

Géométrie et topologie des espaces fibrés

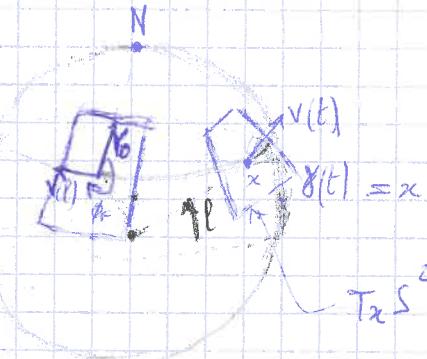
I Pendule de Foucault, transport parallèle

Mise en évidence rotation de la Terre, sans observer les étoiles.

Considérez forces de Coriolis, directions des oscillations tournent à vitesse constante.

Après 1 jour (23h 56') :

$$g_{\text{Foucault}} = -2\pi \sin \varphi \quad \varphi = \text{Latitude} = 48^\circ 52' \\ = -271^\circ = -3/4 \text{ tours}$$



1.2 Connexion de Levi-Civita

Soit la sphère $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

Trajectoire γ sur S^2 : $\gamma(t) \in S^2$

Plan tangent à S^2 . Si S est une surface plongée de \mathbb{R}^3 , $x \in S$, on note

$T_x S$ le plan tangent à S en x . ($T_x S \subset \mathbb{R}^3$)

E est le plan contenant tous les vecteurs tangents à S en x .

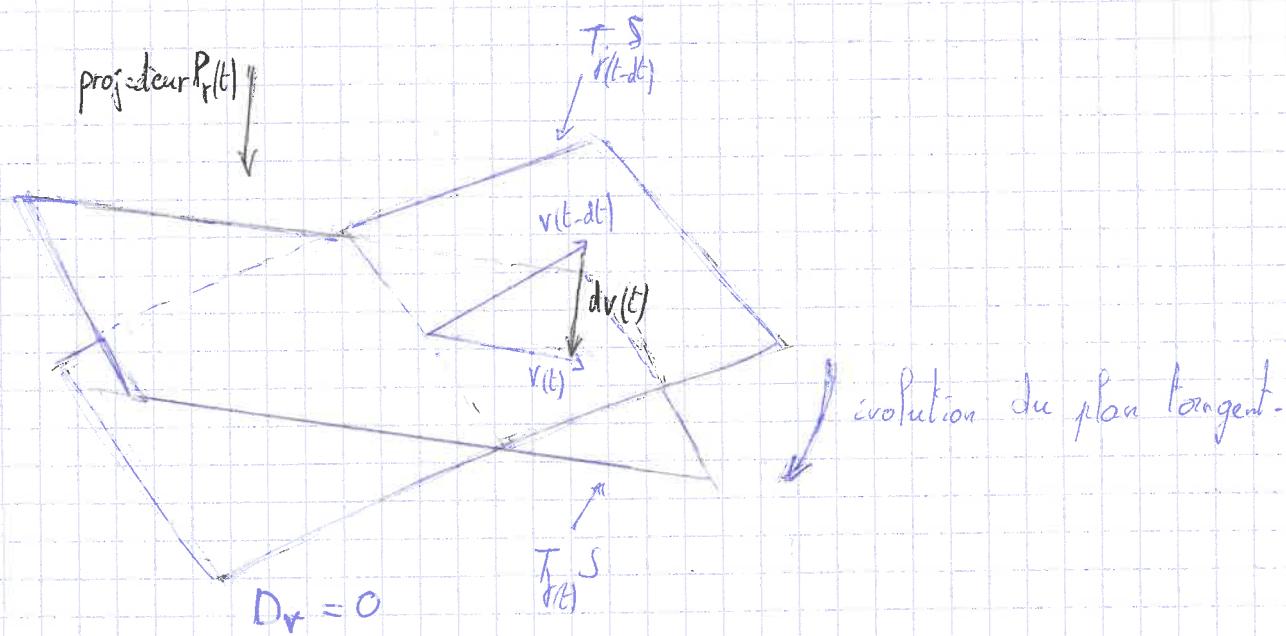
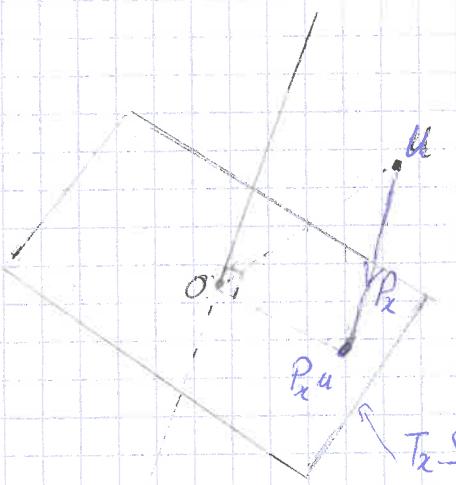
La direction $v(t)$ des petites oscillations est: $v(t) \in T_{\gamma(t)} S^2$

Principe d'incertitude voudrait obliger $v(t) \in \mathbb{R}^3$ à rester constant dans \mathbb{R}^3 (ic $\frac{dv}{dt} = 0$), mais l'attraction terrestre constraint $v(t)$ à rester dans le plan horizontal $T_{\gamma(t)} S^2$ à chaque instant.

On introduit le projecteur orthogonal sur le plan tangent:

$$P_x: \mathbb{R}^3 \rightarrow T_x S$$

Il y a un projecteur P_x pour chaque point $x \in S$



Proposition: Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée, une courbe paramétrée $\Gamma(t) \in S$, et en chaque point $\Gamma(t)$, un pendule avec de petites oscillations selon la direction $v(t) \in T_{\Gamma(t)} S$.

Alors dans la limite adiabatique (la fréquence d'oscillation est grande devant le paramétrage, i.e. la rotation de la Terre), la direction du pendule $v(t) \in T_{\Gamma(t)} S$ partant d'une direction initiale donnée $v(0) \in T_{\Gamma(0)} S$ est donnée par:

$$P_{\Gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

$t \in \mathbb{R}$. La composante horizontale de $\frac{dv}{dt}$ est nulle.

La composante horizontale de l'accélération est nulle, il n'y a pas de force tangentielle.

Définition Soit $S \in \mathbb{R}^3$ une surface, $\gamma(t)$ une chemin paramétré sur S .
 $v(t)$ une famille de vecteurs tangents en chaque point $\gamma(t)$.

