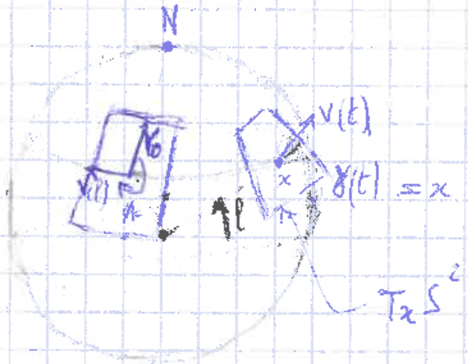
Géométrie et topologie des espaces fibrés

I Pendule de Foucault, transport parallèle

Mise en évidence rotation de la Terre, sans observer les étoiles.
Considère forces de Coriolis, directions des oscillations tourne à vitesse constante.
Après 1 jour (23h56'):

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{\text{Foucault}} &= -2\pi \sin \ell \qquad \ell = \text{latitude} \doteq 48°52' \\ &= -271° = -3/4 \text{ tours} \end{aligned}}$$



1.2 : Connexion de Levi-Civita

Soit la sphère $S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$

Trajectoire γ sur S : $\gamma(t) \in S^2$

Plan tangent à S . Si S est une surface plongée de $\mathbb{R}^3$, $x \in S$, on note $T_x S$ le plan tangent à S en x. ($T_x S \subset \mathbb{R}^3$)
C'est le plan contenant tous les vecteurs tangents à S en x.

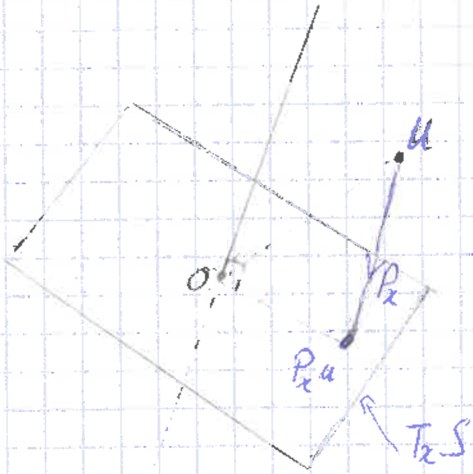
La direction $v(t)$ des petites oscillations est : $v(t) \in T_{\gamma(t)} S^2$

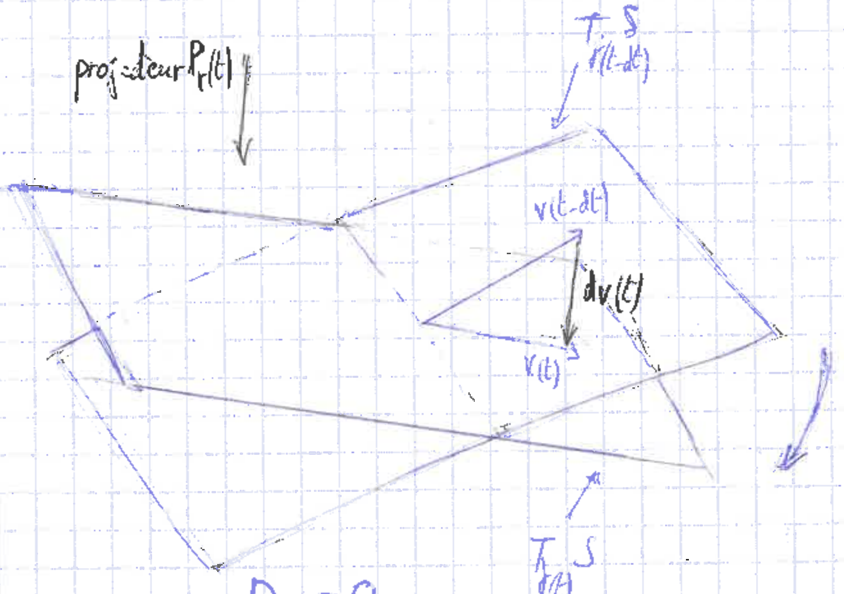
Principe d'inertie voudrait obliger $v(t) \in \mathbb{R}^3$ à rester constant dans $\mathbb{R}^3$ (i.e $\frac{dv}{dt} = 0$), mais l'attraction terrestre contraint $v(t)$ à rester dans le plan horizontal $T_{\gamma(t)} S^2$ à chaque instant.

On introduit le projecteur orthogonal sur le plan tangent :

$$\boxed{P_x : \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_x S}$$

Il y a un projecteur P_x pour chaque point $x \in S$





Proposition Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée, une courbe paramétrée $\gamma(t) \in S$, et en chaque point $\gamma(t)$, une pendule avec de petites oscillations selon la direction $v(t)$ $v(t) \in T_{\gamma(t)} S$.
Alors dans la limite adiabatique (la fréquence d'oscillation est grande devant le paramétrage, i.e la rotation de la Terre), la direction du pendule $v(t) \in T_{\gamma(t)} S$ partant d'une direction initiale donnée $v(0) \in T_{\gamma(0)} S$ est donnée par :

$$\boxed{P_{\gamma(t)} \frac{d v(t)}{dt} = 0} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La composante horizontale de $\frac{dv}{dt}$ est nulle.

La composante horizontale de l'accélération est nulle, il n'y a pas de force tangentielle.

Définition Soit $S \in \mathbb{R}^3$ une surface, $\gamma(t)$ un chemin paramétré sur S.
$v(t)$ une famille de vecteurs tangents en chaque point $\gamma(t)$.

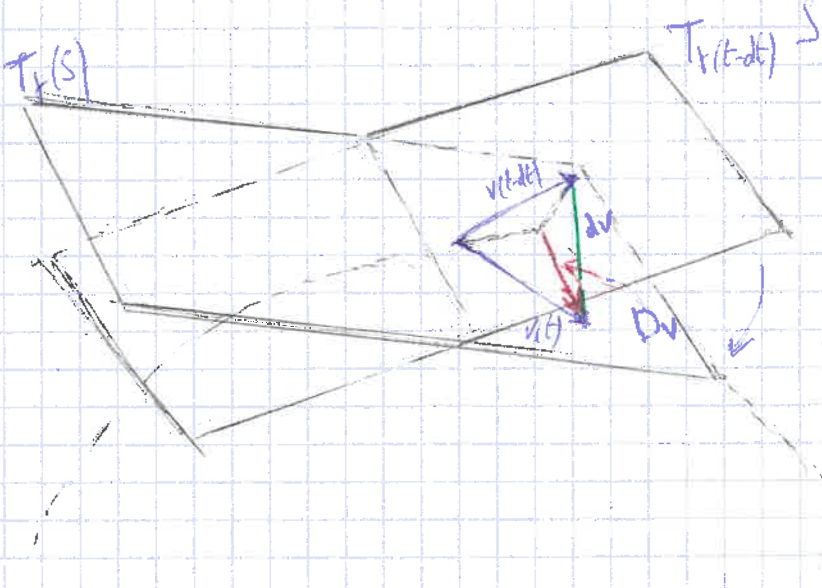
La dérivée covariante en $\gamma(t)$ de cette famille de vecteurs est :

$$\boxed{\frac{Dv}{dt} = P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)} S}$$

Composante tangentielle du vecteur $v(t)$.

Dérivée covariante, ou connexion de Levi-Civita. "$v(t)$ suit la connexion de L-Civita", ou "suit le transport parallèle" le long de γ, si la dérivée covariante est nulle :

$$\frac{Dv}{dt} = P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad \forall t$$

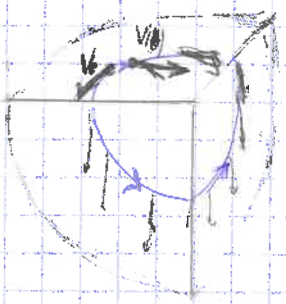


Dv : évolution temporelle de la composante tangentielle de la variation temporelle du vecteur $v(t)$
→ dérivée covariante

Variation tangentielle du vecteur $v(t)$ au cours du temps.

La dérivée covariante est une notion intrinsèque à la surface (à la variété).
Elle ne dépend que du champ de tenseur métrique $g(z)$, qui est le produit scalaire restreint à la surface.

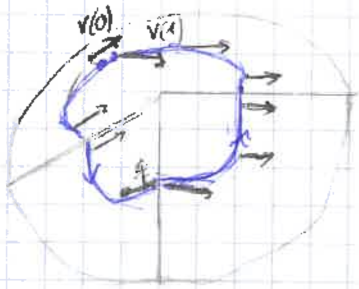
En relativité générale, tu n'as pas besoin de supposer que l'espace-temps soit inclu dans un espace euclidien plus grand.



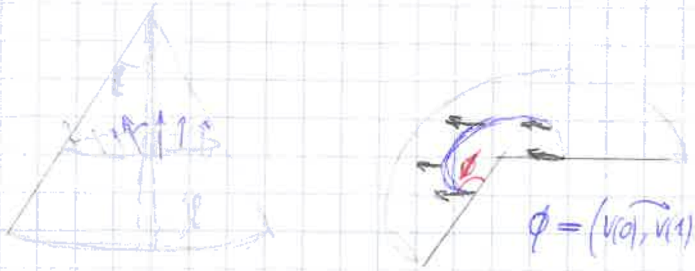
$\varphi = \left(\widehat{v(0), v(1)}\right) = \frac{\pi}{2}$

Holonomie (détection de la singularité)

Le vecteur $v(t)$ suit le transport parallèle (= la dérivée covariante est nulle)



$\phi = \left(\widehat{v(0), v(1)}\right) = -\frac{\pi}{2}$



$\phi = \left(\widehat{v(0), v(1)}\right) = -2\pi \sin \ell$

1.2.1) : Dérivée covariante et métrique

Soient 2 vecteurs $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.

