

Mécanique Générale

II Mécanique Newtonienne

Lois de Newton:

- Un point matériel, soumis à un champ de forces dont la résultante est nulle, est soit au repos, soit en translation rectiligne uniforme.

• Principe Fondamental de la Dynamique:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La somme des forces s'appliquant au point matériel est égale à la dérivée temporelle de l'impulsion (quantité de mouvement).

Dans le cas où la masse est indépendante de temps:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

• Principe d'action et réaction:

Si un point matériel 1 exerce une force \vec{F}_{12} sur un point matériel 2, selon la droite (12), alors le point matériel 2 exerce une force \vec{F}_{21} égale et opposée à \vec{F}_{12} sur le point 1.

Travail d'une force:

$$\left\{ \begin{array}{l} dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \leftarrow \text{Travail effectué par la force pour déplacer } \Pi \text{ de } d\vec{r} \\ W = \int_{\Pi} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{array} \right.$$

Le travail total produit un champ de force déplaçant Π de P_1 à P_2 .

Puissance:

Puissance instantanée fournie au point matériel pendant dt :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Si \vec{v} est la vitesse du point, et \vec{F} la force s'y appliquant:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Théorème de l'énergie cinétique:

Le travail d'une force le long du parcours \mathcal{C} de P_1 à P_2 est égale à la différence d'énergie cinétique en P_1 et P_2 :

(T)

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad (10)$$

$$W = T_2 - T_1$$

Force dérivant d'un potentiel:

On dit qu'une force dérive d'un potentiel ∇ s'il existe une fonction scalaire V telle que:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad \text{soit encore} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F} = 0$$

- Dans ce cas, le travail de la force pour déplacer le point P de P_1 à P_2 est indépendant du chemin parcouru, et vaut:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(P_1) - V(P_2) \quad (15)$$

- Un champ de force \vec{F} continuellement dérivable dérive d'un potentiel, si et seulement si:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{le long de toute courbe fermée (i.e son travail est nul)}$$

La fonction scalaire V s'appelle donc l'Énergie potentielle, ou le potentiel.

Le potentiel est défini à une constante près. $V = - \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où l'on suppose $V(r_0) = 0$

Énergie totale

On déduit de (10) et (15): $T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \iff$ Pour un champ de force \vec{F} dérivant d'un potentiel.

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + V_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + V_1$$

\Rightarrow Ainsi, la quantité $E = T + V$ appelée Énergie totale se conserve.

Impulsion

On appelle impulsion de la force \vec{F} l'intégrale sur le temps de la force \vec{F} :

$$\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

L'impulsion est égale à la variation de quantité de mouvement au cours du temps.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

En effet:
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) dt = \int_{t_1}^{t_2} d(m\vec{v}) = [m\vec{v}]_{t_1}^{t_2} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

Ce théorème reste valable si la masse est variable, et si la force ne dérive pas d'un potentiel.

Couple et moment cinétique:

Le couple, ou moment de la force s'écrit:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \otimes \vec{F}$$

La module de $\vec{\Gamma}$ caractérise l'effet de rotation produit par la force sur le point P, par rapport à O.

On peut démontrer:
$$\vec{r} \otimes \vec{F} = \frac{d}{dt}(m(\vec{r} \otimes \vec{v})) \quad (1)$$

On appelle moment cinétique la quantité
$$\vec{\Omega} = m(\vec{r} \otimes \vec{v}) = \vec{r} \otimes \vec{p}$$
 par rapport au point O.

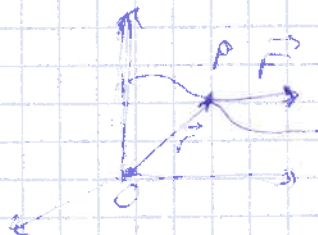
Ainsi, (1) s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \vec{\Omega} = \vec{\Gamma}$$

Le couple $\vec{\Gamma}$ est égal à la variation du moment cinétique $\vec{\Omega}$ appliqué sur le point.

