Chapitre 12

Somme de variables aléatoires

Tableau blanc

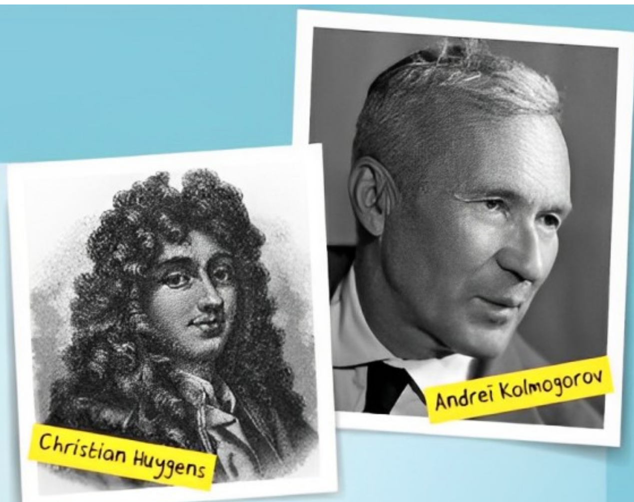
L'intégralité de ce polycopié est extraite du manuel* Hyperbole : Terminale Spécialité Maths, *Nathan 2020.

HISTOIRE DES MATHS

En 1657, dans son traité *Raisonnement sur les jeux de hasard*, **Christian Huygens** introduit la notion fondamentale d'espérance (du latin *expectatio*, attente) dans une situation d'incertitude. Il faut attendre deux siècles plus tard pour que l'Anglais **William Whitworth** utilise la lettre E pour noter l'espérance.

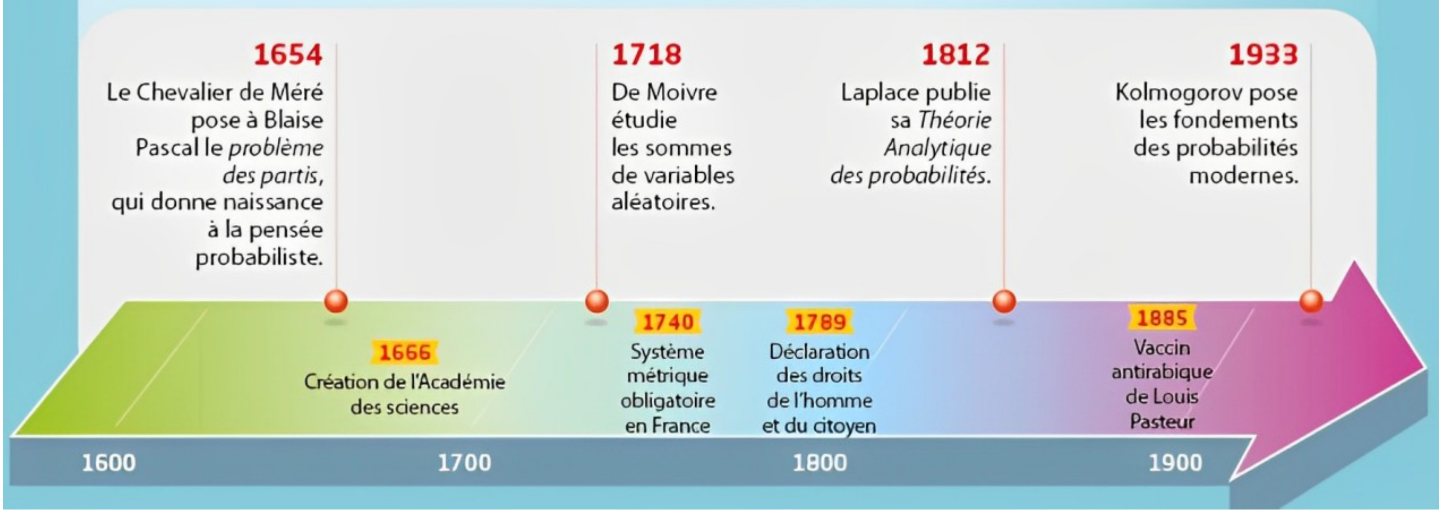
La notion de variable aléatoire apparaît quelques années plus tard, en 1713, dans l'ouvrage majeur de **Jacques Bernoulli**, *Ars Conjectandi*.

En 1718, **Abraham de Moivre** étudie les sommes de variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli. C'est grâce à ses travaux précurseurs que, cent ans plus tard, **Pierre-Simon de Laplace** applique des techniques d'analyse dans le domaine des probabilités dans sa *Théorie analytique*.