Produit scalaire : $\boxed{\langle u | v \rangle_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i}$

Norme carrée : $\boxed{\|u\|^2 = \langle u | u \rangle}$

Métrique induite g sur S : Pour tout point $x \in S$, on note g_x le produit scalaire sur l'espace tangent $T_x S$, définit par le produit scalaire ambiant :

$$\boxed{u, v \in T_x S, \qquad g_x(u, v) := \langle u | v \rangle_{\mathbb{R}^3}}$$

g_x est la métrique sur S induite par le produit scalaire de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$.

La fonction $g : \underset{\in S}{x} \longmapsto g_x$ s'appelle le champ de tenseur métrique sur S.

$$g_x(u, v) = \langle u | v \rangle_{g_x}$$

Théorème : Compatibilité dérivée covariante D et métrique g : (1.2.9)

Soient $v_t, w_t \in T_{\gamma(t)} S$ deux familles de vecteurs sur $\gamma(t)$, alors :

$$\boxed{\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(v(t), w(t)) = g_{\gamma(t)}\left(\frac{D v(t)}{dt}, w(t)\right) + g_{\gamma(t)}\left(v_t, \frac{D w_t}{dt}\right)}$$

Formule de Leibniz :

Soit $\gamma(t)$ un chemin paramétré, et $v(t) \in T_{\gamma(t)} S$ une famille de vecteurs le long de $\gamma(t)$. Soit $f(t)$ une fonction. Alors :

$$\boxed{\frac{D}{dt}\left(f(t)\, v(t)\right) = \left(\frac{df(t)}{dt}\right) v(t) + f(t)\, \frac{D\, v(t)}{dt}}$$

1.3 Holonomie et courbure

Soit $\gamma \subset S$ une courbe paramétrée fermée (ie $\gamma(0) = \gamma(1)$) et soit $t \mapsto v_t \in T_{\gamma(t)} S$, une famille de vecteurs tangents suivant le transport parallèle (ie $\frac{Dv_t}{dt} = 0$). Alors les vecteurs de fin ~~et d'arrivée~~ de départ $v_0, v_1 \in T_{\gamma(0)} S = T_{\gamma(1)} S$ appartiennent au même plan tangent et ont la même longueur (d'après 1.2.9). Le vecteur v_1 se déduit donc de v_0 par une rotation d'un angle noté : $\boxed{h(\gamma) = (\widehat{v_0, v_1})}$

appelé holonomie du chemin fermé γ (défini modulo 2π)

Théorème : (1.3.1). L'holonomie $h(\gamma)$ est indépendante de la paramétrisation du chemin γ, du point initial x_0, et du vecteur initial v_0.

Elle ne dépend que de la géométrie du chemin.

13) Courbure de Gauss, formule de Gauss-Bonnet

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface, $x \in S$ un point. Si $L \subset T_x S$ est une droite passant par x, $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur normal à $T_x S$.

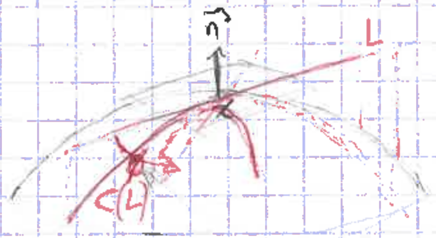
Le vecteur normal $\vec{n}$ et la ~~droite~~ droite L engendrent un plan $P(L) = \mathrm{Vect}(L, \vec{n})$, qui intersecte la surface S selon la courbe $C(L) := P(L) \cap S$.

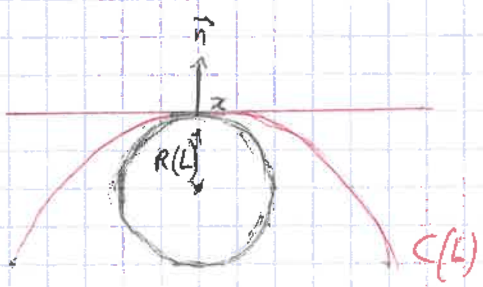
On note $R(L)$ le rayon de courbure de cette courbe au point x.

On note $\boxed{k(L) = \frac{1}{R(L)}}$, appelée courbure selon cette direction, de signe négatif si $C(L)$ est de l'autre côté de $\vec{n}$ par rapport à $T_x S$.

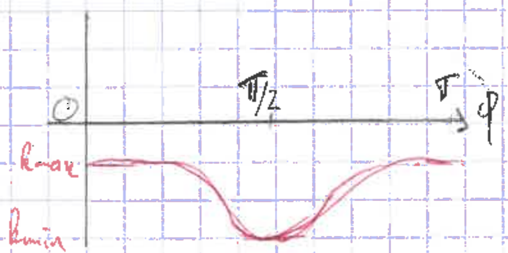
La courbure de Gauss de S en x est : $\boxed{k(x) = k_{min}\, k_{max}}$

avec $k_{min} = \min_L (k(L))$, $k_{max} = \max_L (k(L))$

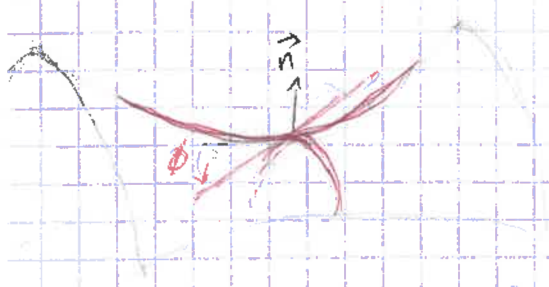


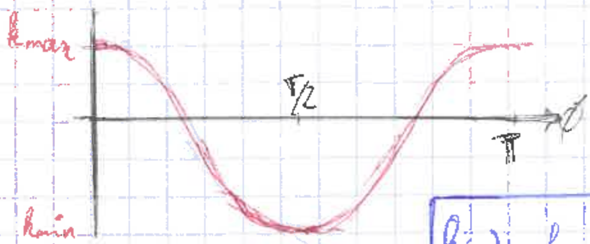


Courbure négative ($C(L)$ de l'autre côté de $\vec{n}$ par rapport à $T_x S$)



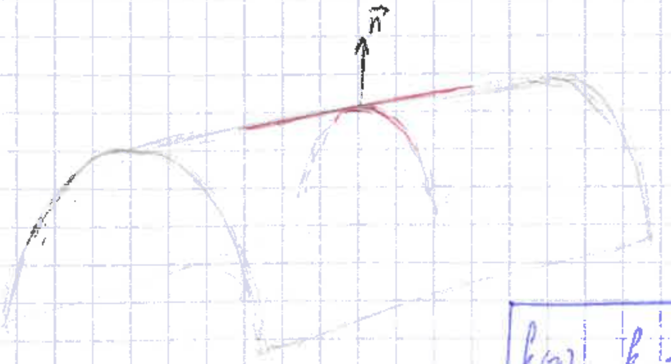
$\boxed{k(x) = k_{min} \cdot k_{max} > 0}$

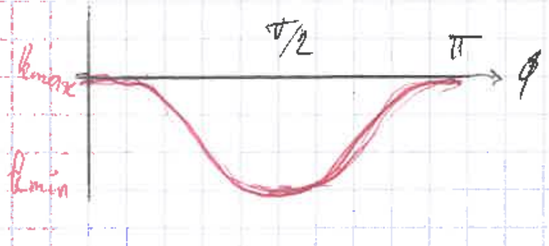




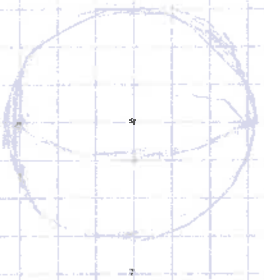
$\boxed{k(x) = k_{min} \cdot k_{max} < 0}$

$k(x) = k_{min} \cdot k_{max}$





$\boxed{k(x) = k_{min} \cdot k_{max} = 0}$! car k_{max} vaut toujours 0.



Pour une sphère $\boxed{k(x) = c^{te} = \frac{1}{R^2}}$

Formule de Gauss-Bonnet locale : (Thm 1.3.8)

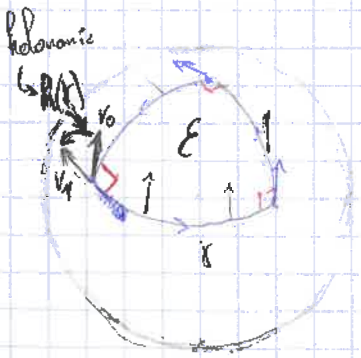
L'holonomie h peut se mesurer à partir de la courbure de Gauss k.

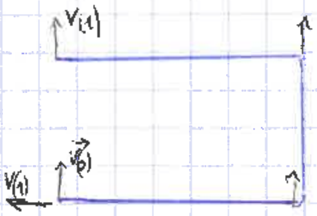
Si $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée, $\gamma \subset S$ un chemin fermé orienté qui borde un domaine $\mathcal{E}$ (c'est à dire $\partial \mathcal{E} = \gamma$), alors :

$$\boxed{h(\gamma) = \iint_{x \in \mathcal{E}} k(x)\, d^2 s} \qquad (1.3.1)$$

holonomie du chemin fermé γ.

courbure de Gauss de la surface S en x





(Mise à plat de la trajectoire)

Pour la sphère : $k = \frac{1}{R^2}$.