Ce théorème est valable si la masse est variable, ou si la force ne dérive pas d'un potentiel.

⇒ Lorsque le couple extérieur agissant sur le point P est nul, ~~alors~~ le moment cinétique ne varie pas (conservation du moment cinétique).



Systèmes de points matériels

Les principes énoncés précédemment s'appliquent au centre de masse du système de points matériels.

Liaisons holonomes et non holonomes:

En pratique, le mouvement d'un point ou d'un système de points est souvent limité.

Par exemple, pour un solide indéformable.

Les limitations du mouvement sont appelées liaisons.

Une liaison est dite holonome s'il existe une équation algébrique caractérisant l'état du système de la forme:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

avec $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ les vecteurs coordonnées des particules, $i \in [1, \dots, N]$ nombre de particules.

Si l'équation de la contrainte dépend du temps ($\frac{df}{dt} \neq 0$) elle est dite rhéonome.

Sinon, scléronome.

Exemple de contraintes non holonomes:

Un corps N ponctuel dont les mouvements sont limités à l'intérieur d'une sphère (de rayon R)
 $0 < R$ soit $\|\vec{r}_N - \vec{r}_0\| \leq R$ (ne s'exprime pas $f(\vec{r}_N, t) = 0$)

Une masse à l'extrémité d'un ressort: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 (Boucard, p. 111)

Soit un système de points matériels: $\vec{Q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_r(t), t)$
 \leftarrow nombre de degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté peut être abaissé par des liaisons, relations de type géométrique, ou cinématique.

Liaison géométrique: stationnaire (scléronome): $f(q_1, \dots, q_r) = 0$
 instationnaire (rhéonome): $f(q_1, \dots, q_r, t) = 0$: $F(Q) = 0$, i.e. à r relations

Liaison cinématique: (non holonomes): $(A)Q' = U$
 $\left(\begin{matrix} p \text{ colonnes} \\ r \text{ lignes} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} p \\ 1 \end{matrix} \right)$ p degrés de liberté respectu
 $r+s$ équations.

• Déplacements virtuels:

Considérons à un instant donné 2 configurations possibles du système, qui soient compatibles avec les forces et les liaisons. Pour passer d'une configuration à une autre, il faut donner au $i^{\text{ème}}$ point matériel un déplacement $\delta \vec{r}_i$ de l'ancienne position à la nouvelle. On appelle $\delta \vec{r}_i$ déplacement virtuel, pour le distinguer du mouvement réel $d\vec{r}_i$, ayant lieu pendant une intervalle de temps où les forces et les liaisons varient.

• Principe des travaux virtuels: (Pour un système en équilibre)

Pour qu'un système de points matériels soit en équilibre, la force résultante sur chaque point doit être nulle, i.e. $\vec{F}_i = \vec{0}$.

Ainsi, le travail virtuel $\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ pour chaque point.

Sommons tous les travaux virtuels:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

(avec N nbr de points dans le système)

Si il existe des liaisons, on peut écrire: $\left[\begin{array}{l} \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(l)} \end{array} \right]$
force appliquée force de liaison
au point i

Si l'on suppose que la somme des travaux des forces de liaison est nulle (vrai pour un solide indéformable), et pour les mouvements sur des courbes et des surfaces parfaitement lisses, on obtient:

Principe des travaux virtuels:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

(7.14)

force appliquée uniquement.

• Équilibre dans les champs de force dérivant d'un potentiel, stabilité de l'équilibre

Si V est le potentiel d'un système de points matériels qui dépendent des coordonnées q_1, q_2, \dots, q_n .

