

# Turbulence incompressible

Navier-Stokes incompressible:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.1)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla = 0 \quad (2.2)$$

+ solution initiale et condition limite

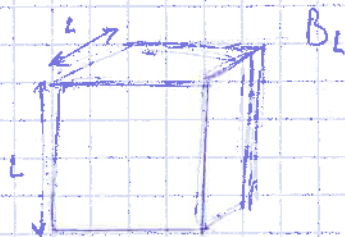
Lorsque le nombre de Reynolds augmente, on observe une rupture de symétrie lors de la transition à la turbulence. Lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, la symétrie est restaurée (turbulence pleinement développée)

(Les systèmes dynamiques chaotiques possèdent des bifurcations "symmetry increasing" (Eckart/Golubitsky 1988))

## 2) Symétries et lois de conservation:

2.1) Le bon vieux cube périodique

variable d'espace:  $\vec{x} = (x, y, z)$



On assume  $B_L$  périodiques en espace

L'espace des fonctions  $v(\vec{x})$   $L$ -périodiques ~~et note~~ satisfaisant  $\nabla \cdot v = 0$  est noté  $\mathcal{H}$

(On devrait associer une norme à cette espace. Voir Pise/Sulem 1978, Enstam 1991, 94, Gallavotti 1993, + chapitre 9.1)

La périodicité nous permet de nous débarrasser de la pression:

Prendons la divergence de l'éq. de qdm, et utilisons la continuité:

$$\text{NS} \quad \frac{\partial}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

div(2.1) + (2.2):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} p$$

(2.5)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (v_i v_j) = - \nabla^2 p$$

est une équation de Poisson:  $\nabla^2 p = \sigma$  (2.6)

L'équation de Poisson peut être résolue pour les fonctions  $\mathbb{L}$ -périodiques, si  $\sigma(x)$  est de moyenne nulle:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\mathbb{L}^3} \int_{\mathbb{L}^3} \sigma(x) dx = 0 \quad (2.7)$$

Et qui est le cas de  $\sigma = - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v_i v_j$ , constitué de dérivées spatiales de fonctions péro.

Passons dans l'espace de Fourier:

$$\sigma(x) = \sum_{\vec{k}} \hat{\sigma}_{\vec{k}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \vec{k} \in \frac{2\pi}{\mathbb{L}} \mathbb{Z}^3 \quad \text{Les coefficients de Fourier sont:}$$

$$p(x) = \sum_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}$$

$$\hat{\sigma}_{\vec{k}} = \langle \sigma(x) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \rangle$$

$$\hat{p}_{\vec{k}} = \langle p(x) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \rangle$$

L'équation de Poisson se réécrit:

$$\hat{p}_{\vec{k}} = - \frac{\hat{\sigma}_{\vec{k}}}{k^2}, \quad k \neq 0$$

(Pour  $k=0$ ,  $\hat{\sigma}_0 = 0$   
d'après (2.7))

avec  $k$  le module du <sup>vecteur</sup> nombre d'onde  $\vec{k}$

Le coefficient  $\hat{p}_0$  est arbitraire. En effet, la solution de l'équation de Poisson est définie à une constante près. Mais ajouter une constante à la pression ne change pas l'équation de NS. (car ça implique  $\vec{\nabla} p$ ) (2.8)

La solution de l'Eq. de Poisson (non-unique) est notée:  $\nabla^{-2} \sigma$  (dans l'espace physique)

Notons que c'est un opérateur non local (contient une convolution).

L'équation de Navier-Stokes (2.1) peut se réécrire:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \left( \delta_{ij} p - \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla^{-2} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i) = \nu \nabla^2 v_i \quad (2.9)$$

On peut maintenant se contenter d'imposer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  à l'instant initial, (2.9) va propager cette condition à tous les temps.



time reversal:  $g_{t,u}: t, u \mapsto t, -u$ : broken by viscosity,  $\nabla \cdot u + \nabla \cdot \tau = -\nabla p$   $\nabla \cdot \tau = 0$   
 (but, sing. in turbulence?)

~~Symmetries~~

## 2.2): Symmetries

Une symétrie est un groupe d'invariance discret ou continu d'un système dynamique.  
 Considérons  $G$  un groupe de transformations agissant sur des fonctions  $v(x, t)$ , périodiques en espace, à divergence nulle.

$G$  est un groupe de symétrie pour les équations de Navier-Stokes, si  $\forall v$  solution de NS, et  $\forall g \in G$ , alors  $gv$  est aussi solution de NS.

Groupe de symétrie connus des équations de Navier-Stokes:

- Translation en espace:  $g_p^{space}: t, x, v \mapsto t, x+p, v$  ;  $p \in \mathbb{R}^3$   $\rightarrow$  conservation qdm / impulsion
- Translation dans le temps:  $g_\tau^{time}: t, x, v \mapsto t+\tau, x, v$  ;  $\tau \in \mathbb{R}$   $\rightarrow$  conservation énergie
- Transformation galiléenne:  $g_u^{gal}: t, x, v \mapsto t, x+Ut, v+U$  ;  $U \in \mathbb{R}^3$   $\rightarrow$  conservation vitesse de déplacement du centre de masse.  
 (Pres. uniforme)
- Parité:  $P: t, x, v \mapsto t, -x, -v$
- Rotations:  $g_A^{rot}: t, x, v \mapsto t, Ax, Av$  ;  $A \in SO(\mathbb{R}^3)$   $\rightarrow$  conservation moment angulaire (inertial)
- Scaling:  $g_\lambda^{scal}: t, x, v \mapsto \lambda^{1-h} t, \lambda x, \lambda^h v$  ;  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ,  $h \in \mathbb{R}$   
 (Pour  $\nu=0$  uniquement)

