Équations différentielles ordinaires (du 1er ordre)

$$\boxed{a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = f(x)} \quad (1)$$

Une solution de (1) est une fonction $y \in C^1$ sur un intervalle I, vérifiant (1) $\forall x \in I$.

I) Équation homogène :

$$\boxed{a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0} \quad (2)$$

• Équation à coefficients constants : $a y'(x) + b y(x) = 0$

Solution de la forme : $\boxed{v(x) = C e^{rx}}$

Où $\boxed{r = -\frac{b}{a}}$ et C est une constante.

• Équation à coefficients variables : $a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$, $\forall x \in I$ tel que $a(x) \neq 0$

Solution de la forme : $\boxed{v(x) = C e^{u(x)}}$

avec $\boxed{u'(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}}$ et C une constante

II) Solution générale

Soit v_0 une solution particulière de (1).
Alors les solutions générales s'écrivent :

$$\boxed{y(x) = \underbrace{v(x)}_{\text{solution de l'équation homogène}} + \underbrace{v_0(x)}_{\text{Une solution particulière}}}$$

III Recherche de solution particulière

- Recherche d'une solution évidente. Sinon

- Si 2nd membre de la forme : $\boxed{f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)}$, $P_n(x)$ polynôme de degré n

→ Pour une équation à coefficients constants :

- si $\lambda \neq r$ $\left(\lambda = -\frac{b}{a}\right)$: On cherche une solution de la forme :

$$\boxed{y_0(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)}$$

- si $\lambda = r$: On cherche une solution de la forme :

$$\boxed{y_0(x) = e^{\lambda x} x\, Q_n(x)}$$

→ Pour une équation à coefficients variables → méthode de la variation de la constante :

On cherche une solution de la forme :

$$\boxed{y_0(x) = C(x)\, v(x)}$$ On a alors : $$\boxed{C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)\, v(x)}}$$

Équations du 2nd degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$: racine double : $\boxed{x_0 = \frac{-b}{2a}}$ → $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

Si $\Delta > 0$: deux solutions : $\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta < 0$: Pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Equation différentielle ordinaire du 2^{nd} ordre

$$\boxed{a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = f(x)} \quad (1)$$

Equation homogène : (E_h)

$$\boxed{a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = 0} \quad (2)$$

Solution : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

solution de l'éq homogène

solution particulière

Solution de l'équation homogène : de la forme $\boxed{y(x) = \lambda\, y_1(x) + \mu\, y_2(x)}$

Somme de 2 fonctions linéairement indépendantes (espace vectoriel de dimension 2)

Méthode de réduction d'ordre (Variante de la variation de la constante)

- deviner une solution $y_1(x)$ de (2) (essayer des polynômes, e^x,)
- Chercher $y_2(x)$ sous la forme : $y_2(x) = C(x)\, y_1(x)$

Cas des EDO homogènes du 2^{nd} ordre, à coefficients constants :

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$$

Equation caractéristique associée : $\boxed{ar^2 + br + c = 0}$

discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$: 2 solutions r_1, r_2

La solution de l'équation homogène s'écrit alors :

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$$

• Si $\Delta = 0$: racine double : $\boxed{r = -\frac{b}{2a}}$

Solution de Eh : $\boxed{y(x) = (A + Bx)e^{rx}}$ où A et B sont 2 constantes

• Si $\Delta < 0$: 2 solutions complexes conjuguées : $\boxed{r = \alpha + i\beta}$, $\boxed{\bar{r} = \alpha - i\beta}$

Solution de Eh : $\boxed{y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{\bar{r} x}}$

Recherche d'une solution particulière : (si coeff constants)

• Si 2nd membre de la forme : $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

- si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$, ie $\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$:

Solution de la forme $\boxed{y_0(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)}$