Le système est en équilibre si: $\left[\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0 \right] \quad (31)$

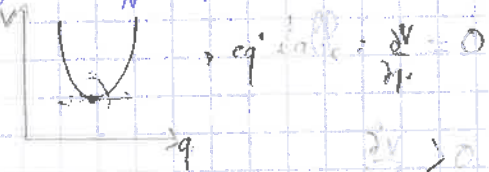
La somme des travaux virtuels appliquée sur le système est:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n} \delta q_n = 0 \quad \text{Eq (31) est ainsi équivalent au principe des travaux virtuels}$$

Un système de points matériels est en équilibre stable, si le potentiel est minimal.

Dans le cas où le potentiel ne dépend que d'une coordonnée, il suffit que:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0$$



Les autres cas d'équilibre sont dits instables.

• Principe de d'Alembert: (Principe des travaux virtuels pour la dynamique)

Le théorème (7.14) ne s'applique qu'à la statique des systèmes. Pour la dynamique,

notons la 2^{ème} loi de Newton: $\vec{F}_v = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dot{\vec{p}}_v \leftarrow$ q_lité de mot du v^{er} point matériel

soit encore $\left[\vec{F}_v - \dot{\vec{p}}_v = 0 \right]$

Elle dernière équation que le système mobile peut être considéré comme un système ^{signifie} en équilibre, sous l'action d'une force $\vec{F}_v - \dot{\vec{p}}_v$, égale à la force appliquée, et d'une force $-\dot{\vec{p}}_v = -\frac{d}{dt}(m\vec{v})$, appelée force d'inertie appliquée au point v.

On peut ainsi considérer la dynamique comme un cas spécial de la statique.

Équations de Lagrange

angles, distances, qualités...

• Coordonnées généralisées:

Soit un système de N points matériels, repéré par (q_1, q_2, \dots, q_n) coordonnées indépendantes.
 n : nombre de degrés de liberté du système. ←

• Équations de transformation

Dans le repère $Oxyz$, le vecteur position de la $i^{\text{ème}}$ particule est: $r_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$.

Passages des coordonnées spatiales aux coordonnées généralisées:

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{cases} \quad (2)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (3)$$

↑
vecteur

On suppose que les fonctions intervenant dans (2) et (3) sont continues, à dérivées continues.

• Si le temps n'intervient pas explicitement dans (2) ou (3): système scléronôme

• Si (2) dépend du temps (par ex: mouvement soumis à des liaisons): système rhéonôme

• Si toutes les liaisons peuvent être représentées par des équations du type $\boxed{\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0}$

⇒ Système holonôme. Sinon, non-holonôme.

(On a vu précédemment: $\phi(r_1, r_2, \dots, r_n, t) = 0$ ← équation d'état)

vecteur position

↳ nombre de points matériels dans le système

ici:

$$\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

coordonnée généralisée

↳ nombre de degrés de liberté

• Si toutes les forces agissant sur le système dérivent d'un potentiel:

⇒ Système conservatif. Sinon, non conservatif.

• L'énergie cinétique du système s'écrit: $T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\vec{r}}_v^2$ (vecteur)

On peut l'écrire comme une forme quadratique des vitesses généralisées \dot{q}_α . (p. 183)

• Forces généralisées:

Soit W le travail total fourni à un système de points matériels par des forces F_v agissant sur la $v^{\text{ème}}$ particule, on a:

$$dW = \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha dq_\alpha$$

nbre de degré de liberté
(principe de l'énergie cinétique)

$$d\vec{r}_v = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$$

Transp: $dW = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot d\vec{r}_v$

$$= \sum_{v=1}^N \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{F}_v \right) dq_\alpha$$

avec $\phi_\alpha = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$

Force généralisée associée à la coordonnée généralisée q_α .

• \vec{r}_v : vecteur position de la particule v

• q_α : coordonnée généralisée, projection sur le degré de liberté α .

