

# Analisi della risposta impulsiva di un circuito RLC nel dominio del tempo e della frequenza

Nicolò Montalti (933833)

30 maggio 2021

## Abstract

In questo esperimento si è analizzata la risposta di un circuito RLC a un segnale impulsivo. Misurando la tensione ai capi del condensatore, si è cercato di risalire alla pulsazione di risonanza  $\omega_0$  e al coefficiente di smorzamento  $\gamma$ , con valori attesi  $\omega_0 = 55.4(4)$  kHz e  $\gamma = 12.46(12)$  kHz. L'analisi nel dominio del tempo ha restituito  $\omega_0 = 56.9832(7)$  kHz e  $\gamma = 13.5017(14)$  kHz. Attraverso una trasformata di Fourier sul segnale di risposta, calcolata grazie all'algoritmo FFT (fast Fourier transform), è stata analizzata la risposta in frequenza, ottenendo  $\omega_0 = 57.0549(10)$  kHz e  $\gamma = 13.521(2)$  kHz.

## 1 Introduzione

Un circuito RLC serie è formato da una resistenza  $R$ , un condensatore  $C$  e un induttore  $L$  collegati in serie con un generatore. L'evoluzione del sistema è caratterizzata dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \gamma \frac{dV_C}{dt} + \omega_0^2 V_C = \omega_0^2 V_G(t) \quad (1)$$

dove  $\gamma = R/L$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC$  e  $V_C$  e  $V_G$  sono rispettivamente la tensione ai capi del condensatore e del generatore. L'equazione può essere espressa nel dominio della frequenza applicando l'operatore trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  ad entrambi i membri e definendo la funzione di trasferimento

$$H(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{V_C\}}{\mathcal{F}\{V_G\}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2}} \quad (2)$$

con  $j$  unità immaginaria. La funzione  $H(\omega)$  descrive la risposta del circuito a una forzante nel dominio della frequenza. In particolare, stimolando il circuito con un segnale sinusoidale di pulsazione  $\omega$  e fasore  $V_0 e^{i\phi_0}$ , la tensione misurata ai capi del condensatore avrà

fasore  $H(\omega) \cdot V_0 e^{i\phi_0}$ . In regime sottosmorzato ( $\gamma < 2\omega_0$ ), la funzione  $|H(\omega)|$  ha un massimo per  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$ , detta pulsazione di risonanza.

Un altro caso di particolare interesse è la risposta impulsiva del circuito [1]. Matematicamente un impulso può essere modellizzato grazie alla funzione delta di Dirac  $\delta(t)$ . Stimolando il circuito con un impulso  $V_G(t) = V_0 \delta(t)$ , l'equazione (1) ha come soluzione

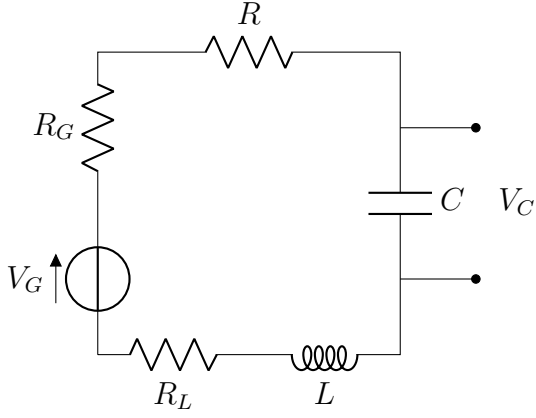
$$V_C(t) = A e^{-\gamma t/2} \sin(\omega_p t) \quad (3)$$

con  $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$  e  $A$  parametro dipendente dalle condizioni iniziali e dall'area dell'impulso.

Nel dominio della frequenza, ricordando che  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  [2], si ha

$$H(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{V_C\}}{V_0} \quad (4)$$

Stimolando il circuito con un segnale impulsivo e misurando la tensione ai capi del condensatore, le grandezze caratteristiche del circuito  $\omega_0$  e  $\gamma$  possono quindi essere determinate in due modi equivalenti: facendo un fit della funzione  $V_C(t)$  o eseguendo la trasformata di Fourier dei



**Figura 1:** Schema del circuito elettrico. Le resistenze  $R_G$  e  $R_L$  rappresentano rispettivamente la resistenza interna del generatore e la resistenza dell'induttore.

dati e tramite la relazione precedente fittare la funzione  $H(\omega)$ .