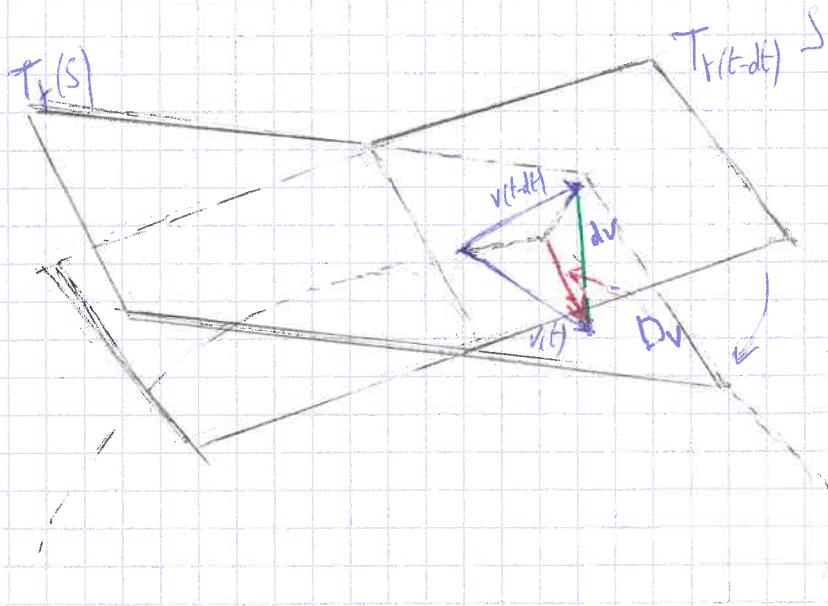
La dérivée covariante en $\gamma(t)$ de cette famille de vecteurs est :

$$\frac{Dv}{dt} = P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)} S$$

Composante tangentielle du vecteur $v(t)$.

Dérivée covariante, ou connexion de Levi-Civita. $v(t)$ suit la connexion de Levi-Civita, ou "suit le transport parallèle". Le long de γ , si la dérivée covariante est nulle:

$$\frac{Dv}{dt} = P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} = 0, \quad \forall t$$



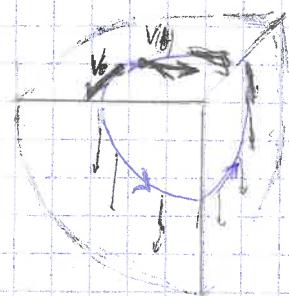
Dv: évolution temporelle de la composante tangentielle de la variation temporelle du vecteur

$v(t)$
dérivée covariante

Variation tangentielle du vecteur $v(t)$ au cours du temps.

La dérivée covariante est une notion intrinsèque à la surface (à la variété). Elle ne dépend que du champ de tenseur métrique $g(x)$, qui est le produit scalaire restreint à la surface.

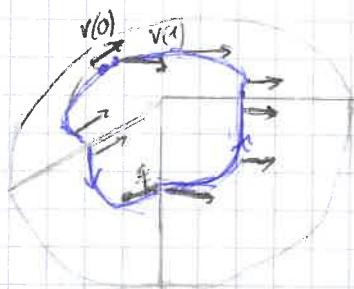
En relativité générale, tu n'as pas besoin de supposer que l'espace-temps soit inclus dans un espace euclidien plus grand.



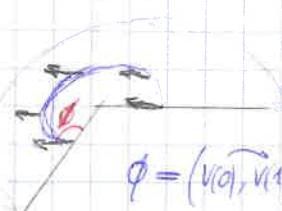
$$\phi = (\vec{v(0)}, \vec{v(1)}) = \frac{\pi}{2}$$

Hélioromie (découpage de la singularité)

Le vecteur $v(t)$ suit le transport parallèle (= la dérivée covariante est nulle)



$$\phi = (\vec{v(0)}, \vec{v(1)}) = -\frac{\pi}{2}$$



$$\phi = (\vec{v(0)}, \vec{v(1)}) = -2\pi \sin \rho$$

1.2.1) Dérivée covariante et métrique

Soient 2 vecteurs $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.

Produit scalaire :

$$\langle u|v \rangle_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

Norme carree : $\|u\|^2 = \langle u|u \rangle$

Métrique induite g sur S : Pour tout point $x \in S$, on note g_x le produit

scalaire sur l'espace tangent $T_x S$, défini par le

produit scalaire ambiant :

$$u, v \in T_x S, \quad g_x(u, v) := \langle u|v \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

g_x est la métrique sur S induite par le produit scalaire de l'espace ambiant \mathbb{R}^3 .

La fonction $g : S \rightarrow g_x$ s'appelle le champ de tenseur métrique sur S .

$$g_x(u, v) = \langle u|v \rangle_{g_x}$$

Théorème: Compatibilité dérivée covariante D et métrique g : (1.2.9)

Soient $v_t, w_t \in T_{f(t)} S$ deux familles de vecteurs sur $f(t)$, alors :

$$\frac{d}{dt} g_{f(t)}(v_t(t), w_t(t)) = g_{f(t)}\left(\frac{Dv_t(t)}{dt}, w_t(t)\right) + g_{f(t)}\left(v_t(t), \frac{Dw_t}{dt}\right)$$

Formule de Leibniz:

Soit $\gamma(t)$ un chemin paramétrisé, et $v(t) \in T_{\gamma(t)} S$ une famille de vecteurs le long de $\gamma(t)$. Soit $f(t)$ une fonction. Alors :

$$\frac{D}{dt} (f(t) v(t)) = \left(\frac{df(t)}{dt} \right) v(t) + f(t) \frac{Dv(t)}{dt}$$

1.3 Holonomie et courbure

Soit $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée fermée ($i.e. \gamma(0) = \gamma(1)$) et soit $t \mapsto v_t \in T_{\gamma(t)} S$, une famille de vecteurs tangents suivant le transport parallèle ($i.e. \frac{Dv_t}{dt} = 0$). Alors les vecteurs de fin et d'arrivée de départ

$v_0, v_1 \in T_{\gamma(0)} S = T_{\gamma(1)} S$ appartiennent au même plan tangent et ont la même longueur (d'après 1.2.1). Si vecteur v_1 se déduit donc de v_0 par une rotation d'un angle noté :

$$h(t) = \overrightarrow{(v_0, v_1)}$$

appelé holonomie du chemin fermé (défini modulo 2π)

Théorème (1.3.1). L'holonomie $h(t)$ est indépendante de la paramétrisation du chemin γ , du point initial x_0 , et du vecteur initial v_0 .
Elle ne dépend que de la géométrie du chemin.

13.2 Courbure de Gauß, formule de Gauß-Bonnet

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface. $x \in S$ un point. Si $L \subset T_x S$ est une droite passant par x , $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur normal à $T_x S$.

Le vecteur normal \vec{n} et la droite L engendrent un plan $P(L) = \text{Vect}(L, \vec{n})$, qui intersecte la surface S selon la courbe $C(L) := P(L) \cap S$.

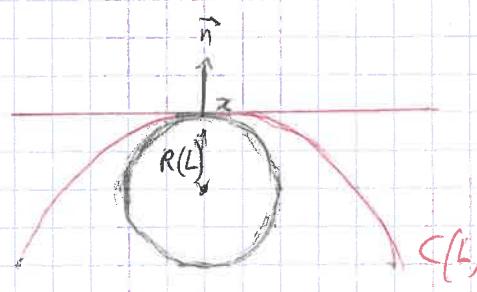
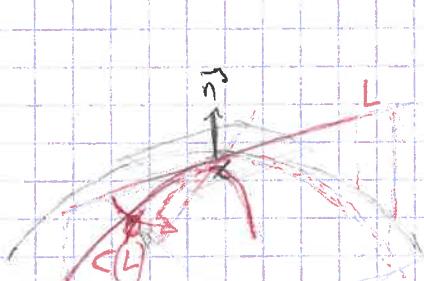
On note $R(L)$ le rayon de courbure de cette courbe au point x .

