Simulations aux grandes échelles compressibles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u_i}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial \rho E}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho E + p) u_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} u_i - q_j) \end{cases}$$

$$q_j = -K \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

τ_{ij} est le tenseur des efforts visqueux. Pour les fluides newtoniens, τ_{ij} est aligné avec le tenseur des déformations $\boxed{S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$

S_{ij} peut se décomposer :

Tenseur des ~~contraintes~~ déformations

$$\boxed{S_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij}}_{S_{ij}^{I}} + \underbrace{\left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij}\right)}_{S_{ij}^{D}}}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le tenseur des efforts visqueux τ_{ij} s'écrit comme une combinaison des parties isotropes et déviatoriques du tenseur des contraintes mécaniques :

$$\boxed{\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}^{D} + 2\mu_b S_{ij}^{I}}$$

viscosité dynamique

"bulk" viscosity

(H) $\Rightarrow$ **Hypothèse de Stokes :** La viscosité de volume μ_b est négligeable devant μ.

Ainsi :

$$\boxed{\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}^{D} = 2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij}\right)}$$

$$= \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} S_{kk} \delta_{ij}\right)$$

Rappel : $\tau_{ij} = 2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{kk} S_{ij}\right)$ après (H) de Stockes $p\ell = 0$

~~Modèle de Smagorinski~~

~~[illegible]~~

Avant-propos : Le filtrage des équations de N.S fait apparaître un terme à fermer.

Garnier, p.64 : Plusieurs régimes existent pour une THI compressible :

$M_t = \frac{\sqrt{k}}{c} = \frac{\sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{c}$

- Low-Mach, quasi-isentropique régime : Mach turbulent est faible, le mode dilatationnel est limité au mode accoustique (linéaire). Peu d'interactions entre le champ solénoïdal et dilatationnel.

- Régime subsonique linéaire : $M_t < 1$, mais les fluctuations du mode dilatationnel de Kovasznay sont suffisantes pour générer des phénomènes non-linéaires. Des 'shocklets' ou "eddy-shocklets" peuvent ê detectés. Ils sont générés par de la vorticité.

- Régime supersonique : $M_t > 1$ (Mach turbulent > 1)
  Le mode dilatationnel est très important. (refs 221-22)

Dans le régime quasi-isentropique, ($M_t < 0.4$) :
- Pas de feedback de l'accoustique sur la vorticité. La partie solénoïdale évolue de façon incompressible.
- Couplage 1-way entre la vorticité et l'accoustique. La génération d'accoustique est un tranfert de l'energie des modes de vorticité vers les modes accoustiques.
Ces transferts doivent être relativement faibles pour rester dans un monde turbulent incompressible.

$\underset{\text{dilat°}}{k_d} / \underset{\text{solénoïdale}}{k_s} \sim M_t^4$ $\qquad$ $\varepsilon_d / \varepsilon_s \sim M_t \frac{\ln(Re)}{Re}$

Voir commentaire Garnier p. 76 sur Sys Kovasznay modes.
regarder Kovasznay modes quand il s'agit de la tension de surface.

p. 75

⇒ La modélisation de sous-maille adresse séparément ces 3 régimes.

- Dans le régime quasi-isentropique, l'énergie cinétique turbulente correspond à celle du champ solénoïdal.

- Dans le régime subsonique linéaire, les "shocklets" comptent pour 20% de la dissipation dilatationnelle $\mathcal{E}_d$. Cependant, $\mathcal{E}_d$ reste faible devant la dissipation solénoïdale $\mathcal{E}_s$. (Même à $M_t = 0{,}6$). Ainsi, on peut négliger ces effets dans la modélisation de sous-maille.

2% du volume, mais 20% de la dilatation dilatationnelle $\mathcal{E}_d$ $\mathcal{E}$

- Régime supersonique : le régime inertiel ~~visuel~~ n'existe plus !
Les transferts d'énergie entre les échelles sont principalement dus aux interactions non linéaires acoustiques.
La dynamique devient plus proche de celle générée par les équations de Burger que de Navier-Stokes.

Les modèles de sous maille ferment le système de Navier-Stokes filtré.
Le système de Kovasznay montre que les termes de sous-maille vont impacter les 3 modes (vorticité, dilatation, entropy).

pour qdm.