• Equations de Lagrange:

On peut relier l'énergie cinétique T à la force généralisée ϕ_α par:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha \quad (7)$$

$$(\vec{F} = -\vec{\nabla} V)$$

Pour un système conservatif, les forces dérivent d'un potentiel! Ainsi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (8) \quad \text{où } L = T - V \text{ est le Lagrangien du système}$$

• Les équations de Lagrange sont valables pour des systèmes holonomes, qu'ils soient scléronomes ou rhéonomes.

• Si certaines forces dérivent d'un potentiel V , tandis que d'autres non (par ex, frottements), on

peut écrire:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \phi'_\alpha$$

, avec $L = T - V$, et ϕ'_α les forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel.

Rappel Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha$$

(Equations du 2nd ordre par rapport aux positions q_α et aux dérivées \dot{q}_α)

Si les forces dérivent d'un potentiel (système conservatif):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

$$\text{avec } L = T - V$$

$\xrightarrow{\text{éq. Lagrange}}$ $\xrightarrow{\text{potentiel}}$

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - V$$

$$\frac{dL}{d\dot{q}} = \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{q} = m\dot{q}$$

$$\text{eq. Lagrange: } \frac{d}{dt} (m\dot{q}) + F = 0$$

Supposons qu'il existe m liaisons de la forme: (avec $m \leq n$ degrés de liberté)

$$\sum_\alpha A_\alpha dq_\alpha + A dt = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha dq_\alpha + B dt = 0, \quad \dots$$

Soit encore

$$\sum_\alpha A_\alpha \dot{q}_\alpha + A = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha \dot{q}_\alpha + B = 0, \quad \dots$$

On peut remplacer les équations de Lagrange par:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots$$

où les m paramètres λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

Si les forces dérivent d'un potentiel:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots$$

quantité de mouvement généralisée:

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

\nearrow vitesses généralisées

Si le système est conservatif et que T ne dépend que des \dot{q}_α :

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

Equations de Lagrange des systèmes non holonomes :

→ (Rappel : holonome s'il existe $\phi(q_1, \dots, q_n, t) = 0$)
signe de liberté

Si il existe m liaisons de la forme : $\sum_{\alpha} A_{\alpha} dq_{\alpha} + A dt = 0$ (13)

soit encore

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + A = 0 \quad (14)$$

Alors on peut écrire les équations de Lagrange en faisant intervenir m multiplicateurs de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = \phi_{\alpha} + \lambda_1 A_{\alpha} + \lambda_2 B_{\alpha} + \lambda_3 C_{\alpha} + \dots + \lambda_m M_{\alpha} \quad (15)$$

Quand les forces dérivent d'un potentiel :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha}} = \phi_{\alpha} + \lambda_1 A_{\alpha} + \lambda_2 B_{\alpha} + \dots + \lambda_m M_{\alpha}$$

Cette formulation reste valable pour des systèmes holonomes. En effet, on peut toujours écrire une liaison $\phi(q_1, \dots, q_n, t) = 0$ sous la forme :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = 0, \text{ qui est bien de la forme (13)}$$

Les multiplicateurs de Lagrange caractérisent les m liaisons du système non-holonome, au sein des équations de Lagrange.

$\vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$ vecteur position de particule v .

Equations de Lagrange pour des percussions:

Supposons que les forces \vec{F}_v agissant sur un système soient telles que :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \vec{F}_v dt = \vec{g}_v \quad \text{où } \tau \text{ est l'intervalle de temps.}$$

On appelle \vec{g}_v une percussion (\approx travail temporel ?)