On note $R(L) = \frac{1}{k(L)}$, appelée courbure selon cette direction, de signe

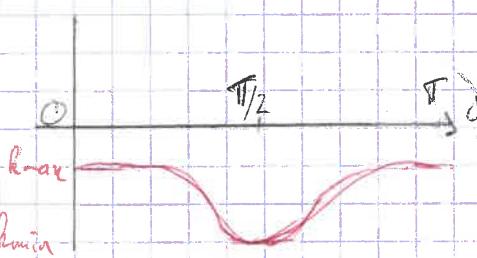
négatif si $C(L)$ est de l'autre côté de \vec{n} par rapport à $T_x S$.

La courbure de Gauß de S en x est: $R(x) = k_{\min} k_{\max}$

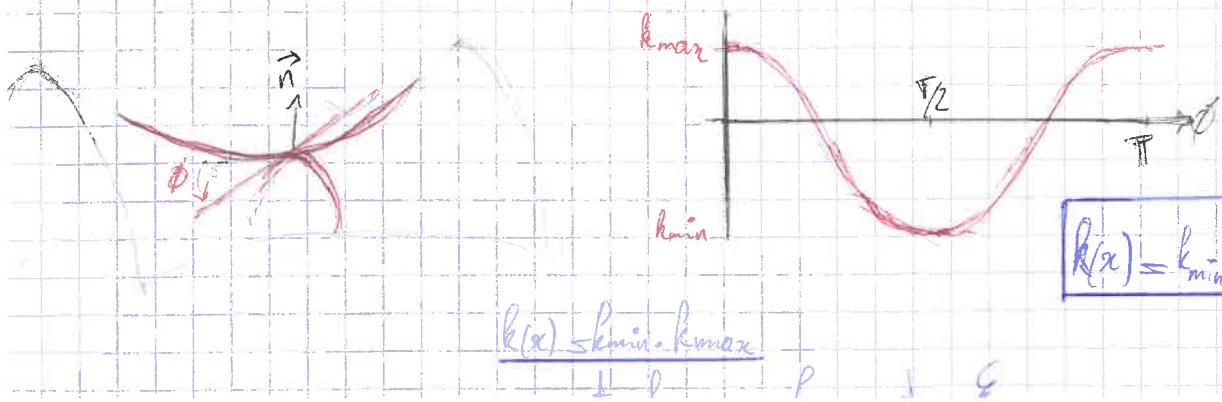
avec $k_{\min} = \min_L (k(L))$, $k_{\max} = \max_L (k(L))$.



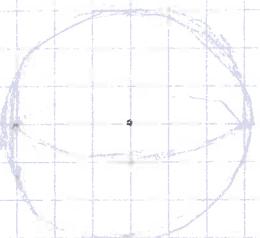
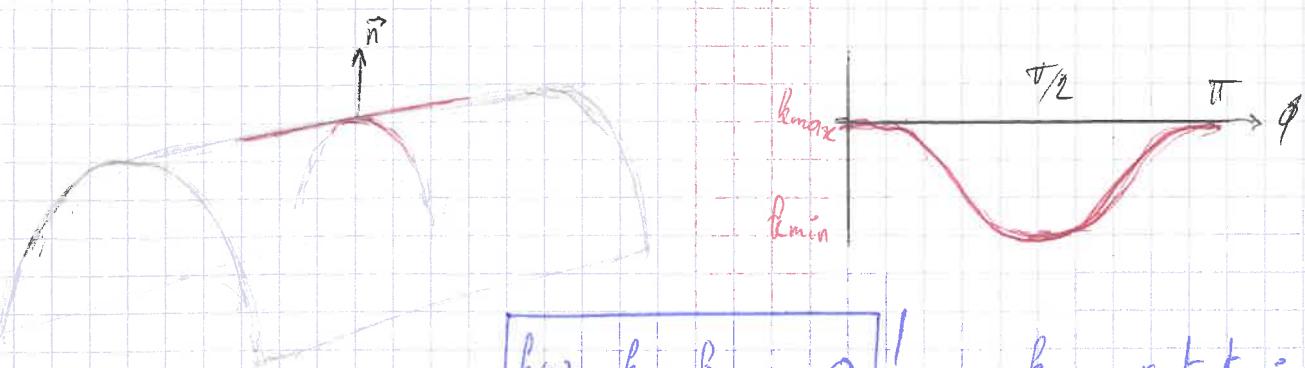
Courbure négative ($C(L)$ de l'autre côté de \vec{n})



$$R(x) = k_{\min} \cdot k_{\max} > 0$$



$$R(x) = k_{\min} \cdot k_{\max} < 0$$



Pour une sphère, $k(x) = c/R = \frac{1}{R^2}$

Formule de Gauß-Bonnet : locale : (Thm 1.3.8)

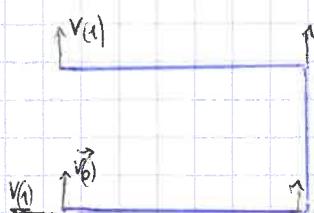
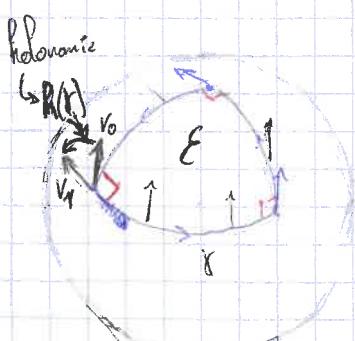
L'hélonomie h peut se mesurer à partir de la courbure de Gauss k .

Si $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée, $\Gamma \subset S$ un chemin fermé orienté qui borde un domaine E (cest à dire $\partial E = \Gamma$), alors :

$$h(\gamma) = \iint_{x \in E} k(x) d^2x \quad (1.3.1)$$

h_{holonomie} du
chemin fermé Γ .

courbure de Gauß de la surface S en x



(Mise à plat de la trajectoire)

Pour la sphère : $k = \frac{1}{R^2}$.

$R ds = \frac{d\alpha}{R^2} = d\Omega$ est l'angle solide ($\sin \theta$ de $d\Omega$)

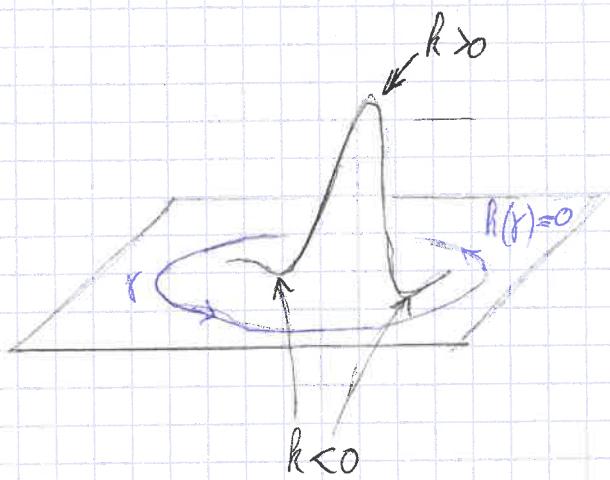
Gauß-Bonnet

$$h(\gamma) = \iint d^2\Omega / \text{mod } 2\pi$$

Pour la sphère complète : $\mathcal{E} = S^2$ (réduit à un point)