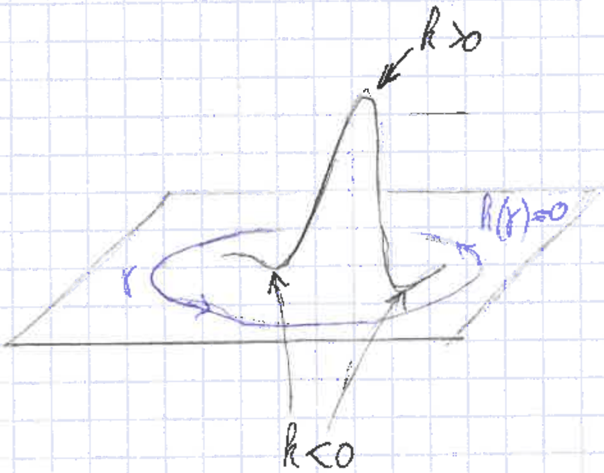
$k\, d^2 s = \frac{d^2 s}{R^2} = d^2 \Omega$ est l'angle solide $(\sin\theta\, d\theta\, d\phi)$

Gauss-Bonnet $\boxed{h(\gamma) = \iint d^2 \Omega \mod 2\pi}$

Pour la sphère complète : $\mathcal{E} = S^2$ (γ réduit à un point)

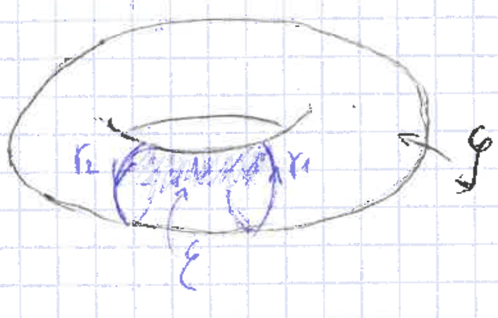
$h(\gamma) = 0$, et $\iint_{S^2} d^2\Omega = 4\pi$, donc la formule est vérifiée (grâce au mod 2π)

Si on change la forme de la surface à l'intérieur de $\mathcal{E}$ (sans toucher au bord γ), alors la courbure de Gauss locale $k(x)$ change, mais $h(\gamma)$ ne change pas, donc l'intégrale de $k(x)$ ne doit pas changer.



ici, $h(\gamma) = 0$ reste inchangée

Dans la formule de Gauss Bonnet locale (13.1), le chemin fermé γ peut être composé de plusieurs parties. $\mathcal{E}_x$: le tore. $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$:



Formule de Gauss-Bonnet globale :

Pour une surface S orientée compacte sans bord, l'intégrale de la courbure de Gauss $k(x)$ sur toute la surface est :

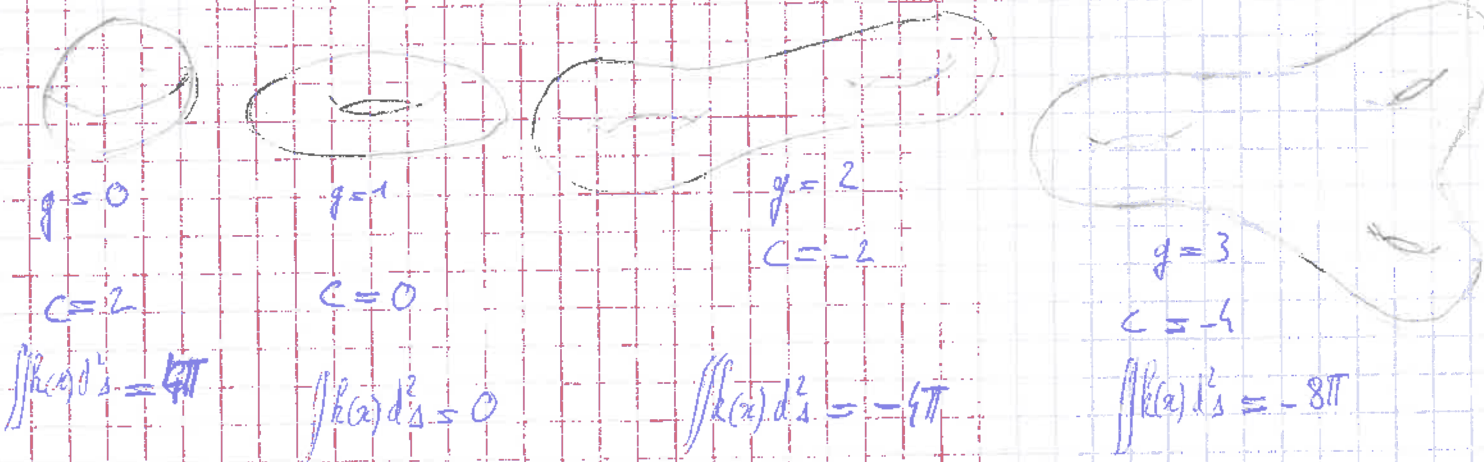
$$\boxed{\iint k(x)\, d^2_s = 2\pi C} \qquad \text{Invariant topologique} \qquad (1.3.5)$$

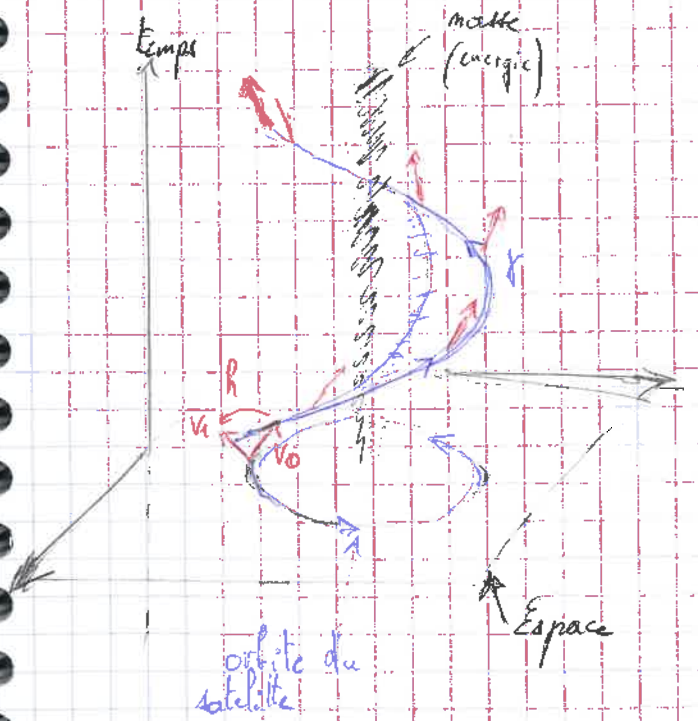
où $k(x)$ est la courbure de Gauss, et $C \in \mathbb{Z}$ un entier, (indice de Euler, ou indice de Chern).

Pour une surface de genre g (avec g trous), on a :

Indice de Chern de Euler

$$\boxed{C = 2(1-g)} \qquad (1.3.6)$$





Espace-temps courbé : Effet gyroscopique

précession gyroscopique = holonomie le long de γ

(équivalent de l'angle de Foucault)

$\boxed{\text{Effet Einstein-de Sitter}}$

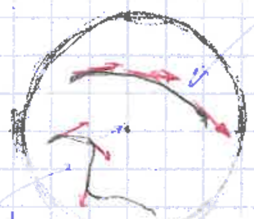
1.4): Trajectoires géodésiques

Définition: La courbe $\gamma(t)$ est une géodésique si $\boxed{\frac{Dv}{dt} = 0, \ \forall t}$

où $\gamma(t)$ est un chemin paramétré sur une surface S, et $v(t)$ le vecteur vitesse tangent au point $\gamma(t)$:

$$\boxed{v(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)} S}$$

géodésique : trajectoire la plus droite possible
(pas forcément la + courte)



Trajectoire sur une géodésique
correspond au mouvement libre d'une particule sur la sphère S, qui ne subit que la force de réaction $R_\gamma(t)$, normale à la sphère. $(P_x R_x = 0)$
(projecteur)

Loi de Newton: $m \frac{dv}{dt} = R$

$$P \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} PR = 0$$

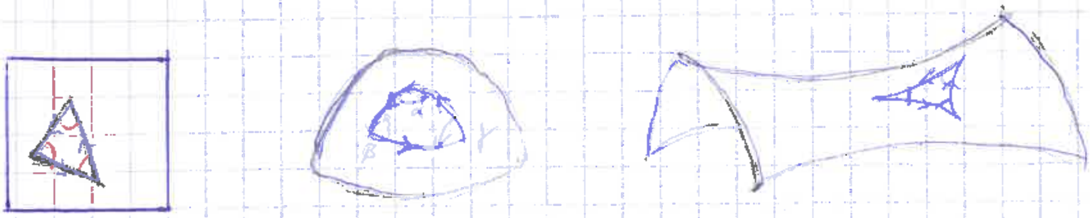
Équation de ~~Newton~~ Loi de Newton sur la surface: $\boxed{m \frac{Dv^\mu}{dt} = F}$

La dérivée covariante, c'est l'accélération tangentielle de la particule.