Notes: • Il existe une variante pour la transformation galiléenne, dans laquelle  $U$  est aléatoire, et distribuée de façon isotrope ("Random Galilean invariance", Kraichnan 1975, 1978. Sections 6.25, 7.3, 9.5)

• Pour la transformation d'échelle (Scaling), lorsque  $t$  est substitué en  $\lambda^{1-h} t$ ,  $x$  en  $\lambda x$ , et  $v$  en  $\lambda^h v$ , tous les termes de l'équation de Navier-Stokes sont multipliés par  $\lambda^{2h-1}$ , sauf le terme visqueux, qui est multiplié  $\lambda^{h-2}$ . Ainsi, pour une viscosité finie, seul  $h=-1$  est permis.

Cette symétrie correspond au principe de similitude, car elle conserve le nombre de Reynolds.

Scaling pour viscosité finie:

$$g_\lambda^{scal}: t, x, v \mapsto \lambda^2 t, \lambda x, \frac{1}{\lambda} v ; \lambda \in \mathbb{R}^+$$

## Lois de conservation

~~Objectif~~ Considérons un système conservatif, décrit par un Lagrangien. Le théorème de Noether dit qu'il existe une loi de conservation pour chaque symétrie.

Le théorème n'est pas directement applicable à NS, car c'est un système dissipatif. (Entrainant au système d'Euler, qui possède plusieurs formulations Lagrangiennes).

Nous considérons ici les lois de conservation globales, impliquant une intégration sur le volume.

On considère des BC périodiques.

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L^3} \int_{B_L} f(x) dx$$

avec  $f(x)$  une fonction périodique quelconque.

Conservation de la quantité de mouvement:  $\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = 0$  (2.22)

Conservation de l'énergie:  $\frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} v^2 \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle = -\nu \langle |\omega|^2 \rangle$  (2.23)

(dilatation, devient une loi de conservation pour  $\nu=0$ )

avec  $\omega = \nabla \wedge \vec{v}$  : vorticité

Conservation de l'hélicité:  $\frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{\omega} \right\rangle = -\nu \langle \vec{\omega} \cdot \nabla \wedge \vec{\omega} \rangle$  (Escalade d'hélicité, Beirão 73) (2.24)

$\left( \vec{v} \cdot \vec{\omega} \right)$   
 $\nabla \times \vec{v}$

Notations:  $E = \left\langle \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right\rangle$  : Énergie moyenne (par unité de masse, mais en incompressible tu l'enlèves)

$\mathcal{E} = \left\langle \frac{1}{2} \|\vec{\omega}\|^2 \right\rangle$  : Entropie moyenne.

$H = \left\langle \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{\omega} \right\rangle$  : Hélicité moyenne (intériorisation des pointillés voir cours 0.3)

$H_\omega = \left\langle \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \nabla \times \vec{\omega} \right\rangle$  : "mean vortical helicity"

Conservation de l'énergie:  $\frac{d}{dt} E = -2\nu \mathcal{E}$

dissipation moyenne de l'énergie:

$$\mathcal{E} = -\frac{dE}{dt}$$

Conservation de l'hélicité:  $\frac{d}{dt} H = -2\nu H_\omega$



Dissipation moyenne de l'Énergie:  $\boxed{\varepsilon = - \frac{dE}{dt}}$

Notons que  $\overline{|\nabla \times \vec{w}|^2}$  et la dissipation locale moyenne spatiale. Ils diffèrent par un terme proportionnel au Laplacien de la pression. En effet, de (2.5), il vient:

$$\boxed{\nabla^2 p = \frac{1}{4} \sum \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \oplus \frac{1}{4} \sum \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2}$$

Pour une région de rotation en bloc, il n'y a pas de dissipation.

• En deux dimensions, il y a une équation de conservation supplémentaire pour l'énstrophie:

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = -2 \nabla P}, \text{ avec } \boxed{P = \left( \frac{1}{2} |\nabla \times \vec{w}|^2 \right)}$$
 la potentielle moyenne (voir 2.7)

## 2.4: Budgets d'énergie échelle par échelle.

Nous allons voir que le terme non-linéaire re-distribue l'énergie parmi les échelles, sans modifier le bilan global. Notons d'ailleurs que l'éq (2.3) (Conservation de l'énergie) ne fait pas intervenir le terme non linéaire.