Les modèles de sous-maille construits pour des conditions incompressibles (environ tous les modèles...) visent à prédire la bonne décroissance de l'énergie cinétique turbulente.
Or, dans le cas compressible, le modèle SGS doit aussi prédire la bonne contribution accoustique

pour E. q

De la même façon, en considérant l'équation d'énergie, le modèle SGS doit prédire que la production/destruction de sous-maille de l'énergie résolue et accoustique résolue soit correcte.

Cette multiphysique a été ignorée dans quasi-tous les travaux compressibles. Les applications aéroaccoustique existantes ont des termes de production de bruit SGS bien inférieurs aux termes accoustiques liés aux échelles résolues.

$\boxed{\text{Modèles fonctionnels en régime quasi-isentropique (low-Mach)}}$

Les plus grandes échelles (vorticité) extraient de l'énergie cinétique à l'écoulement moyen. Les structures sont des régions de grandes déformation, des "pancake" qui se transforment en feuilles de vorticité. Les feuilles sont instables, deviennent des tubes de vorticité, qui s'étirent, produisent des structures en filaments. ⇒ Transfert de l'énergie (cinétique) des grandes structures vers les petites, jusqu'à ce que la viscosité moléculaire dissipe l'E cinétique en E interne

cf atomisation

Hypothèse de Boussinesq :

- Les transferts des grandes vers les petites échelles sont analogues aux mécanismes moléculaires (⇒ tu négliges $u\vec{\nabla}\vec{u}$ non linéaire qui a aussi un effet de redistribution de l'énergie).

⇒ SGS scales analogues à 1 mouvement Brownien, superposé aux grandes échelles.

$$\boxed{\tau^{D}_{ij_{SGS}} = \tau_{ij_{SGS}} - \frac{1}{3}\tau_{kk_{SGS}}\delta_{ij} = 2\,\nu_{SGS}\left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{S}_{kk}\delta_{ij}\right)}$$

$$\nu_{SGS} \# \frac{L^2}{t}$$

Hypothèse de séparation d'échelles :

Il existe une séparation d'échelles totale entre les échelles résolues et sous-maille.
Cette séparation d'échelles n'est pas vraie en pratique après filtrage LES. Les viscosités de sous-maille et moléculaire sont de nature différentes.
Ainsi, la viscosité de sous maille est une quantité caractéristique de l'écoulement, et pas du fluide.
Notons que les modèles basés sur une viscosité dynamique induisent un alignement non physique des vecteurs propres du tenseur des déformations résolu (S_{ij}) et SGS ($S_{ij_{SGS}}$)

Garnier 2009 p.82

<u>Hypothèse d'équilibre local:</u> L'écoulement est en constant équilibre spectral, il n'y a pas d'accumulation d'énergie à aucune fréquence, et la forme du spectre d'énergie reste constant avec le temps.

⇒ Ajustement instantanné de toutes les échelles à l'équilibre production/dissipation d'énergie cinétique turbulente.

• <u>Modèle de Smagorinski</u>

$$\boxed{\nu_{sgs} = C_s^2 \Delta^2 |\tilde{S}|} \quad |\tilde{S}| = \sqrt{2 \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}}$$

$C_s = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3K}{2}\right)^{-3/4} \simeq 0{,}18$, avec $K = 1{,}4$, constante de Kolmogorov.

• <u>Modèle de fonction de structure</u> (Métais, Lesieur, JFM 1992)

L'idée est d'évaluer l'énergie à l'échelle de coupure $E(k_c)$, à l'aide de la <u>fonction de structure d'ordre 2</u> de la vitesse. (<u>Rappel</u>: la fonction de structure d'ordre 2 S_2 donne accès à une énergie cinétique par unité de masse pour les tourbillons d'échelle r).

$$F_2(x, r, t) = \iiint_{r=\Delta} \left(u(x,t) - u(x+x', t)\right)^2 dV$$

Lorsque $r = \Delta$, le modèle prend la forme simplifiée:

$$\boxed{\nu_{sgs}(x, \Delta, t) = 0{,}105\, K^{-3/2} \Delta \sqrt{F_2(x, \Delta, t)}}$$

Modèle local en espace, mais non-local en fréquences, ⇒ mauvaise estimation de l'énergie cinétique à l'échelle de coupure, perte de précision du modèle pour traiter l'intermittence des grandes échelles.