▶ **Christian Huygens** (1629-1695) est un mathématicien et astronome hollandais. En 1656, il découvre les anneaux de Saturne pressentis par Galilée, et son satellite Titan. On lui doit le premier traité de probabilités.

▶ **Andreï Kolmogorov** (1903-1987) est un mathématicien russe. Il est principalement connu pour avoir fondé, en 1929, dans le cadre de ses recherches en électrostatique, une théorie axiomatique des probabilités.



1 Variables aléatoires X + Y et aX

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ et Y prend les valeurs $b_1, b_2, \dots, b_m$ (avec n et m entiers naturels non nuls).

A Variable aléatoire X + Y

Définitions

- La variable aléatoire X + Y prend toutes les valeurs possibles $a_i + b_j$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.
- Loi de probabilité de X + Y : pour toute valeur w prise par X + Y, $\mathbf{P(X + Y = w)}$ est la somme de toutes les probabilités $\mathbf{P}(\{\mathbf{X} = a_i\} \cap \{\mathbf{Y} = b_j\})$ où $a_i + b_j = w$.

Exemple

En période de réglage de ses machines, le contrôleur qualité d'une usine effectue de nombreux prélèvements dans la production et relève, pour chaque pièce, si elle a un défaut A, un défaut B. Compte tenu du grand nombre de pièces prélevées, les fréquences indiquées dans ce tableau peuvent être assimilées à des probabilités.

X (resp. Y) est la variable aléatoire qui compte le nombre de défauts A (resp. B). Dans le tableau figurent en rouge les valeurs prises par la variable aléatoire somme S = X + Y.

Voici ci-contre sa loi de probabilité.

s	0	1	2	3
P(X = s)	0,07	0,33	0,37	0,23

X \ Y	0	1	2	Loi de X
0	**0** 0,07	**1** 0,18	**2** 0,17	0,42
1	**1** 0,15	**2** 0,20	**3** 0,23	0,58
Loi de Y	0,22	0,38	0,40	1

B Variable aléatoire aX

Définitions

a désigne un nombre réel différent de 0.

- La variable aléatoire aX prend toutes les valeurs possibles $a \times a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Loi de probabilité de aX : pour toute valeur w prise par aX, $\mathbf{P(aX = w)}$ est la somme de toutes les probabilités $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} = a_i\})$ où $a \times a_i = w$.

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu et Y celle qui donne le double de ce numéro. Alors Y = 2X.

C Linéarité de l'espérance

Propriétés (admises)

- $\mathbf{E(X + Y) = E(X) + E(Y)}$
- $\mathbf{E}(a\mathbf{X}) = a\,\mathbf{E(X)}$, avec a nombre réel, $a \neq 0$.

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe A.

$\mathrm{E(X)} = 0{,}42 \times 0 + 0{,}58 \times 1 = 0{,}58$ et $\mathrm{E(Y)} = 0{,}22 \times 0 + 0{,}38 \times 1 + 0{,}4 \times 2 = 1{,}18$.

Donc $\mathrm{E(X) + E(Y)} = 1{,}76$.

$\mathrm{E(X + Y)} = 0{,}07 \times 0 + 0{,}33 \times 1 + 0{,}37 \times 2 + 0{,}23 \times 3 = 1{,}76$. On constate que $\mathrm{E(X + Y) = E(X) + E(Y)}$.

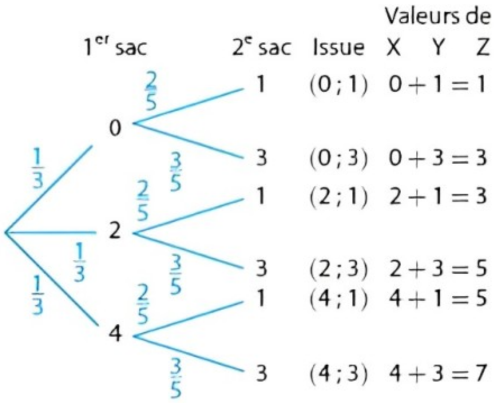
EXERCICES RÉSOLUS

1 Représenter une variable comme somme de variables aléatoires

On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois papiers portant les numéros 0, 2 et 4, l'autre contient cinq papiers : deux portant le numéro 1 et trois portant le numéro 3.
On tire un papier de chaque sac et on additionne les numéros obtenus.
Z est la variable aléatoire qui donne le résultat.
a) Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$.
b) Déterminer les valeurs prises par Z et sa loi de probabilité.

