Anlisi 1

Nicolò Montalti

1 Limiti di successioni

Teorema 1.1 (Unicità del limite). *Sia* $\alpha,\ \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\textit{Se } a_n \to \alpha, a_n \to \beta \implies \alpha = \beta$$

Teorema 1.2 (TLS Limiti delle sottosuccessioni). *Sia* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\textit{Se } a_n \to \alpha \implies \forall (a_k)_n \ \textit{s.s di } a_n \ \textit{si ha } (a_k)_n \to \alpha$$

Teorema 1.3 (TPS Permanenza del segno). *Siano* $(a_n),\ (b_n)$ *s. in* $\mathbb{R},\ \ a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\textit{Se } a_n \to a,\ b_n \to b,\ a_n \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \implies a \le b$$

Teorema 1.4 (T2C Due carabinieri). *Siano* $(a_n),\ (b_n),\ (c_n)$ *s. in* $\mathbb{R},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\textit{Se } a_n \to \lambda,\ b_n \to \lambda,\ a_n \le b_n \le c_n\ \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \to \lambda$$

Teorema 1.5 (TSM Successioni monotone).

$$\textit{Se } (a_n) \nearrow \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$
$$\textit{Se } (a_n) \searrow \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$

Teorema 1.6 (Criterio del rapporto). *Sia* $a_n > 0$ *s. in* $\mathbb{R}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\textit{Se } \lambda > 1 \implies a_n \to +\infty$$
$$\textit{Se } \lambda < 1 \implies a_n \to 0$$

Teorema 1.7 (CSE Continuità sequenziale dell'esponenziale). *Sia* x_n *s. in* $\mathbb{R}$.

$$\textit{Se } x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \implies e^{x_n} \to e^{x_0}$$

Teorema 1.8 (CSL Continuità sequenziale del logaritmo). *Sia* x_n *s. in* $\mathbb{R}$.

$$\textit{Se } x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \implies log_a(x_n) \to log_a(x_0)$$

Teorema 1.9 (Criterio di Cesaro). *Siano* $a_n,\ b_n$ *s. in* $\mathbb{R}$, $b_n \nearrow$ *s.*, $b_n \to +\infty$.

$$\textit{Se } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

2 Limiti di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$, $\alpha \in D(A)$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}^M (\bar{\mathbb{R}}$ se $M = 1)$

Teorema 2.1 (Unicità del limite).

$$\textit{Se } f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda,\ f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \mu \implies \lambda = \mu$$

Teorema 2.2 (TLR Limite delle restrizioni). *Sia $B \subseteq A$, $\alpha \in D(B)$.*

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda \implies f|_B(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda$$

dove $f|_B : B \to \mathbb{R}^M$, $f|_B(x) := f(x)$

Teorema 2.3 (CSL Caratterizzazione sequenziale del limite).

$$f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda \iff f(x_n) \to \lambda \quad \forall (x_n) \text{ s. in } A \setminus \alpha,\ x_n \to \alpha$$

Teorema 2.4 (TLM Limite delle funzioni monotone). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^M$, $f \nearrow$*

$$\begin{aligned}
\text{Se } x_0 \in D(A^-_{x_0}) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to x_0^-]{} \sup_{A^-_{x_0}} f\\
\text{Se } x_0 \in D(A^+_{x_0}) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to x_0^+]{} \inf_{A^-_{x_0}} f\\
\text{Se } +\infty \in D(A) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \sup_A f\\
\text{Se } -\infty \in D(A) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} \inf_A f
\end{aligned}$$

dove $A^-_{x_0} := A \cap\ ]-\infty, x_0[$, $A^+_{x_0} := A \cap\ ]x_0, +\infty[$. Un risultato analogo vale per $f \searrow$

3 Continuità

Teorema 3.1 (CSC Caratterizzazione sequenziale della continuità). *Sia $x_0 \in A$. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$, $x_0 \in A$.*

$$f \text{ è continua in } x_0 \iff f(x_n) \to f(x_0) \quad \forall x_n \to x_0$$

Teorema 3.2 (Bolzano). *Siano a, $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f \in C([a,b], \mathbb{R})$.*

$$\text{Se } f(a)f(b) \le 0 \implies \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = 0$$

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$.