Définissons la notion d'échelle: Prenons une fonction périodique, que nous filtrons (haut et bas):

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \hat{f}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \vec{k} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3$$

La fonction filtrée passe-bas:

$$\boxed{f_K^<(\vec{x}) = \sum_{|\vec{k}| < K} \hat{f}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}$$

$f_K^<(\vec{x})$ : échelle de taille plus grande que  $K$

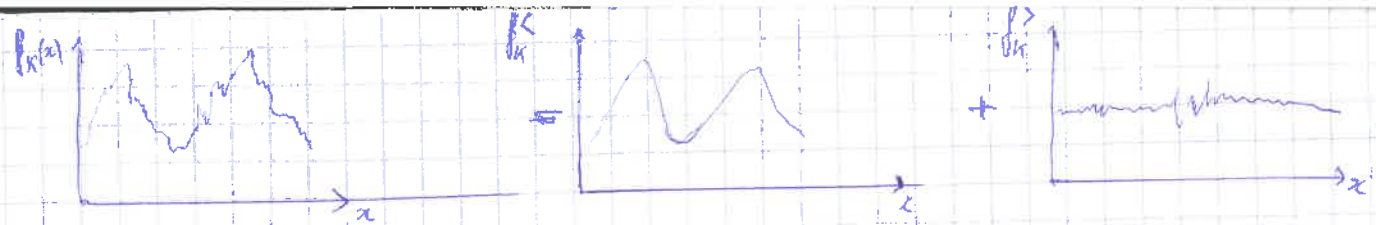
filtrée passe-haut:

$$\boxed{f_K^>(\vec{x}) = \sum_{|\vec{k}| > K} \hat{f}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}$$

$f_K^>(\vec{x})$ : échelle de taille plus petite que  $K$

Où le paramètre  $K > 0$  permet de définir l'échelle du filtrage:  $\boxed{L = K^{-1}}$

Ainsi:  $\boxed{f(\vec{x}) = f_K^<(\vec{x}) + f_K^>(\vec{x})}$  (2.37) (Obukhov, 1946)



Le passage de  $f$  à  $f^>$  (filtre passe-haut) peut être généralisé aux filtres de forme arbitraire. (Ce qui est connu comme une transformée en ondelettes) (Farge, 1992)

• Définitions l'opérateur filtre passe-bas:  $P_k: f(\vec{x}) \mapsto f_k^<(\vec{x})$

On peut montrer que:  $P_k$  commute avec  $\vec{\nabla}$  et  $\nabla^2$

$P_k$  est auto-adjoint avec la norme  $L^2$ :  $\langle f P_k g \rangle = \langle (P_k f) g \rangle = \sum_{k \in K} \hat{f}_k \hat{g}_k$  (i)

Les fonctions filtrées Haut et Bas à  $k$  sont orthogonales:

$$\langle f_k^> g_k^< \rangle = 0$$

(Rappel: identité de Parseval:  $\langle f g \rangle = \sum_k \hat{f}_k \hat{g}_k$ )

• Filtrons l'équation de Navier-Stokes (système d'équation...) (avec terme source)

$$P_k \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

↳ périodique,  $\vec{f} = \vec{f}(t, \vec{r})$

(Kolmogorov introduisit  $\vec{f} = (0, \sin z)$ )

voir 9.0.3.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}_k^<}{\partial t} + P_k (\vec{v}_k^< + \vec{v}_k^>) \cdot \vec{\nabla} (\vec{v}_k^< + \vec{v}_k^>) = -\vec{\nabla} p_k^< + \nu \nabla^2 \vec{v}_k^< + \vec{f}_k^< \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_k^< = 0 \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Prendons le produit scalaire de (2.45) avec  $\vec{v}_k^<$  et moyennons pour avoir le budget d'énergie du champ  $\vec{v}_k^<$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{|\vec{v}_k^<|^2}{2} \right\rangle + \left\langle \vec{v}_k^< \cdot \left( (\vec{v}_k^< + \vec{v}_k^>) \cdot \vec{\nabla} (\vec{v}_k^< + \vec{v}_k^>) \right) \right\rangle = -\left\langle \vec{v}_k^< \cdot \vec{\nabla} p_k^< \right\rangle + \nu \left\langle \vec{v}_k^< \cdot \nabla^2 \vec{v}_k^< \right\rangle + \left\langle \vec{v}_k^< \cdot \vec{f}_k^< \right\rangle$$

terme non linéaire, doit être nul

$\sim \|\vec{v}_k^<\|^2$  (voir section (2.3))

$$\text{Peut se réécrire: } \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} + \Pi_k = -2\nu \mathcal{L}_k + \mathcal{P}_k \right]$$



Flux d'énergie vers petites échelles
dissipation visqueuse à K

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} + \Pi_k = -2\nu \mathcal{Q}_k + \mathcal{F}_k \quad (2-48)$$

Energie cumulative :  $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \langle \|\vec{v}_k\|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{l \leq k} |\hat{v}_l|^2$

Entropie cumulative :  $\mathcal{Q}_k = \frac{1}{2} \langle \|\vec{v}_k\|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{l \leq k} l^2 |\hat{v}_l|^2$

Injection d'énergie cumulée :  
(par le terme source)  $\mathcal{F}_k = \langle \vec{f}_k \cdot \vec{v}_k \rangle = \sum_{l \leq k} \hat{f}_l \cdot \hat{v}_l$

Flux d'énergie :  $\Pi_k = \left\langle \vec{v}_k \cdot \left( \vec{v}_k \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_k \right) \right\rangle + \left\langle \vec{v}_k \cdot \left( \vec{v}_k \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_k \right) \right\rangle$   
(au nombre d'onde k)  
(entre les échelles)  
 $\Rightarrow$  Terme non linéaire, qui distribue l'énergie entre les échelles.  
(vers les petites échelles)  
(due to non linéarité)  
Voir aussi 6.2.2 pour def de  $\Pi_k$

Et haut nombre de Reynolds, il est classique que l'injection d'énergie est confinée aux grandes échelles ( $O(L_0)$ ), et que la dissipation d'énergie se fasse aux petites échelles ( $O(l_0)$ ) (avec  $l_0 \ll L_0$ ).