Triangle géodésique: Théorème (1.4.3):

Sur une surface S orientée, si $T = (A, B, C)$ est un triangle géodésique, i.e. les 3 sommets sont reliés par des géodésiques, et que $\mathcal{C}$ est l'intérieur du triangle $(T = \partial \mathcal{C})$, et si α, β, γ sont les angles aux sommets, alors:

$$\boxed{k(\gamma) = \iint_{\mathcal{C}} k(s)\, d^2 s = \alpha + \beta + \gamma - \pi} \quad (1.4.2)$$

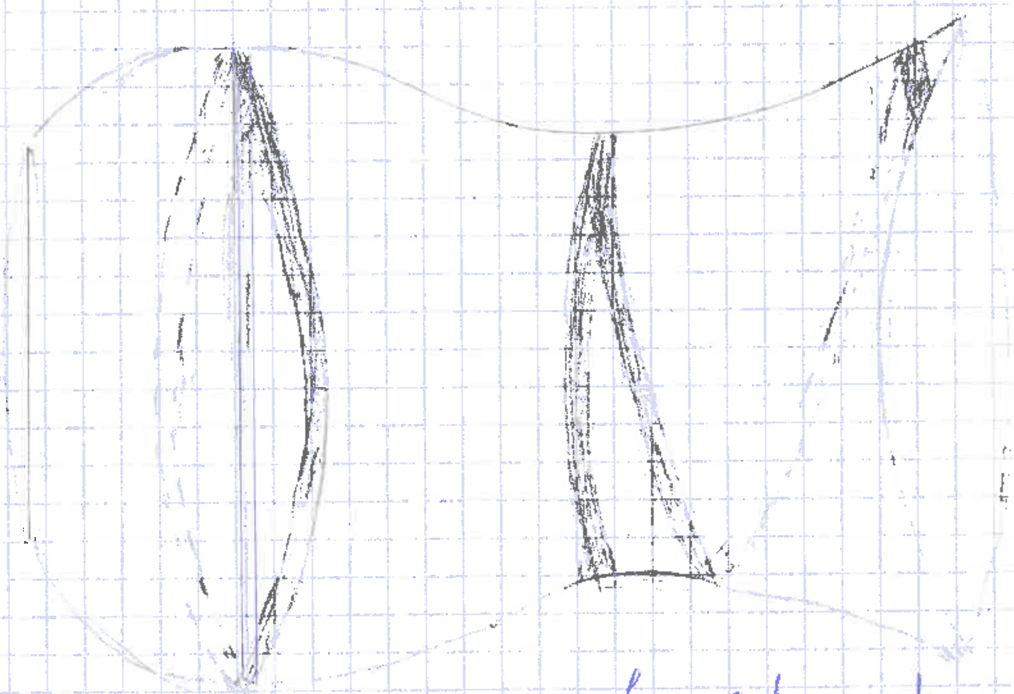


Sur le plan euclidien, $\mathbb{R}^2$, de courbure nulle (partout), on retrouve $0 = \alpha+\beta+\gamma-\pi$

soit $\boxed{\alpha+\beta+\gamma=\pi}$

Somme des angles moins π = l'holonomie le long d'1 parcours fermé.

1.4.2) Trajectoires géodésiques, courbures positives et négatives :



courbure négative : divergence exponentielle des trajectoires

$k<0$: répulsion des géodésiques

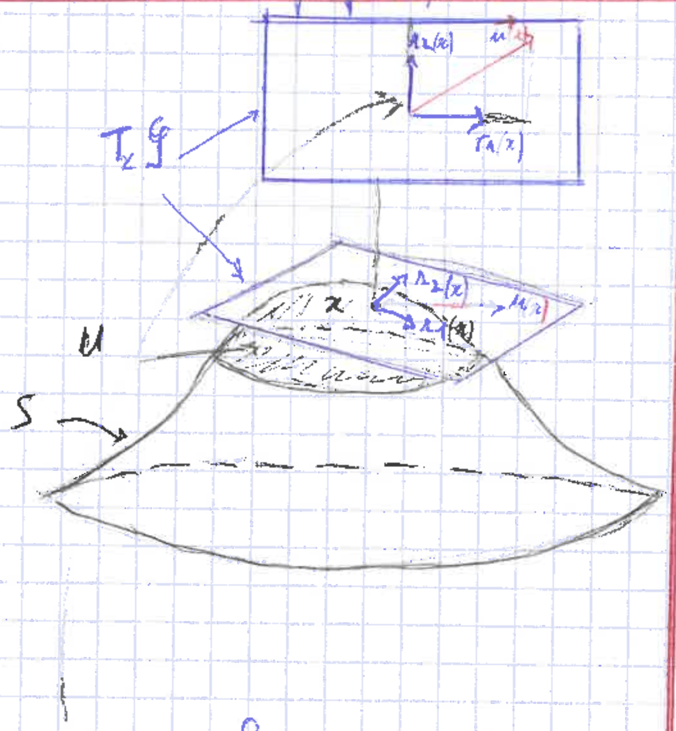
Courbure positive :

oscillation autour d'une trajectoire

$k(x)>0$: attraction entre géodésiques

Théorie de Jacobi : relation entre courbure de l'espace-temps et écartement des géodésiques.

15) : Choix de Jauge, potentiel de Jauge



Soit S une surface orientée, $U \subset S$ un petit domaine.
Un choix de Jauge dans le domaine U est le choix $\forall x \in U$ d'un repère orthonormé direct $r_1(x), r_2(x) \in T_x S$.
Ainsi, un vecteur tangent $u(x) \in T_x S$ s'écrit :

$$\boxed{u(x) = u_1(x) r_1(x) + u_2(x) r_2(x)}$$

avec $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$

repère r_1, r_2 : Choix de Jauge
(Trivialisation du fibré tangent)

Ce choix est à faire pour tous les plans tangents à U. Dans ce cas, on peut dire qu'on a fait un choix de Jauge sur le domaine U, soit encore sur le fibré tangent. Le fibré tangent est l'ensemble des plans tangents à la surface.

Structure complexe : Plutôt que d'utiliser les 2 composantes réelles u_1, u_2, tâchons d'utiliser une unique composante complexe.

Dans chaque espace tangent $T_x S$, on introduit l'opérateur linéaire :

$$\boxed{J_x : T_x S \longrightarrow T_x S \qquad J_x : \begin{cases} r_1(x) \longmapsto r_2(x) \\ r_2(x) \longmapsto -r_1(x) \end{cases}}$$

- Définit une rotation de $+\pi/2$.
- Vérifie $J_x^2 = -\mathbb{1}$
- La multiplication d'un vecteur $u \in T_x S$ par $i \in \mathbb{C}$ s'écrit :
  $iu := J u$

Ainsi : $\boxed{u(x) = u_1(x)\, r_1(x) + u_2(x)\, r_2(x)}$

$= u_1(x) r_1(x) + u_2(x)\, i r_1(x)$

$= \boxed{\psi(x)\; r_1(x)} \in T_x S$ avec $\boxed{\psi(x) = (u_1 + i u_2)(x)}$

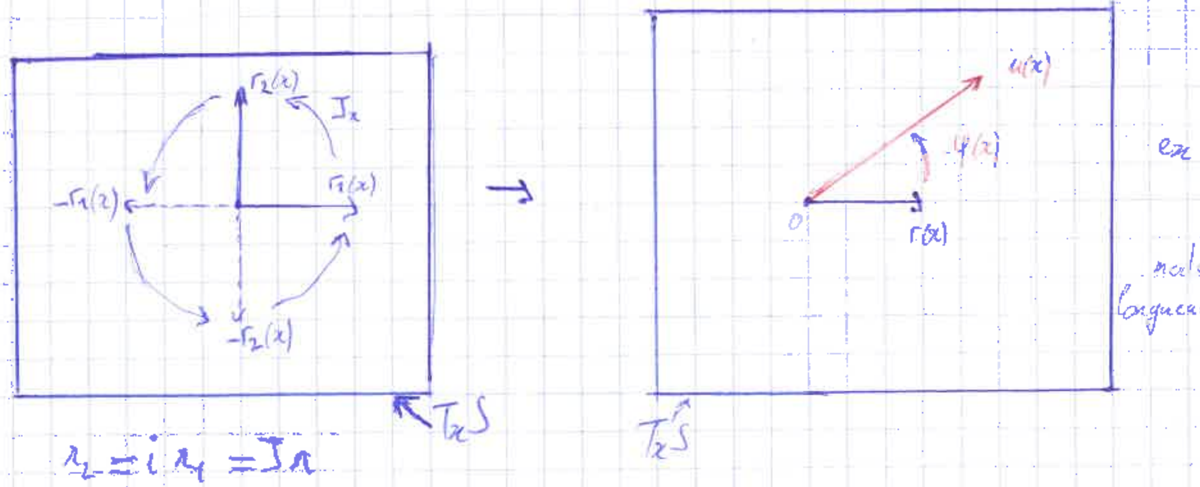
$\boxed{u(x) = \psi(x)\; r_1(x)}$ avec $\psi \in \mathbb{C}$

$\psi(x)$ est la coordonnée, ou champ scalaire complexe (physique)

(ou composante du champ de vecteurs) (maths)