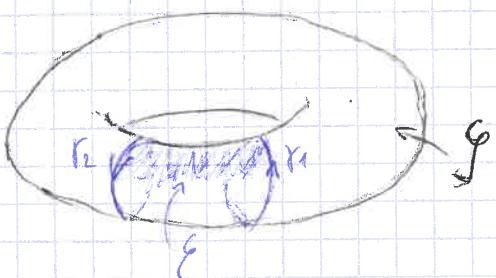
$H(\gamma) = \int_{S^2} k(x) d\sigma = 0$, et $\int_{S^2} d\sigma = 4\pi$, donc la formule est vérifiée.
(grâce au mod 2π)

Si on change la forme de la surface à l'intérieur de E (sans toucher au bord γ), alors la courbure de Gauss locale $k(x)$ change, mais $H(\gamma)$ ne change pas, donc l'intégrale de $k(x)$ ne doit pas changer.



ici, $H(\gamma) = 0$ reste inchangée

Dans la formule de Gauss-Bonnet locale (13.1), le chemin fermé γ peut être composé de plusieurs parties. Ex: le tore. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$:



Formule de Gauss-Bonnet globale :

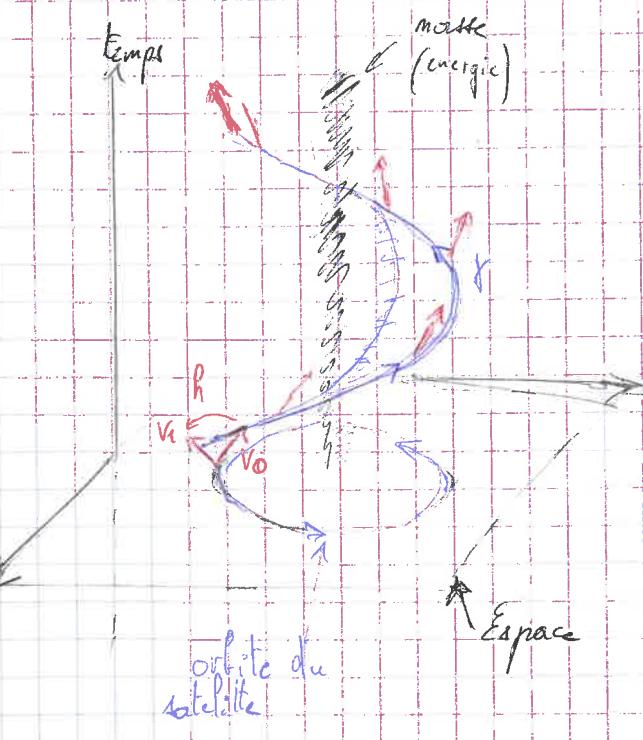
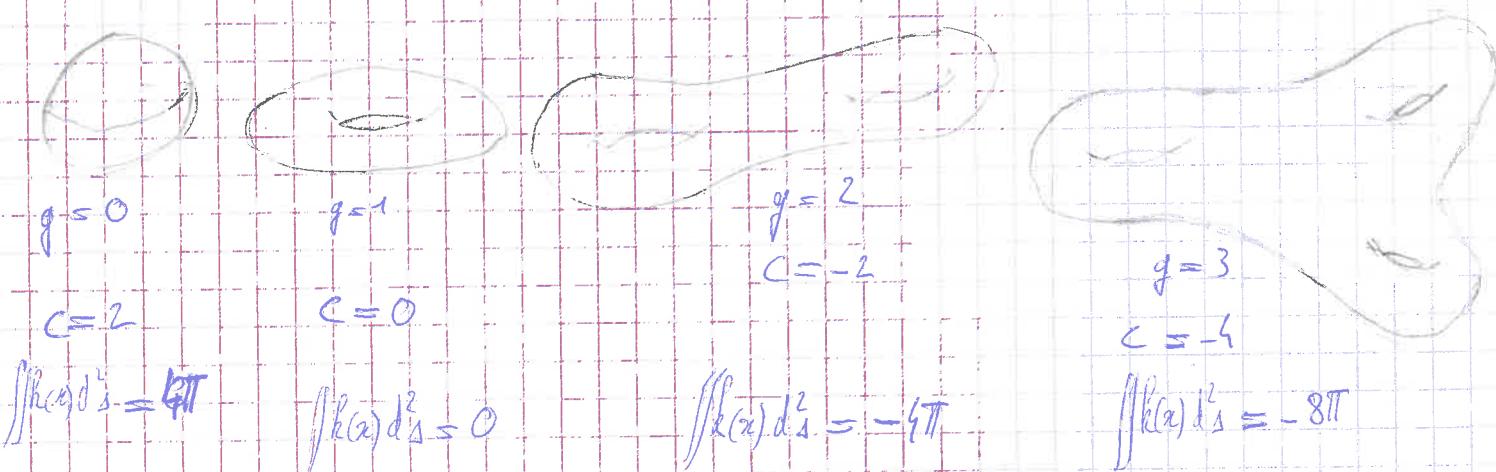
Pour une surface S orientée compacte sans bord, l'intégrale de la courbure de Gauß $k(x)$ sur toute la surface est :

$$\iint k(x) d^2 s = 2\pi c \quad \text{Invariant topologique} \quad (1.3.5)$$

où $k(x)$ est la courbure de $\gamma_{\alpha x}$, et $C \in \mathbb{Z}$ un entier, (indice de Euler, ou indice de Chern).

Pour une surface de genre g (avec g trous), on a :

$$\text{Indice de Chern de Euler} \quad C = 2(1-g) \quad (1.3.6)$$



Espace-temps courbe ; Effet gyroscopique

précession gyroscopique = holonomie le long de \vec{S}

(équivalent de l'angle de Foucault)

Effekt Einstein - de Sitter

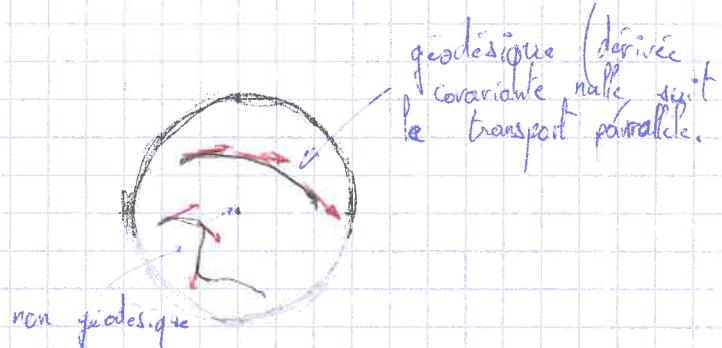
1.4): Trajectoires géodésiques

Définition: La courbe $\gamma(t)$ est une géodésique si: $\frac{Dv}{dt} = 0, \forall t$

où $\gamma(t)$ est un chemin paramétré sur une surface S , et $v(t)$ le vecteur vitesse tangent au point $\gamma(t)$:

$$v(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)} S$$

géodésique: trajectoire la plus droite
(pas forcément la + courte)



Trajectoire sur une géodésique

correspond au mouvement libre d'une particule sur la sphère S , qui ne subit que la force de réaction $R_f(t)$, normale à la sphère. ($P_e R_e = 0$)

(projecteur)