### 3) : Description probabiliste de la turbulence :

Les propriétés détaillées d'un signal turbulent ne sont pas prévisibles, mais ses propriétés statistiques, oui.

Notons que le système de Navier-Stokes est déterministe.

#### 3.2) : The poor man's Navier-Stokes. (Ruelle, 1985)

$$\boxed{v_{tt} = 1 - 2v_t^2} ; \quad v_0 = \bar{v}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

avec :

$$\boxed{v_{tt} - v_t = -2v_t^2 - v_t + 1} \leftarrow \text{Contient un terme non-linéaire, un terme visqueux, et}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -(\bar{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + p)} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{f}$$

un terme source.

### 3.3): Système dynamique:

Un système dynamique est un quadruplet  $(\Omega, \mathcal{A}, P, G_t)$ , avec:

- $\Omega$ : Espace des probabilités
- $\mathcal{A}$ : une famille de sous-ensembles de  $\Omega$
- $G_t$ : time-shifts: Famille d'opérateurs dépendant d'une variable  $t$ .
- $P$ : Probability measure, associée à  $\Omega$  à un réel entre 0 et 1
- $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ ;  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ ;  $P(\Omega) = 1$

Les  $G_t$  satisfont la propriété de semi-groupe:  $G_0 = I$ ;  $G_t G_{t'} = G_{t+t'}$

Elles conservent la probabilité:  $P(G_t^{-1}A) = P(A)$ ;  $\forall t \geq 0$ ;  $\forall A \in \mathcal{A}$

Birkhoff ergodic Theorem: Supposons que les seuls sous-ensembles de  $\mathcal{A}$  invariants par  $G_t$  sont ceux de mesure 0 et 1. (i.e l'ensemble vide, et  $\Omega$ ).

Alors, pour toute fonction intégrable  $f$  définie sur  $\Omega$ , et pour presque tout  $\bar{\omega} \in \Omega$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(G_t \bar{\omega}) dt = \int_{\Omega} f(\bar{\omega}) dP = \langle f \rangle \quad (3.25)$$

### 3.4): Le système de Navier-Stokes comme système dynamique

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ v_0 = \vec{v}(t=0) = \bar{v} \end{cases} \quad (3.25) \quad (+ \mathbb{R}^3)$$

La condition initiale est choisie dans un espace  $\mathcal{H}$ , satisfaisant les BC et l'incompressibilité. On assume  $\vec{f}$  indépendant du temps.

L'opérateur décalage en temps (time-shift) est:  $G_t : \bar{v} \mapsto \vec{v}(t)$

L'existence du time-shift, et d'une mesure invariante  $P$ , ne sont en général que des conjectures.

Le "problème de Navier-Stokes" est un modèle imparfait. Il est pathologique pour au moins deux raisons:

- La mesure invariante remplit tout l'espace  $[0,1]$ . Et l'inverse, un système dissipatif typique en dimension finie voit sa mesure invariante concentrée sur un attracteur, dont la mesure au sens de Lebesgue est nulle, avec une structure fractale (Ruelle 1988, 1991).



Par exemple, l'attracteur de Hénon  $(x, y) \mapsto (y + 1 - ax^2, bx)$ .

Enfin, il est typique pour un système dissipatif d'avoir plus d'une mesure invariante. Chaque attracteur a alors son bassin d'attraction. Ses propriétés statistiques de la solution vont alors dépendre du bassin d'attraction dont dépend la solution initiale. Ainsi, non seulement le comportement détaillé des orbites est imprédictible, mais même les propriétés statistiques peuvent l'être, tant qu'il est impossible de déterminer le bassin d'attraction de la solution initiale. En météo, non seulement le temps, mais aussi le climat, peuvent être imprévisibles.

→ (Par exemple, de la même façon, un solide posé sur une table peut avoir plusieurs positions stables)

⇒ Par l'instant, on va se focaliser sur les propriétés statistiques de la turbulence.

#### 4) Outils probabilistes.

On considère un système dynamique  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \theta_t)$ . On ignore le time shift et pour l'instant, qui n'a de sens que pour les fonctions aléatoires. Oublions également  $\theta_t$ .

Une variable aléatoire est une fonction:

$$v: \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad \bar{\omega} \mapsto v(\bar{\omega})$$

La mesure de probabilité de la variable aléatoire  $v$  est l'image de la mesure  $P$  par la fonction  $v$ .

On définit la probabilité cumulative:  $F(x) = \text{Prob}\{v(\bar{\omega}) \leq x\}$   
 $= P(v^{-1}((-\infty, x]))$

avec  $v^{-1}(I)$  l'espace des  $\bar{\omega}$  qui sont 'mappés' (associés) par  $v$ , dans l'intervalle  $I$ .

