Calcul intégral

$\int_0^B 2\,\mathrm{d}x$ or not $\int_0^B 2\,\mathrm{d}x$
that is the question

Introduction

Le calcul de l'aire d'une surface a été l'un des moteurs dans la mise en place des concepts mathématiques. Beaucoup de grands mathématiciens se sont penchés sur ce problème, depuis Archimède qui calcula l'aire de la surface située sous une parabole, Bonaventura Cavalieri qui développa sa théorie des indivisibles, Gilles de Roberval qui calcula l'aire sous une arche de cycloïde, Gottfried Leibniz qui utilisa pour la première fois le symbole $\int$, jusqu'à Bernhard Riemann qui établit une théorie aboutie du calcul intégral.
Aujourd'hui, le calcul intégral permet :

- de mesurer des grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux...) ;
- de calculer des probabilités et des statistiques (c'est l'outil de base que nous utiliserons dans le chapitre sur les lois de probabilité à densité) ;
- de résoudre des équations différentielles omniprésentes en mathématiques et en physique (mouvement, quantité d'énergie, ondes, mécanique quantique...)

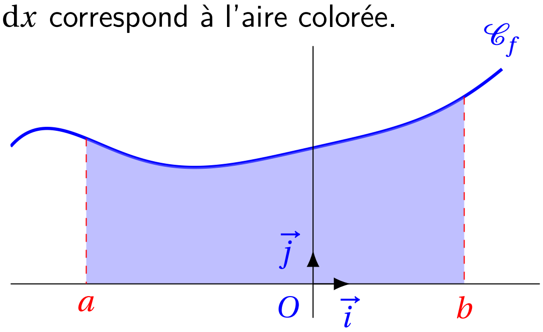
Son utilisation est très fréquente dans le monde de l'industrie (automatisme, électronique). C'est donc un outil incontournable pour comprendre le monde qui nous entoure.

I/ Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.
L'**intégrale** de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ est l'aire de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Cette aire est exprimée en unités d'aire (u.a.).
L'intégrale de la fonction sur $[a\ ;\ b]$ est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (et se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ou « somme de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ »).

Dans la figure ci-dessous, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire colorée.



Remarques

- a et b sont les **bornes d'intégration**.
- x est la **variable d'intégration** qui peut être remplacée par une autre lettre non utilisée dans l'écriture des bornes d'intégration. Ainsi on peut aussi bien écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.
- Si $a=b$, alors $\int^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car c'est l'aire d'un segment.

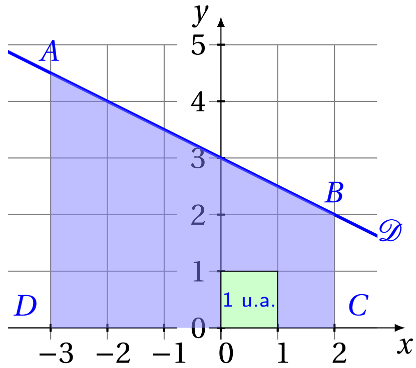
Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x+3$$

et (d) sa représentation graphique.

Alors l'intégrale $\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine du plan délimité par la droite (d), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-3$ et $x=2$. Autrement dit, il s'agit de l'aire du trapèze rectangle $ABCD$.



Cette aire est donnée par : $\frac{AD+BC}{2}\times DC = \frac{f(-3)+f(2)}{2}\times 5 = \frac{4,5+2}{2}\times 5 = 16,25$ u.a.

D'où $\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 16,25$.

