Chassaing 2002

Turbulence compressible

Kovasznay : "accoustique" : ⇒ "pressure-induced" density fluctuations
"Entropie" ⇒ "temperature-induced" density fluctuations.

Gluerre et al, 1996 : transition à la turbulence peut être fortement impactée par les variations de masse volumique.
(EUROMECH, sympo Marseille)

Pour une couche de mélange : Eq d'évolution de l'énergie cinétique

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{d\langle e\rangle}{dt} = \sigma\langle e\rangle + \ell\langle e\rangle^2}$$

σ : amplification temporelle linéaire.

ℓ : coefficient de Landau

. Cas isotherme : dynamique à long terme donne lieu à une bifurcation supercritique lorsque le nombre d'onde amplifié passe par sa valeur neutre ($\ell<0$)

. Cas non-isotherme : bifurcation sous-critique ($\ell>0$) dès lors que la différence de température est suffisante ($T_c - T_\infty = -98$)

suite p.14 : pour couches de mélange, et jets, Ritc peut devenir important même à faible Mach. Différence entre moyenne de Favre et de Reynolds devient importante.

Pour un jet libre : ~~Un jet libre sans différence de masse volumique est très sensible à des perturbations de faible amplitude, et des régions d'instabilité absolue se forment proche injecteur.~~

p.16 Chassaing 2002

. Le jet libre, pour lequel la masse volumique est plus faible que l'environnement ambiant, est absolument instable.
La variation de masse volumique pilote alors directement le/les mode(s) d'oscillation global(aux)

2.3 : Effets de density, compressibilité en turbulence homogène

$\nu = \frac{d}{t}$

Le jet libre, sans différence de masse volumique, est convectivement instable.

$I_\rho = \frac{\sqrt{\overline{\rho'^2}}}{\rho_0}$; turbulence density intensity

$\frac{L_0 \sqrt{g L_0 I_\rho}}{\nu}$; Pseudo Reynolds number

2.3.2 . Turbulence homogène et flottabilité

Considère une accélération constante (gravitation). Une inhomogénéité de masse volumique joue le rôle de terme source d'É potentielle, convertie en É cinétique pour un fluide en mouvement. Du mélange se développe alors, les gradients de masse volumique ~~[illegible]~~ sont réduits, et ρ tend à s'homogénéiser.

L'augmentation du density ratio initial en THI tend à réduire la production d'énergie cinétique. Ceci est lié au fait qu'une part de l'É potentielle disponible n'est en fait pas convertie en TKE, mais en flux turbulent de masse.

2.3.3 . Turbulence isotrope compressible (comprimée)

Turbulence isotrope, dans un volume initial L_0^3, sujet à un taux de déformation :

$$\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & S_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & S_3(t) \end{pmatrix}$$

avec $S_\alpha(t) = \frac{V}{X_\alpha(t)}$, où V est la vitesse de compression, et $X_\alpha(t)$ est la longueur de la boîte.

Compression isotrope : $S_1 = S_2 = S_3(t) = S(t)$. Conservation de la masse (moyenne) :

$$\langle\rho\rangle(t) \cdot X^3(t) = \rho_0 L_0^3$$

Compression adiabatique, et gaz parfait :

$$\frac{\langle T\rangle(t)}{T_0} = \left(\frac{\langle\rho\rangle(t)}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad \langle P\rangle(t) = \langle\rho\rangle R \langle T\rangle(t).$$

Considérons boîte de THI, soumise à une compression isotrope. Soit σ le paramètre de déformation $\sigma = e^{\int_0^t S(t)\,dt}$

$\langle k\rangle = \frac{1}{2}\langle u_i' u_i'\rangle$

$t = \frac{d}{v}$

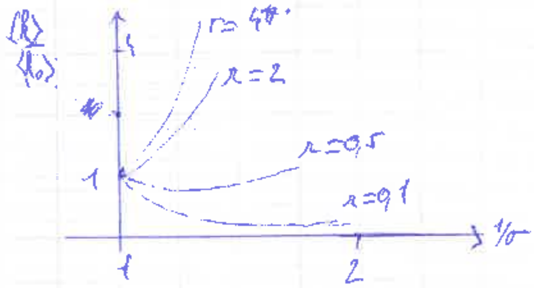
Reynolds number : $Re = \frac{q^4}{\varepsilon \nu}$ avec $q^2 = 2\langle k \rangle = \langle u_i' u_i' \rangle$ $\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle$

$S = \frac{V}{X}$

Considérons différentes valeurs de ratio entre les temps caractéristiques turbulents et de déformation moyen $r = \frac{|S| q^2}{\varepsilon} = \frac{|S| \langle u_i' u_i' \rangle}{\left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right\rangle}$

$r = 47$ (le + rapide) $\rightarrow$ $r = 0{,}1$ (lent)

Pour un moteur à combustion interne, $(r = 0{,}5 \rightarrow 0{,}05)$



$\sigma = e^{\int_0^t S(t')\,dt'}$

La compression isotrope agit à l'encontre de la décroissance (de la dissipation). Lorsque le taux de compression est suffisant, le champ turbulent est immédiatement affecté par la déformation moyenne.

