# Anlisi 1

Nicolò Montalti

## 1 Limiti di successioni

**Teorema 1.1** (Unicità del limite). *Sia* $\alpha,\ \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Se } a_n \to \alpha, a_n \to \beta \implies \alpha = \beta$$

**Teorema 1.2** (TLS Limiti delle sottosuccessioni). *Sia* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Se } a_n \to \alpha \implies \forall (a_k)_n \text{ s.s di } a_n \text{ si ha } (a_k)_n \to \alpha$$

**Teorema 1.3** (TPS Permanenza del segno). *Siano* $(a_n),\ (b_n)$ *s. in* $\mathbb{R},\ \ a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Se } a_n \to a,\ b_n \to b,\ a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$$

**Teorema 1.4** (T2C Due carabinieri). *Siano* $(a_n),\ (b_n),\ (c_n)$ *s. in* $\mathbb{R},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Se } a_n \to \lambda,\ b_n \to \lambda,\ a_n \leq b_n \leq c_n\ \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \to \lambda$$

**Teorema 1.5** (TSM Successioni monotone).

$$\text{Se } (a_n) \nearrow \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$
$$\text{Se } (a_n) \searrow \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$

**Teorema 1.6** (Criterio del rapporto). *Sia* $a_n > 0$ *s. in* $\mathbb{R}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Se } \lambda > 1 \implies a_n \to +\infty$$
$$\text{Se } \lambda < 1 \implies a_n \to 0$$

**Teorema 1.7** (CSE Continuità sequenziale dell'esponenziale). *Sia* $x_n$ *s. in* $\mathbb{R}$.

$$\text{Se } x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \implies e^{x_n} \to e^{x_0}$$

**Teorema 1.8** (CSL Continuità sequenziale del logaritmo). *Sia* $x_n$ *s. in* $\mathbb{R}$.

$$\text{Se } x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \implies log_a(x_n) \to log_a(x_0)$$

**Teorema 1.9** (Criterio di Cesaro). *Siano* $a_n,\ b_n$ *s. in* $\mathbb{R}$, $b_n \nearrow$ *s.*, $b_n \to +\infty$.

$$\text{Se } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

## 2 Limiti di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$, $\alpha \in D(A)$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}^M (\bar{\mathbb{R}} \text{ se } M = 1)$

**Teorema 2.1** (Unicità del limite).

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda,\ f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \mu \implies \lambda = \mu$$

**Teorema 2.2** (TLR Limite delle restrizioni)**.** *Sia* $B \subseteq A$, $\alpha \in D(B)$.

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda \implies f|_B(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda$$

*dove* $f|_B : B \to \mathbb{R}^M$, $f|_B(x) := f(x)$

**Teorema 2.3** (CSL Caratterizzazione sequenziale del limite)**.**

$$f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda \iff f(x_n) \to \lambda \quad \forall (x_n) \text{ s. in } A \smallsetminus \alpha,\ x_n \to \alpha$$

**Teorema 2.4** (TLM Limite delle funzioni monotone)**.** *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}^M$, $f \nearrow$

$$\begin{aligned}
\text{Se } x_0 \in D(A^-_{x_0}) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to x_0^-]{} \sup_{A^-_{x_0}} f \\
\text{Se } x_0 \in D(A^+_{x_0}) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to x_0^+]{} \inf_{A^-_{x_0}} f \\
\text{Se } +\infty \in D(A) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sup_{A} f \\
\text{Se } -\infty \in D(A) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \inf_{A} f
\end{aligned}$$

*dove* $A^-_{x_0} := A \cap \,]-\infty, x_0[$, $A^+_{x_0} := A \cap \,]x_0, +\infty[$. *Un risultato analogo vale per* $f \searrow$

# 3 Continuità

**Teorema 3.1** (CSC Caratterizzazione sequenziale della continuità)**.** *Sia* $x_0 \in A$. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$, $x_0 \in A$.

$$f \text{ è continua in } x_0 \iff f(x_n) \to f(x_0) \quad \forall x_n \to x_0$$

**Teorema 3.2** (Bolzano)**.** *Siano* $a$, $b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, $f \in C([a,b], \mathbb{R})$.

$$\text{Se } f(a)f(b) \le 0 \implies \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = 0$$

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$.

**Teorema 3.3** (TVI Valore intermedio)**.** *Sia* $f \in C(I, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\text{Dato } y \in \mathbb{R} : f(a) < f(y) < f(b) &\implies \exists x_0 \in I : f(x_0) = y \\
& f(I) \text{ è un intervallo}
\end{aligned}$$

**Teorema 3.4.** *Sia* $f \in C(I, \mathbb{R})$, $f$ *1-1, posto* $J = f(I)$. *Allora*

$$\begin{aligned}
& J \text{ è un intervallo, } f \xrightarrow[su]{1-1} J \\
& f^{-1} \in C(J)
\end{aligned}$$

**Teorema 3.5** (Weierstrass)**.** *Sia* $A \in \mathbb{R}$ *chiuso e limitato,* $f \in C(A, \mathbb{R}) \implies \exists \max_A f$, $\exists \min_A f$

# 4 Derivate

**Teorema 4.1** (Fermat)**.** *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

$$\text{Se } x_0 \text{ è un p.to estremante locale} \implies f'(x_0) = 0$$

**Teorema 4.2** (Rolle)**.** *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, $f$ *derivabile in* $]a, b[$.

$$\text{Se } f(a) = f(b) \implies \exists x_0 \in \,]a,b[\, : f'(x_0) = 0$$

**Teorema 4.3** (TVML Valor medio di Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, $f$ derivabile in $]a, b[$.*

$$\textit{Allora } \exists x_0 \in\, ]a, b[\, : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Teorema 4.4** (TM Test monotonia). *Sia $I$ un intervallo su $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in $I$.*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ è costante in } I \tag{1}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f \nearrow \tag{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f \nearrow s. \tag{3}$$

$$f \nearrow s. \iff \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ int(\{x \in \mathbb{R} / f'(x) = 0\}) = \emptyset \end{cases} \tag{4}$$

**Teorema 4.5** (Taylor con resto di Peano). *Siano $I$ intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f$ derivabile $n$ volte in $x_0$. Allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x - x_0)^k}{k!} + o((x - x_0)^n)_{x \to x_0}$$

**Teorema 4.6** (Tayor con resto di Lagrange). *Siano $I$ intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f$ derivabile $n$ volte in $x_0$. Allora $\forall x \in I \quad \exists y_x \in (x_0, x)$ tale che*

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(y_x)}{n!}(x - x_0)^n$$

**Teorema 4.7** (TH De l'Hôpital). *Siano $I$ intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in D(I)$, $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$. $f(x)$, $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ o $|g(x)| \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$. Allora*

$$\textit{se } \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda$$

**Teorema 4.8.** *Sia I intervallo non banale di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora f è convessa $\iff f' \nearrow$*

**Teorema 4.9.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in I. Allora f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$*

**Teorema 4.10.** *Sia $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in \mathring{I}$ con $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k \leq n$ e $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Allora*

*$x_0$ è un punto di massimo locale forte di f se (n+1) è pari e $f^{(n+1)}(x_0) < 0$*

*$x_0$ è un punto di minimo locale forte di f se (n+1) è pari e $f^{(n+1)}(x_0) > 0$*

*$x_0$ non è un punto estremante se (n+1) è dispari*