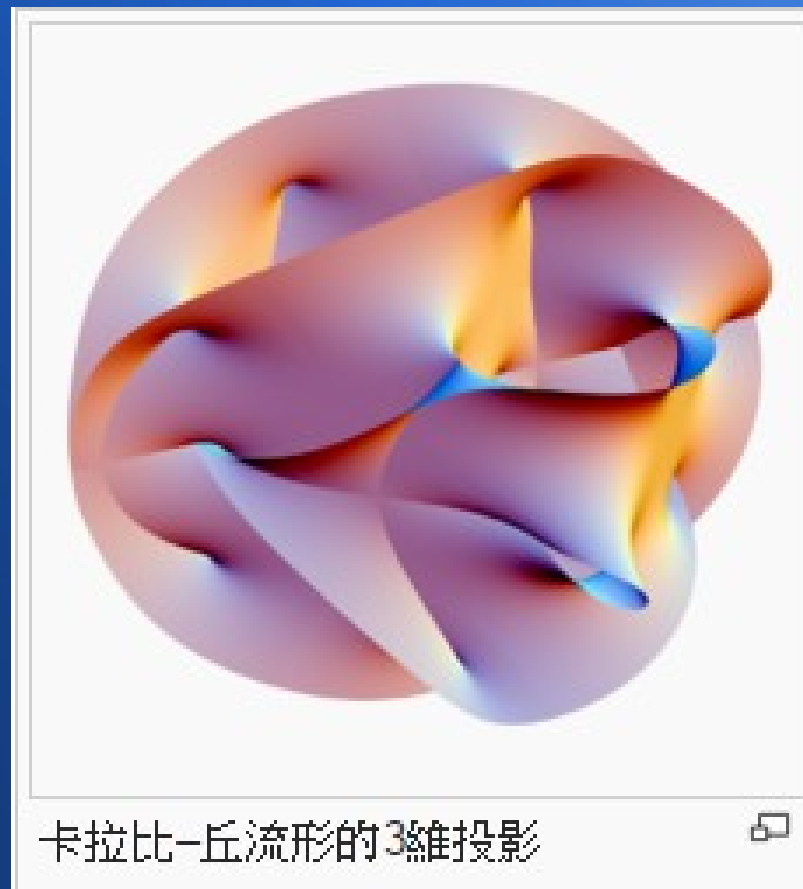
該坐標圖把球面有正 z 坐標的部分
映射到一個圓盤。

流形是介於拓撲和歐氏空間的結構

- 拓撲空間可看作是完全《柔軟的》
- 歐式空間可看作是《堅硬的》
- 而《流形》則是《大範圍柔軟》，
《小範圍卻硬硬的》無法折的結構

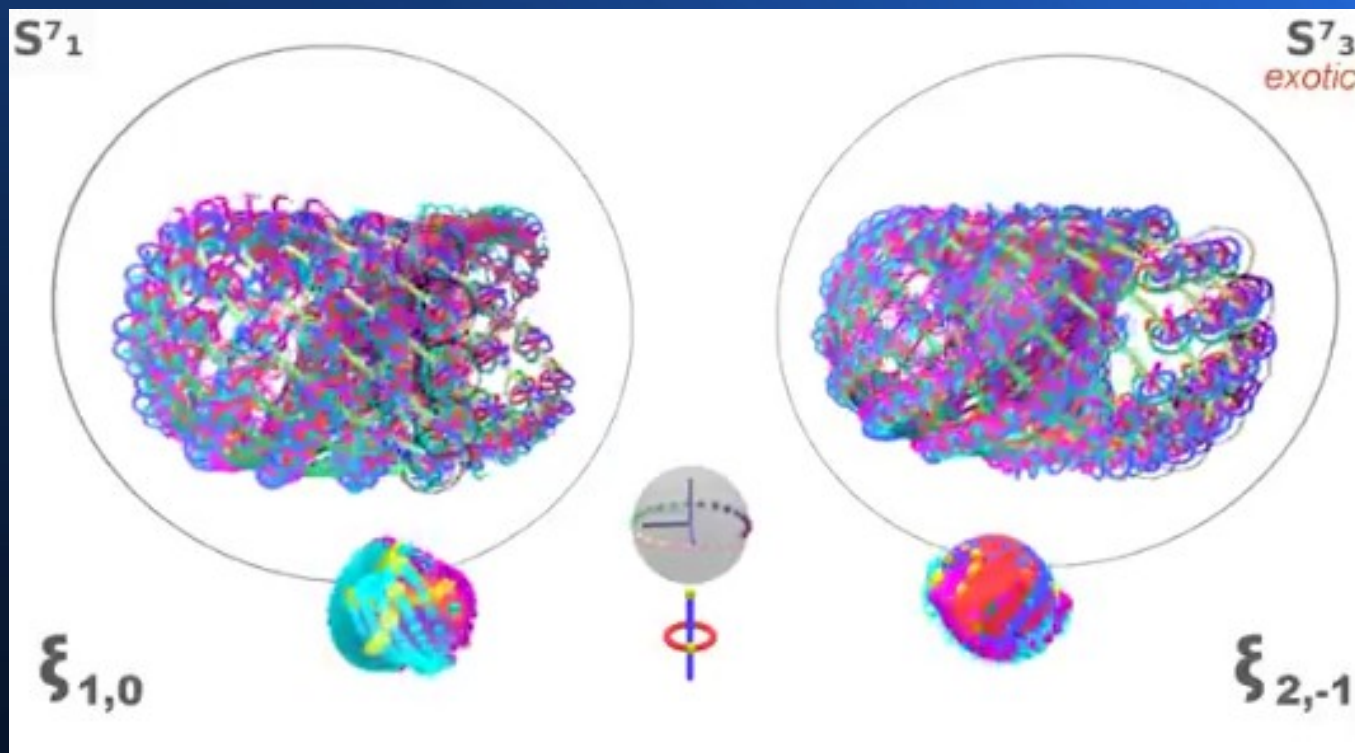
研究拓撲與流形

- 可能需要具備空間扭曲的想像力
- 如果像我一樣，就很難理解 n 維的卡拉比丘流形到底是個甚麼形狀了 …



還有那個七維空間

- 為甚麼有 28 種流形（被稱為七維怪球）的那些事情！



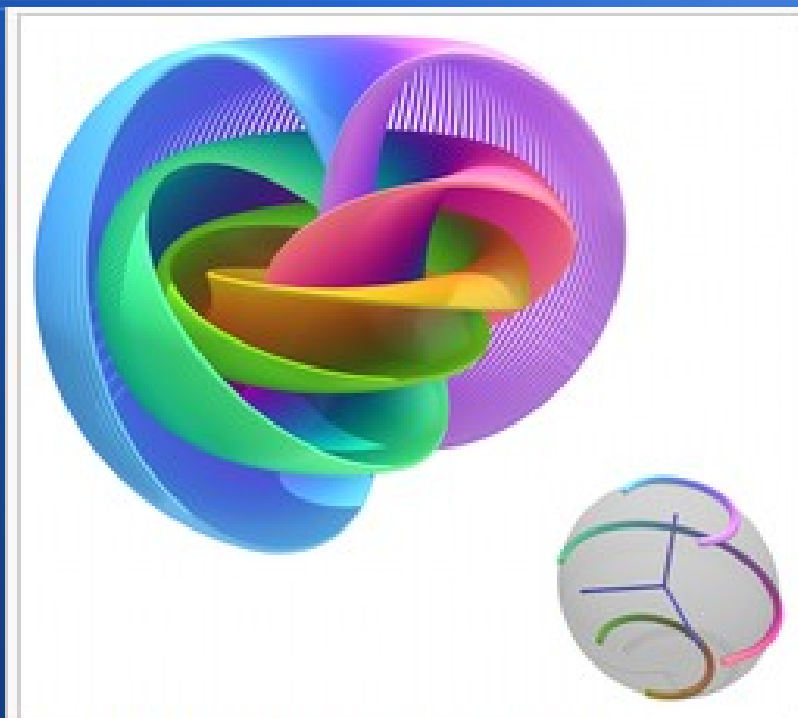
$$S^3 \rightarrow M^7 \rightarrow S^4$$


<http://nilesjohnson.net/seven-manifolds.html>

以及那個《霍普夫纖維叢》 到底是個甚麼東東！



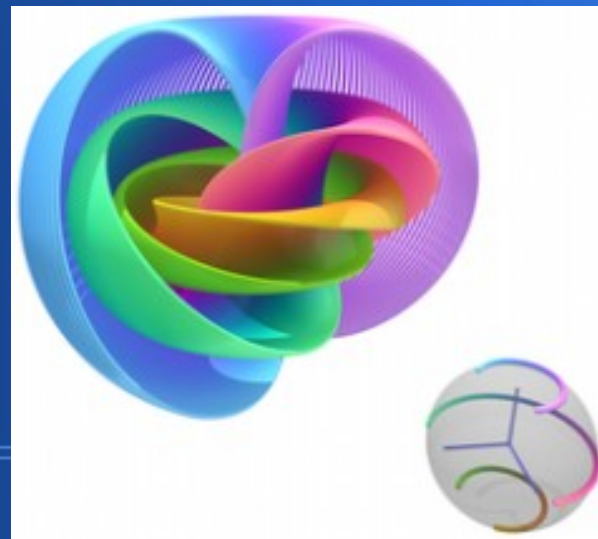
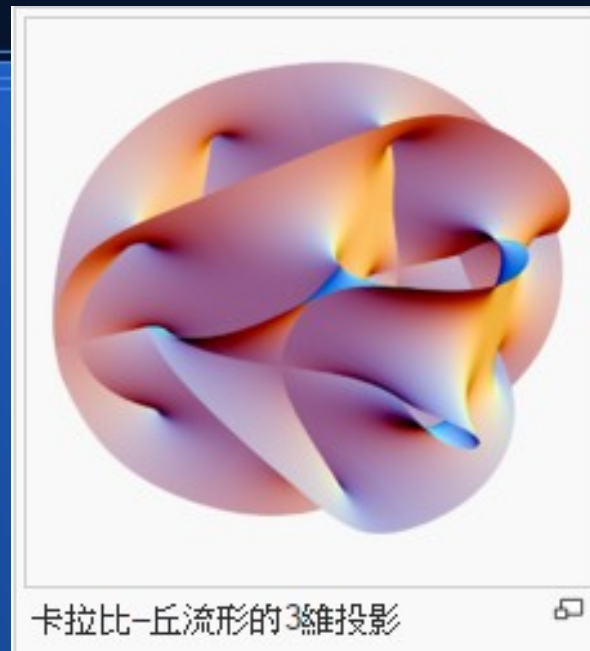
Pairwise linked [keyrings](#) mimic part of the Hopf fibration. 



The Hopf fibration can be visualized using a stereographic projection of S^3 to \mathbb{R}^3 and then compressing \mathbb{R}^3 to a ball. This image shows points on S^2 and their corresponding fibers with the same color. 

關於這些高維流形

- 就請大家自己去研究
- 我是無能為力了！



如果在《流形》中

- 加上可微分的條件，就成了《微分流形》

可 n 次微分的的流形，記為 C^n