Lorsque la ~~déformation~~ compression est faible $(r = 0{,}1)$, la TKE décroît, puis se stabilise

2.3.4 Turbulence homogène isotrope (THI) compressible.

En THI incompressible, la TKE évolue en spectre (vers les petits nombres d'onde) et en magnitude (réduit à 0 par dissipation visqueuse)

En THI compressible, les fluctuations de masse volumique et de pression influencent l'évolution temporelle de TKE. (Passot Pouquet, 1987 (DNS)). Cette évolution temporelle dépend de :

- M_t initial. (Mach number turbulent) $M_t = \frac{\sqrt{u_i' u_i'}}{\sqrt{\langle \gamma R T \rangle}}$
- ρ' (ou P') initial
- Le ratio d'énergie cinétique compressible sur l'énergie cinétique totale :

$$\boxed{\chi = \frac{\langle u_i'^{C} u_i'^{C} \rangle}{\langle u_i'^{C} u_i'^{C} \rangle + \langle u_i'^{I} u_i'^{I} \rangle}}$$

Le taux de décroissance de l'énergie cinétique turbulente augmente un peu avec le Mach turbulent M_t.

$P = \rho r T$

$M = \frac{u}{c} = \frac{u}{\sqrt{\gamma r T}}$

$M^2 = \frac{u^2}{\gamma r T}$

$$\boxed{P = \rho \frac{u^2}{\gamma M^2}}$$

Rôle des fluctuations thermodynamique P', ρ', T' sur la décroissance de la TKE. est plus difficile à analyser.

Sans considérer la conduction de chaleur, Sarkar et al (JFM 1991) montrent que la fluctuation de pression se décompose :

$$\begin{cases} P' = P'^{I} + P'^{C} \\ u' = u'^{I} + u'^{C} \end{cases}$$

Poisson equation (Elliptique)

Wave équation (Hyperbolique)

P'^{I} est de l'ordre de M^t

$$\boxed{\left\langle (P'^{C})^2 \right\rangle \simeq \chi \gamma^2 M_t^2} \quad (2.3)$$

Ainsi, si l'on néglige la conduction (faibles T' initial comparées à P' initiales) la fluctuation de pression P' dépend fortement de χ, pour tout M_t

Lorsque les fluctuations de température ne sont plus négligeables :

Sai et al. PoF 1997

$M_{t_0} \simeq 0.3$

$\chi_0 \simeq 0$

- Pour $\chi \ll 1$: Turbulence quasi-incompressible.
  - $T' = O(M_t)$ • $P' = O(M_t^2)$

Masse volumique et températures fluctuations anti-corrélées : $\left[\frac{\rho'}{\rho} = - \frac{T'}{T} \right]$

Pour $\chi \simeq 0{,}5$: équirépartition statistique de l'énergie entre les contributions de vorticité et de compression.

$M_{t_0} = 0.7$

$\chi_0 = 1$

Pour $\chi \simeq 1$: Turbulence accoustique, dominée par les modes de compression.

Corrélation masse volumique - pression : $\left[\frac{P'}{P} = \gamma \frac{\rho'}{\rho} \right]$

. Pas de corrélation ρ' / T'

ρ' et T' sont initialement anticorrélées, deviennent non corrélées après 2 temps de retournement.

p.27

2.35 Couches de mélange compressibles (Voir aussi Vadrot)

Le growth rate de l'énergie cinétique est réduit avec la compressibilité.
Blaisdell et al. (JFM 1987) l'expliquent par le taux de dissipation due à la ~~dissipation~~ dilatation $\boxed{\bar{\varepsilon}_d = \frac{4}{3}\bar{\mu}\frac{\overline{\theta'^2}}{\bar{\rho}}}$ ← θ'^2 et à la corrélation $p'\theta'$

avec $\boxed{\theta' = \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}}$ divergence du champ de vitesse fluctuante.

