Corrigé de l'exercice 82 p.78

1) La droite d admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

$\dfrac{-2}{1} \neq \dfrac{-3}{2}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.

Les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Si les droites sont sécantes, les coordonnées $(x;y;z)$ du point d'intersection vérifient :

$$\begin{cases} x=-2t+3=t'-1 & (1)\\ y=-3t+1=2t'+2 & (2)\\ z=t+2=-t'-3 & (3)\end{cases} \iff \begin{cases} 2t+t'=4 & (1)\\ 3t+2t'=-1 & (2)\\ t+t'=-5 & (3)\end{cases}$$

On résout le système composé des équations (1) et (3).

$$\begin{cases} 2t+t'=4 & (1)\\ t+t'=-5 & (3)\end{cases} \iff \begin{cases} t=9 & (1)-(3)\\ t+t'=-5 & (3)\end{cases} \iff \begin{cases} t=9\\ t'=-14\end{cases}$$

On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (2) du système initial :

$-3t+2t'=3\times 9+2\times(-14)=-1.$

Le système admet comme solution $\left(t\ ;\ t'\right)=(9\ ;\ -14)$

En remplaçant t par 9 dans la représentation paramétrique de la droite d de l'énoncé, on trouve :
$$\begin{cases} x=-2\times 9+3=-15\\ y=-3\times 9+1=-26\\ z=9+2=11\end{cases}.$$

Si l'on avait remplacé t' par -14 dans la représentation paramétrique de la droite d' de l'énoncé, on aurait trouvé les mêmes valeurs.

Conclusion : les droites d et d' sont coplanaires, sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées $(15\ ;\ -26\ ;\ 11)$.

2) La droite d admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{2}{-2}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires. Les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Si les droites sont sécantes, les coordonnées $(x;y;z)$ du point d'intersection vérifient :

$$\begin{cases} x=t-1=3t'\\ y=2t+2=-2t'+1\\ z=-t-3=t'+1\end{cases} \iff \begin{cases} t=3t'+1\\ 2(1+3t')+2=-2t'+1\\ -(3t'+1)-3=t'+1\end{cases} \iff \begin{cases} t=3t'+1\\ t'=-\dfrac{3}{8}\\ t'=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

Ce système n'est pas compatible. Les droites d et d' ne sont pas sécantes.

d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes. Elles ne sont donc pas coplanaires.

3) La droite d admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{9}{2} \\ 9 \end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{u'} = \frac{3}{2}\vec{u}$. Les droites d et d' sont parallèles.

La droite d contient le point $A(7;1;2)$. $A \in d'$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 3t' - 1 = 7 \\ -\frac{9}{2}t' = 1 \\ 9t' + 5 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = \frac{8}{3} \\ t' = -\frac{2}{9} \\ t' = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ce système n'est pas compatible d'où $A \notin d'$. Les droites d et d' sont strictement parallèles.