- C^1 : 可一次微分的流形
- C^2 : 可二次微分的流形
- ...
- C^∞ : 可無限次微分的流形
- C^0 : 連續但不要求可微分的流形

這些可微分流形

- 就是微分幾何的主要研究對象了！

微分幾何的研究

- 可以用來描述《彎曲空間》的理論

在彎曲的空間中

- 仍然會有距離的概念！
- 只不過得改用《測地線》的距離，
而非《直線距離》！

那種有距離度量的空間

- 稱為度量空間 (Metric Space)

度量空間的定義

- 就是加入了兩點間的距離函數 $d(x, y)$

度量空間是個有序對 (M, d) ，這裡的 M 是集合而 d 是在 M 上的度量(metric)，即為函數

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

使得對於任何在 M 內的 x 、 y 、 z ，下列條件均成立：

1. $d(x, y) \geq 0$ (非負性)
2. $d(x, y) = 0$ 若且唯若 $x = y$ (不可區分者的同一性)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (對稱性)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)。

條件 1 可由其他三個條件中導出^[1]。條件 1 做為度量空間的性質更恰當一些，但是很多課本都將其包含於定義之中。

完備度量空間

Complete Metric Space

- 則要求這個空間中《沒有縫隙》且《不缺皮》
- 用數學的方式定義，則是：
 - 空間中的柯西序列都收斂在該空間之內

所謂的柯西數列定義如下

實數的柯西序列 [編輯]

一個實數序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

被稱為**柯西序列**，如果對於任何正實數 $r > 0$ ，存在一個正**整數** N 使得對於所有的整數 $m, n \geq N$ ，都有