Éq de Newton: $m \frac{dv}{dt} = R$

$$P \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} PR = 0$$

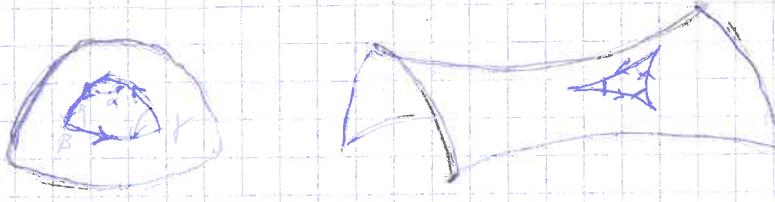
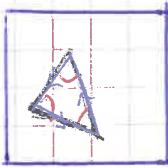
Équation de Newton sur la surface: $m \frac{Dv}{dt} = F$

la dérivée covariante, c'est l'accélération tangentielle de la particule:

Triangle géodésique: Théorème (1.4.3):

Sur une surface S orientée, si $T = (A, B, C)$ est un triangle géodésique, si les 3 sommets sont reliés par des géodésiques, et que E est l'intérieur du triangle, ($T = \partial E$), et si α, β, γ sont les angles aux sommets, alors:

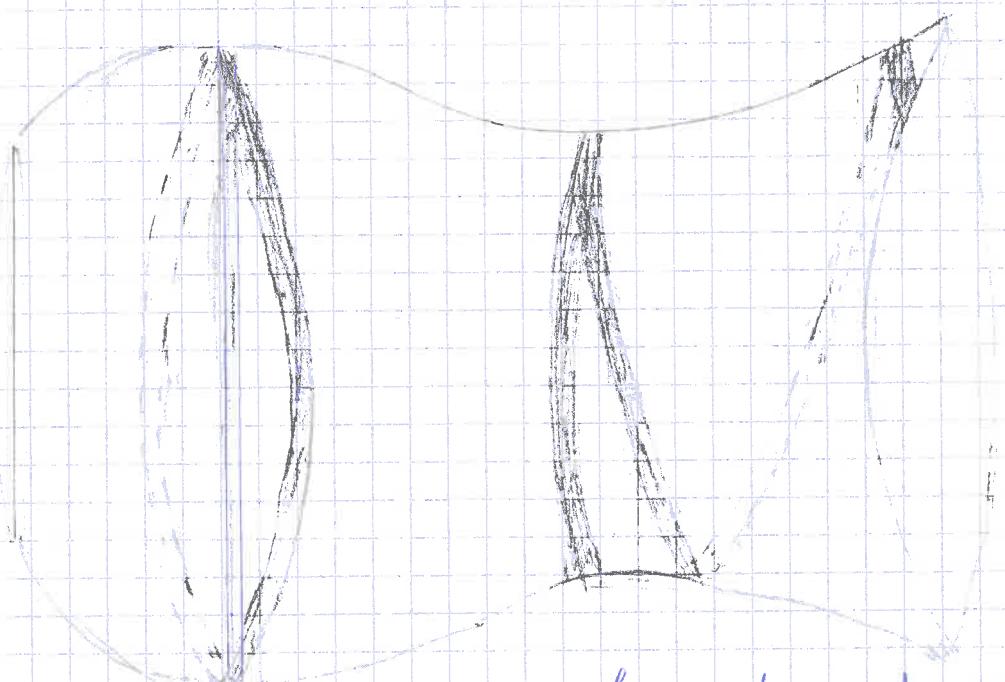
$$\text{h}(\gamma) = \iint_E k_0 ds^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad (1.4.2)$$



Sur le plan euclidien, \mathbb{R}^2 , de courbure nulle, on retrouve $0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
 (partout) soit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Somme des angles moins π = l'holonomie le long d'un parcours fermé.

1.4.2) Trajectoires géodésiques, courbures positives et négatives



courbure négative: divergence exponentielle des trajectoires

$k < 0$: répulsion des géodésiques

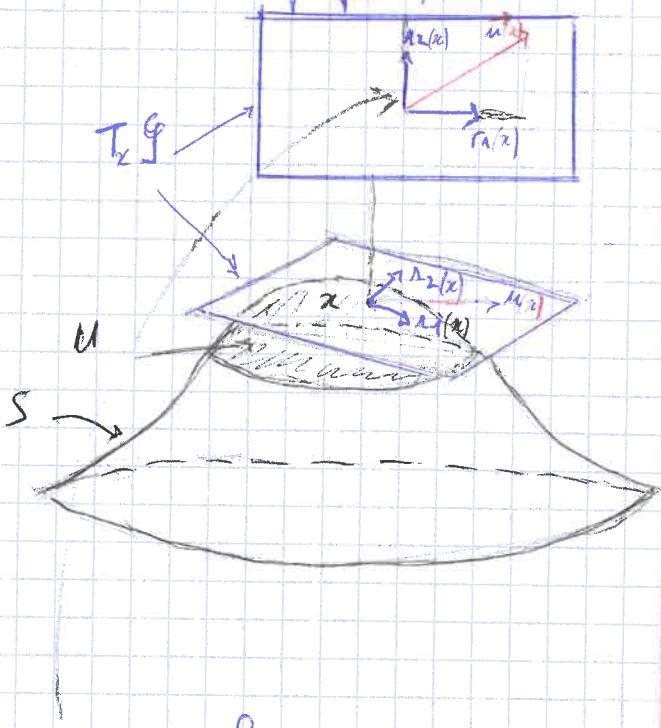
courbure positive:

oscillation autour d'une trajectoire

$k(x) > 0$: attraction entre géodésiques

Théorie de Jacobi: relation entre courbure de l'espace-temps et écartement des géodésiques.

1.5/; Choix de Tangage, potentiel de Tangage.



repère r_1, r_2 : Choix de Tangage
(Triangularisation du fibré tangent)

Soit S une surface orientée, $U \subset S$ un petit domaine.

Un choix de Tangage dans le domaine U est le choix $x \in U$ d'un repère orthonormé direct $r_1(x), r_2(x) \in T_x S$.

Ainsi, un vecteur tangent $u(x) \in T_x S$ s'écrit:

$$u(x) = u_1(x)r_1(x) + u_2(x)r_2(x)$$

avec $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$

Ec choix est à faire pour tous les plans tangents à U . Dans ce cas, on peut dire qu'on a fait un choix de Tangage sur le domaine U , soit encore sur le fibré tangent. Le fibré tangent est l'ensemble des plans tangents à la surface.

Structure complexe: Plutôt que d'utiliser les 2 composantes réelles u_1, u_2 , tâchons d'utiliser une unique composante complexe.