Solution

a) X est la variable aléatoire qui donne le numéro tiré dans le premier sac et Y est celle qui donne le numéro tiré dans le second sac.
b) On représente la situation par un arbre pondéré.
Les valeurs prises par Z sont donc 1, 3, 5 et 7.
$P(Z=3) = P(\{X=0\} \cap \{Y=3\}) + P(\{X=2\} \cap \{Y=1\})$
$P(Z=3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$
Loi de probabilité de Z : on calcule de même les autres probabilités.



c	2	3	5	7
$P(Z=c)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

2 Utiliser la linéarité de l'espérance

Voici les lois de probabilité de deux variables aléatoires X et Y définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.

a	0	10	25
$P(X=a)$	0,20	0,28	0,30

b	10	15
$P(Y=b)$	0,4	0,6

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire somme $S = X + Y$.

Solution

$E(X) = 0,2 \times 0 + 0,28 \times 10 + 0,3 \times 25 = 10,3$
$E(Y) = 0,4 \times 10 + 0,6 \times 15 = 13$
Donc $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 11,3 + 13 = 24,3$.

Pour calculer l'espérance de S, il n'est pas utile de déterminer sa loi de probabilité.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 José lance un jeton portant les numéros 0 et 1, puis lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Z est la variable aléatoire qui donne la somme des deux numéros obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de Z.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers. On sait que $E(X) = 2,5$ et $E(Y) = 3,4$.
Dans chaque cas, déterminer l'espérance de la variable aléatoire :
a) $X + Y$ **b)** $4X$ **c)** $4X + Y$

2 Variables aléatoires indépendantes

A Succession d'épreuves aléatoires indépendantes

On effectue successivement deux épreuves aléatoires indépendantes l'une de l'autre. Ainsi, l'issue de la première épreuve n'influence pas l'issue de la seconde.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le résultat de la première (resp. seconde) épreuve.
On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes**.

Conséquence : les événements $\{X = a_i\}$ et $\{Y = b_j\}$ sont indépendants, donc :

$$\mathbf{P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = P(X = a_i) \times P(Y = b_j)}.$$

Exemple

On lance successivement deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à six faces numérotées 0, 3, 3, 6, 6 et 6.
X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le premier (resp. second) dé.
Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, car les deux lancers de dés le sont.
Ainsi, par exemple, $P(\{X = 1\} \cap \{Y = 3\}) = P(X = 1) \times P(Y = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

B Variance

Propriétés (admises)

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers et a est un nombre réel différent de 0.
Si X et Y sont **indépendantes**, alors :

- $\mathbf{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$
- $\mathbf{V(aX) = a^2 V(X)}$

Exemple

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $V(X) = 1{,}25$ et $V(Y) = 5$.
Donc, $V(X + Y) = 1{,}25 + 5 = 6{,}25$ et $V(3X) = 3^2 \times 1{,}25 = 11{,}25$.

C Application à la loi binomiale

Propriétés

X est une variable aléatoire qui suit la **loi binomiale** $\mathscr{B}(n\,;p)$.

- $\mathbf{E(X) = np}$
- $\mathbf{V(X) = np(1 - p)}$
- $\sigma(\mathbf{X}) = \sqrt{\mathbf{np(1 - p)}}$

Démonstrations

On note X_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès à la i-ème épreuve et 0 sinon.

a	0	1
$P(X_i = a)$	$1 - p$	p

Chaque variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
$E(X_i) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$ et $V(X) = (1 - p)(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = (1 - p)(p^2 + p(1 - p)) = p(1 - p)$
Or, $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
En généralisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une somme de deux variables au cas de n variables, on obtient :

- $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = np$
- $V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) = np(1 - p)$.

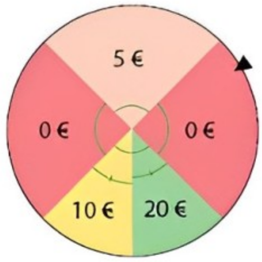
On en déduit que $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Vidéo
JaiCompris.com
Ces démonstrations sont présentées en vidéo

EXERCICES RÉSOLUS

5 Reconnaître et utiliser des variables aléatoires indépendantes

Dans une fête foraine, un jeu de hasard se déroule en deux temps.
Le joueur fait d'abord tourner la roue ci-contre et gagne le montant indiqué dans le secteur obtenu. Puis, il pioche un jeton bonus dans un sac qui contient 25 jetons marqués 0 €, 20 jetons marqués 2 € et 5 jetons marqués 5 €.
Calculer la probabilité p d'obtenir le même gain avec la roue et avec le jeton bonus.