$F(x)$  est croissante. La dérivée (une fonction ou une distribution) est ainsi purement positive, est appelée la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $v$ .  $p(x)dx$  est la probabilité de trouver  $v(\bar{\omega})$  entre  $x$  et  $x+dx$ . La pdf est normalisée:

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$$

• La moyenne est:  $\langle v \rangle = \int_{\mathbb{R}} v(\omega) dP = \int_{\mathbb{R}} x p(x) dx$  Peut être infinie  
(Moyenne d'ensembles)

La variable aléatoire  $v$  est centrée si  $\langle v \rangle = 0$

• Le moment d'ordre  $m$  d'une variable aléatoire  $v$  est:  $\langle v^m \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^m p(x) dx$

Si  $v$  est centrée, on définit: La variance:  $\langle v^2 \rangle$

La skewness:  $S = \frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v^2 \rangle^{3/2}}$

La flatness ou kurtosis:  $F = \frac{\langle v^4 \rangle}{\langle v^2 \rangle^2}$   
(En fait, kurtosis =  $F - 3$ )

La fonction caractéristique de la variable aléatoire  $v$  est la fonction de la variable réelle  $y$ :

$$K(y) = \langle e^{iyx} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} p(x) dx \quad \left( \begin{array}{l} \text{Transformée de Fourier de la pdf} \\ \text{TF d'une fonction réelle positive} \end{array} \right)$$

La fonction caractéristique de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes est le produit de leur fonctions caractéristique respective.

Une variable aléatoire centrée est dite Gaussienne si

(6.7)  $K(y) = \langle e^{iyv} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 y^2}$ ,  $\sigma^2 = \langle v^2 \rangle$  la variance

On montre alors que  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$  (6.8)

Un vecteur de variables aléatoires s'écrit:  $v(\omega) = \begin{pmatrix} v_1(\omega) \\ \vdots \\ v_n(\omega) \end{pmatrix} = (v_i(\omega))_{i=1, \dots, n}$

Les moments sont alors des tenseurs, de la forme:

$$\langle v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_m} \rangle$$



Lorsque  $v$  est centrée, le tenseur de covariance s'écrit:  $\langle v_i v_j \rangle = \Gamma_{ij}$  (4.10)

La fonction caractéristique du vecteur aléatoire  $v$  s'écrit:  $K(\gamma) = \langle e^{i\gamma^T v} \rangle$  (4.11)

Il s'agit de la transformée de Fourier  $n$ -dimensionnelle de la pdf.

La fonction caractéristique existe toujours, alors que les moments peuvent être infinis. S'ils sont finis, ils sont donnés comme la dérivée en 0 de la fonction caractéristique:

$$\langle v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_m} \rangle = \left( \frac{1}{i} \right)^m \frac{\partial^m}{\partial \gamma_{i_1} \partial \gamma_{i_2} \dots \partial \gamma_{i_m}} K(\gamma) \Big|_{\gamma=0} \quad (4.12)$$

(4.12) est obtenue en différenciant (4.11) par rapport aux  $\gamma_i$ , et en prenant  $\gamma=0$ .

Le vecteur centre de variables aléatoires est dit Gaussien, si  $\forall c \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire  $c \cdot v$  est une variable aléatoire scalaire Gaussienne.

(Ainsi, la propriété Gaussienne est invariante par des transformations linéaires.)

La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien de variables aléatoires s'écrit (4.7 et 4.10):

$$K(\gamma) = \langle e^{i\gamma^T v} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \langle (\gamma \cdot v)^2 \rangle} = e^{-\frac{1}{2} \gamma_i \gamma_j \langle v_i v_j \rangle} = e^{-\frac{1}{2} \gamma_i \gamma_j \Gamma_{ij}}$$

Ainsi, la fonction caractéristique d'un vecteur de variables aléatoires est complètement déterminé par le vecteur de covariance. (4.12) nous dit que les moments le sont aussi. (ie par les moments d'ordre 2).

La relation entre les moments d'ordre 2 et les moments d'ordre supérieurs peut être écrite explicitement.

Résultat important pour les variables gaussiennes: l'intégration Gaussienne par parties:

$x = (v_i, i=1, n)$  un vecteur centré de variables gaussiennes,  $f$  une fonction différentiable de  $n$  variables, toutes les moyennes existent.

$$\langle v_i f(v_1, v_2, \dots, v_n) \rangle = \Gamma_{ij} \left\langle \frac{\partial f}{\partial v_j} \right\rangle = \langle v_i v_j \rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial v_j} \right\rangle \quad (4.13)$$

Démonstration:  $\Pi_{ij} = \langle v_i v_j \rangle$  est diagonal. Pour une variable aléatoire gaussienne scalaire (pas de sommation sur  $i$ ), (4.14) s'écrit:

Rappel: (4.14):  $\langle v_i f(v_i) \rangle = \langle v_i v_i \rangle \frac{df}{dv_i}$  (4.14)

scalaire:  $\langle v_i f(v_i) \rangle = \langle v_i^2 \rangle \frac{df}{dv_i}$  (4.15)

On utilise

Notons que (4.14) peut se ré-écrire en notations vectorielles:

$$\langle \mathbf{x} f(\mathbf{x}) \rangle = \left\langle \mathbf{x}' \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left( f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x}') \right) \right\rangle_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} \quad (4.16)$$

Ainsi, (4.16) dit que l'intégration gaussienne par parties s'applique aussi à des opérateurs gaussiens, agissant en dimensions finies ou infinies.

L'intégration gaussienne par parties a de nombreuses applications en théorie statistique de la turbulence.