La trasformata di Fourier può essere eseguita numericamente grazie ad algoritmi come la *trasformata di Fourier veloce* (FFT), che permettono di calcolare in modo efficiente la *trasformata di Fourier discreta* (DFT) [3]. Dato un campione di  $N$  punti  $x_0 \dots x_{N-1}$  campionati a intervalli regolari di tempo  $dt$ , la loro DFT è data da

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi j k n / N} \quad k = 0 \dots N-1 \quad (5)$$

e fornisce dei valori approssimati per la trasformata di Fourier della funzione  $x(t)$ . Se la funzione  $\mathcal{F}\{x(t)\}$  si annulla per frequenze maggiori della frequenza critica di Nyquist  $1/2dt$ , si può dimostrare che

$$\mathcal{F}\{x(t)\} \left( \frac{2\pi k}{Ndt} \right) \simeq X_k \cdot dt \quad (6)$$

## 2 Apparato sperimentale e svolgimento

Per eseguire l'esperimento si è assemblato il circuito schematizzato in Fig. 1 sulla breadboard della scheda NI ELVIS II. I valori dei componenti sono stati misurati con il multimetro della scheda ELVIS, ottenendo  $R = 35.31(5) \Omega$ ,  $C = 32.0(3) \text{ nF}$ ,  $L = 10.17(10) \text{ mH}$  e  $R_L = 41.41(5) \Omega$ . La resistenza interna del generatore  $R_G$ , fornita dalle specifiche della scheda, risulta di  $50 \Omega$ . Dai parametri del circuito si attendevano quindi dei valori  $\gamma^{\text{exp}} =$

$12.46(12) \text{ kHz}$  e  $\omega_0^{\text{exp}} = 55.4(4) \text{ kHz}$ , corrispondente a una frequenza di risonanza  $\nu_r^{\text{exp}} = \omega_r/2\pi = 8.71(6) \text{ kHz}$ .

Attraverso un programma LabVIEW si è controllata la scheda ELVIS per generare impulsi con cui stimolare il circuito e per acquisire il segnale di risposta. Si è stimolato il circuito con impulsi di  $5 \text{ V}$  di durata  $0.5 \mu\text{s}$ , ripetuti a intervalli regolari di  $2 \text{ ms}$ . Impulsi di durata più breve erano difficili da generare ed immettevano poca energia nel circuito, mentre impulsi di durata maggiore davano risultati non più approssimabili con una delta di Dirac. Il tempo tra un impulso e il successivo di  $2 \text{ ms}$  era sufficiente perché le oscillazioni fossero smorzate completamente.

L'acquisizione è stata eseguita su due canali in contemporanea, uno per misurare la tensione ai capi del condensatore ( $V_C$ ) e l'altro ai capi del generatore ( $V_G$ ).  $V_C$  è stato acquisito sul range  $\pm 0.2 \text{ V}$ , mentre  $V_G$  sul range  $\pm 10 \text{ V}$ . L'acquisizione era attivata da un trigger impostato sul canale del generatore con *slope* in modalità *rising* e *level* di  $1 \text{ V}$ . Il campionamento è stato eseguito a una frequenza  $\nu_c = 500 \text{ kHz}$ . Sono state raccolte sequenze di  $800$  campioni l'una, per una durata di  $1.6 \text{ ms}$  a campionamento. Confrontando  $\nu_r^{\text{exp}}$  con  $\nu_c$ , ci si può aspettare che  $H(\omega) \simeq 0$  per frequenze maggiori di  $\nu_c/2$ , giustificando l'uso dell'approssimazione (6).