Solution

X est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu avec la roue.
Y est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu avec le jeton bonus.
X et Y sont indépendantes, car les deux tirages le sont.
Il y a deux gains communs à la roue et au sac : 0 € et 5 €.

$P(\{X=0\}\cap\{Y=0\}) = P(X=0)\times P(Y=0) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(\{X=5\}\cap\{Y=5\}) = P(X=5)\times P(Y=5) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{40}$

Donc la probabilité demandée est $\frac{1}{4}+\frac{1}{40}=\frac{11}{40}$.

a	0	5	10	20
$P(X=a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b	0	2	5
$P(Y=b)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

On utilise l'indépendance des variables aléatoires pour calculer chacune de ces deux probabilités.

6 Utiliser l'additivité de la variance

On reprend la situation de l'exercice 5.
On note Z la variable aléatoire qui donne le gain final du joueur.
Déterminer la variance de Z.

Solution

Z est la somme des variables aléatoires X et Y, soit $Z = X + Y$.
Avec la calculatrice, on obtient (voir ci-contre) :

$$V(X) = 43{,}75 \text{ et } V(Y) = 2{,}41.$$

Les variables X et Y sont indépendantes, donc :

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 43{,}75 + 2{,}41 = 46{,}16.$$

Effectif total	1	1
Minimum	0	0
Maximum	20	5
Etendue	20	5
Moyenne	5	1.3
Ecart type	6.614378	1.552417
Variance	43.75	2.41

Remarque : la calculatrice NumWorks affiche la variance d'une série. Les autres calculatrices affichent σ et on utilise $V = \sigma^2$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4, puis un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Calculer la probabilité d'obtenir avec le dé à six faces le double du numéro obtenu avec le dé à quatre faces.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 On lance deux dés équilibrés à 10 faces. Sur l'un, les faces sont numérotées de 1 à 10. Sur l'autre, elles sont numérotées 0, 0, 0, 0, 10, 10, 10, 20, 20 et 30.
Z est la variable aléatoire qui donne la somme des deux numéros obtenus.
Déterminer la variance de Z. Expliquer.

3 Somme et moyenne d'un échantillon

A Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

Définition

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ de n variables aléatoires **indépendantes** et **identiques** qui suivent toutes cette loi.

Exemple

Laëtitia prend le même train cinq jours par semaine. On admet que la variable aléatoire X qui compte le nombre de retards suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 0{,}1)$. En répétant cette expérience pendant 8 semaines, on construit un échantillon $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5 ; X_6 ; X_7 ; X_8)$ de taille 8 de cette loi de probabilité.

B Somme d'un échantillon

Définition

$(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La **somme** de cet échantillon est la variable aléatoire $\mathbf{S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n}$.

Propriétés

S_n est la somme d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

- $\mathbf{E(S_n) = nE(X)}$
- $\mathbf{V(S_n) = nV(X)}$
- $\sigma(\mathbf{S_n}) = \sqrt{\mathbf{n}} \times \sigma(\mathbf{X})$

Démonstrations

- $E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$. Or, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent toutes la même loi que X, et donc $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = E(X)$. On en déduit que $E(S_n) = nE(X)$.
- Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, donc $V(S_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) = nV(X)$.
On en déduit que $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$.

C Moyenne d'un échantillon

Définition

$(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La **moyenne** de cet échantillon est la variable aléatoire $\mathbf{M_n} = \dfrac{\mathbf{S_n}}{\mathbf{n}}$.

