Examen de l'UE Représentations des signaux TSIA201

Roland Badeau, Marco Cagnazzo

Mercredi 31 octobre 2018

Durée : 1h30
Tous les documents sont autorisés. En revanche les appareils électroniques (dont les calculatrices) sont interdits.
$\diamond\diamond\diamond$

Avant propos

Le correcteur accordera le plus grand prix à la qualité de la rédaction, que ce soit la présentation matérielle ou le raisonnement.

Rappels et notations

Formulaire

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions suivantes :

— Transformée de Fourier à Temps Continu (TFTC) d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$X_a(f) = \int_{\mathbb{R}} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

— TFTC inverse : $x_a(t) = \int_{\mathbb{R}} X_a(f) e^{+2i\pi f t} df$

— Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) d'un signal discret $x(n)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e^{-2i\pi\nu n}$$

— TFTD inverse : $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\nu}) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$

— Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'ordre M d'un signal discret fini $x_M(n)$:

$$X_M(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x_M(n) e^{-2i\pi \frac{k}{M} n}$$

— TFD inverse : $x_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_M[k] e^{+2i\pi \frac{k}{M} n}$

— Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

— Formule d'échantillonnage : si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_e(n) = x_a(nT)$ où $T \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$X_e(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu + k}{T}\right) \tag{1}$$

Bancs de filtres à deux voies

Les conditions de reconstruction parfaite pour un BDF à 2 voies sont :

$$F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-\ell} \qquad \text{Condition de non distorsion (CND)}$$
$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0 \qquad \text{Condition de non repliement (CNR)}$$

On considère le cas de Conjugate Quadrature Filters / Alternating Flip (CQF/AF) :

$$\begin{aligned} H_1(z) &= -z^{-(N-1)}H_0(-z^{-1}) \\ F_0(z) &= H_1(-z) \\ F_1(z) &= -H_0(-z) \end{aligned}$$

Pour les CQF/AF, nous avons vu que le filtre à demi-bande $P(z)$ peut s'écrire comme $P(z) = H_0(z)H_0(z^{-1})$. Nous savons également que $p(n) = p(-n)$ et que $p(2n) = \delta(n)$.

Exercice 1 (Synthèse de filtres : filtre dérivateur) *On considère un signal $x(t)$ à temps continu à l'entrée d'un filtre de fonction de transfert $H(f)$ (où f est la fréquence exprimée en Hz). On note $y(t)$ le signal en sortie. Connaissant $H(f)$, on se propose de déterminer un filtre à temps discret de fonction de transfert $H_e(e^{i2\pi\nu})$ (où ν est la fréquence réduite) qui, ayant en entrée les échantillons $x_e(n) = x(nT)$, aurait pour sortie les échantillons $y_e(n) = y(nT)$ (voir la figure 1).*

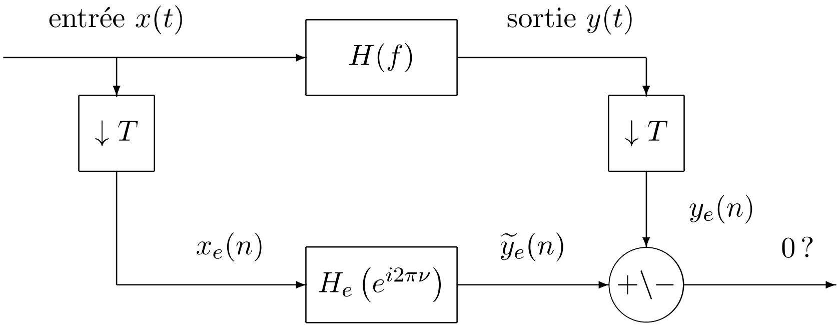

Figure 1 – Comparaison des sorties aux instants d'échantillonnage

1. *En utilisant la formule* (1) *page 1, exprimer les TFTD $Y_e(e^{i2\pi\nu})$ et $\widetilde{Y}_e(e^{i2\pi\nu})$ des signaux à temps discret $y_e(n)$ et $\widetilde{y}_e(n)$.*
2. *Démontrer que le filtre discret, défini par la relation $H_e(e^{i2\pi\nu}) = H\left(\frac{\nu}{T}\right)$ pour tout $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, est tel que pour tout signal $x(t)$ à bande limitée $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$, $\widetilde{y}_e(n) = y_e(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.*
3. *On souhaite à présent synthétiser un filtre dérivateur. On suppose que $x(t)$ est une fonction sommable ($x \in L^1(\mathbb{R})$) de classe $\mathcal{C}^1$, dont la dérivée $x'(t)$ est également sommable. Prouver que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$, et calculer la transformée de Fourier de $x'(t)$.*
4. *En déduire que la dérivation peut être vue comme un filtre de réponse en fréquence $H(f) = i2\pi f$, et exprimer le gain complexe $H_e(e^{i2\pi\nu})$ du filtre linéaire à temps discret correspondant.*
5. *En déduire, par la méthode de la fenêtre, les coefficients d'un filtre RIF à phase linéaire de type III qui réalise l'approximation d'un filtre dérivateur.*