Anlisi 1

Nicolò Montalti

1 Limiti di successioni

Teorema 1.1 (Unicità del limite). *Sia* $\alpha,\ \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$Se\ a_n \to \alpha, a_n \to \beta \implies \alpha = \beta$$

Teorema 1.2 (TLS Limiti delle sottosuccessioni). *Sia* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$Se\ a_n \to \alpha \implies \forall (a_k)_n\ s.s\ di\ a_n\ si\ ha\ (a_k)_n \to \alpha$$

Teorema 1.3 (TPS Permanenza del segno). *Siano* $(a_n),\ (b_n)$ *s. in* $\mathbb{R},\ \ a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$Se\ a_n \to a,\ b_n \to b,\ a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$$

Teorema 1.4 (T2C Due carabinieri). *Siano* $(a_n),\ (b_n),\ (c_n)$ *s. in* $\mathbb{R},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

$$Se\ a_n \to \lambda,\ b_n \to \lambda,\ a_n \leq b_n \leq c_n\ \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \to \lambda$$

Teorema 1.5 (TSM Successioni monotone).

$$Se\ (a_n) \nearrow \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$
$$Se\ (a_n) \searrow \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$

Teorema 1.6 (Criterio del rapporto). *Sia* $a_n > 0$ *s. in* $\mathbb{R},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$Se\ \lambda > 1 \implies a_n \to +\infty$$
$$Se\ \lambda < 1 \implies a_n \to 0$$

Teorema 1.7 (CSE Continuità sequenziale dell'esponenziale). *Sia* x_n *s. in* $\mathbb{R}$.

$$Se\ x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \implies e^{x_n} \to e^{x_0}$$

Teorema 1.8 (CSL Continuità sequenziale del logaritmo). *Sia* x_n *s. in* $\mathbb{R}$.

$$Se\ x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \implies log_a(x_n) \to log_a(x_0)$$

Teorema 1.9 (Criterio di Cesaro). *Siano* $a_n,\ b_n$ *s. in* $\mathbb{R},\ b_n \nearrow$ *s.*, $b_n \to +\infty$.

$$Se\ \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

2 Limiti di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$, $\alpha \in D(A)$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}^M (\bar{\mathbb{R}}$ se $M = 1)$

Teorema 2.1 (Unicità del limite).

$$Se\ f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda,\ f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \mu \implies \lambda = \mu$$

Teorema 2.2 (TLR Limite delle restrizioni). *Sia $B \subseteq A$, $\alpha \in D(B)$.*

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda \implies f|_B(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda$$

dove $f|_B : B \to \mathbb{R}^M$, $f|_B(x) := f(x)$

Teorema 2.3 (CSL Caratterizzazione sequenziale del limite).

$$f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \lambda \iff f(x_n) \to \lambda \quad \forall (x_n) \text{ s. in } A \setminus \alpha,\ x_n \to \alpha$$

Teorema 2.4 (TLM Limite delle funzioni monotone). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^M$, $f \nearrow$*

$$\begin{aligned}
\text{Se } x_0 \in D(A^-_{x_0}) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to x_0^-]{} \sup_{A^-_{x_0}} f \\
\text{Se } x_0 \in D(A^+_{x_0}) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to x_0^+]{} \inf_{A^-_{x_0}} f \\
\text{Se } +\infty \in D(A) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sup_{A} f \\
\text{Se } -\infty \in D(A) &\implies f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \inf_{A} f
\end{aligned}$$

dove $A^-_{x_0} := A \cap]-\infty, x_0[$, $A^+_{x_0} := A \cap]x_0, +\infty[$. Un risultato analogo vale per $f \searrow$

3 Continuità

Teorema 3.1 (CSC Caratterizzazione sequenziale della continuità). *Sia $x_0 \in A$. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$, $x_0 \in A$.*

$$f \text{ è continua in } x_0 \iff f(x_n) \to f(x_0) \quad \forall x_n \to x_0$$

Teorema 3.2 (Bolzano). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f \in C([a,b], \mathbb{R})$.*

$$\text{Se } f(a)f(b) \leq 0 \implies \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = 0$$

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$.

Teorema 3.3 (TVI Valore intermedio). *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$.*

$$\begin{aligned}
\text{Dato } y \in \mathbb{R} : f(a) < f(y) < f(b) &\implies \exists x_0 \in I : f(x_0) = y \\
&\quad f(I) \text{ è un intervallo}
\end{aligned}$$

Teorema 3.4. *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$, f 1-1, posto $J = f(I)$.*

$$\begin{aligned}
&J \text{ è un intervallo, } f \xrightarrow[su]{1-1} J \\
&f^{-1} \in C(J)
\end{aligned}$$

Teorema 3.5 (Weierstrass). *Sia $A \in \mathbb{R}$ chiuso e limitato, $f \in C(A, \mathbb{R}) \implies \exists \max_A f$, $\exists \min_A f$*