Propriétés

M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

- $\mathbf{E(M_n) = E(X)}$
- $\mathbf{V(M_n)} = \dfrac{\mathbf{V(X)}}{\mathbf{n}}$
- $\sigma(\mathbf{M_n}) = \dfrac{\sigma(\mathbf{X})}{\sqrt{\mathbf{n}}}$

Démonstrations

- On sait que pour tout réel $a \neq 0$, $E(aX) = aE(X)$. Donc, $E(M_n) = E\left(\dfrac{1}{n}S_n\right) = \dfrac{1}{n}E(S_n) = \dfrac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$.
- On sait aussi que pour tout réel $a \neq 0$, $V(aX) = a^2V(X)$.
Par conséquent, $V(M_n) = V\left(\dfrac{1}{n}S_n\right) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n^2} \times nV(X) = \dfrac{V(X)}{n}$.
On en déduit que $\sigma(M_n) = \dfrac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Étudier la somme d'un échantillon

Le Yam's est un jeu dans lequel on lance cinq dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6, pour obtenir certaines combinaisons particulières. Pour l'une de ces combinaisons, appelée Chance, on marque la somme des numéros obtenus avec les cinq dés.
Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre de points que l'on peut ainsi obtenir.
Arrondir au centième si besoin.

Solution

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec un dé.
Voici ci-contre sa loi de probabilité.

a	1	2	3	4	5	6
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Un lancer de cinq dés est alors un échantillon $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5)$ de taille 5 de la loi de probabilité suivie par X.
La variable aléatoire S_5 somme de cet échantillon compte ainsi le nombre total de points obtenus.
À l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(X) \approx 1{,}71$.
Donc $E(S_5) = 5 \times 3{,}5 = 17{,}5$ et $\sigma(S_5) \approx \sqrt{5} \times 1{,}71$ soit $\sigma(S_5) \approx 3{,}82$.

Le résultat de chaque dé est indépendant des autres. Donc les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_5$ sont indépendantes.

10 Étudier la moyenne d'un échantillon

Pendant la fête de l'école, Constantine a prévu de jouer 10 fois au jeu de la grenouille, dans lequel elle peut gagner un certain nombre de points, noté X.
Voici la loi de probabilité de X.

a	0	5	10	20	50	100
$P(X=a)$	0,6	0,2	0,1	0,06	0,03	0,01

Déterminer l'espérance et l'écart-type du gain moyen par partie pour une série de 10 parties.

Solution

Les 10 parties sont indépendantes les unes des autres, donc elles constituent un échantillon $(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_{10})$ de taille 10 de la loi de probabilité de X. La variable aléatoire M_{10} moyenne de cet échantillon modélise alors le gain moyen.
À l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X) = 5{,}7$ et $\sigma(X) \approx 13{,}47$.
Donc $E(M_{10}) = 5{,}7$ et $\sigma(M_{10}) \approx \dfrac{13{,}47}{\sqrt{10}}$ soit $\sigma(M_{10}) \approx 4{,}26$.

Le gain moyen par partie est : $\dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}{10}$ c'est-à-dire M_{10}.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 Paul lance six dés tétraédriques équilibrés dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.
Il marque la somme des numéros obtenus sur les six sommets supérieurs.
Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre de points qu'il peut ainsi obtenir.
Arrondir au centième si besoin.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Chaque jour, Damien résout une fois le Rubik's Cube. X est l'écart, en s, entre le temps qu'il réalise et son meilleur temps. Voici la loi de probabilité de X.

a	0	1	2	10	20
$P(X=a)$	0,5	0,25	0,1	0,1	0,05

Déterminer l'espérance et l'écart-type de l'écart quotidien moyen sur une série de 30 jours.

Savoir-faire Algo python

Vidéo JAICOMPRIS.COM Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

EXERCICE RÉSOLU

13 Simuler un échantillon d'une loi de probabilité

Cours 3

On dispose d'un dé équilibré à six faces, sur lequel la moitié des faces sont numérotées 0, un tiers des faces sont numérotées 1 et la dernière face est numérotée 2.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu quand on lance ce dé.

a) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Voici une fonction écrite en langage Python qui simule un lancer de ce dé. Compléter les cadres rouge et vert.

c) Modifier ce programme afin d'obtenir un échantillon de taille n où n est un nombre entier, $n \geqslant 1$.

d) Saisir ce nouveau programme et l'exécuter pour $n = 5$.

```
from random import *

def X():
    r=random()
    d=1
    if r<=1/2:
        d=□
    if r>=□:
        d=2
    return d
```

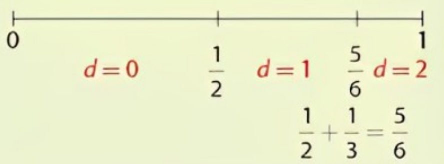
Solution

a) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) Cadre rouge : 0 Cadre vert : $\frac{5}{6}$

Selon la valeur de r comprise entre 0 et 1, on affecte la valeur de d ainsi :



c) On effectue n lancers du dé, les numéros obtenus sont rangés dans une liste L.

