

# Anlisi 2

Nicolò Montalti

## 1 Spazi metrici

- Definizione di spazi metrici
- Metriche  $\delta, d_1, d_2, d_\infty$  in  $\mathbb{R}^n$
- Metriche  $d_1, d_2, d_\infty$  in  $C([0, 1])$
- Disuguaglianza di Minkowski
- Def intorno circolare aperto
- Def insieme aperto, chiuso, compatto e connesso
- Def topologia
- Unione e intersezione di aperti e chiusi
- Funzione distanza, diametro di un insieme
- Def intorno di un punto
- Chiusura, punti aderenti, interno, punti interni e frontiera
- Teorema di Bolzano-Weirstrass
- Def insieme denso

## 2 Spazi metrici completi

- Def successione e convergenza
- Unicità del limite
- Def successione si Cauchy
- Def spazio metrico completo
- Completezza dei sottospazi  $(B([a, b], \mathbb{R}), D_\infty)$  e  $(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$  completi
- Densità di  $C([a, b], \mathbb{R}, d_1)$  in  $L^1$  e  $C([a, b], \mathbb{R}, d_2)$  in  $L^2$
- Principio di Cantor ("scolapasta")
- Def isometria e completamento
- Def funzione continua (def equivalenti) e uniformemente continua
- Def funzione lipschitziana
- Def contrazione e teorema delle contrazioni

## 3 Spazi di Banach e di Hilbert

### 3.1 Spazi di Banach

- Def spazio vettoriale e spazio normato
- Metrica indotta da una norma
- Def insieme limitato
- Def spazio di Banach

### 3.2 Spazi di Hilbert

- Def prodotto interno reale e complesso
- Spazi  $l_2(\mathbb{R})$ ,  $C([a, b], \mathbb{R})$ ,  $L^2$
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
- Regola del parallelogramma
- Def spazio di Hilbert
- Def ortogonalità e teorema di Pitagora
- Spazio ortogonale e teorema delle proiezioni

## 4 Differenziabilità

- Def funzione differenziabile
- Continuità e derivabilità di una funzione differenziabile
- Derivata direzionale
- Def differenziabilità due volte
- Teorema di Schwarz
- Def differenziabilità per una funzione a valori vettoriali
- Jacobiana della composta e dell'inversa