Les indices 1 et 2 représentent les quantités avant, et après percussion :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)_1 = \vec{F}_\alpha \quad \text{avec } \vec{F}_\alpha \text{ les impulsions généralisées.}$$

$$\vec{F}_\alpha = \sum_v \vec{g}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

variation de la quantité de mouvement généralisée = impulsion généralisée

Mécanique Hamiltonienne

Rapports: Lagrangien: $L = T - V$

E_q de Lagrange pour un système conservatif:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

(1 eq par degré de liberté)

On définit le Hamiltonien H à partir du Lagrangien: (transformée de Legendre)

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L \quad (1)$$

(T. $\log p_{\text{max}} = p_{\text{max}}$ (convexes))

avec p quantité de mouvement généralisée :

$$p_a = \frac{\delta I}{\delta \dot{q}_a}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v r_v^2$$

Le Hamiltonien dépend des quantités de mt généralisées, et des coordonnées généralisées q_α .
(On peut éliminer les vitesses généralisées \dot{q}_α dans (1)) (en utilisant les eqs de Lagrange).

$$H = H(p_\alpha, q_\alpha, t)$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}_\alpha &= - \frac{\partial H(p_\alpha, q_\alpha, t)}{\partial q_\alpha} \\ \dot{q}_\alpha &= \frac{\partial H(p_\alpha, q_\alpha, t)}{\partial p_\alpha} \end{aligned} \right.$$

Equations de ^{un} Hamilton.

(équations du 1^{er} degré, contrairement aux eqs de Lagrange)

Pour un système conservatif :

$$H = T + V$$

$\epsilon_c \swarrow \quad \searrow \epsilon_p$

∴ Energie totale

Formulation Hamiltonienne

Le Hamiltonien se définit:

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L$$

avec $p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$ quantité de mouvement généralisée. $= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$ si système conservatif
↙ énergie cinétique \dot{q}_{α} : vitesse généralisée

$L = T - V$: Lagrangien (Énergie cinétique - le potentiel)

Le Hamiltonien est une fonction des coordonnées généralisées, et des quantités de mouvement généralisées.

$$H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) = H(p_{\alpha}, q_{\alpha}, t)$$

Equations de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}(p, q) \\ \dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}(p, q) \end{cases} \quad (3)$$

Lorsque le système est conservatif, on peut interpréter le Hamiltonien comme son énergie totale (cinétique et potentielle), soit:

$$H = T + V$$

On appelle coordonnée cachée q_{α} ^{une} ou cyclique les coordonnées qui n'apparaissent pas explicitement dans le Lagrangien.

On a alors: $\dot{p}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0$

et p_{α} est une constante que l'on appelle constante du mouvement.

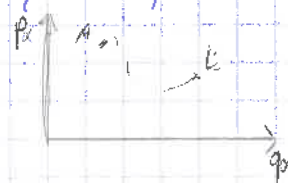
On a aussi dans ce cas:

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} = 0$$

Espace des phases

Il est commode d'imaginer un espace à $2n$ dimensions dans lequel un point est repéré par les $2n$ coordonnées: $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$

C'est l'espace des phases.



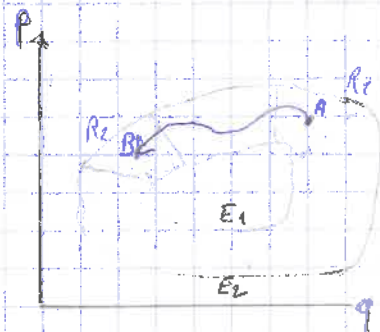
Lorsque le système se déplace dans l'espace à 3 dimensions, son point représentatif décrit une courbe, obéissant aux eqs. (3).

Théorème de Liouville

conservatifs

Soit un grand nombre de systèmes ayant le même Hamiltonien. Il est représentatif de l'énergie totale, ici constante. $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = E = \text{cte}$.
Ce que l'on peut représenter par une surface dans l'espace des phases:

On suppose que les énergies de tous les systèmes sont comprises entre E_1 et E_2 . Les trajectoires de l'évolution des systèmes sont comprises entre les 2 surfaces $H = E_1$ et $H = E_2$.



Supposons tous les systèmes se trouvent initialement dans la région R_1 , et situés dans la région R_2 au temps t .

Théorème de Liouville:

Les volumes à $2n$ dimensions R_1 et R_2 sont égaux.

