

Anlisi 1

Nicolò Montalti

1 Limiti di successioni

Teorema 1.1 (Unicità del limite). *Sia $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \alpha, a_n \rightarrow \beta \implies \alpha = \beta$$

Teorema 1.2 (TLS Limiti delle sottosuccessioni). *Sia $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \alpha \implies \forall (a_k)_n \text{ s.s di } a_n \text{ si ha } (a_k)_n \rightarrow \alpha$$

Teorema 1.3 (TPS Permanenza del segno). *Siano $(a_n), (b_n)$ s. in \mathbb{R} , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$$

Teorema 1.4 (T2C Due carabinieri). *Siano $(a_n), (b_n), (c_n)$ s. in \mathbb{R} , $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \lambda, b_n \rightarrow \lambda, a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \rightarrow \lambda$$

Teorema 1.5 (TSM Successioni monotone).

$$\begin{aligned} \text{Se } (a_n) \nearrow &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n) \\ \text{Se } (a_n) \searrow &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (a_n) \end{aligned}$$

Teorema 1.6 (Criterio del rapporto). *Sia $a_n > 0$ s. in \mathbb{R} , $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\begin{aligned} \text{Se } \lambda > 1 &\implies a_n \rightarrow +\infty \\ \text{Se } \lambda < 1 &\implies a_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Teorema 1.7 (CSE Continuità sequenziale dell'esponenziale). *Sia x_n s. in \mathbb{R} .*

$$\text{Se } x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \implies e^{x_n} \rightarrow e^{x_0}$$

Teorema 1.8 (CSL Continuità sequenziale del logaritmo). *Sia x_n s. in \mathbb{R} .*

$$\text{Se } x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \implies \log_a(x_n) \rightarrow \log_a(x_0)$$

Teorema 1.9 (Criterio di Cesaro). *Siano a_n, b_n s. in \mathbb{R} , $b_n \nearrow$ s., $b_n \rightarrow +\infty$.*

$$\text{Se } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

2 Limiti di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\alpha \in D(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^M$ ($\overline{\mathbb{R}}$ se $M = 1$)

Teorema 2.1 (Unicità del limite).

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \mu \implies \lambda = \mu$$

Teorema 2.2 (TLR Limite delle restrizioni). *Sia $B \subseteq A$, $\alpha \in D(B)$.*

$$Se f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda \implies f|_B(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda$$

dove $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}^M$, $f|_B(x) := f(x)$

Teorema 2.3 (CSL Caratterizzazione sequenziale del limite).

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \lambda \iff f(x_n) \rightarrow \lambda \quad \forall (x_n) \text{ s. in } A \setminus \alpha, x_n \rightarrow \alpha$$

Teorema 2.4 (TLM Limite delle funzioni monotone). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^M$, $f \nearrow$*

$$Se x_0 \in D(A_{x_0}^-) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \sup_{A_{x_0}^-} f$$

$$Se x_0 \in D(A_{x_0}^+) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \inf_{A_{x_0}^+} f$$

$$Se +\infty \in D(A) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sup_A f$$

$$Se -\infty \in D(A) \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \inf_A f$$

dove $A_{x_0}^- := A \cap]-\infty, x_0[$, $A_{x_0}^+ := A \cap]x_0, +\infty[$. Un risultato analogo vale per $f \searrow$

3 Continuità

Teorema 3.1 (CSC Caratterizzazione sequenziale della continuità). *Sia $x_0 \in A$. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $x_0 \in A$.*

$$f \text{ è continua in } x_0 \iff f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad \forall x_n \rightarrow x_0$$

Teorema 3.2 (Bolzano). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$.*

$$Se f(a)f(b) \leq 0 \implies \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$$

Sia I un intervallo di \mathbb{R} .

Teorema 3.3 (TVI Valore intermedio). *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$.*

$$Dato y \in \mathbb{R} : f(a) < f(y) < f(b) \implies \exists x_0 \in I : f(x_0) = y$$

$f(I)$ è un intervallo

Teorema 3.4. *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$, f 1-1, posto $J = f(I)$. Allora*

$$J \text{ è un intervallo, } f \xrightarrow[su]{1-1} J$$

$$f^{-1} \in C(J)$$

Teorema 3.5 (Weierstrass). *Sia $A \in \mathbb{R}$ chiuso e limitato, $f \in C(A, \mathbb{R}) \implies \exists \max_A f, \exists \min_A f$*

4 Derivate

Teorema 4.1 (Fermat). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.*

$$Se x_0 \text{ è un p.to estremante locale } \implies f'(x_0) = 0$$

Teorema 4.2 (Rolle). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, f derivabile in $]a, b[$.*

$$Se f(a) = f(b) \implies \exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = 0$$

Teorema 4.3 (TVML Valor medio di Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, f derivabile in $]a, b[$.*

$$\text{Allora } \exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 4.4 (TM Test monotonia). *Sia I un intervallo su \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I .*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ è costante in } I \quad (1)$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f \nearrow \quad (2)$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f \nearrow s. \quad (3)$$

$$f \nearrow s. \iff \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ \text{int}(\{x \in \mathbb{R} / f'(x) = 0\}) = \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

Teorema 4.5 (Taylor con resto di Peano). *Siano I intervallo di \mathbb{R} , $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0 . Allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x - x_0)^k}{k!} + o((x - x_0)^n)_{x \rightarrow x_0}$$

Teorema 4.6 (Taylor con resto di Lagrange). *Siano I intervallo aperto di \mathbb{R} , $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0 . Allora $\forall x \in I \quad \exists y_x \in (x_0, x)$ tale che*

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(y_x)}{n!} (x - x_0)^n$$

Teorema 4.7 (TH De l'Hôpital). *Siano I intervallo di \mathbb{R} , $x_0 \in D(I)$, $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$. $f(x), g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ o $|g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$. Allora*

$$\text{se } \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda$$

Teorema 4.8. *Sia I intervallo non banale di \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I . Allora f è convessa $\iff f' \nearrow$*

Teorema 4.9. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in I . Allora f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$*

Teorema 4.10. *Sia $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ con $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k \leq n$ e $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Allora*

x_0 è un punto di massimo locale forte di f se $(n+1)$ è pari e $f^{(n+1)}(x_0) < 0$

x_0 è un punto di minimo locale forte di f se $(n+1)$ è pari e $f^{(n+1)}(x_0) > 0$

x_0 non è un punto estremante se $(n+1)$ è dispari

5 Integrali

Teorema 5.1. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e $c \in]a, b[$.*

$$\text{Se } f \in C([a, b], \mathbb{R}) \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$\text{Se } f \text{ è monotona} \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$\{x \in [a, b] / f \text{ non è continua in } x\} \text{ è finito} \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$f \in R_{[a, c]}, f \in R_{[c, b]} \iff f \in R_{[a, b]}$$

Teorema 5.2. *Siano $f, g \in R_{[a, b]}$. Allora*

$$\text{Se } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

Teorema 5.3 (1TFC Primo teorema fondamentale del calcolo). *Siano $f \in R_{[a,b]}$, $F(X) = \int_a^x f(t)dt : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora*

$$F \in C([a, b], \mathbb{R})$$

$$\text{Se } f \text{ è continua in } x_0 \implies f(x_0) = F'(x_0)$$

Teorema 5.4 (2TFC Secondo teorema fondamentale del calcolo). *Siano $f \in R_{[a,b]}$ e Φ una primitiva di f . Allora*

$$\int_a^b f(t)dt = [\Phi(t)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Teorema 5.5 (Taylor con resto integrale). *Sia $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$, $x_0 \in [a, b]$. Allora*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$