Mixed scale model (Sagaut and Ta (Sagaut PhD, 1995))

Notons que les modèles basés sur les grandes échelles (Smagorinski par ex...) ne disparaissent pas dans les régions où toute la dynamique est résolue. Notons aussi qu'un indicateur d'une simulation sous-résolue est l'accumulation d'énergie cinétique proche de la coupure (dans l'espace spectral).
Sagaut propose de s'intéresser à la TKE à la coupure, pour détecter si SGS modeling est nécessaire. ν_{SGS} est écrit comme une combinaison non linéaire du 2nd invariant $|\tilde{S}|$, de Δ, et de l'énergie cinétique de la plus petite échelle résolue.

$$\boxed{\nu_{SGS} = C_m |\tilde{S}|^{\alpha} \left(q_c^2\right)^{\frac{(1-\alpha)}{2}} \Delta^{(1+\alpha)}}$$

avec

$$\boxed{q_c^2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_i'(x,t)\,\tilde{u}_i'(x,t)\right)}$$

, où $\tilde{u}'$ est filtré à l'aide d'un test filter $\hat{\Delta} > \Delta$. $\tilde{u}'$ est ainsi la fluctuation du champ résolu.

$$(\tilde{u})' = \tilde{u} - \hat{\tilde{u}}$$

$$\boxed{q_c^2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{u} - \hat{\tilde{u}}\right)^2}$$

$\alpha = 0{,}5$

$C_m = 0{,}06$

Mitre du KR : $\varepsilon_P = \frac{1}{4/3\,\pi l^3} \int_{|r|<l} \varepsilon(x+r)\, dr$

et $\frac{\delta v(l)}{\varepsilon_P^{1/3}\, l^{1/3}} = d_c$

q_c^2

Modélisation de la partie isotrope du tenseur τ_{kk}

Yoshizawa (PoF 1986) propose : $\boxed{\tau_{kk} = 2 C_I \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}|^2}$

Modèle dérivé par l'approximation des interactions directes, pour les écoulements cisaillés. Expansion asymptotique autour d'un écoulement incompressible.

Erlebacher (NASA, ICASE report, 1987) a fait des DNS, $0,1 < M < 0,6$. Montre que $C_I = 0,0066$ (peu dépendant du Mach).

Zhang (PoF 1992) ont regardé l'effet de C_I, à Mach 0,1. Ont fait varié C_I de 0,0066 à 0,066, n'ont vu aucun impact sur les résultats. Au delà, observent une surestimation de la décroissance de l'énergie compressible (accoustique), sans impacter la décroissance de l'E incompressible (vorticité).

Speziale et al. (PoF 1988) ont montré que ce modèle corrèle mal avec le tenseur isotrope réel de sous-maille. Ils proposent d'ajouter un modèle pour le tenseur de Léonard, et les termes croisés. Franche amélioration de résultats. Ils ont ensuite proposé de négliger τ_{kk} (Erlebacher, ICASE report 1987), expliquant que ce terme est faible devant la pression thermodynamique.

Notons que τ_{kk} s'exprime dans des régions de forte compression/dilatation, où le schéma numérique introduit une dissipation numérique importante, qui masque potentiellement les effets du modèle.

Moin et al. (PoF 1991) proposent une approche dynamique :

$$C_I = \frac{\langle \mathcal{L}_{kk} \rangle}{2 \hat{\bar{\rho}} \hat{\Delta}^2 |\hat{\tilde{S}}|^2 - 2 \Delta^2 \widehat{\left(\bar{\rho} |\tilde{S}|^2\right)}}$$

avec $\langle \mathcal{L}_{kk} \rangle = \left\langle \widehat{\bar{\rho} \tilde{v}_k \tilde{v}_k} - \frac{1}{\hat{\bar{\rho}}} \widehat{\bar{\rho} \tilde{v}_k} \widehat{\bar{\rho} \tilde{v}_k} \right\rangle$