- si $\lambda = r_1$ ou $\lambda = r_2$

Solution de la forme $\boxed{y_0(x) = e^{\lambda x} x Q_n(x)}$

- si $\lambda = r_1 = r_2$

Solution de la forme $\boxed{y_0(x) = e^{\lambda x} x^2 Q_n(x)}$

Si coefficients non constants : Méthode de la variation des constantes

(Rappel) Solution de Eh de la forme : $y(x) = A y_1(x) + B y_2(x)$

On cherche une solution particulière de la forme : $\boxed{y_0(x) = A(x) y_1(x) + B(x) y_2(x)}$

On cherche des fonctions A et B vérifiant le système :

$$\begin{cases} y_1(x) A'(x) + y_2(x) B'(x) = 0 \\ y_1'(x) A'(x) + y_2'(x) B'(x) = \frac{f(x)}{a(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x)\,A'(x) + y_2(x)\,B'(x) = 0 \\ y_1'(x)\,A'(x) + y_2'(x)\,B'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)} \end{cases}$$

Système linéaire en $(A'(x), B'(x))$ de déterminant :

$$W(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$ (Wronskien de y_1 et y_2)

$$W(x) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x) = y_1^2(x)\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(x) \neq 0$$ car y_1 et y_2 sont linéairement indépendants

Le système a donc des solutions.

On calcule $A'(x)$ et $B'(x)$, puis on intègre.

Équation aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1

(Équations de transport)

$\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Pour la fonction de n variables $\phi : (x_1, \dots x_n) \longrightarrow \phi(x_1, \dots x_n)$

· opérateur gradient $\nabla\phi(x)$: $\{\nabla\phi(x)_i = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}$

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \left(f_1(x), \dots f_n(x)\right)$$

$$\boxed{F(x) \cdot \nabla\phi(x) + g(x)\,\phi(x) = h(x)}$$

Soit encore :

$$f_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x) + f_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x) + \dots + f_N \frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x) + g(x)\,\phi(x) = h(x)$$

Équation de continuité :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}\left(\rho(x,t) \cdot u(x,t)\right) = 0$$

pour $u(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ connue, i.e. l'inconnue est $\rho(x,t)$.

$$\rho(x,t) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$[t, x_1, x_2, x_3] \mapsto \rho(t, x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial\rho(x,t)\,u(x,t)}{\partial x_1} + \frac{\partial\rho(x,t)\,u(x,t)}{\partial x_2} + \frac{\partial\rho(x,t)\,u(x,t)}{\partial x_3} = 0$$

On ~~peut montrer~~ montre que $\operatorname{div}(\rho u(x,t)) = u(x,t) \cdot \nabla\rho(x,t) + \rho(x,t)\operatorname{div}(u(x,t))$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\rho + \rho\,\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

$$\boxed{\phi = \rho} \qquad \boxed{F = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \qquad g = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}$$

$$g = \operatorname{div}(u)$$

Transport de ρ par le champ $\vec{u}$

Équations aux dérivées partielles linéaires du 2^{nd} ordre

Soit $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $\quad \bar{x} = (x_1, \dots x_N)$

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} f_i(\bar{x}) \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_i} + g(\bar{x})\phi(x) = h(x)}$$

$A(x) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ matrice $N \times N$ des coefficients d'ordre 2

$F(x) = (f_i(x))_{1 \leq i \leq N}$ vecteur de taille N

$H\phi(x)$: Hessienne de $\phi(x)$: $H(\phi(x))_{ij} = \dfrac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ $\quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

$\nabla\phi(x)$: Gradient de $\phi(x)$ $\quad (\nabla\phi(x))_i = \dfrac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}$

$A : B = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} b_{ij}$ (Produit scalaire de Frobenius)

L'EDP se réécrit :

$$\boxed{A(x) : H(\phi(x)) + F(x)\nabla\phi(x) + g(x)\phi(x) = h(x)}$$

Exemple :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \sin(x+y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(x,y) = 0 \quad h(x,y) = \sin(x+y)$$

Pour les EDP d'ordre 2, A est non nulle et symétrique, donc diagonalisable, à valeurs propres réelles.