Le taux de dissipation de dilatation est introduit par Zeman, PoF 1990, pour la présence de eddy-shocklets.
Sarkar et al. (JFM 1991) introduisent un concept similaire, la dissipation compressible

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_s + \bar{\varepsilon}_d$$

$$\left[\underbrace{\bar{\varepsilon}_s = \bar{\rho}\bar{\epsilon}_s = \bar{\mu}\,\overline{\omega_k'\omega_k'}}_{\text{solénoïdale}}\right] \qquad \left[\underbrace{\bar{\varepsilon}_d = \bar{\rho}\bar{\epsilon}_d = \frac{4}{3}\bar{\mu}\,\overline{\theta'^2}}_{\text{dilatationnelle}}\right]$$

Sarkar (1992) : la covariance $\overline{p'\theta'}$ est plus importante que $\bar{\varepsilon}_d$ (dissipation dilat°)
Ristorcelli: montre que $\overline{p'\theta'}$ dépend du type d'écoulement.
JFM 1997

Dans une couche de mélange compressible homogène, le tenseur de Reynolds est anisotrope; avec une valeur plus ou moins constante de
$b_{12} = \frac{\widetilde{u''v''}}{2\tilde{k}}$, avec $u_i'' = u_i - \tilde{u}_i$ et $\tilde{k} = \frac{1}{2}\widetilde{u_i''u_i''} = \frac{1}{2}\frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{\bar{\rho}}$

2.36 Chocs/turbulence interactions

similarité à choc gorge.

Ribner (1953, 1954) étudie interaction d'un unique vortex avec un choc. Étude analytique du bruit émis. Introduit une analyse linéaire (Linear Interaction Analysis, LIA) en considérant séparément les ≠ modes de Kovasznay.
1st DNS par Lee, Lele, Moin (1990, 1991)

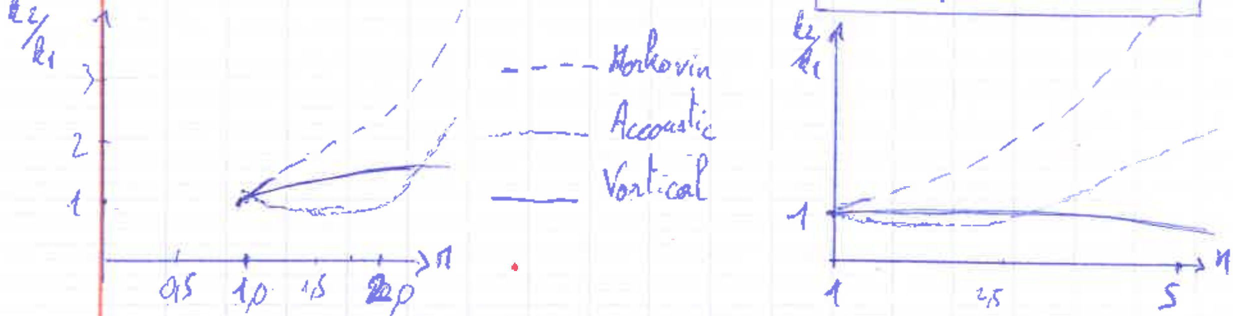
1st expés par S. Barre AIAA 1996

La TKE est fortement amplifiée au passage du choc. Lorsque n'importe quelle onde indép. de Kovasznay rencontre le choc, une triade des 3 modes est générée, dont l'amplitude dépend des valeurs amont, et d'une fonction de transfert.

Lorsque l'amplitude de TKE upstream est faible, régime linéaire, le choc n'est pas distordu. Interactions indépendantes des ≠ modes avec le choc. On peut en déduire les caractéristiques statistiques en aval du choc.

On considère 3 types d'ondes incidentes :

- solénoïdale : (vortical mode)
- accoustique : $\boxed{\frac{p'}{P} = \gamma \frac{\rho'}{\rho}}$ et $\boxed{\frac{\theta'}{T} = (\gamma-1)\frac{\rho'}{\rho}}$: fluctuations isentropiques.
- Combinée : Morkovin, Strong Reynolds Analogy : $\boxed{\frac{\theta'}{T} = -\frac{\rho'}{\rho} = -(\gamma-1)M^2\frac{u'}{u}}$



(⇒ besoin d'un modèle à la Yoshizawa pour liquide ? (Voir aussi Vadrot).)

Toutes les échelles caractéristiques de la turbulence (Taylor, échelles intégrales) décroissent derrière le choc, à l'exception de dissipation de Batchelor $\frac{\rho k^{3/2}}{\varepsilon}$, qui ↗ pour des chocs à $M<1,65$

Spectres d'énergie avant/après choc (voir p. 31). Le produit "vitesse × nbre d'onde" préserve l'invariance des fréquences avant/après choc. Ainsi, le spectre post-shock est réexprimé en fonction du spectre pré-shock.

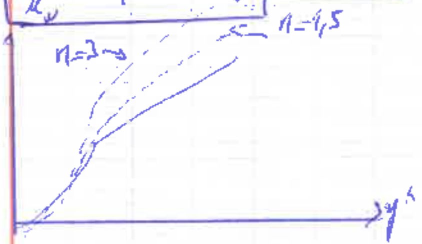
Les plus petites échelles sont plus amplifiées que les + grandes.