Soit encore: En appelant densité le nombre de points par unité de volume, la densité est constante.

Calcul des variations:

Un problème usuel est de trouver une courbe $y = Y(x)$ reliant 2 points $x=a$ et $x=b$ de telle sorte que l'intégrale $\int_a^b F(x, y, y') dx$ soit extrémale (avec $y' = \frac{dy}{dx}$)

On peut montrer qu'une condition nécessaire pour que cette intégrale ait un extremum est:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

que l'on appelle équation d'Euler (ou de Lagrange)

Le problème fait partie des calculs des variations

Principe de Hamilton:

La ressemblance de (9) avec les équations de Lagrange amène à se proposer de déterminer les trajectoires qui rendent extrémale la quantité:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt$$

avec L le Lagrangien.

Les conditions nécessaires pour que I soit extrémale sont:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{qui sont justement les équations de Lagrange}$$

Principe de Hamilton: Un système mécanique conservatif évolue au cours du temps de façon à rendre extrémale la quantité

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (12)$$

que l'on appelle l'action.

L'extremum de (12) étant souvent un minimum, on appelle aussi ce principe

"principe de moindre action"

On symbolise le fait que (12) soit extrémale par:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

(Rappel: $p_k = \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ pour 1 système conservatif)

Transformations canoniques

Il peut être utile de vouloir changer de système de coordonnées généralisées.
Soient p_k, q_k les anciennes coordonnées généralisées de q.l.c. de mot et de position,
 P_k, Q_k les nouvelles. La transformation est:

$$P_k = P_k(p_k, q_k, t), \quad Q_k = Q_k(p_k, q_k, t) \quad (15)$$

Nous nous intéressons aux transformations dites "canoniques", pour lesquelles il existe une fonction \mathcal{H} telle que:

$$\dot{P}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_k}$$

Les coordonnées P_k, Q_k sont alors les coordonnées canoniques.

Les Lagrangiens en fonction des anciennes et nouvelles coordonnées sont:

$L(p_k, q_k, t)$ et $\mathcal{L}(P_k, Q_k, t)$. Ils sont liés aux Hamiltoniens $H(p_k, q_k, t)$.

pourquoi pas $L(q_k, \dot{q}_k, t)$?

et $\mathcal{H}(P_k, Q_k, t)$ par les équations:

$$H = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L$$

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - \mathcal{L}$$

Le changement de coordonnées (15) est une transformation canonique si:

$$\sum_{k=1}^n p_k dq_k - \sum_{k=1}^n P_k dQ_k \quad \text{est une différentielle totale}$$

Fonction génératrice:

D'après le principe de Hamilton, la transformation (15) doit être telle que

$\int_{t_1}^{t_2} L dt$ et $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ soient toutes les deux extrémales, soit $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$

Cette condition est satisfaite s'il existe une fonction \mathcal{G} telle que

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = L - \mathcal{L}$$

\mathcal{G} est une fonction génératrice

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$$

par soustraction $\int_{t_1}^{t_2} (L - \mathcal{L}) dt = 0$ possible si $L - \mathcal{L} = \frac{d\mathcal{F}}{dt}$

alors $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{F}}{dt} dt = \mathcal{F}(t_2) - \mathcal{F}(t_1) = 0$ et la fonction génératrice.

Rappel: $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = L - \mathcal{L}$

avec $L = L(p_x, q_x, t)$
 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_x, Q_x, t)$

\mathcal{F} est la fonction génératrice.

Si on peut écrire cette fonction génératrice \mathcal{F} en fonction de q_x et P_x , on la note:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(q_x, P_x, t)$$

On peut montrer que:

(23)

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{F}(q_x, P_x, t)}{\partial q_x}$$

$$Q_x = \frac{\partial \mathcal{F}(q_x, P_x, t)}{\partial P_x}$$

$$\mathcal{H}(P_x, Q_x, t) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + H(q_x, q_x, t)$$

avec

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_x}$$

$$\dot{Q}_x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x}$$

(24)

Equation de Hamilton-Jacobi:

Si on peut trouver une transformation canonique telle que $\mathcal{H}(P_x, Q_x, t) = 0$, on voit par (24) que P_x et Q_x sont constants (P_x et Q_x sont des coordonnées cachées).