Lorsque $A(\bar{x})$ est constante, les courbes $\bar{x}^T A \bar{x} = \text{cte}$ sont respectivement des ellipsoïdes, paraboloïdes, hyperboloïdes

$$\boxed{A(x) : H(\phi(x)) + F(x)\nabla\phi(x) + g(x)\phi(x) = h(x)}$$

EDP elliptiques

L'EDP linéaire du 2nd ordre est dite elliptique si $A(x)$ n'admet que des valeurs propres non nulles, toutes de même signe.

Exemple : $\left[\Delta\phi(x) = f(x)\right]$ (Laplacien) (si $f = 0$, ⇒ équation de Poisson)

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H(\phi(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$A(x)$: toutes ses valeurs propres sont égales à 1

Plus généralement, ce sont les équations de type :

$$\left[\vec{\nabla}\cdot\left(k(x)\,\vec{\nabla}\phi(\bar{x})\right) = f(x)\right]$$

Problèmes d'équilibre, ou problèmes stationnaires

EDP linéaire du 2nd ordre paraboliques

EDP est dite parabolique si $A(x)$ admet $N-1$ valeurs propres non nulles de même signe, et une valeur propre nulle. Soit $v(\bar{x})$ le vecteur propre associé à la valeur propre nulle, on doit avoir $v(x)\cdot F(x) = 0$

Exemple : équation de la chaleur :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,\bar{x}) - k\,\Delta\phi(t,\bar{x}) = f(t,\bar{x})\right]$$

$A(t,\bar{x}) =$

$$H(\phi(t,\bar{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial y} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{matrix}$$

$$A(t,x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}$$ admet une valeur propre nulle, toutes les autres valent k. La valeur propre nulle correspond à la valeur propre temporelle.

De plus, $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la condition $v(x) . F(x) \neq$ est vérifiée

Plus généralement, les équations du type $\left[\frac{\partial \phi(t,\bar{x})}{\partial t} - \mathrm{div}\left(k(\bar{x})\, \nabla \phi(t,\bar{x})\right) = f(t,\bar{x}) \right]$ sont paraboliques pour $k(\bar{x}) > 0$

EDP linéaires du 2nd ordre hyperboliques :

EDP est dite hyperbolique si $A(\bar{x})$ n'admet que des valeurs propres non nulles, toutes de même signe, sauf une.

Exemple : L'équation d'onde :

$$\left[\frac{\partial^2 \phi(t,\bar{x})}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi(t,\bar{x}) = f(t,\bar{x}) \right]$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$A(t,\bar{x}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{vmatrix}$$

Plus généralement, les équations du type $\left[\frac{\partial^2 \phi(t,\bar{x})}{\partial t^2} - \mathrm{div}\left(c(\bar{x})\, \nabla \phi(t,\bar{x})\right) = f(t,\bar{x}) \right]$ sont hyperboliques pour $c(\bar{x}) > 0$

Résumé :

$$\boxed{\Delta\phi(\bar{x}) = f(\bar{x})}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial x_i^2} = f(\bar{x})$$

Laplacien, Poisson

Problèmes d'équilibre, stationnaires

$$\boxed{\mathrm{div}\left(k(\bar{x})\,\nabla\phi(\bar{x})\right) = f(\bar{x})}$$

Elliptique

$\det A > 0$

$$A(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial\phi(t,\bar{x})}{\partial t} - k\,\Delta\phi(t,\bar{x}) = f(t,\bar{x})}$$

Problèmes de diffusion

$$\boxed{\frac{\partial\phi(t,\bar{x})}{\partial t} - \mathrm{div}\left(k(\bar{x})\,\nabla\phi(\bar{x})\right) = f(\bar{x})}$$