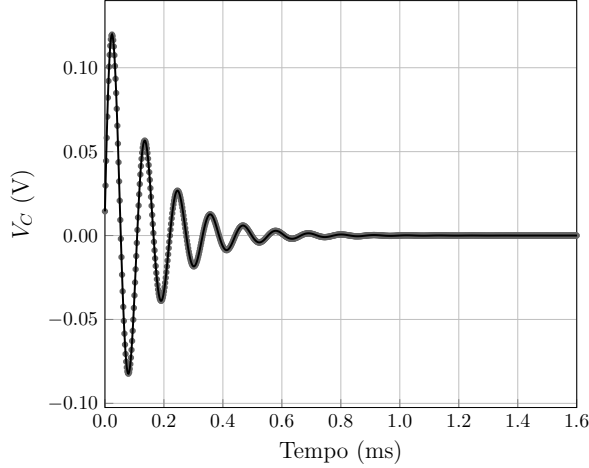
## 3 Risultati e discussione

### 3.1 Dominio del tempo

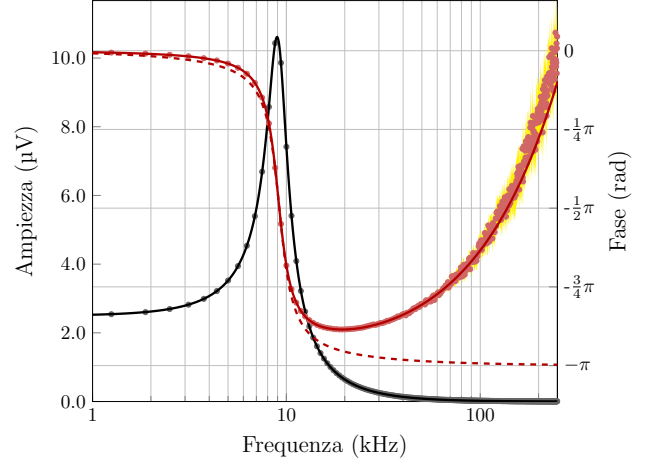
I risultati del campionamento sono mostrati in Fig. 2, insieme a un fit della funzione  $V_C(t)$  (3). Il segnale segue un moto oscillatorio che viene completamente smorzato in circa  $0.8 \text{ ms}$ . Lo pseudoperiodo è leggermente maggiore di  $0.1 \text{ ms}$ , in accordo con una pseudofrequenza di oscillazione attesa  $\nu_p^{\text{exp}} = 8.76(6) \text{ kHz}$ . Si nota la presenza di un lieve sfasamento, probabilmente conseguenza del sistema di triggering. Il primo punto del campionamento è infatti leggermente superiore a  $0 \text{ V}$ . Per tenerne conto in fase di fit, si è aggiunto un parametro  $t_0$  alla funzione, sostituendo  $t$  con  $t + t_0$ . I parametri restituiti dal fit sono riportati in Tab. 1. Il

**Tabella 1:** Valori attesi dei parametri  $\omega_0$  e  $\gamma$  e risultati dei fit nel dominio del tempo della frequenza. Le incertezze dei parametri attesi derivano da incertezze strumentali, mentre quelle derivanti dai fit sono errori standard.

Misura	$\omega_0$ (kHz)	$\gamma$ (kHz)	$t_0$ ( $\mu$ s)
Valori attesi	$55.4 \pm 0.4$	$12.46 \pm 0.12$	
Dominio del tempo (Fig. 2)	$56.9832 \pm 0.0007$	$13.5017 \pm 0.0014$	$1.7992 \pm 0.0012$
Dominio della frequenza (Fig. 3)	$57.0549 \pm 0.0010$	$13.521 \pm 0.002$	$1.7957 \pm 0.0018$



**Figura 2:** Grafico in funzione del tempo dell'andamento della tensione misurata ai campi del condensatore in seguito a una stimolazione impulsiva all'istante  $t=0$  di ampiezza 5 V e durata 0.5  $\mu$ s. Frequenza di campionamento 500 kHz, 800 campioni. I punti sono dati sperimentali, mentre la linea continua è il fit della funzione  $V_C(t + t_0)$ . L'incertezza, calcolata a posteriori, è di  $\sigma_{V_C} = 30 \mu$ V.



**Figura 3:** Grafico dell'ampiezza (in nero) e della fase (in rosso) della trasformata di Fourier di  $V_C$ . I punti sono dati sperimentali, mentre la linea continua è il fit della funzione  $H(\omega) \cdot e^{j\omega t_0}$ . La linea tratteggiata rappresenta la funzione  $H(\omega)$ . La regione gialla indica un intervallo di confidenza al 95% sui dati della fase. L'incertezza sull'ampiezza è di 1.2 nV. L'asse delle frequenze è in scala logaritmica.

coefficiente di determinazione  $R^2$  del fit è pari a 1.00.