On l'utilise notamment pour dériver les relations entre moments pour les variables aléatoires Gaussiennes:

Si  $\mathbf{x}$  est un vecteur gaussien <sup>centre</sup> de variables aléatoires, alors:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \langle v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{m+1}} \rangle = 0 \quad \forall m, i_1, i_2, \dots, i_{m+1} \quad (4.17)$$

(changer  $\mathbf{x}$  en  $-\mathbf{x}$  ne change pas la covariance et laisse ainsi tous les moments invariants, ainsi, les moments d'ordre impair s'annulent. (~~probabilité~~))

$$\bullet \quad \langle v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m} \rangle = \sum_{\substack{(l_1, l_2), (l_3, l_4), \dots, (l_{m-1}, l_m) \\ \text{une partition de } \{1, 2, \dots, 2m\} \text{ paires}}} \langle v_{i_{l_1}} v_{i_{l_2}} \rangle \langle v_{i_{l_3}} v_{i_{l_4}} \rangle \dots \langle v_{i_{l_{m-1}}} v_{i_{l_m}} \rangle, \quad (4.18)$$

avec  $(l_1, l_2), (l_3, l_4), \dots, (l_{m-1}, l_m)$  une partition de  $\{1, 2, \dots, 2m\}$  paires, et la sommation se fait sur toutes les partitions possibles.

Cette décomposition (4.18) peut être généralisée aux moments de vecteurs non Gaussiens, en utilisant les cumulants. (section 9.5.1)



## 4.2: Random functions (stochastic process)

Une fonction aléatoire est une famille de variables aléatoires (scalaires ou vectorielles) dépendant d'une, ou plusieurs variables de temps ou d'espace. (La variable de probabilité  $\bar{\omega}$  est souvent omise).

Un exemple est le champ de vitesse  $\mathbf{v}(t, \mathbf{z}, \bar{\omega})$  solution de NS, avec la condition initiale  $\bar{\omega}$ .

Les moments d'ordre  $n$  d'une fonction aléatoire sont en général des tenseurs de  $n$  variables

spatio-temporelles. Pour le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ :  $\langle v_{i_1}(t_1, \mathbf{z}_1) v_{i_2}(t_2, \mathbf{z}_2) \dots v_{i_n}(t_n, \mathbf{z}_n) \rangle$  (4.22)

Lorsque la fonction aléatoire est centrée, (ie  $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ ),  $\boxed{f_{i,j}(t, \mathbf{z}, t', \mathbf{z}') = \langle v_i(t, \mathbf{z}) v_j(t', \mathbf{z}') \rangle}$  (4.23)

## Turbulence et Intermittence

- $U_{rms}$  représente la statistique de la fluctuation.  
(l'écart-type):

$$U_{rms} = \sqrt{(u(t) - u_{moy})^2} = \sqrt{u'(t)^2}$$

$$u(t) = \bar{u} + u'(t)$$

$$u^2(t) = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u'(t) + u'^2(t)$$

$$\overline{u^2(t)} = \bar{u}^2 + 0 + \overline{u'^2(t)}$$

$$U_{rms} = \sqrt{u'^2(t)} = \sqrt{\overline{u^2(t)} - \bar{u}^2}$$

$$U_{rms} = \sqrt{\langle (u(t) - \langle u \rangle)^2 \rangle}$$

$U_{rms}$  représente la vitesse caractéristique des plus grosses structures:

L'intensité de la turbulence est:  $I = \frac{U_{rms}}{\bar{u}}$

- Pour étudier la turbulence à partir d'un signal temporel, on définit la fluctuation de vitesse:

$$du_z(t) = U(t+z) - U(t)$$

On définit ainsi la fonction de structure (ou moment) d'ordre 1:

$$I_1: \begin{cases} \langle du_z(t) \rangle = \langle U(t+z) - U(t) \rangle \\ \langle du_r(t) \rangle = \langle U(x+r) - U(x) \rangle \end{cases}$$



Caractérise la densité de probabilité des incréments de vitesse.

Fonction de structure d'ordre 2:

$$I_2: \begin{cases} \langle du_z^2 \rangle = \langle (u(t+z) - u(t))^2 \rangle \\ \langle du_r^2 \rangle = \langle (u(x+r) - u(x))^2 \rangle \end{cases}$$

Donne accès à une énergie cinétique par unité de masse pour les événements d'échelle  $r$ .

Elle permet de déduire une vitesse caractéristique des tourbillons d'échelle  $r$ :

$$I_2 = \langle du_r^2 \rangle = u_r'^2$$

Le temps de retournement du  $r$ -tourbillon est:  $t_r = \frac{r}{u_r'}$

Le taux de dissipation d'énergie cinétique pour une boule de diamètre  $r$ :

$$\varepsilon_r = \frac{u_r'^2}{t_r} = \frac{u_r'^3}{r} \quad (\text{puissance moyenne dissipée})$$

Kolmogorov 1941:  $\varepsilon_r = \varepsilon = \text{cte}$

L'énergie cinétique par unité de masse, et le temps de retournement s'ajustent mutuellement pour que  $\varepsilon = \text{cte}$ .

Implique une loi d'échelle pour la vitesse du  $r$ -tourbillon:

$$I_1 \leftarrow u_r' \sim r^{1/3}$$

Conduit au spectre d'énergie en  $k^{-5/3}$ .

Landau : aux petites échelles, la dissipation présente une plus grande dispersion qu'aux grandes.

L'étude de l'intermittence se fait par l'étude des fonctions de structures  $\Pi_p(r)$ ,  $p$  entier positif (ou réel en fait).

<sup>(cinétique)</sup>  
Moment d'ordre  $p$  :  $\langle |V(x+r) - V(x)|^p \rangle$

$p$  : paramètre de seuillage des fluctuations :

$p \rightarrow 1$  : tous les événements ont le même poids

$p \rightarrow \infty$  : les événements les plus intenses sont retenus.