II/ Intégrale d'une fonction continue

1/ Théorème fondamental

Théorème 1 (Théorème fondamental)

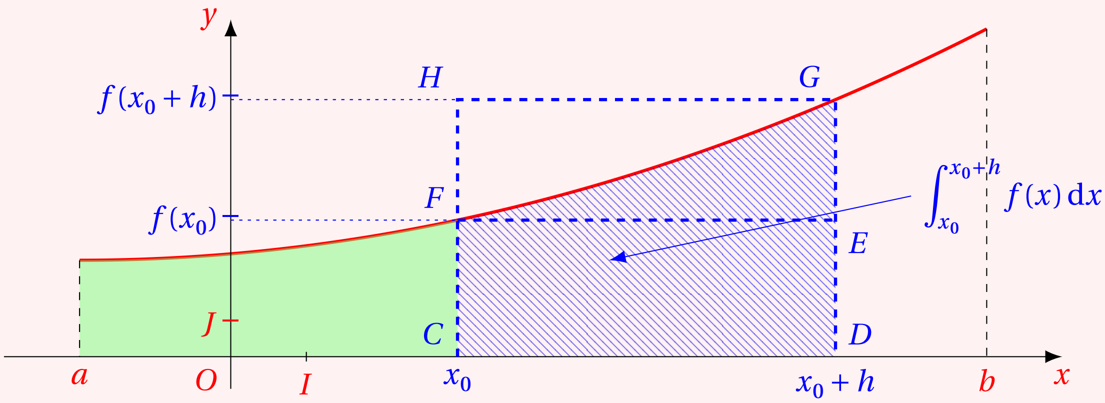
Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
La fonction F_a définie sur $[a\ ;\ b]$ par

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ qui s'annule en a.
Autrement dit, pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$, $F_a'(x) = f(x)$.

Démonstration au programme (exigible lors de l'épreuve du baccalauréat)

Ce résultat est admis dans le cas général. On va donner le principe de la démonstration dans le cas où f est **croissante** sur $[a\ ;\ b]$.
Soient $x_0 \in [a\ ;\ b]$ et h un réel tel que $x_0+h \in [a\ ;\ b]$.



- **Si h > 0 :** f étant positive sur $[a\ ;\ b]$, alors $F_a(x)$ est l'aire, en u.a., de la surface colorée.

  La différence $F_a(x_0+h)-F_a(x_0)$ est alors l'aire, en u.a., du domaine $\mathcal{D}$ hachuré en bleu. Comme f est croissante, alors l'aire domaine $\mathcal{D}$ est comprise entre l'aire des rectangles $CFED$ et $CHGD$ de largeur h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$. Ainsi $hf(x_0) \leqslant F_a(x_0+h)-F_a(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$.

  Comme $h>0$, alors $f(x_0) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

- **Si h < 0 :** Un raisonnement analogue conduit à l'encadrement $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.

- Quand h tend vers 0, la continuité de f permet d'écrire $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

  Ainsi F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$, pour tout réel $x_0 \in [a\ ;\ b]$.

- On conclut que F_a est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et a pour dérivée f.

  De plus, $F_a(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc F_a est la primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ qui s'annule en a.

■

2/ Calculs d'intégrales et primitives

Propriété 1

Soit f est une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Si F est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$, alors on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)}.$$

Démonstration au programme (exigible lors de l'épreuve du baccalauréat)

D'après le théorème fondamental, la fonction G_a définie sur $[a\ ;\ b]$ par $G_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ qui s'annule en a. De plus, si F est une primitive de f alors il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$, $F(x) = G_a(x)+k$.

Ainsi $F(b)-F(a) = G_a(b)+k-\left(G_a(a)+k\right) = G_a(b) - \underbrace{G_a(a)}_{=0} = G_a(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

■

Remarque

Dans le cadre du calcul intégral, on note aussi $F(b)-F(a)$ sous la forme $[F(x)]_a^b$.

3/ Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 2

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I, on définit pour tous a et b de I, l'**intégrale** de a à b de f par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)},$$

où F est une primitive de f sur I.

Remarques

- Pour une fonction continue positive, cette définition est cohérente avec la définition en termes d'aires du début du cours.
- Cette définition ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 2

On souhaite calculer les intégrales : $I = \int_1^3 (3x^2+4x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_{-1}^0 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

- Soit f telle que $f(x) = 3x^2+4x$. Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = x^3+2x^2$.
  On sait que $I = F(3) - F(1)$, donc on calcule $F(3)$ puis $F(1)$.
  $F(3) = 3^3 + 2\times 3^2 = 45$ et $F(1) = 1^3 + 2\times 1^2 = 3$ donc $I = 45 - 3 = 42$.
- Soit g telle que $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$. Une primitive de g est la fonction G telle que : $G(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$.
  On sait que $J = G(0) - G(-1)$, donc on calcule $G(0)$ puis $G(-1)$.
  $G(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{3\times 0}}{3} = \dfrac{1}{3}$ et $G(-1) = \dfrac{\mathrm{e}^{3\times(-1)}}{3} = \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{3}$ donc $J = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{3} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-3}}{3} \simeq 0{,}317$.

