

Anlisi 1

Nicolò Montalti

1 Limiti di successioni

Teorema 1.1 (Unicità del limite). *Sia $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \alpha, a_n \rightarrow \beta \implies \alpha = \beta$$

Teorema 1.2 (TLS Limiti delle sottosuccessioni). *Sia $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \alpha \implies \forall (a_k)_n \text{ s.s di } a_n \text{ si ha } (a_k)_n \rightarrow \alpha$$

Teorema 1.3 (TPS Permanenza del segno). *Siano $(a_n), (b_n)$ s. in \mathbb{R} , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$$

Teorema 1.4 (T2C Due carabinieri). *Siano $(a_n), (b_n), (c_n)$ s. in \mathbb{R} , $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \lambda, b_n \rightarrow \lambda, a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \rightarrow \lambda$$

Teorema 1.5 (TSM Successioni monotone).

$$\begin{aligned} \text{Se } (a_n) \nearrow &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n) \\ \text{Se } (a_n) \searrow &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (a_n) \end{aligned}$$

Teorema 1.6 (Criterio del rapporto). *Sia $a_n > 0$ s. in \mathbb{R} , $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\begin{aligned} \text{Se } \lambda > 1 &\implies a_n \rightarrow +\infty \\ \text{Se } \lambda < 1 &\implies a_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Teorema 1.7 (CSE Continuità sequenziale dell'esponenziale). *Sia x_n s. in \mathbb{R} .*

$$\text{Se } x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \implies e^{x_n} \rightarrow e^{x_0}$$

Teorema 1.8 (CSL Continuità sequenziale del logaritmo). *Sia x_n s. in \mathbb{R} .*

$$\text{Se } x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \implies \log_a(x_n) \rightarrow \log_a(x_0)$$

Teorema 1.9 (Criterio di Cesaro). *Siano a_n, b_n s. in \mathbb{R} , $b_n \nearrow$ s., $b_n \rightarrow +\infty$.*

$$\text{Se } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

2 Limiti di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\alpha \in D(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^M$ ($\overline{\mathbb{R}}$ se $M = 1$)

Teorema 2.1 (Unicità del limite).

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \mu \implies \lambda = \mu$$

Teorema 2.2 (TLR Limite delle restrizioni). *Sia $B \subseteq A$, $\alpha \in D(B)$.*

$$Se f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda \implies f|_B(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda$$

dove $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}^M$, $f|_B(x) := f(x)$

Teorema 2.3 (CSL Caratterizzazione sequenziale del limite).

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda \iff f(x_n) \rightarrow \lambda \quad \forall (x_n) \text{ s. in } A \setminus \alpha, x_n \rightarrow \alpha$$

Teorema 2.4 (TLM Limite delle funzioni monotone). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^M$, $f \nearrow$*

$$Se x_0 \in D(A_{x_0}^-) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \sup_{A_{x_0}^-} f$$

$$Se x_0 \in D(A_{x_0}^+) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \inf_{A_{x_0}^+} f$$

$$Se +\infty \in D(A) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sup_A f$$

$$Se -\infty \in D(A) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \inf_A f$$

dove $A_{x_0}^- := A \cap]-\infty, x_0[$, $A_{x_0}^+ := A \cap]x_0, +\infty[$. Un risultato analogo vale per $f \searrow$

3 Continuità

Teorema 3.1 (CSC Caratterizzazione sequenziale della continuità). *Sia $x_0 \in A$. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $x_0 \in A$.*

$$f \text{ è continua in } x_0 \iff f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad \forall x_n \rightarrow x_0$$

Teorema 3.2 (Bolzano). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$.*

$$Se f(a)f(b) \leq 0 \implies \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$$

Sia I un intervallo di \mathbb{R} .

Teorema 3.3 (TVI Valore intermedio). *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$.*

$$Dato y \in \mathbb{R} : f(a) < f(y) < f(b) \implies \exists x_0 \in I : f(x_0) = y$$

$f(I)$ è un intervallo

Teorema 3.4. *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$, f 1-1, posto $J = f(I)$. Allora*

$$J \text{ è un intervallo, } f \xrightarrow[su]{1-1} J$$

$$f^{-1} \in C(J)$$

Teorema 3.5 (Weierstrass). *Sia $A \in \mathbb{R}$ chiuso e limitato, $f \in C(A, \mathbb{R}) \implies \exists \max_A f, \exists \min_A f$*

4 Derivate

Teorema 4.1 (Fermat). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.*

$$Se x_0 \text{ è un p.to estremante locale } \implies f'(x_0) = 0$$

Teorema 4.2 (Rolle). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, f derivabile in $]a, b[$.*

$$Se f(a) = f(b) \implies \exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = 0$$

Teorema 4.3 (TVML Valor medio di Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, f derivabile in $]a, b[$.*

$$\text{Allora } \exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 4.4 (TM Test monotonia). *Sia I un intervallo su \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I .*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ è costante in } I \tag{1}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f \nearrow \tag{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f \nearrow s. \tag{3}$$

$$f \nearrow s. \iff \begin{cases} f'(x) \geq 0 & \forall x \in I \\ \text{int}(\{x \in \mathbb{R} / f'(x) = 0\}) = \emptyset \end{cases} \tag{4}$$