On peut définir des moments pour la dissipation d' $\mathcal{E}$  :

(Rappel : fluctuations de vitesse :  $dV_r = V(x+r) - V(x) \rightarrow \Pi_p = \langle |V(x+r) - V(x)|^p \rangle$ )

$$\Pi_p(r) = \langle \mathcal{E}_r^p \rangle = \langle |\mathcal{E}_r(x+r) - \mathcal{E}_r(x)|^p \rangle$$

Pour une dissipation uniforme d'énergie (K41), les moments sont liés par :

$$\Pi_p(r) = \Pi_1(r)^p$$

Les  $\Pi_p$  se déduisent du moment d'ordre 1.

Supposons des lois d'échelle pour les moments <sup>cinétiques</sup> d'ordre  $p$  :

$$\Pi_p(r) \sim r^{\zeta_p}$$

avec  $\zeta_p$  coefficient d'intermittence

cinétique

Kolmogorov 1941 implique une loi linéaire :  $\zeta_p = \frac{p}{3}$

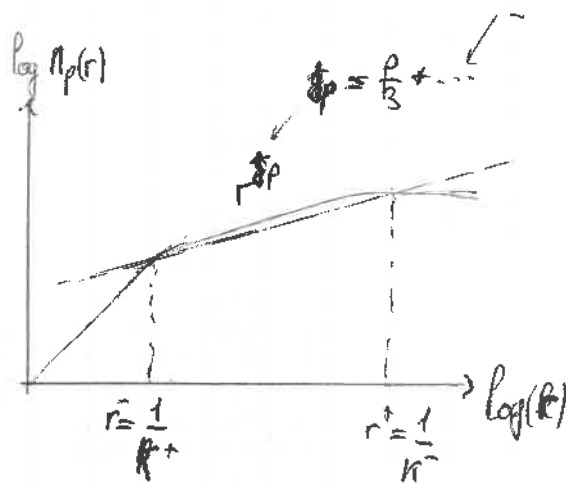
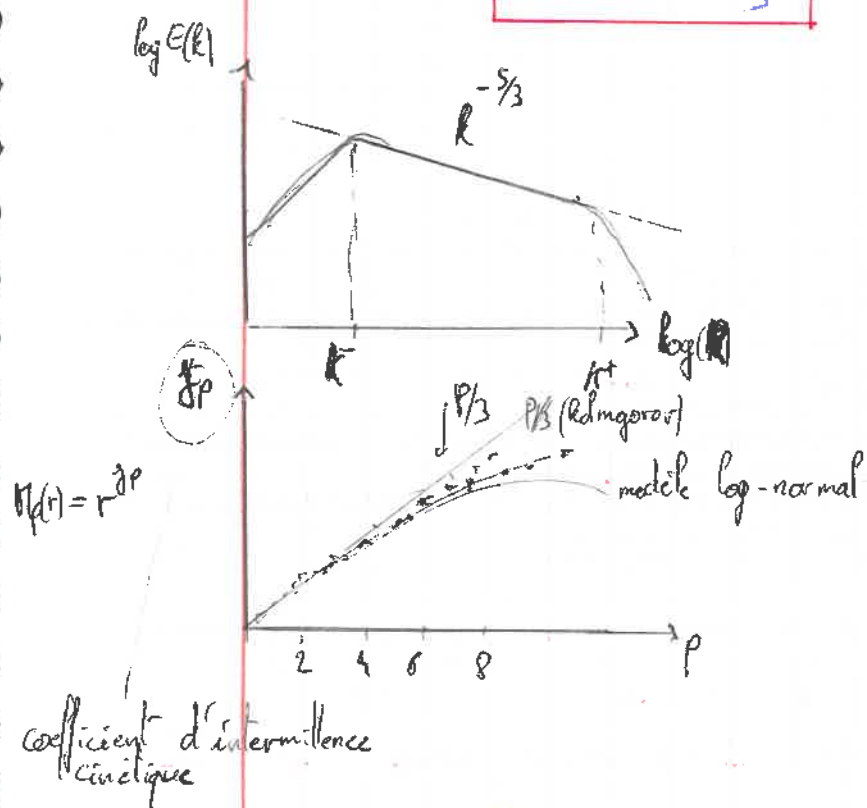


Supposons des lois d'échelle pour les moments dissipatifs:

$$N_p(r) \sim r^{\zeta_p}$$

Dans le cadre de K41,  $\zeta_p$  doit être nul,  $\forall p$ . Dans ce cadre:

$$\zeta_p = \frac{\zeta_2}{3} + \frac{p}{3}$$



$\beta$ -modèle (Frisch et al. 1978)

Le support de la dissipation d' $\varepsilon$  est fractal, de dimension  $D$ .

Il ne remplit donc pas tout l'espace ( $D < 3$ ).

Le taux de dissipation à l'échelle  $r$  sur ce support est donc une fraction du taux de dissipation  $\varepsilon$  donné par Kolmogorov:

$$\varepsilon_r = \varepsilon \left( \frac{r}{r_0} \right)^{3-D} \quad D \approx 2,8$$

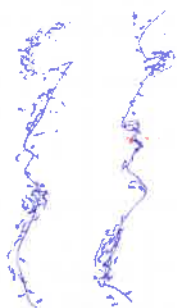
Pour  $p=0$ :  $\zeta_0 = 3-D = 0,2$ . Problématique, devrait valoir 0.