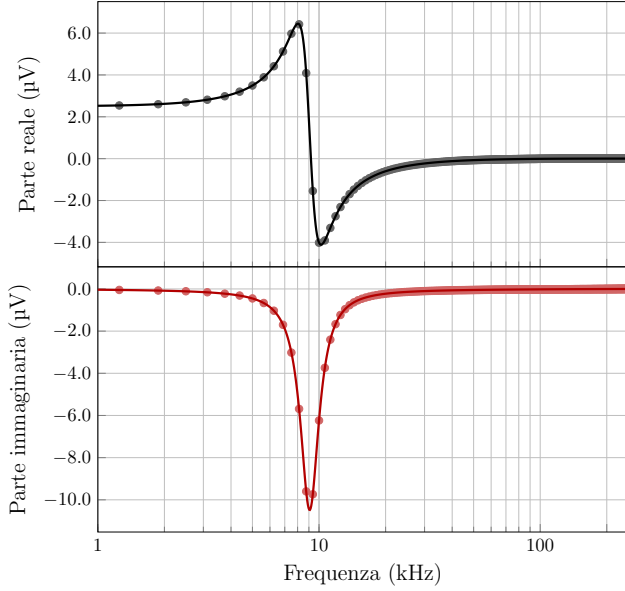
Il fit è stato utilizzato per stimare l'incertezza sui dati raccolti. Supponendo che questa sia uguale per ogni punto, è stata calcolata dal chi quadro ridotto  $\tilde{\chi}^2$  come  $\sigma_{V_C} = \sqrt{\tilde{\chi}^2}$ , ottenendo  $\sigma_{V_C} = 30 \mu$ V.

### 3.2 Dominio della frequenza

Per analizzare il circuito nel dominio della frequenza, è stata eseguita la FFT dei dati raccolti su  $V_C$ . L'errore stimato dal fit nel dominio del tempo è stato propagato nel dominio della frequenza secondo il metodo descritto in appendice A. L'esito della trasformata è riportato espresso in termini di fase e ampiezza in Fig. 3 e in termini di parte reale e immaginaria in Fig. 4. Dalla Fig. 3 si può notare che l'ampiezza ha un massimo in prossimità della frequenza

di risonanza attesa  $\nu_r^{\text{exp}} = 8.71(6)$  kHz, mentre già a 100 kHz è prossima a zero, confermando la validità delle assunzioni fatte sul calcolo della trasformata di Fourier. La fase tende a 0 a basse frequenze e vale  $-\pi/2$  in prossimità di  $\nu_r^{\text{exp}}$ , come atteso. Tuttavia non tende a  $-\pi$  ad alte frequenze.

Il segnale ad alte frequenze è soggetto contemporaneamente a fluttuazioni statistiche e a un errore sistematico. Superati i 50 kHz, i dati della fase sono soggetti a grandi fluttuazioni, ma allo stesso tempo l'errore associato aumenta sensibilmente. La fase inoltre cresce invece che continuare a decrescere e convergere a  $-\pi$ . Questa tendenza è stata imputata allo sfasamento dovuto al trigger già discusso in precedenza. È noto infatti che  $\mathcal{F}\{f(t + t_0)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \cdot e^{j\omega t_0}$  [2]. Per tenerne conto, si è aggiunto un parametro  $t_0$  al fit, che è stato eseguito sulla funzione  $H(\omega) \cdot e^{j\omega t_0}$ .



**Figura 4:** Grafico della trasformata di Fourier di  $V_C$ . Sono indicate in nero la parte reale e in rosso la parte immaginaria. I punti sono stati ottenuti applicando una FFT ai dati sperimentali, mentre le linee continue sono il fit della funzione  $H(\omega) \cdot e^{j\omega t_0}$ . L'incertezza sui dati è di 1.2 nV.

Il fit è riportato sempre nelle Fig. 3 e 4. I parametri restituiti sono riportati in Tab. 1. Si è ottenuto un chi quadro pari a  $\tilde{\chi}^2 = 1.06$  e un  $R^2 = 1.00$ , indice di un buon fit e di una corretta propagazione degli errori.