Parabolique si $k(x) > 0$

$\det A = 0$

$$A(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\phi(t,\bar{x})}{\partial t^2} - c^2\,\Delta\phi(t,\bar{x}) = f(x)}$$

Propagation d'ondes

$$\frac{\partial^2\phi(t,\bar{x})}{\partial t^2} - \mathrm{div}\left(c(\bar{x})\,\nabla\phi(t,\bar{x})\right) = f(\bar{x})$$

Hyperbolique pour $c(x) > 0$

$$A(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{bmatrix}$$

$\det A < 0$

Voir Tome p. 34

Équations de conservation et systèmes hyperboliques

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) = 0 \quad (1)$$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_{1j} \\ \vdots \\ f_{pj} \end{pmatrix}$

Jacobienne : $A_j(u) = \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial u_k}(u) \right)_{1 \leq i,k \leq p}$

avec $\nabla \cdot f(u) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$

Soit $A(u,\omega) = \sum_{j=1}^{d} \omega_j A_j(u)$, pour $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$, $\omega \neq 0$.

Le système (1) est dit hyperbolique si, $\forall u \in \Omega$, $\forall \omega \neq 0$, $A(u,\omega)$ a p valeurs propres $\lambda_1(u,\omega) \leq \dots \leq \lambda_p(u,\omega)$

Calcul vectoriel et PDEs

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{f}}_{\text{div}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

produit vectoriel

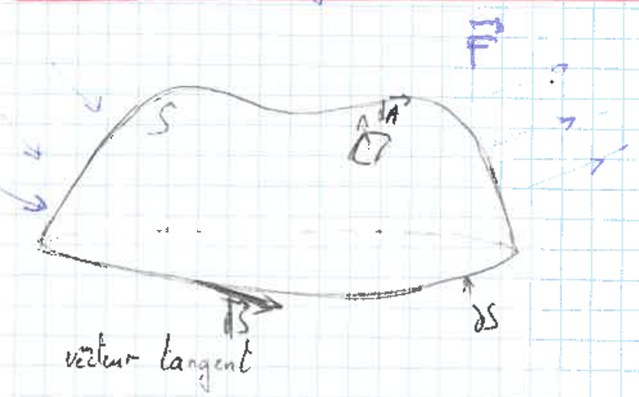
Gauss divergence théorème:

$$\boxed{\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dv = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS}$$

intégrale de la divergence du flux $\vec{F}$ = le flux $\vec{F}$ du champ de vecteurs, à travers S.

⇒ conservation de la masse.

Stokes and Green theorems:

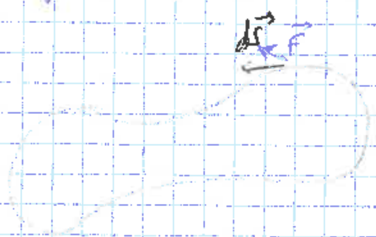


Stokes:

$$\boxed{\iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\vec{dA} = \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot\vec{ds}}$$

Conservation of angular momentum

Green theorem (Stokes on a "flat" S)



$$\boxed{\iint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial S} \left(F_1\,dx + F_2\,dy\right)}$$

- Helmholtz decomposition

Given a scalar field: $f(x,y,z)$. $\vec{\nabla} f$ is a vector.

Are all vectors fields $\vec{F}$ the gradient of a scalar field?

⇒ Only special vector fields are the gradient of f.

if $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, ⇒ $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = 0$. irrotational.

Flows	⊃	Gradients flows	⊃	Potential flows	
$\vec{F}$		$\vec{F} = \vec{\nabla} f$		$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$	incompressibles
		irrotionnels		$\vec{\nabla} \otimes \vec{F} = 0$	irrotationnels

Gradients flows are conservative by construction.