2.4 Effets de densité / compressibilité en turbulent shear layer

2.4.1 Compressible couches limite

$$\boxed{\frac{\bar{u}}{u_w} = \frac{1}{K}\ln y^+ + C} \quad (2.0) \qquad \text{avec } u_w = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}$$

$$y^+ = \frac{y\,u_w}{\nu}$$ → va varier à haut M.



sans VD transformation (sinon tu recolles la loi log)

A Mach élevé, la dissipation visqueuse ne peut plus ê négligée dans l'eqⁿ d'enthalpy. Des niveaux de dissipation élevés proche paroi se développent, menant des gradients de température élevés, responsables à leur tour de effets de faible masse volumique, et forte viscosité proche paroi.

Dissipation heating: $\frac{T_w}{T_\infty} = 1,9$ à $M = 2,2$ (Lele, CTR 1993)
$= 4,7$ à $M_\infty = 4,5$
$= 20$ à $M_\infty = 10$

La couche limite s'épaissit, ainsi que la région dominante de la contribution visqueuse dû au frottement.

La dépendance en T de la viscosité est prise en compte dans le scaling de la ss-couche visqueuse uniquement. Le scaling de la région pleinement turbulente dépend directement des effets de densité (ou température)

- En incompressible, on n'a qu'une seule échelle de temps : $\boxed{T = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1} \simeq \frac{y^+}{u_\tau}}$
- En compressible, 2 échelles de temps. $\boxed{\bullet\, T^\nu \simeq \frac{y^+}{u_\tau} \times \mu^*(T^*)}$

$$\boxed{\bullet\, T^t \simeq \frac{y^+}{u_\tau} \times \rho^*(T^*)}$$

	y^+	ss-couche visqueuse	région log
Incompressible	$\frac{y\,u_\tau}{\nu}$	$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1$	$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \cancel{\ldots} = \frac{1}{K y^+}$
Compressible	$\frac{y\,u_\tau}{\nu}$	$\frac{\mu}{\mu_w} \cdot \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1$	$\sqrt{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{K y^+}$

Van-Driest transformation : $\boxed{\overline{U}^{*} \text{ (ou } \overline{U}^{VD}) = \int_0^{\overline{u}} \sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}}\, dU}$ (2.7)

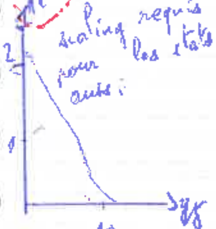
qui vérifie alors : $\boxed{\frac{\overline{U}^{VD}}{u_{\tau}} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B}$

$\sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}} \times \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\overline{u}}$

Pour compléter la transformation de VD (2.7), la masse volumique doit dépendre explicitement de la vitesse $\overline{u}$. On utilise généralement l'intégrale de Crocco pour retrouver cette dépendance :

$$\boxed{\frac{\rho_w}{\overline{\rho}} = \frac{\overline{T}}{T_w} = 1 + \left(\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)\frac{T_e}{T_w} - 1\right)\frac{\overline{u}}{U_e} - \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \frac{T_e}{T_w}\left(\frac{\overline{u}}{U_e}\right)^2}$$

(indice "e" pour "extérieur")



L'intensité de turbulence pariétale $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u_{\tau}}$, avec $u_{\tau} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}$, diminue lorsque le M_∞ augmente. (1,1 à $M_\infty = 4,7$ contre 1,8 en incompressible). Si cette intensité de turbulence pariétale est rescalée par $\sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}}$ $\left(\sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}} \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u_{\tau}}\right)$, résultats similaires en compressible et incompressible.

Idem pour le frottement turbulent $\frac{\overline{\rho}\,\overline{u'v'}}{\tau_w}$, et les corrélations $\frac{-\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}}$.

En supersonique !

Corrélations Vitesse-température : • Évidence expérimentale que les fluctuations de H_t peuvent ê négligées.

• Les fluctuations de températures sont principalement isobares pour $M_\infty < 5$, qui conforte Strong Reynolds Analogie. $\boxed{\frac{T'}{\overline{T}} = -(\gamma-1) M^2 \frac{u'}{\overline{u}}}$ (Vient de $H_{tot} = cte$)

(Morkovin)

cebeci/Smith p.70-72.