Dans chaque espace tangent $T_x S$, on introduit l'opérateur linéaire:

$$J_x : T_x S \rightarrow T_x S$$

$$\begin{aligned} J_x : & \begin{cases} r_1(x) \mapsto r_2(x) \\ r_2(x) \mapsto -r_1(x) \end{cases} \end{aligned}$$

- Définit une rotation de $+\pi/2$.
- Vérifie $J_x^2 = -\mathbb{I}_2$
- La multiplication d'un vecteur $u \in T_x S$ par $i \in \mathbb{C}$ s'écrit:
 $i u \iff J_x u$

$$\text{Ainsi : } u(x) = u_1(x) r_1(x) + u_2(x) i r_2(x)$$

$$= u_1(x) r_1(x) + u_2(x) i r_1(x)$$

$$= \Psi(x) r_1(x) \quad \in T_x S$$

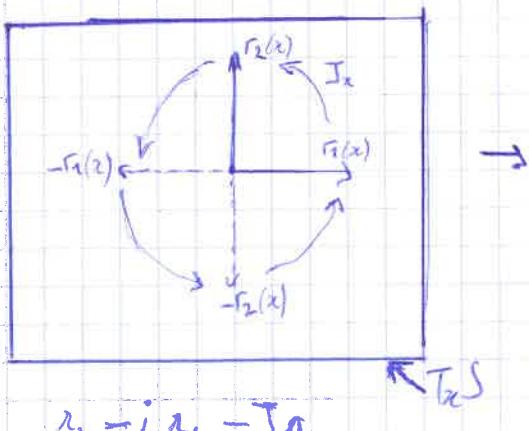
avec $\Psi(x) = (u_1 + i u_2)(x)$

$$u(x) = \Psi(x) r_1(x)$$

avec $\Psi \in \mathbb{C}$

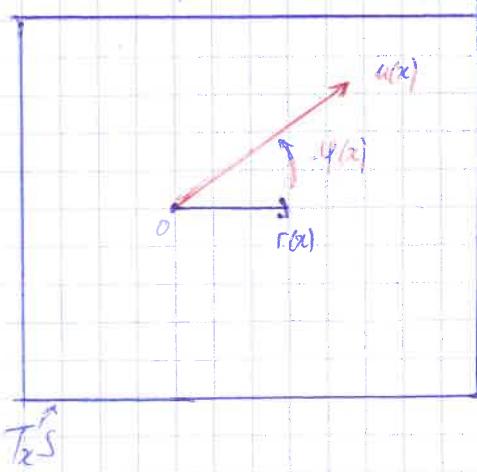
$\Psi(x)$ est la coordonnée, ou champ scalaire complexe (physique)
(ou composante du champ de vecteurs) (maths)

2 vecteurs unitaires r_1, r_2



$$r_2 = i r_1 = I_n$$

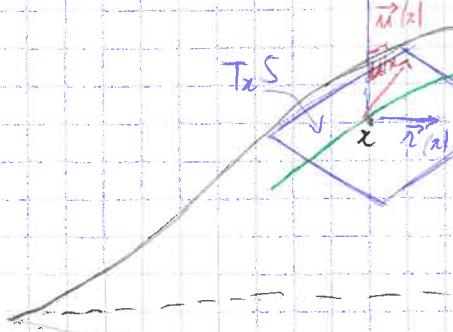
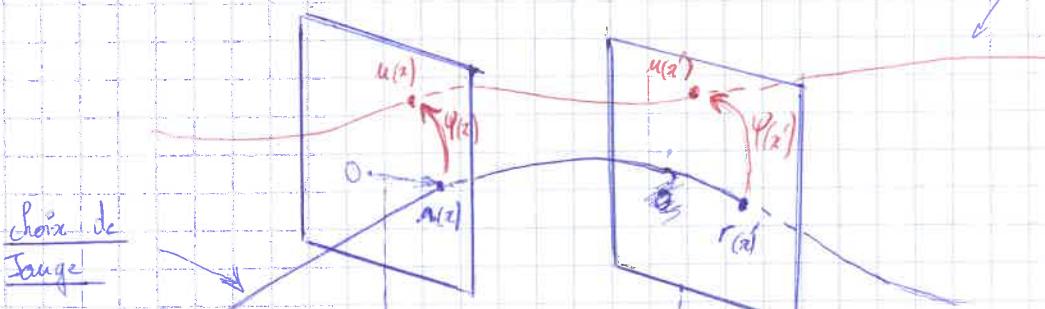
Un unique vecteur unitaire, $r_1 = \Gamma$



$$\text{ex. } \Psi(x) = 2 e^{i \frac{\pi}{4}}$$

modèle : Γ dans \mathbb{C}
longueur x

section du fibré tangent

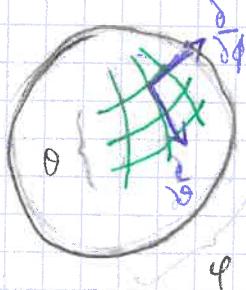


S

1.S.2): Potentiel de Fauge

On cherche ici à exprimer la dérivée covariante $\frac{Du}{dt}$ en fonction des coordonnées du repère local $r(x)$.

• munissons la sphère de coordonnées locales.



$$\left\{ \begin{array}{l} u_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \text{ vecteurs unitaires} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Rappelons que la dérivée covariante mesure la déviation d'un champ de vecteurs par rapport au transport parallèle.

Expression de la dérivée covariante :

Soit $B \subset S$ un domaine, $r(x) \in T_x S$ un choix de fauge V_x .

On se donne $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un choix de coordonnées locales sur U (par exemple coordonnées sphériques)

On définit le potentiel de fauge $\vec{t} = (t_1(x), t_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{D\vec{t}(x)}{dx_k} = (i \frac{dt_k}{dx_k}(x))_k, \quad k=1,2$$

(On cherche à savoir si le champ de vecteurs $r(x)$ suit le transport parallèle)

Les composantes réelles $\vec{t}(x) = (t_1(x), t_2(x))$ mesurent les dérivées covariantes du choix de base $r(x)$, par rapport aux variations de coordonnées (x_1, x_2) .

On note :

$$t = t_1(x) dx_1 + t_2(x) dx_2$$

$$= \vec{t} dx$$

Potentiel de fauge
ou 1-forme de connexion

t_{11} dérivée covariante de $r(x)$, lorsque x_1 varie

• On se donne $\gamma: [t_0, t] \rightarrow U$ un chemin paramétré de coordonnées $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

• On se donne un champ de vecteurs u sur U , i.e. $u(x) = \psi(x) n(x) \in T_x S$ pour chaque x , de composante $\psi(x) = u_1 + i u_2(x)$

• Alors la dérivée covariante de $u(x)$, au point $x = \gamma(t)$ s'écrit :

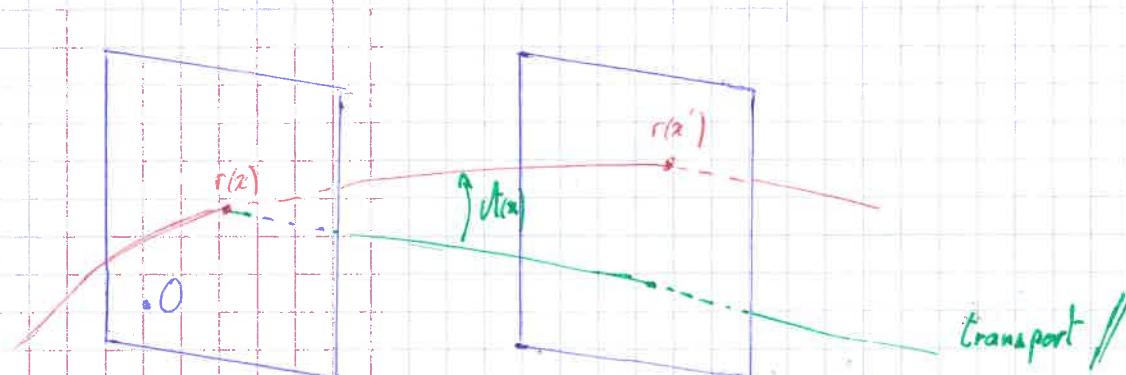
$$\frac{Du}{dt} = \left[i \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right) \cdot \left(\vec{p} + \vec{\mathcal{A}}(x) \right) \psi(x) \right] n(x)$$

Formule du couplage minimal
(1.5.1)

avec l'opérateur impulsion $\vec{p} = -i \vec{\nabla} = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1}, -i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$

Par conséquent :

$$\|Du\|^2 = \left\| \left(\vec{p} + \vec{\mathcal{A}}(x) \right) \psi \right\|^2 \quad (1.5.2)$$



Le potentiel de Gauge $\alpha(x)$ mesure comment le choix de Gauge n dévie du transport parallèle.