$$|x_m - x_n| < r,$$

其中的豎線表示**絕對值**。

類似地，我們可以定義**複數**的柯西序列。

度量空間中的柯西序列 [編輯]

為了將柯西序列的定義推廣到一般的**度量空間**，必須將**絕對值**替換為該度量空間中的**距離**。

形式上說，給定任何一個度量空間 (M, d) ，一個序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

被稱為**柯西序列**，如果對於任何正實數 $r > 0$ ，存在一個正**整數** N 使得對於所有的整數 $m, n > N$ ，都有

$$d(x_m, x_n) < r$$

其中 $d(x, y)$ 表示 x 和 y 之間的距離。

直觀上說，一個序列中的元素越來越靠近似乎說明這個序列必然在這個度量空間存在一個極限，而事實上在某些情況下這個結論是不對的。

柯西數列

Cauchy sequence

- 不一定會收斂到該空間中的一點

- 因為有可能

《收斂點》

不在空間內

- 對於有絕對值作為範數的有理數空間 \mathbb{Q} ，定義數列：

$$x_1, x_2, x_3, \dots \text{滿足： } x_n = \frac{[\sqrt{2}n]}{n}$$

這個數列趨於 $\sqrt{2}$ ，但 $\sqrt{2}$ 不屬於 \mathbb{Q} ，因此這個數列不收斂。

- 對於所有多項式組成的空間，定義每個多項式的範數是其係數絕對值的最大值，兩個多項式之間的距離則是它們的差的範數。考慮多

項式列： x_1, x_2, x_3, \dots 滿足： $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ 。這個多項式列

$$\text{中，對任意 } m > n \in \mathbb{N}, d(x_m, x_n) = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{x^k}{k} \right\| = \frac{1}{n+1}$$