2 vecteurs unitaires r_1, r_2

Un unique vecteur unitaire $r_1 = r$

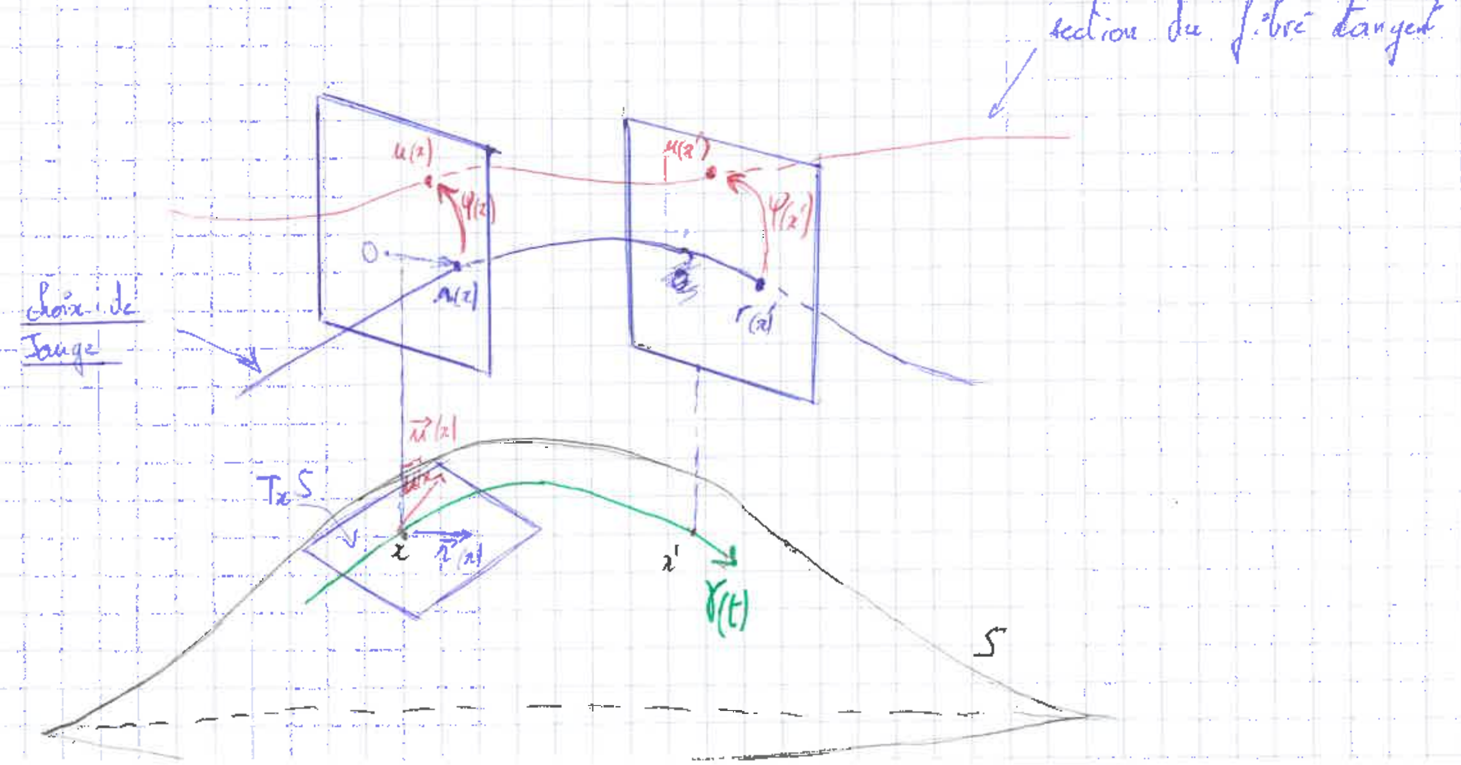


$r_2 = i\, r_1 = J r$

ex $\psi(x) = 2\, e^{i\pi/4}$

module : longueur $\times 2$

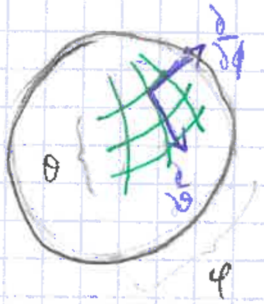
rotation de $\pi/4$



1.5.2) : Potentiel de Jauge

On cherche ici à exprimer la dérivée covariante $\frac{Du}{dt}$ en fonction des coordonnées du repère local $r(x)$.

• Munissons la sphère de coordonnées locales.



$$\begin{cases} u_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$ vecteurs unitaires

Rappelons que la dérivée covariante $\frac{Du}{dt}$ mesure la déviation d'un champ de vecteurs par rapport au transport parallèle.

Expression de la dérivée covariante :

Soit $U \subset S$ un domaine, $r(x) \in T_x S$ un choix de Jauge $\forall x$.

On se donne $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un choix de coordonnées locales sur U (par exemples coordonnées sphériques)

On définit le potentiel de Jauge $\vec{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_1(x), \mathcal{A}_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\boxed{\frac{Dr(x)}{dx_k} = \left(i \mathcal{A}_k(x)\right) r \quad , \quad k = 1, 2}$$

(On cherche à savoir si le champ de vecteurs $r(x)$ suit le transport parallèle)

Les composantes réelles $\vec{\mathcal{A}}(x) = (\mathcal{A}_1(x), \mathcal{A}_2(x))$ mesurent les dérivées covariantes du choix de de base $r(x)$, par rapport aux variations de coordonnées (x_1, x_2).

On note :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1(x)\, dx_1 + \mathcal{A}_2(x)\, dx_2 \\ &= \vec{\mathcal{A}}\, d\vec{x} \end{aligned}}$$

Potentiel de Jauge ou 1-forme de connexion

$\mathcal{A}_1$: dérivée covariante de $r(x)$, lorsque x_1 varie

• On se donne $\gamma : t \in [0,1] \to \gamma(t) \in U$ un chemin paramétré de coordonnées $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$

• On se donne un champ de vecteurs u sur U, ie $u(x) = \psi(x)\, r(x) \in T_x S$ pour chaque x, de composante $\psi(x) \; (= u_1 + i u_2)(x)$

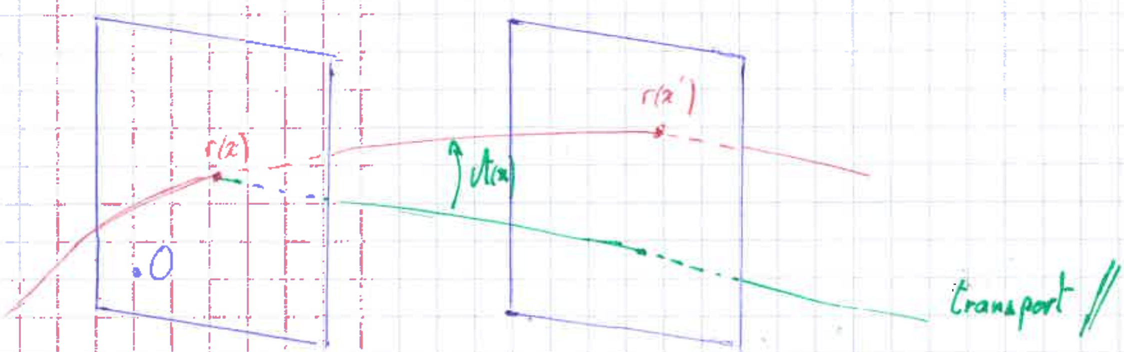
• Alors la dérivée covariante de $u(x)$ au point $x = \gamma(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{Du}{dt} = \left[i \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right) \cdot \left(\vec{p} + \vec{A}(x) \right) \psi(x) \right] r(x)}$$

Formule du couplage minimal (1.5.1)

avec l'opérateur impulsion $\vec{p} = -i \vec{\nabla} = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1}, -i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$

Par conséquent : $\boxed{\| Du \|^2 = \| (\vec{p} + \vec{A}(x)) \psi \|^2}$ (1.5.2)



Le potentiel de Jauge $A(x)$ mesure comment le choix de Jauge r dévie du transport parallèle

• Changement de Jauge (1.5.3) $\boxed{r'(x) = e^{i\alpha(x)} r(x)}$

Note que $e^{i\alpha(x)}$ est une rotation. $e^{i\alpha(x)} \in U(1)$
↳ gpe unitaire (électromagnétisme)
SU2 : électrofaible
SU3 : QCD
↳ Chromo Dynamique Quantique

1.5.3)

- Changement de jauge : $r' = e^{i\alpha(x)} r(x)$

Proposition : Par changement de jauge, le champ de vecteurs s'exprime comme :

$$\boxed{u(x) = \psi(x) r(x)} = \psi'(x)\, r'(x)$$

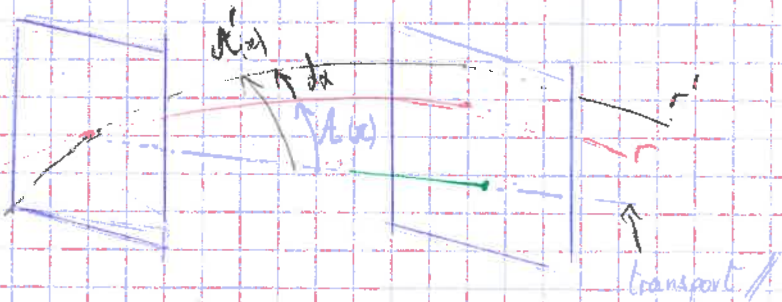
avec : $\boxed{\psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x)}$