La fonction X de paramètre n renvoie pour résultat cette liste.

d) On exécute **X(5)**.

Voici un affichage obtenu.

```
>>> X(5)
[0, 1, 2, 1, 0]
```

```
from random import *

def X(n):
    L=[]
    for i in range(n):
        r=random()
        d=1
        if r<=1/2:
            d=0
        if r>=5/6:
            d=2
        L=L+[d]
    return L
```

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

14 On dispose d'un dé équilibré à 10 faces, dont une face est numérotée 10, deux faces sont numérotées 20, trois faces sont numérotées 30 et les autres faces sont numérotées 40.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu quand on lance ce dé.

a) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Écrire une fonction en langage Python pour simuler un échantillon de taille n de la loi de probabilité de X.

c) Saisir ce programme et l'exécuter pour $n = 8$.

15 On reprend la situation de l'exercice 13

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

2. Voici une fonction en langage Python à saisir à la suite du programme de l'énoncé de l'exercice 13.

```
def Moyenne(n):
    som=0
    for i in range(n):
        som=som+X()
    m=som/n
    return m
```

a) Quel est son rôle ?

b) La saisir, puis l'exécuter pour des valeurs de n de plus en plus grandes.

Qu'observe-t-on ?

51 QCM Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

On lance successivement un dé équilibré à dix faces numérotées de 0 à 9 et un jeton qui porte le numéro 10 d'un côté et 20 de l'autre côté. X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le dé, Y celle qui donne le numéro obtenu avec le jeton et Z celle qui donne la somme des deux nombres.

		A	B	C	D
1	Les variables aléatoires vérifient …	$Z = X + 10Y$	$Z = X + Y$	$Z = X \times Y$	$Z = 10X + Y$
2	L'espérance de X est égale à …	5	9	4,5	45
3	L'espérance de Z est égale à …	19,5	15	20	75
4	Les variables aléatoires X et Y …	sont égales à Z	ont la même loi de probabilité	ne sont pas indépendantes	sont indépendantes
5	L'écart-type de Z est …	environ 4,42	environ 5,77	25	40

52 QCM Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

Deux sacs contiennent des papiers numérotés de 0 à 9. On tire indépendamment un papier de chaque sac. X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le numéro tiré du premier (resp. second) sac.

		A	B	C	D
1	$E(X+3Y)$ est égal à …	$E(X)+E(3Y)$	$4E(X)$	$E(X)+3E(Y)$	$3E(X+Y)$
2	$\sigma(X+Y)$ est égal à …	$\sigma(X)+\sigma(Y)$	$\sqrt{V(X+Y)}$	$\sqrt{V(X)+V(Y)}$	$\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$
3	$V(2X+0{,}5Y)$ est égal à …	$V(X)+V(Y)$	$2{,}5[V(X)+V(Y)]$	$4V(X)+0{,}25V(Y)$	$2V(X)+0{,}5V(Y)$
4	Si $V(X)=V(Y)$, alors …	$V(X+Y)=2V(X)$	$V(X+Y)=V(X)^2$	$\sigma(X+Y)=2\,\sigma(X)$	$\sigma(X+Y)=\sqrt{2}\sigma(X)$

53 Vrai/Faux Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 On lance deux fois successivement un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Z est la somme des numéros obtenus.
Affirmation : $P(Z=10)=\dfrac{1}{18}$.

2 On reprend la situation de la question **1**. X est le résultat obtenu au premier lancer, Y celui du second lancer.
Affirmation : $P(\{X=4\}\cap\{Y=6\})=\dfrac{1}{36}$.

3 On considère un schéma de Bernoulli avec 12 épreuves pour lesquelles 0,3 est la probabilité de succès. X compte le nombre de succès.
Affirmation : l'espérance de X est $E(X)=3{,}6$.

4 On constitue un échantillon de taille 50 d'une variable aléatoire X.
Affirmation : l'écart-type de la somme S_{50} est égal à $7\sigma(X)$.

S'entraîner et réviser

Exercices en ligne sur Mathenpoche — Exercices « **Espérance et variance pour une somme de v.a.** » et « **Paramètres d'une somme de v.a. indépendantes** »	
Exercices en ligne sur Automaths — choisir dans les notions : **Somme de variables aléatoires → Opérations avec des variables aléatoires**	
Le cours et des exercices en vidéo par Yvan Monka (attention il s'agit de la même playlist pour ce chapitre et pour le suivant)	