，趨於零，因此它是一個柯西序列。但這個柯西序列顯然不收斂，因為它的元素次數趨於無窮。

向量空間

Vector Space

- 是定義了《向量加法交換群》與《純量對向量之乘法》的空間。
- 也就是具有《代數》中《模 Module》結構的空間。

在環 $(R, +, \cdot)$ 上的一個左 R -模包括一個阿貝爾群 $(M, +)$ ，以及一個算子 $R \times M \rightarrow M$ (叫做標量乘法或數積，通常記作 rx ， $r \in R$ 及 $x \in M$) 有對所有 $r, s \in R, x, y \in M$,

1. $(rs)x = r(sx)$
2. $(r+s)x = rx+sx$
3. $r(x+y) = rx+ry$
4. $1x = x$

一個左 R -模 M 不時記作 ${}_R M$ 。

如果在向量空間中加上內積運算

- 就成了內積空間
(Inner Product Space)

- 內積定義如右：

在歐氏空間的範例如下

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta = \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{a}\| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

- Conjugate symmetry:^[Note 1]

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

- Linearity in the first argument:

$$\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

- Positive-definiteness:

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}.$$

有內積且完備的空間

- 稱為《希爾伯特空間 Hilbert Space》

當向量空間中有內積時

- 就可以讓向量 v 和自己進行內積
 - 得到 $v \circ v$
 - $v \circ v$ 的平方根稱為範數 Norm
 - 有範數的空間就稱為賦範空間

賦範向量空間

Normed Vector Space

- 是在向量空間中加上《範數 norm》運算

- 範數的要求為：

例如歐氏空間

中的範數公式

如下：

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

假設 V 是域 F 上的向量空間； V 的半範數是一個函數 $p : V \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto p(x)$ ，滿足：

$$\forall a \in F, \forall u, v \in V,$$

1. $p(v) \geq 0$ (半正定性)
2. $p(av) = |a|p(v)$ (絕對一次齊次性)
3. $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ (三角不等式)

範數是一個半範數加上額外性質：

4. $p(v) = 0$ 若且唯若 v 是零向量 (正定性)

歐氏空間中向量 x 與自己的內積，也就是 $x \cdot x$ 就是範數！

而具有完備性質的賦範向量空間

Complete Normed Vector Space

- 又稱為巴拿赫空間 (Banach space)