Changement de Gauge
(1.5.3)

$$r'(x) = e^{i\alpha(x)} r(x)$$

Note que $e^{i\alpha(x)}$ est une rotation. $e^{i\alpha(x)} \in U(1)$
Lsgpe unitaire (Electromagnétisme)

SU2: électrofaible
SO3: QCD

Chromo-Dynamique Quantique

1.5.3)

Changement de jauge : $\tau' = e^{i\alpha(x)} \tau(x)$

Proposition: Par changement de jauge, le champ de vecteurs s'exprime

comme :

$$u(x) = \psi(x) \tau(x) = \psi'(x) \tau'(x)$$

$$\hookrightarrow \text{avec : } \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x)$$

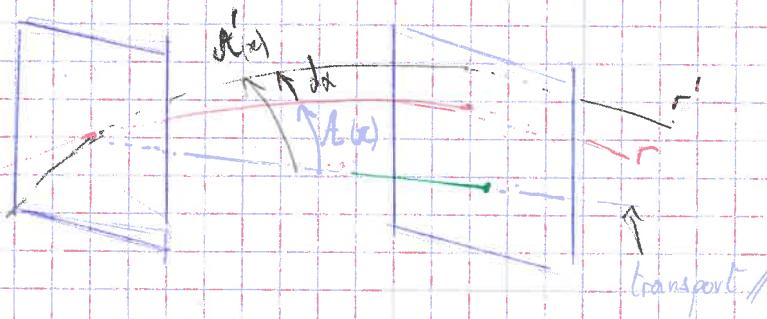
Démo: $\psi(x) \tau(x) = \psi'(x) \tau'(x)$

$$= \psi(x) e^{i\alpha(x)} \tau(x) \quad \text{donc } \psi' = \psi(x) e^{-i\alpha(x)}$$

Le nouveau potentiel de jauge s'exprime alors:

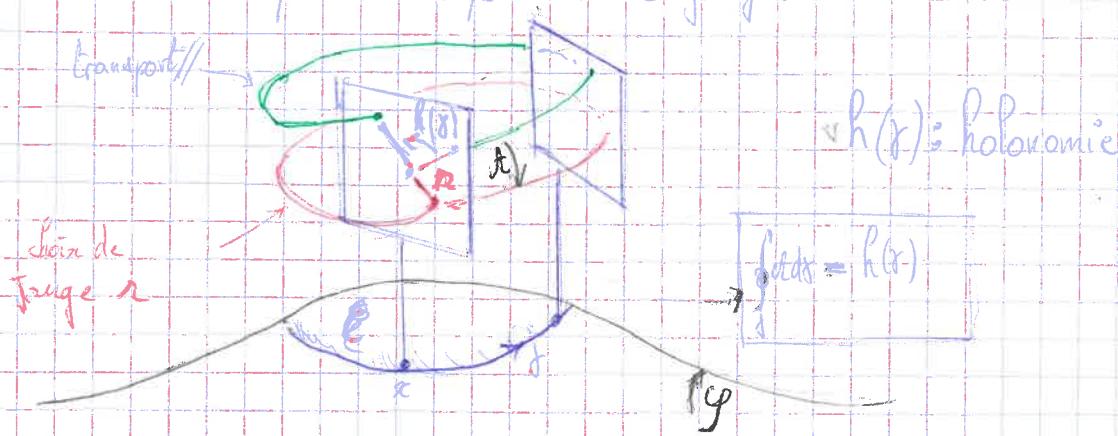
$$t' = ct + da$$

$$\text{i.e.: } u'_k = \partial_k t + \frac{\partial a}{\partial x_k}, \quad k=1,2$$



1.5.4: Courbure:

Calculons l'holoromie à partir du potentiel de jauge a .



Proposition 1.5.8) Si $E \subset U$ est un sous-domaine de bord $\gamma = \partial E$, fermant un chemin fermé), alors l'holonomie s'exprime par l'intégrale de courbure:

$$h(\gamma) = -\oint_{\gamma} dt \wedge \gamma = -\iint_E B \, dE$$

Stokes / Green

On retrouve Gauss-Bonnet locale!

où t est le potentiel de Jauge

et courbure $\Leftrightarrow B = \left(\frac{\partial t_1}{\partial x_2} - \frac{\partial t_2}{\partial x_1} \right) (dx_1 \wedge dx_2)$ est le tensor de courbure, indépendant du choix de jauge

On a : $B = -k \, ds^2$, avec k la courbure de Gauß locale, ds^2 l'élément de surface.

On appelle B la dérivée extérieure de t .

$B = dt$ Electromagnétisme: B : champ magnétique
 2-forme forme t : Potentiel de Jauge (potentiel vecteur)

La courbure est semblable au champ magnétique.

L'intégrale curviligne du potentiel (l'holonomie) intervient dans l'effet Aharonov-Bohm.

Interlude (Exo 1.55): Sur la sphère S^2 , si l'on fait le choix de jauge

$$(x) = u_\theta(x)$$

d'après le potentiel de Jauge $(dt = \cos\theta \, d\varphi)$, où les composantes sont : $t = (0, \cos\theta)$

(aide: sur un cône, l'ouverture est $2\pi/(1-\cos\theta)$). Donc, $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{dz}{d\varphi} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} = 1/\cos\theta$

Donc: Sur la sphère S^2 :

$$B = dt = d(\cos\theta \, d\varphi)$$

$$= -\sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi$$

$$= -\frac{1}{R^2} \, ds^2$$

$$\partial_\theta \cos\theta \, d\theta \wedge d\varphi + \partial_\varphi (\cos\theta) \, d\theta \wedge d\varphi$$

$$ds^2 = R^2 \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi$$

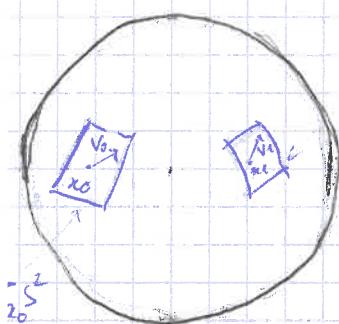
Sphère S^2 : $B = -\frac{1}{R^2}$. En électromagnétisme, ce serait un champ magnétique positif sur la sphère, qui serait créé par un monopôle magnétique, de charge $C = +2$ (indice de Chern: $C = C(TS^2) = +2$)

(Il ne sont d'ailleurs pas découverts dans la nature).