Démo : $\psi(x) r(x) = \psi'(x) r'(x)$

$= \psi'(x) e^{i\alpha(x)} r(x)$ donc $\psi' = \psi(x) e^{-i\alpha(x)}$

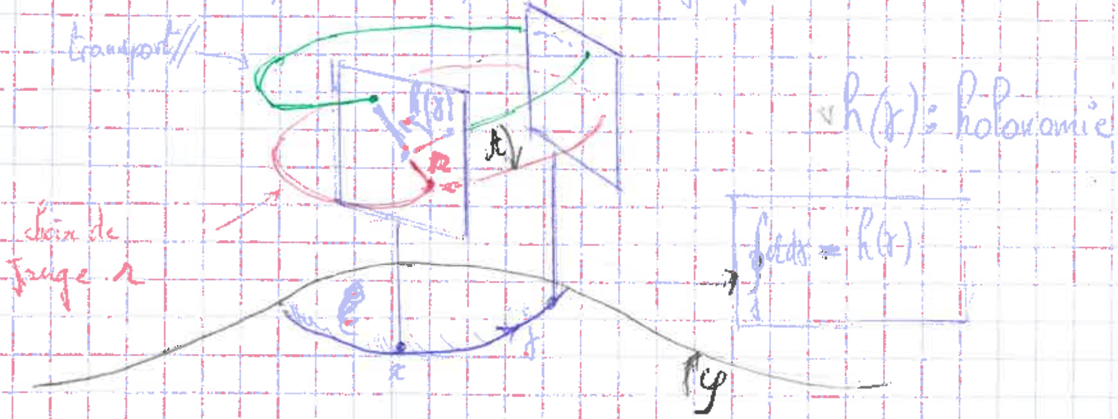
Le nouveau potentiel de Jauge s'exprime alors :

$$\boxed{\begin{gathered} \mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\alpha \\ \text{i.e : } \mathcal{A}'_k = \mathcal{A}_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}, \quad k = 1,2 \end{gathered}}$$



1.5.4 : Courbure :

Calculons l'holonomie à partir du potentiel de jauge $\mathcal{A}$



Proposition : (1.5.8) Si $\mathcal{E} \subset U$ est un sous-domaine de bord $\gamma = \partial\mathcal{E}$, (formant un chemin fermé), alors l'holonomie s'exprime par l'intégrale de courbure :

$$\boxed{h(\gamma) = -\oint_\gamma \mathcal{A}\,\gamma \underset{\text{Stokes/Green}}{=} -\iint_{\mathcal{E}} B\, d\mathcal{E}}$$

← On retrouve Gauss Bonnet locale !

où $\mathcal{A}$ est le potentiel de Jauge

et

$$\boxed{B = \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1}\right)(dx_1 \wedge dx_2)}$$

courbure

est le tenseur de courbure, indépendant du choix de jauge

On a : $\boxed{B = -k\, ds^2}$ avec k la courbure de Gauss locale, ds^2 l'élément de surface.

On appelle B la dérivée extérieure de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{B = d\mathcal{A}}$$

2-forme forme

Électromagnétisme : B : champ magnétique
$\mathcal{A}$: Potentiel de Jauge (potentiel vecteur)

La courbure est semblable au champ magnétique.
L'intégrale curviligne du potentiel (l'holonomie) intervient dans l'effet Aharanov-Bohm.

Interlude (Exo 1.55) : Sur la sphère S^2, si l'on fait le choix de jauge $\boxed{r(x) = u_\varphi(x)}$,

Alors le potentiel de Jauge $\boxed{\mathcal{A} = \cos\theta\, d\varphi}$ ie les composantes sont : $\boxed{\mathcal{A} = (0, \cos\theta)}$

aide : sur un cône, l'ouverture est $2\pi(1-\cos\theta)$. donc $\dfrac{Du_\varphi}{d\varphi} = \dfrac{du_\varphi}{d\varphi} = \dfrac{du_\varphi}{dx}\cdot\dfrac{dx}{d\varphi} = 1.\cos\theta$

Donc : Sur la sphère S^2 :

$$B = d\mathcal{A} = d(\cos\theta\, d\varphi) \quad \partial_\theta\cos\theta\, d\theta\wedge d\varphi + \underbrace{\partial_\varphi(\cos\theta)\, d\varphi\wedge d\varphi}_{0}$$

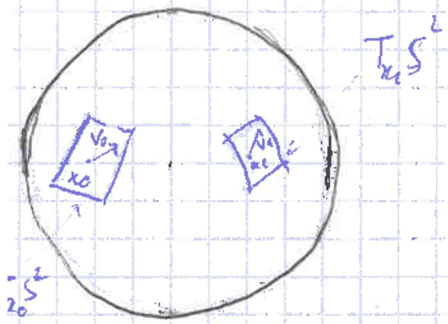
$$= -\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$$

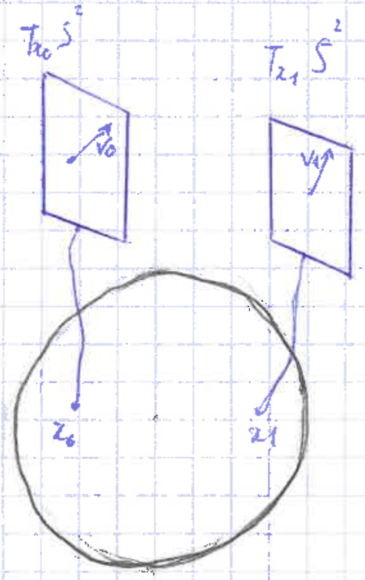
$$= -\frac{1}{R^2}\, ds^2 \qquad ds^2 = R^2 \sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi$$

Sphère S^2 : $\boxed{B = -\frac{1}{R^2}}$. En électromagnétisme, ce serait un champ magnétique positif sur la sphère, qui serait créé par un monopole magnétique, de charge $C = +2$ (indice de Chern : $C = C(TS^2) = +2$)
(Ils ne sont d'ailleurs pas découverts dans la nature).

faire analogie acoustique ...

1.6) Espace fibré vectoriel :





TS^2 : Espace fibré tangeant à S^2

L'ensemble des plans tangents à S (S^2 si $S \subset \mathbb{R}^3$) est l'espace fibré tangent, noté TS. TS est la collection des espaces vectoriels $T_x S$, paramétrée par x.

$$TS = \{(x,v),\ x \in S,\ v \in T_x S\} \quad (1.6.1)$$

Choix de Jauge locale, trivialisation locale :

Lorsque $x \in S$ varie, $T_x S$ varie continuement.

Rappel : $\forall$ voisinage U de x, $\forall x' \in U$, on peut faire le choix d'un repère $r_1(x'), r_2(x')$ $(r_1, r_2) \in T_{x'} S$, de sorte que $\forall v \in T_{x'} S$ s'écrit : ~~$v = v_1(x') + v_2(x')$~~

$$v = v_1(x') r_1(x') + v_2(x') r_2(x')$$

On a un difféomorphisme (bijection C^∞ d'inverse C^∞) :

$$\boxed{h \begin{cases} T_U S \to U \times \mathbb{R}^2 \\ (x', v) \to (x', v_1(x'), v_2(x')) \end{cases}} \quad (1.6.2)$$

appelé trivialisation locale du fibré $T_U S$ (i.e. T_S restreint au voisinage U)

$\mathbb{R}$ identifie chaque fibre F_x au plan $\mathbb{R}^2$.

idée : remplacer l'espace vectoriel tangent $T_x S$ par un espace vectoriel quelconque F_x.

Penser "variété différentiable" ~~comme~~ une courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, ou une sphère $S \subset \mathbb{R}^3$, ou plus généralement, un ensemble de points avec des coordonnées locales.

Définition générale : (1.6.1.2) Espace fibré vectoriel :

Soit B une variété différentiable appelée "Espace de base".
Pour chaque point $x \in B$, on considère un espace vectoriel F_x de dimension n (n constant, indépendant de x), appelé fibre au dessus de x.

La collection de ces espaces vectoriels $F = \{(x, v),\ x \in B,\ v \in F_x\}$ (1.6.3)

est appelée espace fibré vectoriel de rang n sur B.

On note $\pi : F \to B$ l'application $\pi(x, v) = x$ ← point base

(H) de trivialisation locale :

On suppose que $\forall x \in B$, $\exists$ un voisinage $U \subset B$ tel que l'espace $F_U := \{(x,v),\ x \in U,\ v \in F_x\}$ est difféomorphe au produit direct $U \times \mathbb{R}^n$ (comme en 1.6.2)

Remarques :

- Si B est de dimension n, l'espace fibré tangent TB est un cas particulier d'espace vectoriel, c'est le cas $F_x = T_x B$ (comme en (1.6.1))
Dans ce cas, $\dim B = n = \dim T_x B$, le fibré tangent est de rang n.

- Autre cas particulier : F est un espace fixe. En général, on ne suppose pas que la fibre F_x soit reliée à l'espace tangent $T_x B$.
Un exemple simple d'espace fibré vectoriel est : $F = B \times \mathbb{R}^n = \{(x, v),\ x \in B,\ v \in \mathbb{R}^n\}$ appelé espace trivial de rang n, où chaque fibre $F_x = \mathbb{R}^n$, le même espace vectoriel $\forall x \in B$.

On peut donc penser qu'un espace fibré vectoriel général sert à étendre la notion du produit direct.