- 直覺意義是：

沒有縫隙且不缺皮的賦範向量空間

- 空間中完備的意義是

柯西數列會收斂！

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

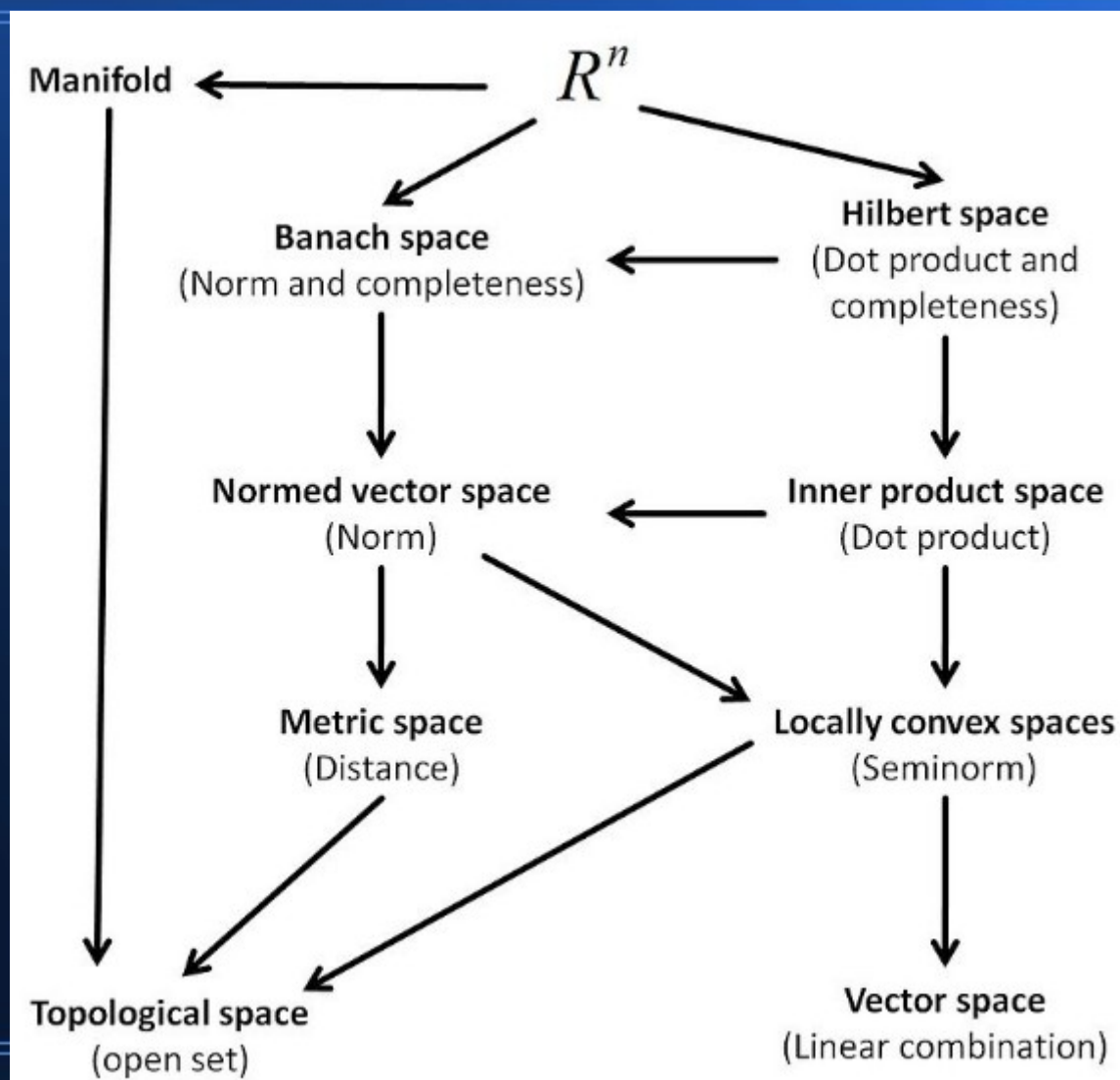
or equivalently:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