$\boxed{\frac{T'}{\overline{T}} = -\frac{\rho'}{\overline{\rho}}}$ (Linéarisation de l'éq° d'état $\frac{p'}{\overline{p}} = \frac{\rho'}{\overline{\rho}} + \frac{T'}{\overline{T}}$ + ⓗ isobare)

p.38

On en déduit : $\boxed{-\frac{\overline{T'u'}}{\overline{T}\,\overline{u}} = \frac{\overline{\rho' u'}}{\overline{\rho}\,\overline{u}} = (\gamma-1) M^2 \frac{\overline{u'^2}}{\overline{u}^2}}$ ⟵ difficile pour chambres (MATH) mais bon.

$$\boxed{-\frac{\overline{\rho' T'}}{\overline{\rho}\,\overline{T}} = \frac{\overline{\rho'^2}}{\overline{\rho}^2} = \frac{\overline{T'^2}}{\overline{T}^2} = (\gamma-1) M^4 \frac{\overline{u'^2}}{\overline{u}^2}}$$

Elena et Gaviglio (1993)

$$\boxed{-\frac{\overline{T'u'}}{\sqrt{\overline{T'^2}}\sqrt{\overline{u'^2}}} = 1}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\overline{T'^2}}}{\overline{T}} = A\left(\frac{y}{\delta}\right) \times (\gamma-1) M^2 \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u}}$$ (expected : $A = 1$)

• En couche limite : "mean-density" effects (Van-Driest permet de retrouver loi log et les fluctuations)

• En couche de mélange "compressibility"

~~Dans~~ En présence de forts gradients de température et de vitesse, ⇒ génération de u' et de T' élevés, ainsi que gradient de masse volumique transverse $\frac{\partial \rho}{\partial y}$.
Les niveaux d'intermittence diminuent lorsque le Mach augmente.

2.4.2 : Couches de mélange et jets

En incompressible { Si U_c est la vitesse de convection, $T_c \sim \frac{x}{U_c}$ tps convectif, $T_d \sim \frac{\delta}{\Delta U}$ temps diffusif avec δ échelle de diffusion (spreading).
Équilibre des temps convectifs et diffusifs : $\boxed{\frac{\delta}{x} = \underbrace{\beta}_{cte} \frac{\Delta U}{U_c}}$

Le taux de spreading directement lié à U_c et ΔU.

En compressible : $\boxed{\frac{\delta}{x} = \beta(s \text{ et/ou } M) \frac{\Delta U}{U_c}}$: β n'est plus constant, dépend de $s = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ et/ou de M.

- High-speed situations (Couches de mélange) | δ diminue lorsque $M \nearrow$
  $\delta \searrow$ lorsque $s = \frac{\rho_2}{\rho_1} \nearrow$, à M fixé (Sarkar, Pantano 2000)
- Low speed situations (jets) | • jet + lourd que l'ambiant : $\delta \searrow$ par rapport à $\rho = cte$

2.4.3 : Couches de mélange.

• Expansion de l'écoulement moyen : "Low speed" : étude par Brown et Roshko (JFM 1974). Papamoschou/Roshko, JFM 1988. Considèrent $\boxed{s = \frac{\rho_2}{\rho_1}}$ et $\boxed{r = \frac{U_2}{U_1}}$ comme paramètres. Montrent que :

$$\boxed{\frac{d\delta_{inc}}{dx} = C_\delta \frac{(1-r)(1+\sqrt{s})}{1+r\sqrt{s}}}$$

"inc" ~~ou~~ : "low-speed"

Des effets de Mach sont montrés plus tard (Sirieix, Solignac, 1968).
$\delta(x) \searrow$ lorsque $M \nearrow$ comparé à la situation incompressible aux mêmes ΔU et $s = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

High speed

Bogdanoff (AIAA 1983) introduit alors la notion de Mach convectif : $\boxed{M_c = \frac{U_i - U_c}{a_i}}$

Si on assume $\gamma_1 = \gamma_2$, : $\boxed{U_c = U_1 \frac{1 + r\sqrt{s}}{1+\sqrt{s}} = \frac{a_2 U_1 + a_1 U_2}{a_1 + a_2}}$

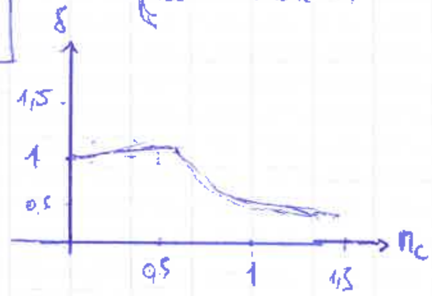
Ainsi : $\boxed{M_c = \frac{U_1 - U_2}{a_1 + a_2}}$

Papamoschou 1988, Bogdanoff 1983, Barre 1994 montrent que c'est le paramètre pertinent pour caractériser le taux d'expansion

$$\boxed{\frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_{inc}} = f(M_c)}$$

(Mach Peden ?)