Idem pour  $p=1$ .  $\zeta_1 = 0,18$ , éloigné du  $0,33 \rightarrow 0,36$  expérimental.

Décrit mal l'intermittence aux petits ordres.

## Multifractales et turbulence:

Deux objets fractals, de même dimension  $D$ , peuvent avoir des distributions de masse (ou énergie) très différentes sur le même support:



Les multifractales permettent de décrire ces objets.

L'approche multifractale stipule qu'il existe des lois d'échelles locales, caractérisant les singularités du support de la dissipation quand  $r \rightarrow 0$ :

$$E_r \sim r^{\alpha-1}$$

( $\alpha-1$  et non  $\alpha$  pour des raisons pratiques)

L'ensemble des points du champ où l'exposant  $\alpha$  est réalisé forme un support  $S(\alpha)$ , de dimension fractale  $F(\alpha)$ .

L'exposant  $\alpha$  est appelé indice de singularité, ou indice de Hölder.

Le support  $S(\alpha)$  est donc l'ensemble des points du champ qui présentent localement une loi d'échelle  $E_r \sim r^{\alpha-1}$ .

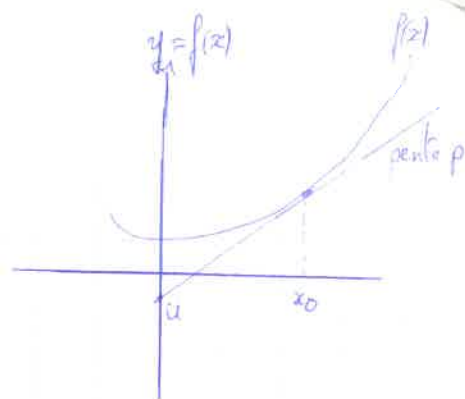
L'exposant  $\alpha-1$  est une quantité ponctuelle, locale,  $F(\alpha)$  est une quantité globale.

L'exposant  $\alpha-1$  est délicat à mesurer. On cherche à le relier à une quantité mesurable telle que les exposants d'intermittence des fonctions de structure.

On peut relier les exposants locaux  $\alpha$  aux exposants globaux  $\zeta_p$  d'intermittence dissipative, par une transformée de Legendre.



$$F(d) = \min_p (p(d-1) + d - \overset{3}{t_p})$$



$y=f(x) \rightarrow u=g(p)$   
 ordonnée à l'origine.  $\uparrow$  pente  
 transformée de Legendre

### Dynamique des peaux entropiques:

Suppose un dégradé de structures fractales liées les unes aux autres, caractérisant la dynamique des niveaux de fluctuation.



La densité et ses fluctuations dépendent de l'échelle.

Pour une échelle  $r$ , on détermine la moyenne de la variable fluctuante  $\langle x \rangle_r$ . On peut alors définir la valeur absolue de la fluctuation :  $\langle dx_r \rangle = \langle |x - \langle x \rangle_r| \rangle$

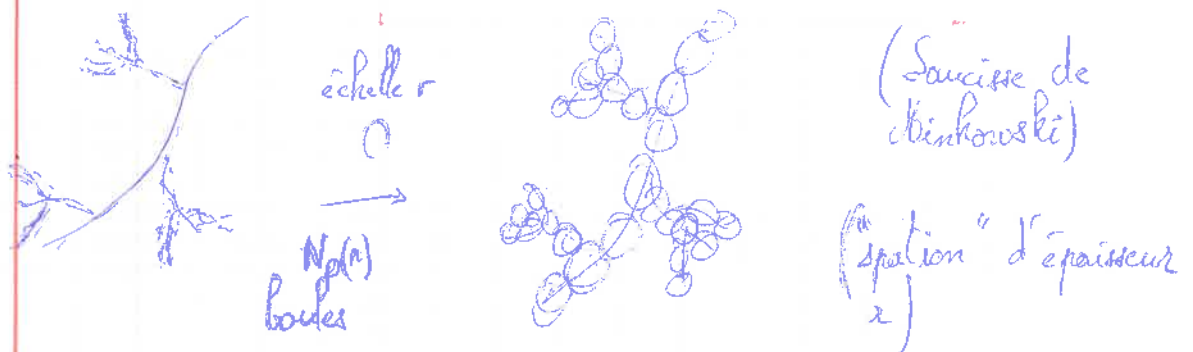
Puis on seuille sur les fluctuations:

$$\langle dx_r^p \rangle = \langle |x - \langle x \rangle_r|^p \rangle$$

(On élimine les fluctuations inférieures à ce seuil).

Pour chaque niveau de seuillage  $P$  (peau entropique d'ordre  $P$ ), on mesure son extension dans l'espace des échelles (ensemble de Minkowski).

On recouvre l'ensemble par  $N_p(r)$  boules de rayon  $\frac{r}{2}$



Volume occupé par la saucisse (spatium) :

$$V_p(r) = N_p(r) r^d \quad (d=3 \text{ en } 3D)$$

Si  $V_p(r_0)$  est le volume total du champ initial  $S_0$ , la fraction de volume du spatium est :  $\left| \frac{V_p(r)}{V_p(r_0)} \right|$ .

On s'intéresse plutôt au nombre maximal de spatiums que l'on peut placer dans l'espace total.

$$\omega_p(r) = \frac{V_p(r_0)}{V_p(r)}$$