像是 n 為的實數空間 \mathbb{R}^n

- 也就是《歐幾里得空間》
 - 是具有完備性質的向量空間
 - 滿足《巴拿赫空間》的條件！

介紹完這些，您應該可以看懂
下列這張數學空間關係圖了



不過必須強調的是

- 空間裡並沒有規定甚麼樣的東西才可以代表《點》。
- 只要有鄰域或距離定義就可以了！

所以

- 一個函數也可以看做一個點
- 只要定義出函數與函數之間的距離就好了！

於是在希爾伯特空間中

- 三角函數 $\sin(nx)$ 與 $\cos(nx)$ 都可以被看做點
- 然後就可以用幾何的方式看待這些點，形成以函數為點的幾何學了！

根據上述的空間分類

- 不同的《空間特性》就會發展出不同的《幾何學》！

而這些空間的分類方式

- 往往與《微分屬性》，像是
《曲率》有密切關連！

像是

- 《零曲率》的《歐氏幾何》
- 《正曲率》的《球面幾何》
- 《負曲率》的《雙曲幾何》
- 《不固定曲率》的《微分幾何》

這種分類

- 就是根據空間曲率所區分的！

在愛因斯坦發展出相對論之後

- 《黎曼幾何》和《微分幾何》成了非常重要的數學！

而黎曼幾何和微分幾何

- 又和《張量代數》有密切的關係！
- 關聯性可以從《相對論》中找到

因為相對論中

- 有兩個重要的原理
 - 相對性原理
 - 等效原理

相對性原理說

- 物理定律在慣性座標轉換時
維持相同的形式

根據相對性原理

- 我們應該找出在《座標轉換》下不變的那種物理公式，作為相對論物理學的公理系統！

這種座標轉換系統

- 就是《張量代數》所討論的內容！

而張量代數

- 則是雙線性形式的高維向量代數

張量和微分幾何之間

- 有非常密切的關係！

在狹義相對論中

- 我們可以用《閔可夫斯基幾何》
來描述物理世界！

而在廣義相對論中

- 那些重力場方程式，則是使用《張量》來描述的！
- 這正是因為《張量》就是用來描述《曲面幾何》的利器。

廣義相對論的等效原理說

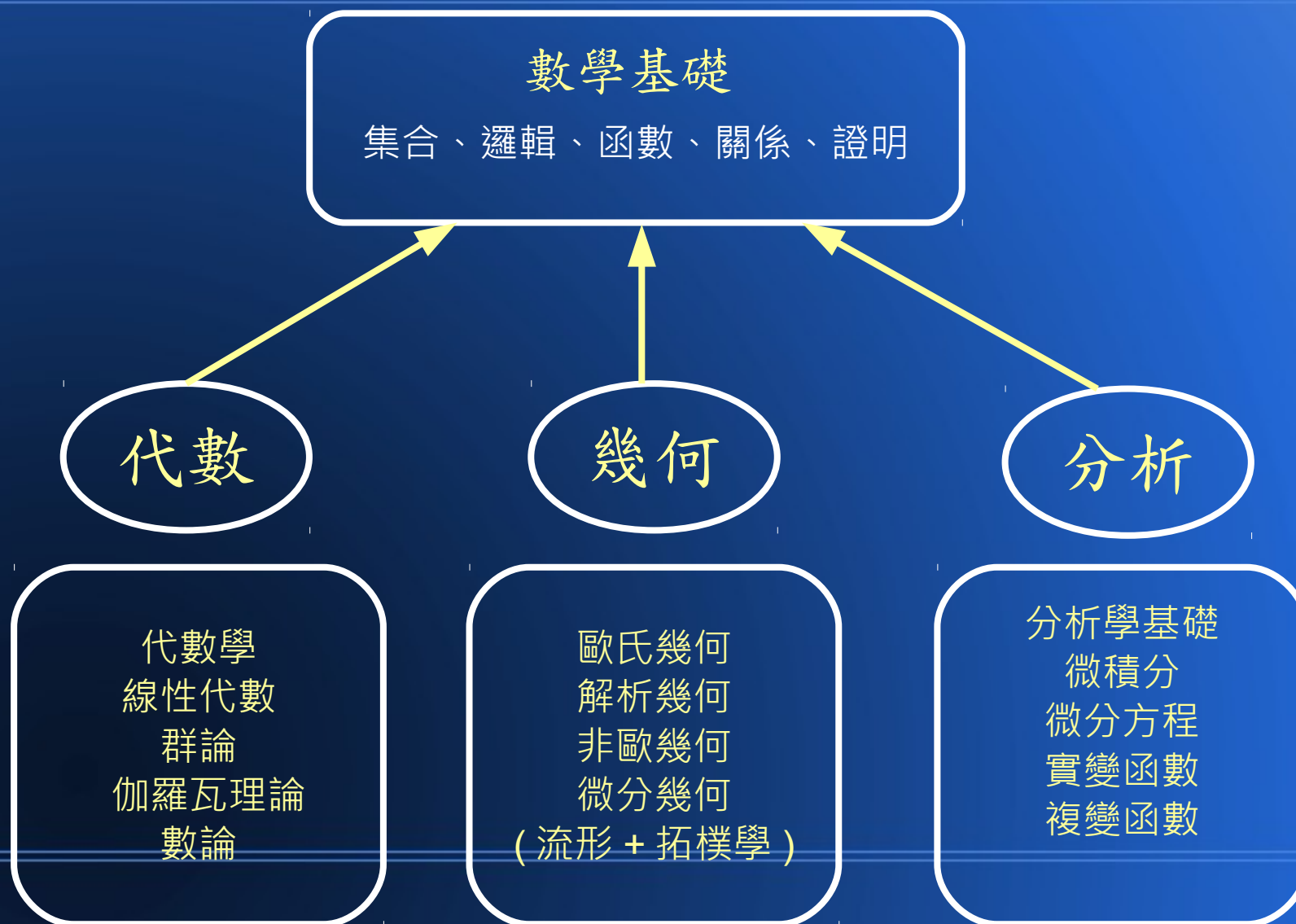
- 《引力》和《加速度》在物理定律上的效果相當！
- 於是廣義相對論就必須找出一組《讓引力與加速度等同》的張量代數體系