Courbe de Langley :



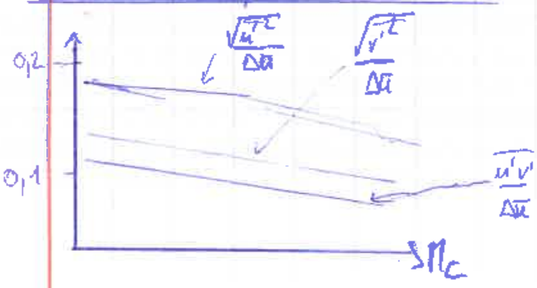
Sarkar (JFM 1995), Vreman (JFM 1996) montrent que le terme de production d'$\mathcal{E}_c$ a aussi un rôle important. Les effets de compressibilité purs (divergence non nulle) réduisent le terme de production d'$\mathcal{E}_c$ de la couche de mélange, comparé au cas solénoïdal pur. En conséquence, le mélange turbulent est réduit.

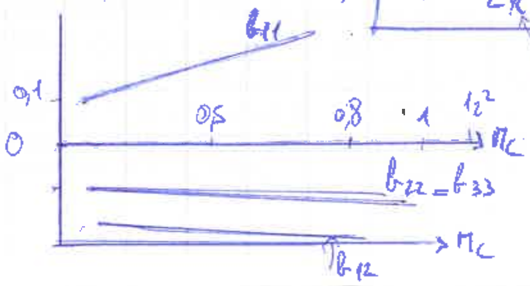
La réduction du terme de production pourrait être lié au terme "pressure-strain". (Vreman, JFM 1996).

Gambon et Simone 1997 montrent que ce terme de production d'$\mathcal{E}_c$ reflète mal d'autres effets compressibles, comme la structure du champ de pression, ou l'anisotropie du champ de vitesse.

Enfin, Sarkar et Pantano (Banyuls 2000) montrent que $\boxed{s = \frac{\rho_2}{\rho_1}}$ doit être considéré en plus de M_c, pour caractériser $\delta(x)$. Ainsi, à $M_c = 0{,}7$ fixé, $\delta(x)$ 3 fois plus petit lorsque $s = 8$ au lieu de $s = 1$.

Caractéristiques turbulentes Tenseur de Reynolds (compressible) : $\boxed{b_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2\bar{k}} - \frac{1}{3}\delta_{ij}}$ $\bar{k} = \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$

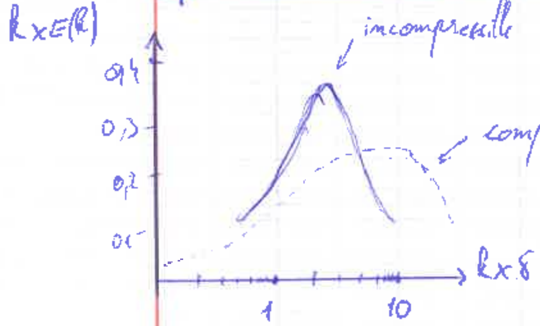




p. 44

- Les niveaux max de turbulence décroissent lorsque $M_c \nearrow$ (40% de réduction à $M_c = 0,3$)
- La réduction des termes diagonaux augmentent l'anisotropie de la contrainte normale. (5 fois plus à $M_c = 1,2$ qu'en incompressible).

Spectres de turbulence en couche de mélange compressible :



← Spectre normalisé par k ($k \times E(k)$) pour illustrer la région de production d'E_c, où $E(k) \sim k^{-1}$

↖ Debiève, 1997. Les résultats dépendent du Mach convectif considéré

III Modèles pour écoulements compressibles (Pression, Helmholtz décompo, Kovasznay)

3.2 : Le rôle de la pression en turbulence compressible

3.2.1 : Pression en incompressible : équation de Poisson

Considérons tout d'abord un écl^t incompressible ($\rho = \rho_0 = cste$), isovolume $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\right)$

Conservation de qdm s'écrit :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho_0 F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (*)$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{div}$

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - F_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

$$\boxed{-\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho_0 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}}$$

Équation de Poisson, dont les termes sources sont l'advection, les forces volumiques et les efforts visqueux.

t_c $\qquad V = \frac{d}{t}$

3.2.2 : Pression en écoulement compressible : L'équation d'onde généralisée :

Compressible : génération de son, qui se propage à une vitesse finie ($\neq$ incomp).