- En physique des particules, en théorie de Jauge (Yang-Mills), on utilise des fibrés vectoriels avec connexion, où F_x est un espace vectoriel complexe, de dimension $n = 1, 2, 3$, sur l'espace-temps B

$n = 1$: $U(1)$: électromagnétisme

$n = 2$ $SU(2)$: théorie électrofaible (forces nucléaires faibles + électromagnétisme)

$n = 3$ $SU(3)$: ChromoDynamique Quantique (force nucléaire forte, dans les noyaux)

1.6.13 : Équivalence entre fibrés vectoriels :

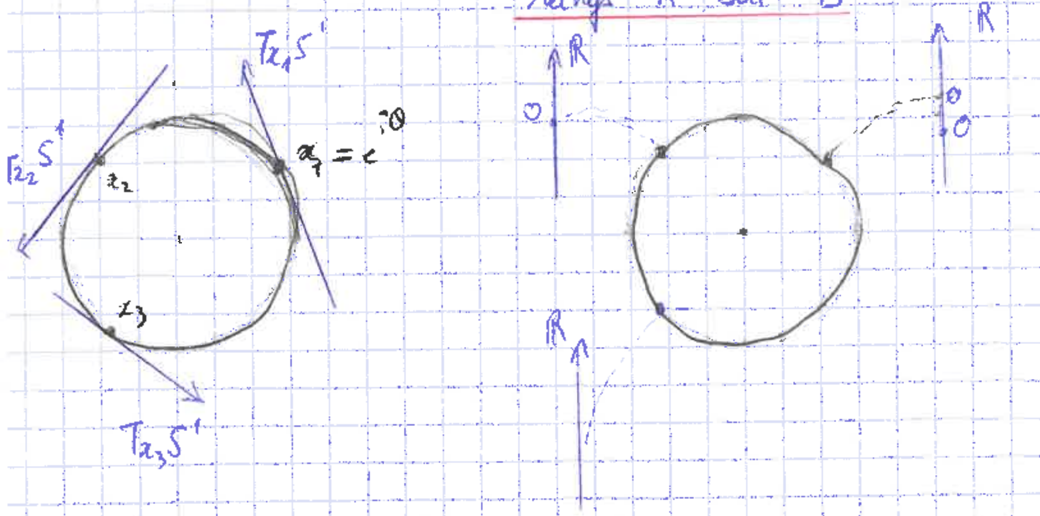
Il est utile de comparer 2 espaces fibrés.

Si F et F' sont deux espaces fibrés vectoriels de rang n (avec le m̂ espace de base), on dit que F et F' sont isomorphes, noté $F \sim F'$, s'il $\exists$ un homéomorphisme (bijection continue, d'inverse continue) : $h : F \to F'$

tel que $\forall x \in B$, $h : F_x \to F'_x$ est un isomorphisme d'espace vectoriel (i.e. : application linéaire inversible).

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

On notera $Vect^n_{\mathbb{R}}(B)$ les classes d'équivalence de fibrés isomorphes de rangs n sur B



L'espace tangent TS^1 est isomorphe au fibré trivial de rang 1 : $TS^1 \sim S^1 \times \mathbb{R}$

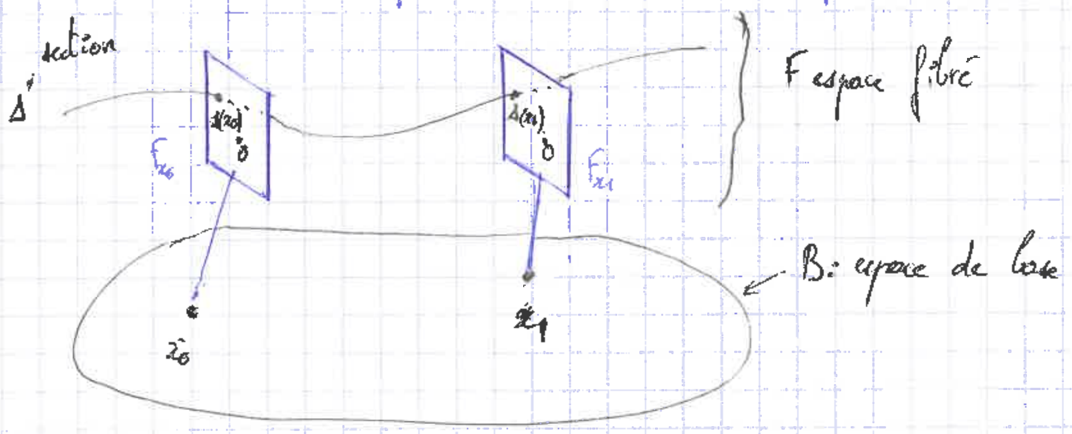
En effet, on note $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ un point de S^1. Un point de l'espace tangent $T_{e^{i\theta}} S^1$ s'écrit $ite^{i\theta}$, $t \in \mathbb{R}$. On a alors un homéomorphisme : $h : (e^{i\theta}, ite^{i\theta}) \in TS^1 \rightarrow (e^{i\theta}, t) \in S^1 \times \mathbb{R}$

1.6.1.4 Section d'un fibré vectoriel :

$F \rightarrow B$ est un espace fibré vectoriel. Une section globale du fibré est une application :

$$s : \begin{cases} B \rightarrow F \\ x \rightarrow s(x) \in F_x \end{cases}$$

On note $C^\infty(B; F)$ l'espace des sections C^∞ du fibré F.



- Si $F = B \times \mathbb{R}$ fibré trivial de rang 1, alors une section $s \in C^\infty(B, F)$ est une fonction numérique à valeur réelles $s : x \in B \rightarrow s(x) \in \mathbb{R}$ (aussi noté $s \in C^\infty(B)$)
- Si $F = B \times \mathbb{R}^n$, fibré trivial de rang n, une section est une fonction à n composantes réelles. $s(x) \in \mathbb{R}^n$.
- Pour un fibré quelconque, la notion de section généralise la notion de fonction numérique.
- Une section globale du fibré tangent $s \in C^\infty(S, TS)$ est tout simplement un champ de vecteurs (tangents) sur S : $s(x) \in T_x S$

- Tout espace fibré admet des sections, en particulier la section nulle $s(x) = 0$, $\forall x$.

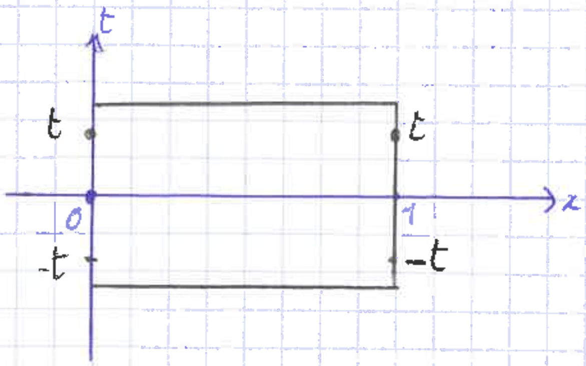
Trivialisation globale du fibré F: (1.6.4)

Thm: L'espace fibré $F \to B$ est trivial si et seulement si $\exists$ n sections globales $(s_1, \dots, s_n)$ telles que, en tout point $x \in B$, les vecteurs $(s_1(x), \dots, s_n(x))$ forment une base de l'espace fibré vectoriel F_x (au dessus de x).
On dit que $(s_1, \dots, s_n)$ est une trivialisation globale du fibré F.
(Choix de Jauge global)

démo: si $x \in B$, $v \in F_x$ un point quelconque dans une fibre, On décompose v dans la base: $v = \sum_{i=1}^{n} t_i s_i(x)$, avec $t_i \in \mathbb{R}$.
On a un isomorphisme entre le fibré F et le fibré trivial $B \times \mathbb{R}^n$:
$$h : (x, v) \in F \to (x, t_1, \dots, t_n) \in B \times \mathbb{R}^n$$

1.7: Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 sur S^1

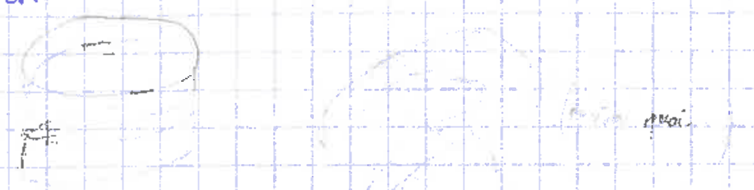
On considère l'espace de base $B = S^1$, de rang $n=1$, (le cercle.)
rang 1, chaque fibre est isomorphe à la droite $\mathbb{R}$
2 exemples:
- Le fibré trivial $S^1 \times \mathbb{R}$, obtenu à partir du fibré $[0,1] \times \mathbb{R}$ sur le segment $[0,1]_{x \in}$, en identifiant les points $(0,t) \sim (1,t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- Le fibré de Möbius, obtenu à partir du fibré $[0,1] \times \mathbb{R}$ sur segment $x \in [0,1]$ en identifiant $(0,t) \sim (1,-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$



Proposition : le fibré de Möbius n'est pas trivial (1.7.1)

Démo : Coupe ton fibré trivial et ton fibré de Möbius par la section nulle.

trivial Möbius



Le complément de la section nulle ($s(x)=0, \forall x$) a deux composantes connexes pour le fibré trivial, alors que ce complément n'a qu'une composante pour le fibré de Möbius
i.e : il n'$\exists$ pas d'isomorphisme entre ces 2 compléments.