於是幾何、代數、微積分和物理學

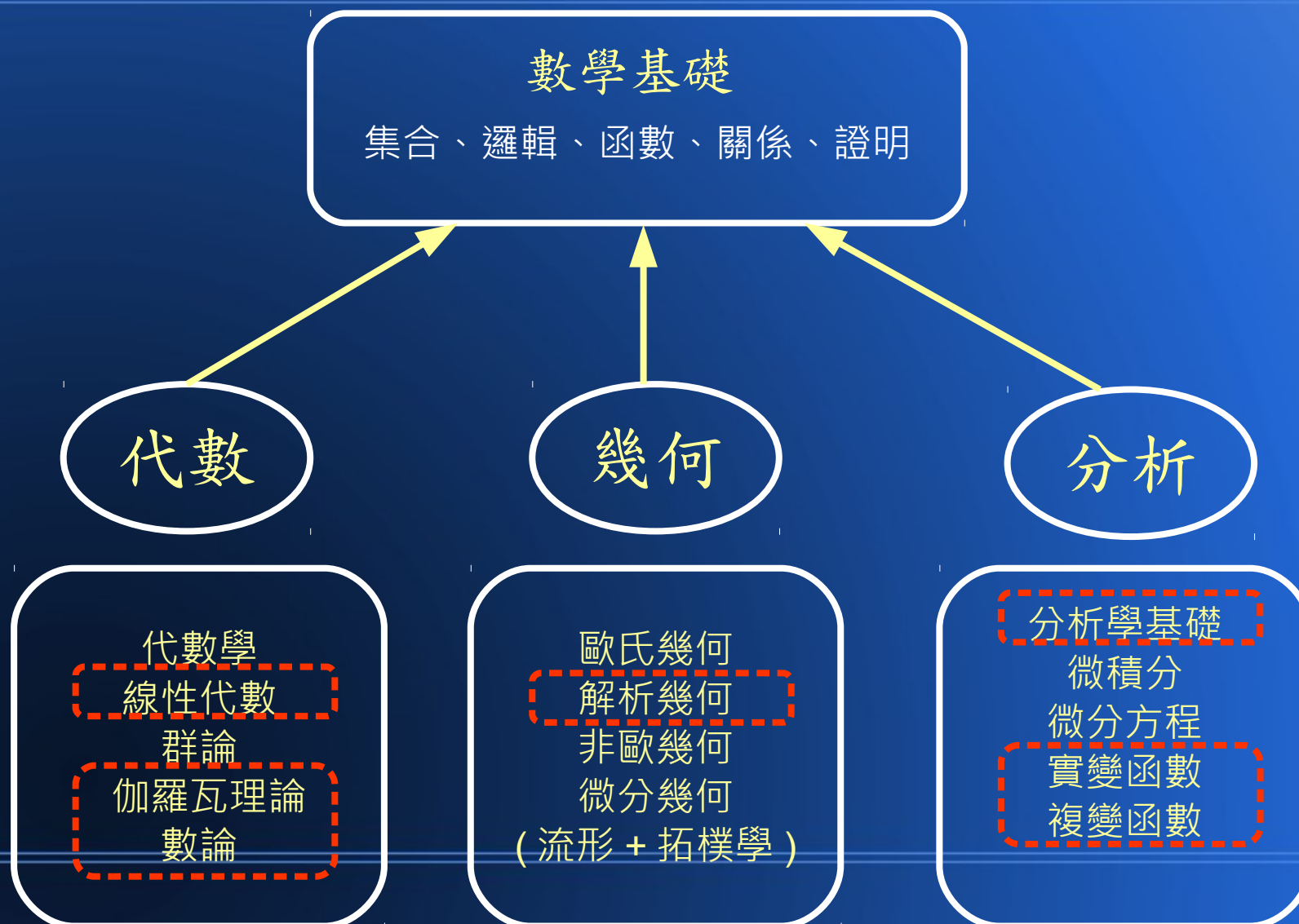
- 透過《張量、流形、相對論》

密切的結合在一起了！

讓我們再回顧一下 今天學到的整體數學架構



其中有一些沒講到的部分



像是解析幾何

幾何

- 就是用座標描述的那種幾何
- 這是笛卡兒時代開始發展的
- 基本上是《用代數手法描述幾何學》

歐氏幾何
解析幾何
非歐幾何
微分幾何
(流形 + 拓樸學)

而線性代數

代數

- 研究的是向量與矩陣的代數
- 但是卻很緊密的和《向量空間》
結合，成為研究幾何學的利器
- 和微積分結合後又發展出《向量微積分》，成為分析學的重要領域。

代數學
線性代數
群論
伽羅瓦理論
數論

數論

代數

- 則是專門研究整數的理論
- 像是質數就一直是很多數學家研究的對象！

代數學
線性代數
群論
伽羅瓦理論
數論

《伽羅瓦理論》

- 則是用群論來證明《五次以上多項式沒有公式解》的理論
- 也是可以用來證明《古希臘幾何三大問題》無解的理論。

代數

代數學
線性代數
群論
伽羅瓦理論
數論

古希臘幾何三大問題如下

- 只能用《圓規和直尺》，請解決下列問題：
 - 三等分任意角：作圖三等份指定的角。
 - 化圓為方：做出和圓面積一樣的正方形。
 - 倍立方體：做出兩倍體積的立方體。