Teorema 3.3 (TVI Valore intermedio). *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$.*

$$\begin{aligned}
\text{Dato } y \in \mathbb{R} : f(a) < f(y) < f(b) &\implies \exists x_0 \in I : f(x_0) = y\\
&\quad f(I) \text{ è un intervallo}
\end{aligned}$$

Teorema 3.4. *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$, f 1-1, posto $J = f(I)$. Allora*

$$\begin{aligned}
&J \text{ è un intervallo, } f \xrightarrow[su]{1-1} J\\
&f^{-1} \in C(J)
\end{aligned}$$

Teorema 3.5 (Weierstrass). *Sia $A \in \mathbb{R}$ chiuso e limitato, $f \in C(A, \mathbb{R}) \implies \exists \max_A f$, $\exists \min_A f$*

4 Derivate

Teorema 4.1 (Fermat). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Se } x_0 \text{ è un p.to estremante locale} \implies f'(x_0) = 0$$

Teorema 4.2 (Rolle). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, f derivabile in $]a,b[$.*

$$\text{Se } f(a) = f(b) \implies \exists x_0 \in\ ]a,b[\ : f'(x_0) = 0$$

Teorema 4.3 (TVML Valor medio di Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, f derivabile in $]a,b[$.*

$$\text{Allora } \exists x_0 \in \,]a,b[\, : f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema 4.4 (TM Test monotonia). *Sia I un intervallo su $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I.*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ è costante in } I \tag{1}$$
$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f \nearrow \tag{2}$$
$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f \nearrow s. \tag{3}$$
$$f \nearrow s. \iff \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ int(\{x \in \mathbb{R} / f'(x) = 0\}) = \emptyset \end{cases} \tag{4}$$

Teorema 4.5 (Taylor con resto di Peano). *Siano I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0. Allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^n)_{x \to x_0}$$

Teorema 4.6 (Tayor con resto di Lagrange). *Siano I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0. Allora $\forall x \in I \quad \exists y_x \in (x_0, x)$ tale che*

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(y_x)}{n!}(x-x_0)^n$$

Teorema 4.7 (TH De l'Hôpital). *Siano I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in D(I)$, $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$. $f(x)$, $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ o $|g(x)| \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$. Allora*

$$\text{se } \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda$$

Teorema 4.8. *Sia I intervallo non banale di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora f è convessa $\iff f' \nearrow$*

Teorema 4.9. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in I. Allora f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$*

Teorema 4.10. *Sia $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in \mathring{I}$ con $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k \leq n$ e $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Allora*

x_0 è un punto di massimo locale forte di f se (n+1) è pari e $f^{(n+1)}(x_0) < 0$

x_0 è un punto di minimo locale forte di f se (n+1) è pari e $f^{(n+1)}(x_0) > 0$

x_0 non è un punto estremante se (n+1) è dispari

5 Integrali

Teorema 5.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e $c \in \,]a,b[$.*

$$\text{Se } f \in C([a,b],\mathbb{R}) \implies f \in R_{[a,b]}$$
$$\text{Se } f \text{ è monotona} \implies f \in R_{[a,b]}$$
$$\{x \in [a,b] / f \text{ non è continua in } x\} \text{ è finito} \implies f \in R_{[a,b]}$$
$$f \in R_{[a,c]},\ f \in R_{[c,b]} \iff f \in R_{[a,b]}$$

Teorema 5.2. *Siano $f, g \in R_{[a,b]}$. Allora*

$$\text{Se } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|dx \right|$$

Teorema 5.3 (1TFC Primo teorema fondamentale del calcolo)**.** *Siano* $f \in R_{[a,b]}$*,* $F(X) = \int_a^x f(t)dt : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Allora*

$$F \in C([a,b],\mathbb{R})$$
$$\textit{Se } f \textit{ è continua in } x_0 \implies f(x_0) = F'(x_0)$$

Teorema 5.4 (2TFC Secondo teorema fondamentale del calcolo)**.** *SIano* $f \in R_{[a,b]}$ *e* Φ *una primitiva di* f*. Allora*

$$\int_a^b f(t)dt = [\Phi(t)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Teorema 5.5 (Taylor con resto integrale)**.** *Sia* $f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$*,* $x_0 \in [a,b]$*. Allora*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

6 Integrali generalizzati

Siano $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < \beta$, $f \in C([a,\beta[,\mathbb{R})$.

Teorema 6.1 (C∃ Criterio di esistenza)**.**

$$\textit{Se } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,\beta[\implies \exists \int_a^\beta f(x)dx \in [0,+\infty]$$

Teorema 6.2 (CC Criterio del confronto)**.** *Sia* $f(x) \geq 0$*,* $g(x) \geq 0$*,* $\forall x \in [a,\beta[$*.*

$$\textit{Se } f(x) = \mathcal{O}_{x\to\beta^-}(g(x)),\ \int_a^\beta g \in \mathbb{R} \implies \int_a^\beta f \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.3 (CCA Criterio di convergenza assoluta)**.**

$$\textit{Se } \int_a^\beta |f| \in \mathbb{R} \implies \exists \int_a^\beta f \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.4 (CFO Criterio delle funzioni oscillanti)**.** *Sia* $f \in C([a,\beta[,\mathbb{R}) : f$ *abbia una primitiva limitata in* $[a,\beta[$*,* $g \in C^1([a,\beta[,\mathbb{R}) : g \searrow_{x\to\beta^-} 0$*. Allora*

$$\exists \int_a^\beta fg \in \mathbb{R}$$