III/ Propriétés de l'intégration

1/ Relation de Chasles et linéarité

Propriétés 2 (admises)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois réels de I.

1) $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2) Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

3) Linéarité : $\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Pour tout réel λ, $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2/ Signe et ordre

Propriétés 3 (admises)

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$:

1) Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

2) Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

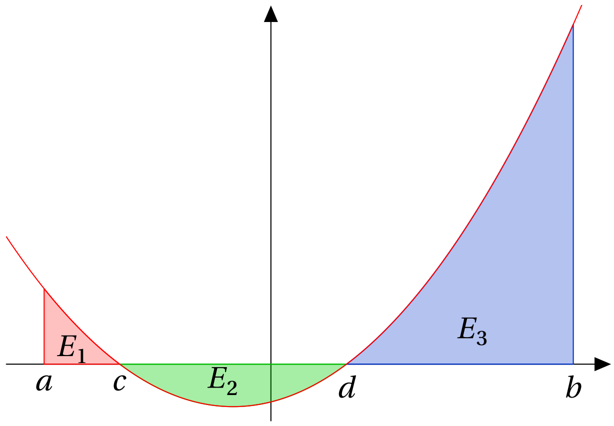
3) Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

IV/ Applications du calcul intégral

1/ Calculs d'aires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Soit E la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

- Si $f \geqslant 0$ sur I, alors $\boxed{\text{Aire}(E) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}}$.
- Si $f \leqslant 0$ sur I, alors $\boxed{\text{Aire}(E) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}}$.
- Si f change de signe sur I, on partage E en différentes parties correspondant aux intervalles où f est de signe constant.
Ci-contre, $\text{Aire}(E) = \text{Aire}(E_1) + \text{Aire}(E_2) + \text{Aire}(E_3)$
$\text{Aire}(E) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$, en u.a.
Ainsi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la somme des « aires algébriques » :
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{Aire}(E_1) - \text{Aire}(E_2) + \text{Aire}(E_3)$



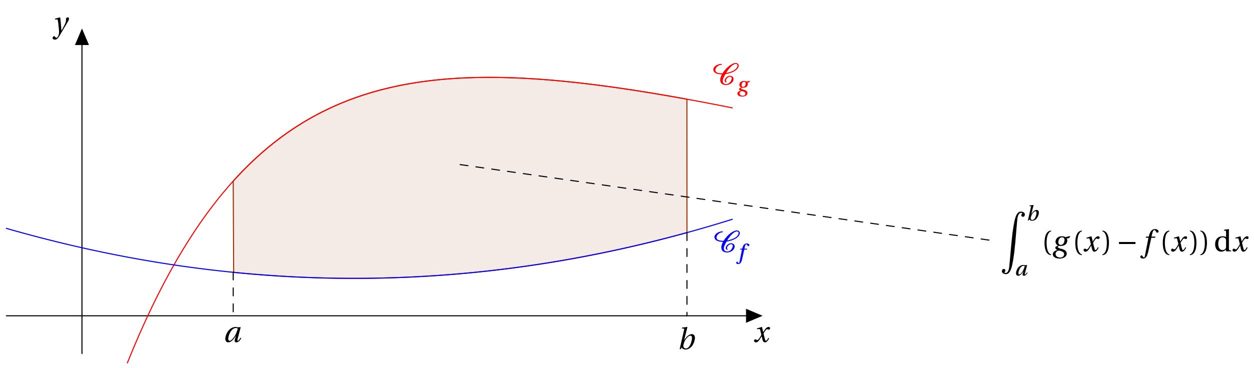
2/ Aire entre deux courbes

La propriété suivante est admise :