Continuité : $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

Qdm : $\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$

Energy : $\frac{1}{c_p}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\gamma P}\frac{dP}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$ $\qquad (P = \rho RT)$

$T\delta S = c_v \delta T + P\delta V$

$\delta u = c_v \delta T$

Pose $\boxed{a^2 = \gamma P/\rho}$

1) : Prenons la divergence de l'éq° de Qdm :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)$$

Soit encore :

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{a^2}{\gamma P}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)\right] \quad (1)$$

2) : Combinons l'éq° d'énergie, et de continuité :

$$\frac{1}{c_p}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\gamma P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Soit encore :

$$\left[\frac{1}{\gamma P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{c_p}\frac{ds}{dt} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] \quad (2)$$

$\rightarrow$ material derivative / dérivons par ~~rapport au temps~~ : $\left[\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_p}\frac{ds}{dt} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right]$

Sommons (2)' et (1) : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{a^2}{P}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) = \gamma\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right) + \gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_p}\frac{ds}{dt} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$

Rappel :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)=\gamma\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)+\gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_p}\frac{ds}{dt}-\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$$

Linéarisons : $p' = P - P_0$

$$\boxed{\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d^2 p'}{dt^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}a^2\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)=\gamma\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)+\gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_p}\frac{ds}{dt}-\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)}$$

Équation d'onde généralisée.

Le RHS contient les termes source de bruit (transport, body forces, forces visqueuses, entropie, dilatation.
Ces termes sont généralement des fonctions implicites de la pression.
Ainsi, on introduit des hypothèses supplémentaires pour les découpler du champ de pression rayonnée.

3.2.3. Analogie acoustique de Lighthill (1952, 1953)

Identifie la turbulence comme une source de bruit.
Analogie entre une phénomène acoustique dans un milieu au repos, et la radiation aérodynamique dans un écoulement turbulent en mouvement.

Continuité : • $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=0$

Momentum : • $\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$

Dérivée temporelle de continuité − divergence de momentum équation :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_j \partial x_i}=\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}-\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_j \partial x_i}\right]$$

Considérons une vitesse a constante : $a^2 = \frac{P}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{P}{a^2}$

Peut se réécrire formellement :

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho - \frac{P}{a^2}\right) + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_j \partial x_i}} \quad (3.5)$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 (P - \rho a^2)}{\partial x_i \partial x_i} - a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}} \quad (3.6)$$

Les approximations de Lighthill pour les écoulements à faible nombre de Mach sont :

$p' = P - P_0$ et $\rho' = \rho - \rho_0$ reliés par : $\boxed{p' = \rho' a^2}$

. On néglige les gradients de masse volumique et température, de telle sorte que :

$\rho \simeq \rho_0$ dans le RHS des équations.

Ainsi ; (3.5) et (3.6) se réécrivent :

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 (\rho u_i u_j - \tau_{ij})}{\partial x_i \partial x_j}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 (\rho_0 u_i u_j - \tau_{ij})}{\partial x_i \partial x_j}}$$

Équations similaires aux équations d'ondes inhomogènes pour ρ' et P' dans un milieu au repos. Ce qui amène à l'analogie de Lighthill :

« Les fluctuations p' et ρ' dans un écoulement bas Mach peuvent être identifiées par les p' et ρ' qui ont lieu dans un ~~écoulement~~ milieu uniforme acoustique au repos, produites par les termes source : $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$ ».

avec $\boxed{T_{ij} = \rho_0 u_i u_j - \tau_{ij} \simeq \rho_0 u_i u_j}$ du fait qu'on soit bas-Mach. (Saufer Agard

3.3.1: Décomposition du champ de vitesse (de Helmholtz) (Batchelor, p. 87)

Le champ de vitesse $\vec{u}$, de dilatation $\theta = \vec{\nabla}.\vec{u}$, et de rotationnel $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ se décompose selon :

$$\vec{u} = \vec{u}^{I} + \vec{u}^{c} + \vec{V}$$

avec $\vec{V}$ à la fois solenoidal et irrotationnel : $\text{div}\,\vec{V} = 0$ et $\text{Rot}\,\vec{V} = \vec{0}$ donné par les conditions limites. $\vec{V}$ est unique pour un domaine ouvert au repos.

u^{I} : contribution solénoïdale ou isovolume

$$\boxed{\text{div}(\vec{u}^{I}) = 0}$$

Peut être dérivée d'une fonction de courant $\vec{\Psi}$ (vecteur), selon

$$\boxed{\vec{u}^{I} = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}}$$

u^{c} : contribution compressible du champ de vitesse

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{u}^{c} = \vec{\text{rot}}(\vec{u}^{c}) = \vec{0}}$$