Helmholtz decomposition : Any genereric flow $\vec{F}$: $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \otimes \vec{A}}$

(Hodge, in higher dimensions)

(on manifolds)

Potential flows and Laplace equation

Given a steady, incompressible flow (irrot) $\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

$\vec{\nabla} \otimes \vec{V} = 0$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi}$$

incompressibility, curl-free, are satisfied automatically if : $\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi$

for a real-valued potential φ, that satisfies : $\boxed{\vec{\nabla}^2 \varphi = 0}$ Laplace.

Laplace : incompressible, irrotational

sur le potentiel φ pour le champ de vecteurs

Soit un potentiel complexe : $\boxed{\Phi(z) = \varphi(x,y) + i\,\psi(x,y)}$

potential f[illegible]tion stream function

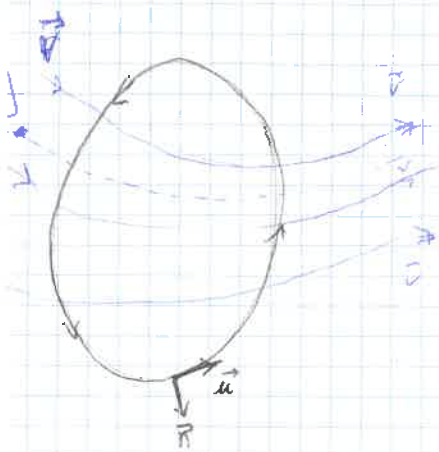
Hamiltonian

if $\Phi(z)$ is an analytic function ($z^2, z^3, \sin(z), e^z$), then

both $\varphi(x,y)$ and $\psi(x,y)$ satisfy the Laplace equation : $\nabla^2 \varphi = 0$

$\nabla^2 \psi = 0$

Ecoulement potentiel = incompressible, irrotationnel.



Stokes thm (Green)

$$\oint_C \vec{V} \cdot \vec{u} \, ds = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \, ds = 0$$

zero net curl around C

$$\oint_C \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, ds = 0$$

Gauss thm

zero net flux accross C

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(x,y) \\ V_2(x,y) \end{bmatrix}$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{potential}} + i\underbrace{2xy}_{\text{Hamiltonian}} = \Phi(z)$$

On a $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{bmatrix}$ ← par définition de Φ + Cauchy Riemann condition

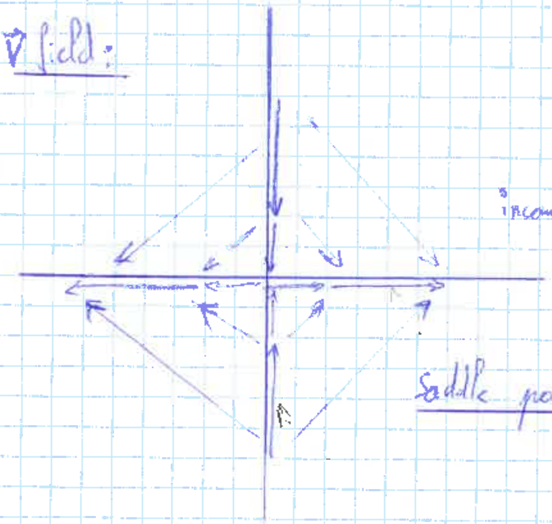
d'où $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$ On vérifie $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{\nabla}\otimes\vec{v} = 0+0 = 0$

Vérifions $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2-2 = 0$ vérifie bien Laplace eq.

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0+0 = 0$

$\vec{v}$ field :



incompressible, irrotationnel

Saddle point

[illegible]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{linear ODE}}$$

eigen values & direction

1 : PDE $\left(\frac{dR}{dt} = \vec{V}(x,y)\right)$

2 : Vector field $\vec{V}$

3 : ODE for particle in Vector field.