Propriété 4 (admise)

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I avec $f \leqslant g$ sur I et si a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$, l'aire comprise entre les courbes représentant f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\boxed{\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}}.$$



3/ Valeur moyenne d'une fonction

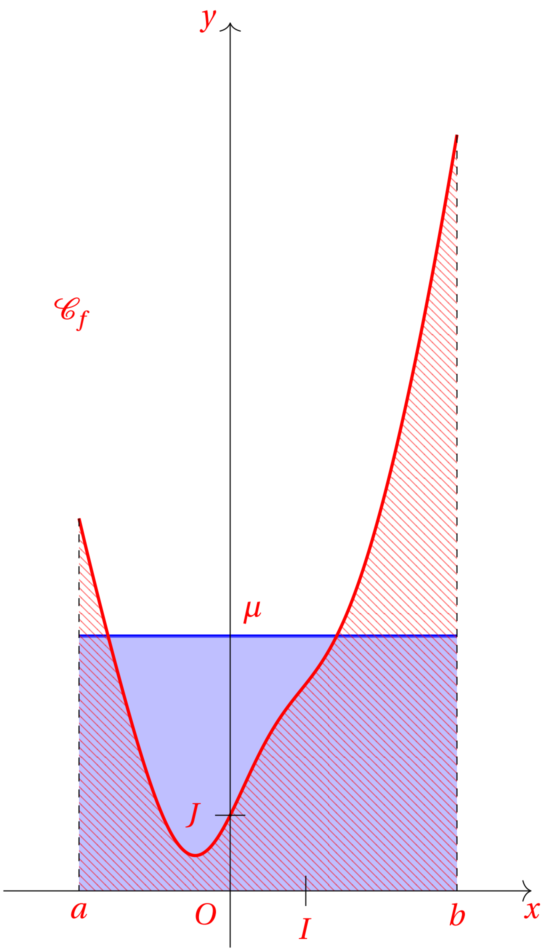
Définition 3

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, on appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\ ;\ b]$ le réel μ tel que

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Cette égalité peut se réécrire $\mu(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si f est continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, on peut l'interpréter en termes d'aires : la valeur moyenne μ de la fonction f est la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe entre a et b. Sur le schéma ci-dessous, l'aire hachurée est égale à l'aire du rectangle coloré.



Remarque

En physique, la vitesse moyenne d'un mobile lors d'un mouvement uniformément accéléré entre les instants t_1 et t_2 est égale à la valeur moyenne de sa vitesse : $\dfrac{1}{t_2-t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.

V/ Intégration par parties

Il y a des intégrales que l'on ne sait pas calculer directement du fait que l'on ne sache pas déterminer une primitive de la fonction à intégrer.
C'est le cas par exemple de l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 x\ln x \ \mathrm{d}x.$$

Propriété 5 (admise)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors, pour tous réels a et b de I :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x}.$$

Démonstration au programme (exigible lors de l'épreuve du baccalauréat)

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc leur produit uv l'est aussi.
On a alors $(uv)' = u'v + uv'$. Ainsi, pour tout réel x de I : $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.
Or les fonctions u et v sont continues, car dérivables, sur I et leurs dérivées u' et v' le sont également.
Donc les fonctions uv' et $u'v$ sont elles aussi continues sur I.
On peut ainsi intégrer membre à membre l'égalité ci-dessus.

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \Big((uv)'(x) - u'(x)v(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \text{ car une primitive de } (uv)' \text{ est } uv
\end{aligned}$$

■

Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction.
Un bon choix des fonctions u' et v conduit au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.

Exemple 3

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_1^2 x\ln x \ \mathrm{d}x$.

On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$ donc $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1 ; 2]$ et u' et v' sont continues sur $[1 ; 2]$.

Donc $I = \int_1^2 u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x$

ainsi $I = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 - \int_1^2 \frac{1}{2}x \ \mathrm{d}x$.

D'où $I = 2\ln 2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \left(\frac{1}{4}\times 4 - \frac{1}{4}\times 1\right)$.

Ainsi $\boxed{I = 2\ln 2 - \frac{3}{4}}$.