Ensembles – Applications

$$f\begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

- f est injective $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ (un élément d'arrivée a au plus un antécédant)
- f est surjective si tout élément de f admet un antécédant
- f est bijective si elle est injective et surjective, ie si chaque élément de F admet un unique antécédant.

Groupes :

Loi de composition :

1): Une loi de composition interne, ou opération sur E, est une application

$$\begin{cases} E\times E \to E \\ (x,y) \mapsto x*y \end{cases}$$

2): $A \subset E$ est une partie stable de E pour la loi $*$ si $A*A = \{x*y \mid x\in A,\ y\in A\} \subset A$

3): $*$ est associative lorsque, $\forall (x,y,z)\in E^3$, $(x*y)*z = x*(y*z)$

4): $*$ est commutative lorsque, $\forall (x,y)\in E^2$, $(x*y) = (y*x)$

(La composition de fonction n'est pas commutative : $f\circ g \neq g\circ f$
Le produit vectoriel n'est ni associatif, ni commutatif)

$e\in E$ est un élément neutre pour la loi $*$ si : $\forall x\in E$, $x*e = e*x = x$

Soit e l'élément neutre de $(E,*)$. $x \in E$ est inversible s'il existe $y \in E$ tel que :

$$x * y = y * x = e$$

L'inverse de x est unique

Si $*$ est associative, $a_1, \dots a_n$ inversibles, alors $a_1 * \dots * a_n$ est inversible et :

$(a_1 * \dots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \dots * a_1^{-1}$ (tant que ~~$a_1 \dots a_n$~~ $*$ non commutative)

Ex :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] & E \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Morphisme :

Un morphisme f de $(E,*)$ dans $(F,\bullet)$ est une application vérifiant :

$$\boxed{f(x * y) = f(x) \bullet f(y)}$$

C'est un endomorphisme si $(E,*) = (F,\bullet)$

un isomorphisme si f est bijectif

un automorphisme si f c'est un endomorphisme bijectif

Groupe :

$(G,*)$ est un groupe si :

- $*$ est une loi de composition interne sur G
- $*$ est associative
- $*$ admet un élément neutre dans G
- Chaque élément de G est inversible pour $*$ dans G

$(G,*)$ est un groupe commutatif si :

- c'est un groupe
- $*$ est commutative

$(G,*)$ est un groupe si :

- $*$ est une loi de composition interne
- $*$ est associative
- $*$ admet un élément neutre
- Chaque élément de G est inversible

$(G,*)$ est un groupe commutatif si, c'est un groupe, $*$ est commutative.

Exemples :

1) : Groupes numériques : $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$

2) : $(S(E),\circ)$, où $S(E)$ est l'ensemble des bijections de E dans E.

Ce groupe n'est pas commutatif si $\mathrm{card}(E) \geq 3$

Sous-groupe :

Soient $(G,\cdot)$ un groupe, H un ensemble $H \subset G$

H est un sous-groupe de $(G,\cdot)$ si $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in H^2,\ x\cdot y^{-1} \in H \end{cases}$

(Pour vérifier que H est un sous-groupe de $(G,+)$, on vérifie : $H \neq \emptyset$

$\forall (x,y) \in H^2,\ x-y \in H$.

Anneaux et corps

1) $(A,+,\cdot)$ est un anneau lorsque :

- $(A,+)$ est un groupe commutatif
- $\cdot$ est associative
- $\cdot$ admet un élément neutre appelé unité $\neq 0$
- $\forall (x,y,z) \in A^3$:

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \quad \text{et} \quad (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$$

2) : $(A,+,\cdot)$ est un anneau commutatif lorsque c'est un anneau, et la deuxième loi est commutative

3) : B est un sous-anneau de $(A,+,\cdot)$ lorsque :

$$\begin{cases} 1 \in B \\ \forall (x,y) \in B, \quad x-y \in B \\ \forall (x,y) \in B, \quad x\cdot y \in B \end{cases}$$

Ex : anneaux numériques $(\mathbb{R},+,\cdot)$ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$

$(K,+,\cdot)$ est un $\boxed{\text{corps}}$ si c'est un anneau commutatif et si chaque élément non nul est inversible

Soit $(K,+,\cdot)$ un corps. $(E,+,\cdot)$ est un $\boxed{\text{espace vectoriel}}$ sur K si

loi externe

$(E,+)$ est un groupe commutatif

$$\begin{cases} K\times E \\ (\lambda,x) \longrightarrow \lambda\cdot x \end{cases} \quad \text{vérifie :}$$

- $1\cdot x = x$
- $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$
- $\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$
- $(\lambda\cdot\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$

Les éléments de K sont appelés scalaires.
Les éléments de E sont appelés vecteurs

$0\cdot x = 0$

$f : E \to F$ est une application linéaire si :

$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (x,y) \in E^2$: $\boxed{f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)}$

En particulier, si $\lambda = \mu = 1$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, donc f est un morphisme de groupes

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

$GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E (endomorphismes bijectifs) (éléments inversibles)

$E^* = \mathcal{L}(E,K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

E^* est le dual de E.

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ est injectif si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un anneau

$(GL(E), \cdot)$ est un groupe

Soit E un K-espace vectoriel, F une partie non vide de E.

F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :

$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \quad \forall (x,y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$