很意外的

- 證明古希臘幾何三大問題不可解的方法，竟然是用代數的理論，而不是幾何的！

分析學基礎

- 通常是《高等微積分》課程關注的內容！

分析

分析學基礎

微積分

微分方程

實變函數

複變函數

實變函數

- 研究以實數為變數的函數

分析

分析學基礎

微積分

微分方程

實變函數

複變函數

複變函數

- 當然就是研究以複數為變數的函數了！

分析

分析學基礎

微積分

微分方程

實變函數

複變函數

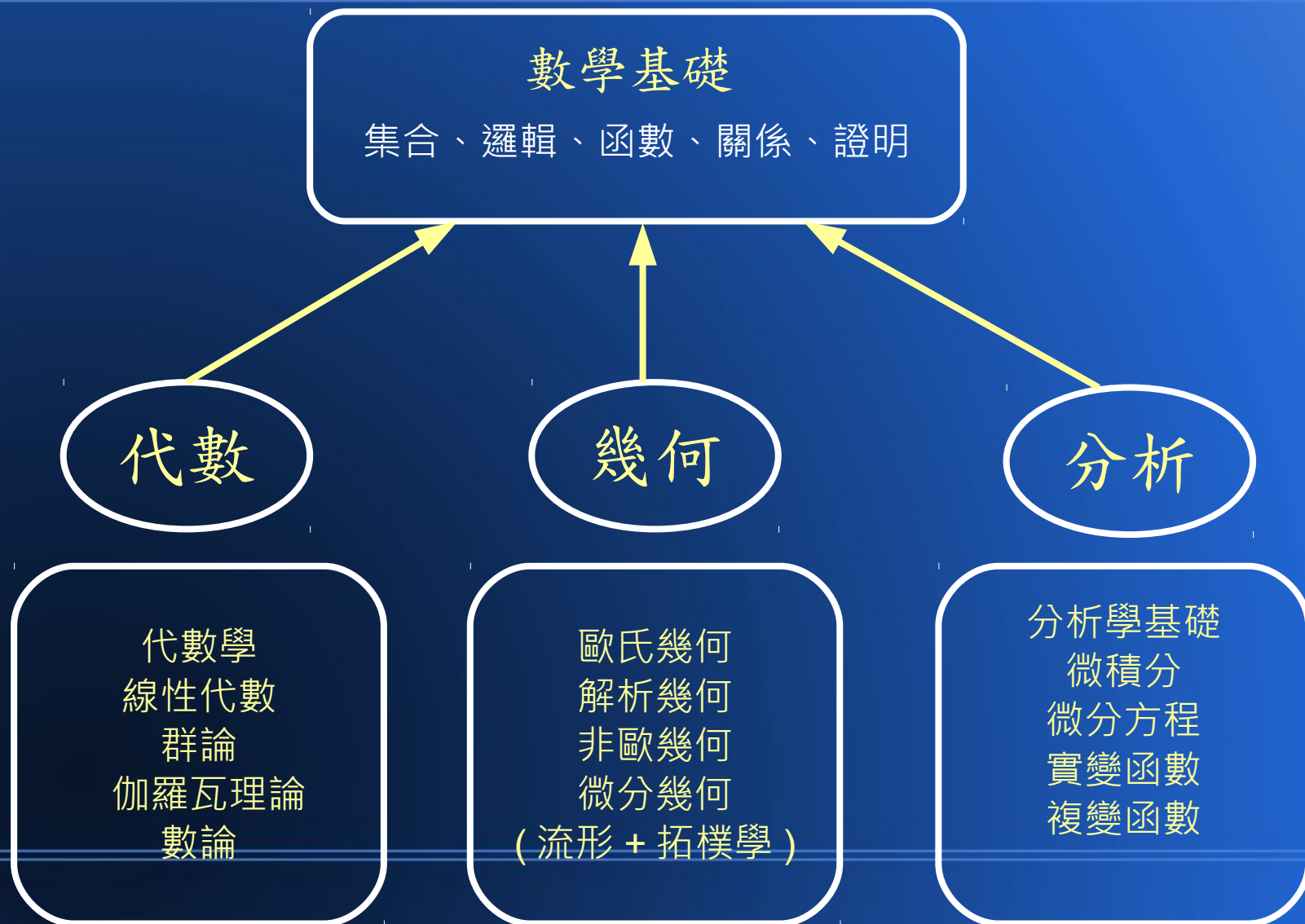
在數學的世界裡

- 代數、幾何、分析三大領域
- 總是有非常神秘又強烈的關聯

我想這也是為何

- 數學家們認為這三者是
《極度重要數學領域》
的原因了！

現在、你應該清楚 下列數學領域的大致內容了吧！



這就是我們今天的

- 十分鐘系列！

我們下回見！

Bye Bye!