Il fit è stato eseguito nel campo complesso, minimizzando il  $\chi^2$  tra i dati restituiti dalla FFT e dalla funzione  $H(\omega)$ , e non fittando separatamente fase e ampiezza. Nel calcolo del  $\chi^2$ , per evitare di sommare numeri negativi, si sono sommati i quadrati delle parti reali e immaginarie dei dati.

### 3.3 Discussione

I parametri ottenuti dai fit sono significativamente diversi da quelli attesi. I valori ottenuti per  $\omega_0$  sono maggiori di  $\omega_0^{\text{exp}}$ . Ciò potrebbe essere imputabile alla non idealità del circuito, in particolare dell'impulso generato, necessariamente diverso dalla delta di Dirac con cui è stato modellizzato. Anche i  $\gamma$  ottenuti sono maggiori di quanto atteso. Ciò potrebbe indicare la presenza di resistenze parassite nel circuito di cui non si è tenuto conto.

Ad eccezione di  $t_0$ , i parametri ottenuti dall'analisi nel dominio dei tempi e delle frequenze sono inoltre incompatibili tra loro. Questo

potrebbe essere dovuto a una sottostima delle incertezze.

## 4 Conclusioni

I dati raccolti si accordano perfettamente con le curve previste dai modelli. Entrambi i fit hanno restituito dei valori di  $R^2$  pari a 1.00 e dal secondo si è ottenuto un  $\tilde{\chi}^2$  di 1.06. Prendere in considerazione lo sfasamento dovuto al trigger è stato determinante per la buona riuscita dei fit. Il disaccordo tra i valori attesi e quelli ottenuti è probabilmente imputabile alla non idealità del circuito e dell'impulso con cui è stato stimolato. In aggiunta, si può notare che gli errori relativi sui parametri restituiti dal fit sono molto piccoli, dell'ordine di  $10^{-5}$  per la pulsazione e di  $10^{-4}$  per il coefficiente di smorzamento. Sebbene questi errori siano coerenti con i  $\tilde{\chi}^2$ , essi non tengono conto di possibili errori sistematici. È possibile che con una analisi più approfondita di questi si ottengano risultati compatibili con quelli attesi.

## Appendici

### A Propagazione delle incertezze

Tutte le incertezze sono state propagate sommando in quadratura:

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \dots} \quad (7)$$

In particolare, per propagare le incertezza dei dati attraverso la trasformata di Fourier, si è utilizzato l'approccio proposto in [4]. L'algoritmo FFT è un sistema efficiente per calcolare la DFT, la cui definizione (5) può essere espressa in forma matriciale come

$$\mathbf{X} = A\mathbf{x} \quad (8)$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} A_{kn} x_n \quad A_{kn} = e^{-2\pi jkn/N} \quad (9)$$

Una volta nota la dimensione  $N$  del campione è possibile calcolare la matrice  $A$ . Successivamente conviene dividere la parte reale  $A_{\text{Re}}$  da quella immaginaria  $A_{\text{Im}}$ , la (8) diventa

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{\text{Re}} &= A_{\text{Re}}\mathbf{x} \\ \mathbf{X}_{\text{Im}} &= A_{\text{Im}}\mathbf{x} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{X}_{\text{Re}} + j\mathbf{X}_{\text{Im}}\end{aligned}$$

Applicando la formula (7), è possibile determinare l'incertezza su  $(X_k)_{\text{Re}}$  come

$$(\sigma_{X_k})_{\text{Re}} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (A_{kn})_{\text{Re}}^2 \sigma_{x_n}^2} \quad (10)$$

Allo stesso modo si ricava l'incertezza sulla parte immaginaria  $(X_k)_{\text{Im}}$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] Pierre Cafarelli et al. «The RLC system: An invaluable test bench for students». In: *American Journal of Physics* 80.9 (2012), pp. 789–799. DOI: 10.1119/1.4726205.
- [2] Ronald Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications*. 3rd ed. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering. Circuits and systems. McGraw Hill, 2000. ISBN: 9780073039381,0073039381.
- [3] William H. Press et al. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3<sup>a</sup> ed. USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN: 0521880688.
- [4] K Konopka e T Topór-Kamiński. «Uncertainty evaluation of measurement data processing algorithm based on its matrix form». In: *Acta Physica Polonica A* 120.4 (2011), pp. 666–670. DOI: 10.12693/APhysPolA.120.666.