$\psi(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$

$\psi(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y) \\ -\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y) \end{bmatrix}$$

ométrie différentielle :) Gauss-Bonnet locale :

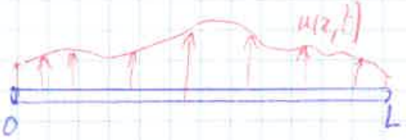
$$h(\gamma) = -\oint_\gamma A\,d\gamma = -\iint_\Sigma B\,d\Sigma$$

nommé potentiel de jauge

tenseur de courbure

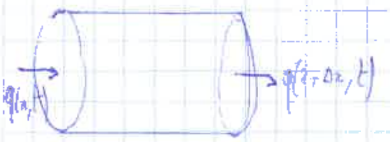
$$B = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)(dx_1 \wedge dx_2)$$

1D Heat equation:



"The rate of change = heat flux through BCs + Source

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Big(\overbrace{\underset{\text{specific heat}}{c(x)}\,\underset{\text{density}}{\rho(x)}\,u(x,t)}^{\text{Heat energy}}\Big) = -\underbrace{\frac{\partial q}{\partial x}}_{\text{Heat flux}} + Q(x,t)}$$



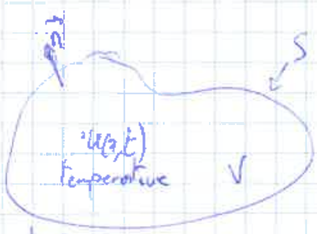
$$\boxed{q(x,t) = -K\frac{\partial u}{\partial x}}$$

Ainsi : $c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)$ (si $K = \text{cte}$)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\rho c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c}Q(x,t)}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 u}$$ steady state : $\nabla^2 u = Q$

2D, 3D, ND Heat equation:



controle volume

$\vec{q} = -\vec{\nabla}\vec{u}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho c\, u(\vec{x},t)\,dV = \underbrace{-\oiint_S \vec{q}(\vec{x},t)\,dS}_{\text{gauss}} + \iiint_V Q(\vec{x},t)\,dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho c\, u(\vec{x},t)\,dV = -\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{q}(x,t)\,dV + \iiint Q(\vec{x},t)\,dV$$

$$\iiint_V \Big[\rho c\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{q}}_{-\vec{\nabla}^2 q} - Q\Big]\,dV = 0$$

tant que $\vec{u}(x,t)$ est smooth en temps et espace

$$\boxed{\rho c\frac{\partial u}{\partial t} = K\nabla^2 u + Q}$$

On a fait l'Θ ici que le seul flux est un flux conductif. (= pas d'écoulement)
Si présence d'un écoulement à travers le volume de contrôle, il faut le prendre en compte dans le bilan des flux. $\Rightarrow$ Énergie equation of N.S equations

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\qquad e^{i\pi} = -1$

Analyse complexe

$z = x + iy$

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!}$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!}$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right)}_{\cos(\theta)} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)}_{\sin(\theta)}$$

De Moivre's : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n$

$$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}$$

Diagonalisation d'une matrice

. Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \Delta$, Δ diagonale

. Une vecteur propre $V \neq 0$, de valeur propre λ si $AV = \lambda V$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

~~$\det(A - \lambda I_n) = 0$~~

. Calcul du polynôme caractéristique : $\boxed{P_A(x) = \det(A - xI)}$

$$P_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 2^2 = \underbrace{x^2 - 2x}_{tr(A)} \underbrace{- 3}_{\det(A)}$$

. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4\times 3 = 16$$

$\boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = 1 - 2 = -1}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1 + 2 = 3}$$

La forme diagonale de A est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \Delta$

. Recherche des vecteurs propres : $AX = \lambda X$

Un vecteur propre X associé à la valeur propre λ est une solution non nulle de $(A - \lambda I)X = 0$

→ Vecteur propre associé à la valeur propre -1 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$$

On peut prendre $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

→ Vecteur propre associé à la valeur propre 3 :

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - y = 0$$

On peut prendre $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage $P = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \Delta \text{ , diagonalisation de } A$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La <u>somme</u> des valeurs propres vaut <u>$tr(A)$</u>
- Le <u>produit</u> des valeurs propres vaut <u>$\det(A)$</u>