Théorème : Tout espace fibré réel $F \to S^1$ de rang 1 est isomorphe au fibré trivial, ou au fibré de Möbius. Ainsi, il n'y a que 2 classes d'équivalences :

$$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}(S^1) = \{0,1\}$$

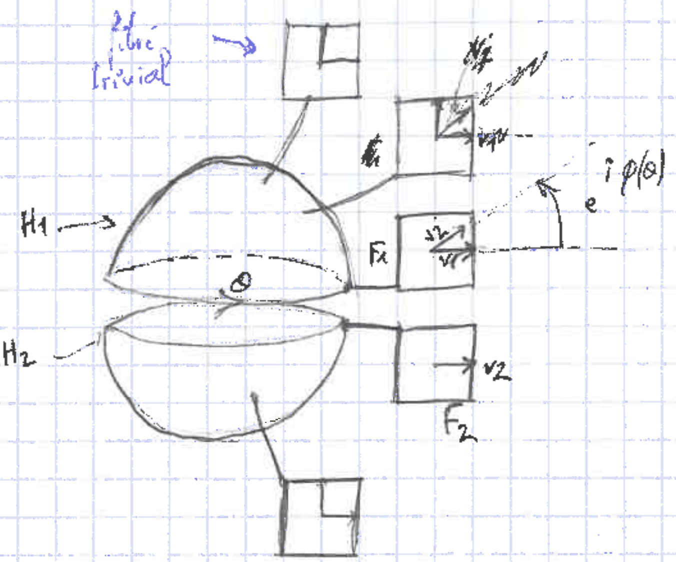
associé à un indice SW.
SW = 0 : fibré trivial
SW = 1 : fibré de Möbius

SW est l'indice de Stiefel-Whitney. On dit que SW caractérise la topologie du fibré F.

Remarques : l'indice de Stiefel-Whitney correspond au nombre de ½ tours que font les fibres au-dessus de l'espace de base S^1.
Le cas SW = 2 est isomorphe au fibré trivial.
On convient que $SW \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, ie SW est un entier modulo 2.

Remarquons que dans $\mathbb{R}^3$, un ruban faisant un tour (= 2 ½ tours) ne peut pas être déformé continuement vers le fibré trivial. (dans $\mathbb{R}^4$, ce serait possible)

18) : Topologie d'un fibré vectoriel de rang 2, sur S^2



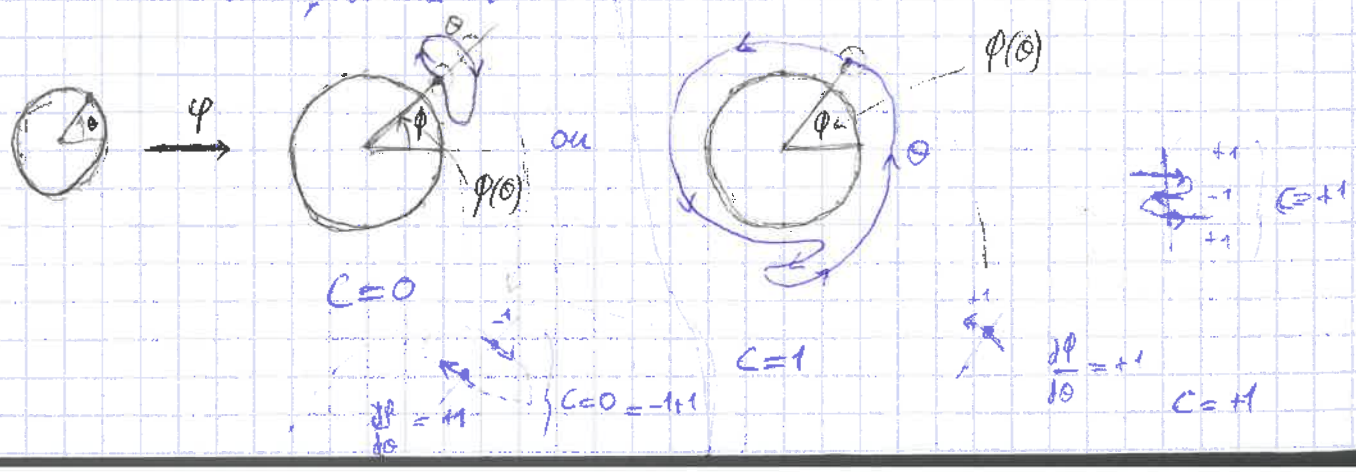
$e^{i\varphi(\theta)}$: fonction de recollement.

Considérons la sphère, coupée le long de l'équateur. On obtient deux hémisphères H_1 et H_2.
On considère les fibrés triviaux $F_1 = H_1 \times \mathbb{R}^2$, et $F_2 = H_1 \times \mathbb{R}^2$.
Pour construire un fibré sur S^2, il faut décider comment identifier les fibres de F_1 avec celles de F_2, au-dessus de l'équateur.

Soit θ l'angle qui caractérise un point de l'équateur.
$\varphi(\theta) \in S_1$ l'angle qui signifie que la fibre $F_2(\theta)$ est recollée à la fibre $F_1(\theta)$ après une rotation d'angle $\varphi(\theta)$.

Après recollement, on obtient un fibré $F \to S^2$ de rang 2
fonction de recollement : $\varphi : \theta \in S^1 \to \varphi(\theta) \in S^1$
fonction continue et périodique. $\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2\pi C$, $C \in \mathbb{Z}$

Faisons varier θ entre 0 et 2π ; Observons φ :



L'indice entier C représente le nombre de tours que fait φ lorsque θ fait un tour.

Pour calculer C, fixons $\varphi_0 \in S^1$ et :

$$C = \sum_{\theta = \varphi^{-1}(\varphi_0)} \mathrm{sign}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta)\right)$$

$$C = \sum \mathrm{sign}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta)\right)$$

C est le degré de l'application $\varphi : S^1 \to S^1$, ou winding number.

Deux fonctions φ et φ' sont homéomorphes, si et seulement si elles ont le même degré $C = C'$.

Par conséquent, les fibrés F et F' sont isomorphes ssi $C = C'$.

Théorème (7). Tout fibré réel $F \to S^2$ de rang 2 est isomorphe à un fibré construit comme ci-dessus, avec une fonction de recollement sur l'équateur $\theta \to \varphi(\theta)$, ayant un degré $C \in \mathbb{Z}$. La classe d'équivalence du fibré F est caractérisé par $C \in \mathbb{Z}$ (appelé 1er indice de Chern). Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Vect}^2_{\mathbb{R}}(S^2) = \mathbb{Z}}$$

Preuve : Comme ci-dessus On part d'un fibré F, on coupe la Sphère S^2, on obtient 2 fibrés $F_1 \to H_1$ et $F_2 \to H_2$. Chacun de ces fibrés est trivial, car les espaces de base sont des disques (espaces contractiles). Le fibré F est donc défini par sa fct. de recollement.

Théorème 8 : Le fibré tangent TS^2 n'est pas trivial, son indice de Chern est :

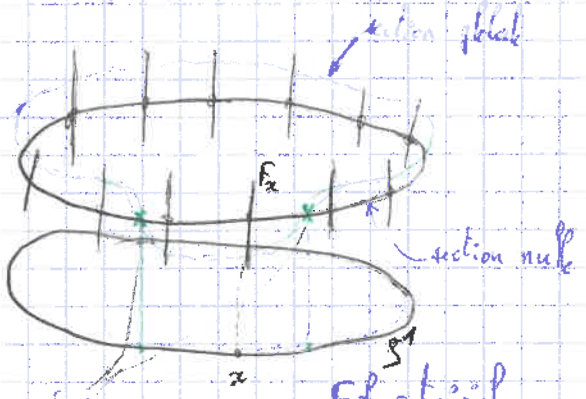
$$\boxed{C(TS^2) = +2}$$

Remarques : • Le fibré trivial $S^2 \times \mathbb{R}^2$ a un indice de Chern $C = 0$ (les fibres sont les m̂ à l'équateur)

• On verra, en méca quantique, (spin ½), un exemple de fibré $F \to S^2$ de rang 2 avec $C = -1$.

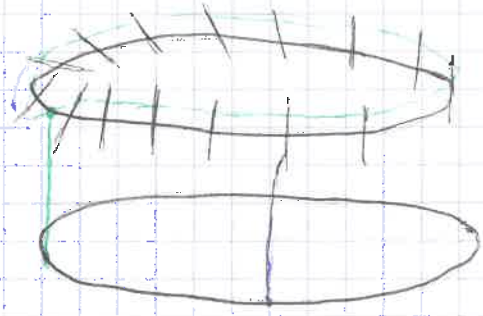
Cela fera ainsi trois exemples de fibrés sur S^2, avec $C = 0, +2, -1$

1.9 : Topologie d'un espace fibré de rang 2 (sur S^1) à partir des zéros d'une section



Fibré trivial

$SW = 1+1 = 0$



Fibré de Möbius

$SW = 1$

On appelle zéro de la section s les points $x \in B$ tels que $s(x) = 0$

On rappelle que $SW(F) = \{0, 1\}$, selon que le fibré est trivial ou de Möbius.

On note : $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) = \{0,1\}$

le groupe à 2 éléments (i.e entiers modulo 2) avec la règle commutative :

$0+0 = 0$, $1+0 = 1$, $1+1 = 0$

Théorème : Si $F \to S^1$ est un fibré réel de rang 1 sur S^1, s une section globale, l'indice topologique est donné par :

$$SW(F) = \sum_{\substack{x \text{ tels que} \\ s(x)=0}} \sigma_s(x) \in \mathbb{Z}_2$$

où $\sigma_s(x) = 1$ pour un zéro générique de la section s. Le résultat est indépendant de s.