Dérive d'un potentiel (scalaire) ϕ, selon

$$\boxed{\vec{\nabla}(\phi) = \vec{\text{grad}}\,\phi = \vec{u}^{c}}$$

On parle ainsi aussi de contribution potentielle

Cette décomposition s'applique également au champ de fluctuations u_i'

$$u_i' = u_i'^{I} + u_i'^{c}$$

avec $\dfrac{\partial u_i'^{I}}{\partial x_i} = 0$ et $\varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial u_k'^{c}}{\partial x_j} = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3'}{\partial y} - \frac{\partial u_2'}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1'}{\partial z} - \frac{\partial u_3'}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2'}{\partial x} - \frac{\partial u_1'}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Cette décomposition nous permet d'écrire le taux de compressibilité de la TKE :

$$\boxed{\chi_c = \frac{\overline{u_i'^{c}\, u_i'^{c}}}{\overline{u_i'\, u_i'}}}$$

Cai et al (POF 98) montrent que χ_c peut également être utilisé en turbulence inhomogène, pour obtenir le ratio des flux scalaires dilatationnels sur les flux scalaires solénoïdaux :

$$\boxed{r = \frac{\overline{\rho u_i'^{c}\, y''}}{\overline{\rho u_i'^{I}\, y''}}}$$

$y'' = Y - \tilde{Y}$ ← Favre averaging de la fraction massique

$$r = \left(\frac{\chi_c}{1-\chi_c}\right) \times \left(\frac{\lambda^c}{\lambda^I}\right)$$

avec λ^c et λ^I les échelles temporelles intégrales Lagrangiennes associées aux contributions compressibles et solénoïdales.

3.2.2 : Décomposition du champ de pression

Le champ de pression peut se décomposer en une contribution "incompressible" Π ou "hydrodynamique", qui scale comme $\sim \rho U^2$, et une contribution "compressible" ou "thermodynamique" P, qui scale comme $P \sim \rho r T = \rho \frac{c^2}{\gamma}$

Pression hydrodynamique incompressible : $\boxed{\Pi = \rho U^2}$

Pression compressible thermodynamique : $\boxed{P = \rho r T = \rho \frac{c^2}{\gamma}}$

$$\boxed{\frac{\Pi}{P} = \gamma M^2}$$

- Considérons $\rho = \rho_0 = cte$ dans un champ solénoïdal. On obtient une pression P^I "incompressible", qui satisfait équation de Poisson.

- Une pression purement acoustique P^A se propage dans un milieu au repos, selon une équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 p^A}{\partial t^2} - \frac{\gamma p^A}{\rho^A}\frac{\partial^2 p^A}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p^A}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p^A}{\partial x^2} = 0$$

pseudo-pressure   acoustique

$$P = P^I + P^c$$

P^I dérive d'une équation de Poisson.

Rappels :
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

Éq° de Poisson :
$$\boxed{-\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}}$$

Prenons la divergence de l'Éq. de qdm; soustrait à $\frac{\partial}{\partial t}(1)$:
(Fait pour analogie de Lighthill) :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = \Delta P = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}} \quad (3.17)$$

Extension de Poisson, pour densité variable
(avec τ_{ij} viscous stress en densité variable)

Approximation adiabatique :

$$\boxed{\Delta P - \frac{1}{c_\infty^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}} \quad (3.18) \qquad \text{avec } c_\infty^2 = \frac{\gamma P_\infty}{\rho_\infty}$$

Assumons que par définition : $\Delta P^I = -\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$

On obtient, de (3.18), que la pression P^c compressible satisfait :

$$\boxed{\Delta P^c - \frac{1}{c_\infty^2}\frac{\partial^2 P^c}{\partial t^2} = \frac{1}{c_\infty^2}\frac{\partial^2 P^I}{\partial t^2}}$$

Lien P^c et P^I :

3.3.3 : Décomposition de pression en écoulement turbulent :

Décomposons : $u_i = \bar{u}_i + u_i'$, $P = \bar{P} + p'$; $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $\tau_{ij} = \overline{\tau_{ij}} + \tau_{ij}'$

La fluctuation de pression en écoulement turbulent s'écrit :

$$\Delta p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = -2\,\frac{\partial^2(\bar{\rho}\,\bar{U}_j u_i')}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2\left(\bar{\rho} u_i' u_j' - \bar{\rho}\,\overline{u_i' u_j'}\right)}{\partial x_i \partial x_j}$$

(dépend de $\bar{\rho}$) dominant en incompressible

$$+ \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}$$

ρ', dominant en low-Mach turb

$$- 2\,\frac{\partial^2\left(\rho' u_i' - \overline{\rho' u_i'}\right)\bar{U}_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2\left(\rho' u_i' u_j' - \overline{\rho' u_i' u_j'}\right)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \rho' \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \tau_{ij}'}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.22)$$

couplage avec ρ'

$$\boxed{\Rightarrow \bar{\rho} \text{ et } \rho' \text{ contribuent à } p'}$$

$$p' = p'^{F} + p'^{C}$$