On peut trouver p_x et q_x par la transformation, et donc le mouvement du système.

Il nous faut trouver la bonne fonction génératrice.

D'après la 3^{ème} eq de (23), avec $\mathcal{H} = 0$, il vient:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(q_x, P_x, t)}{\partial t} + H(p_x, q_x, t) = 0$$

Equation de Hamilton-Jacobi

et: $\left| \frac{\partial \mathcal{F}(q_x, P_x, t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_x}, q_x, t\right) = 0 \right|$

Hamilton-Jacobi:

Si on a $H(p, q, t) = 0$; p, q sont constants,

et:

$$\frac{\partial S(q, p, t)}{\partial t} + H(p, q, t) = 0 \quad (25)$$

ou

$$\frac{\partial S(q, p, t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0 \quad (26)$$

Solution de l'équation de Hamilton-Jacobi:

L'équation fait intervenir $n+1$ variables (q_1, \dots, q_n et t), la solution contient $n+1$ constantes. On laisse tomber une constante additive arbitraire, et on note les n autres β_1, \dots, β_n (aucune n'étant additive). On peut écrire la solution sous la forme:

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t) \quad (27)$$

Quand on a obtenu cette expression solution, on peut déterminer les anciennes coordonnées de quantité de mouvement par:

$$p_i = \frac{\partial S(q, p, t)}{\partial q_i} \quad (28)$$

De plus, si on identifie les p_i avec les β_i , on a:

$$q_i = \frac{\partial S(q, p, t)}{\partial p_i} = \alpha_i \quad \text{où les } \alpha_i \text{ sont des constantes.} \quad (29)$$

Et l'aide des relations (27) à (29), on peut exprimer les positions généralisées q_i comme des fonctions des β_i, α_i et de t , ce qui nous donne le mouvement du système.

Ecas du Hamiltonien indépendant du temps

Il peut être utile de chercher la solution sous la forme:

$$S(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n) + F(t) \quad (\text{séparation des variables})$$

on trouve alors $F(t) = -Et$.

En posant $S = S_1(q_1) + \dots + S_n(q_n)$, l'éq (25) se réduit à:

$$H\left(\frac{\partial S(q)}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = E \quad (32) \quad \text{où } E \text{ est une constante, représentant l'énergie du système}$$

On peut obtenir directement l'éq (32) en cherchant une fonction génératrice indépendante du temps. Les eqs (23), (24) sont alors remplacées par:

$$p_\alpha = \frac{\partial S(q)}{\partial q_\alpha}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial S(q)}{\partial p_\alpha}$$

$$\mathcal{H} = H = E$$

avec $\dot{p}_\alpha = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha}$

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}$$

Variables d'action et Variables angulaires

La méthode de Hamilton est utile pour l'étude des systèmes périodiques. La projection sur tout plan (p_α, q_α) de la trajectoire du point représentant l'état du système forme une courbe fermée C_α .

On appelle variable d'action l'intégrale curviligne: $I_\alpha = \oint_{C_\alpha} p_\alpha dq_\alpha$

Rappel: $\frac{\partial S}{\partial t}(q_\alpha, p_\alpha, t) + H(p_\alpha, q_\alpha, t) = 0 \quad (25)$

(Equation de Hamilton-Jacobi)

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(q_\alpha, p_\alpha, t) + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha, t\right) = 0 \quad \text{et}$$

On peut montrer que S peut s'écrire sous la forme :

$$S = S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n) \quad (36)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial I_\alpha}$$

(37)

(voir Sanders JFA 2024 pour Noether-Stokes)