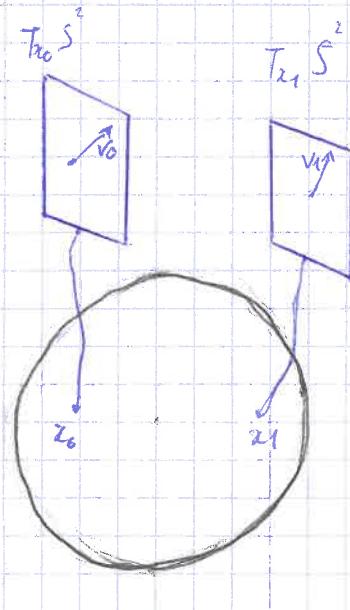
faire analogie

acoustique

1.6) Espace fibré vectoriel:



$T_x S^2$



$T_{x_0} S^2$

$T_{x_1} S^2$

TS^2 : Espace fibré tangent à S^2

L'ensemble des plans tangents à S^2 ($S^2 \subset \mathbb{R}^3$) est l'espace fibré tangent, noté TS . TS est la collection des espaces vectoriels $T_x S^2$, paramétrée par x .

$$TS = \{(x, v), x \in S^2, v \in T_x S^2\} \quad (1.6.1)$$

Choix de base locale, trivialisation locale:

Quand $x \in S^2$ varie, $T_x S^2$ varie continument.

Rappel: Pour tout voisinage U de x , $\forall x' \in U$, on peut faire le choix d'un repère $r_1(x'), r_2(x')$ ($r_1, r_2 \in T_x S^2$), de sorte que $\forall v \in T_{x'} S^2$ s'écrit: $v = v_1(x')r_1(x') + v_2(x')r_2(x')$.

$$v = v_1(x')r_1(x') + v_2(x')r_2(x')$$

On a un difféomorphisme (bijection C^∞ d'inverse C^∞):

$$\begin{aligned} h: & \left\{ \begin{array}{l} T_x S^2 \rightarrow U \times \mathbb{R}^2 \\ (x, v) \mapsto (x', v_1(x'), v_2(x')) \end{array} \right. \end{aligned}$$

(1.6.2)

appelé trivialisation locale du fibré $T_x S^2$ (ici $T_x S^2$ restreint au voisinage U)

Il identifie chaque fibre F_x au plan \mathbb{R}^2 .

idée : remplacer l'espace tangent $T_x S$ par un espace vectoriel quelconque F_x .

Penser "variété différentiable" comme une courbe $X \subset \mathbb{R}^3$, ou une sphère $S \subset \mathbb{R}^3$, ou plus généralement, un ensemble de points avec des coordonnées locales.

Définition générale : (1.6.1.2) Espace fibré vectoriel.

Soit B une variété différentiable appelée "Espace de base".

Pour chaque point $x \in B$, on considère un espace vectoriel F_x de dimension n (n constant, indépendant de x), appelé fibre au dessus de x .

La collection de ces espaces vectoriels $F = \{(x, v), x \in B, v \in F_x\}$ (1.6.3)

est appelé espace fibré vectoriel de rang n sur B .

On note $\pi : F \rightarrow B$ l'application $\pi(x, v) = x$. point base

(F) de trivialisation locales

On suppose que $\forall x \in B$, \exists un voisinage $U \subset B$ tel que l'espace $F_U := \{(x, v), x \in U, v \in F_x\}$ est difféomorphe au produit direct $U \times \mathbb{R}^n$ (comme en 1.6.2).

Remarques :

- Si B est de dimension n , l'espace fibré tangent TB est un cas particulier d'espace vectoriel, c'est le cas $F_x = T_x B$ (comme en 1.6.1)

Dans ce cas, $\dim B = n = \dim T_x B$, la fibre tangent est de rang n .

- Autre cas particulier : F est un espace fini. En général, on ne suppose pas que la fibre F_x soit reliée à l'espace tangent $T_x B$.

Un exemple simple d'espace fibré vectoriel est : $F = B \times \mathbb{R}^n = \{(x, v), x \in B, v \in \mathbb{R}^n\}$ appelé espace trivial de rang n , où chaque fibre $F_x = \mathbb{R}^n$, le même espace vectoriel $\forall x \in B$.

On peut donc penser qu'un espace fibré vectoriel général sera à étendre la notion du produit direct.

• En physique des particules, en théorie de Yang-Mills, on utilise des fibres vectoriels avec connexion, où F_x est un espace vectoriel complexe, de dimension $n=1, 2, 3$, sur l'espace-temps B .

$n=1$: U(1) : électromagnétisme

$n=2$: SU(2) : théorie électrofaible (forces nucléaires faibles + électromagnétisme)

$n=3$: SU(3) : Chromodynamique Quantique (force nucléaire forte, dans les noyaux)

1.6.13: Équivalence entre fibres vectorielles

Il est utile de comparer 2 espaces fibrés.

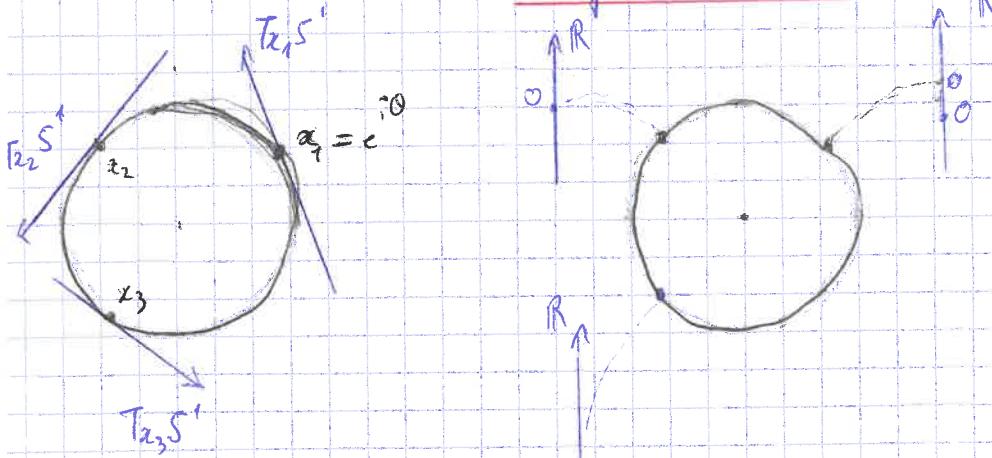
Si F et F' sont deux espaces vectoriels de rang n (avec B l'espace de base), on dit que F et F' sont isomorphes, note $F \cong F'$, si il existe un homéomorphisme (bijection continue, d'inverse continue) : $h: F \rightarrow F'$

tel que $\forall x \in B$, $h: F_x \rightarrow F'_x$ est un isomorphisme d'espace vectoriel (i.e. application linéaire inversible).

La relation \cong est une relation d'équivalence.

On notera $\text{Vect}_{\mathbb{R}}^n(B)$ les classes d'équivalence de fibres isomorphes de

rang n sur B



L'espace tangent TS^1 est isomorphe au fibre trivial de rang 1: $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$

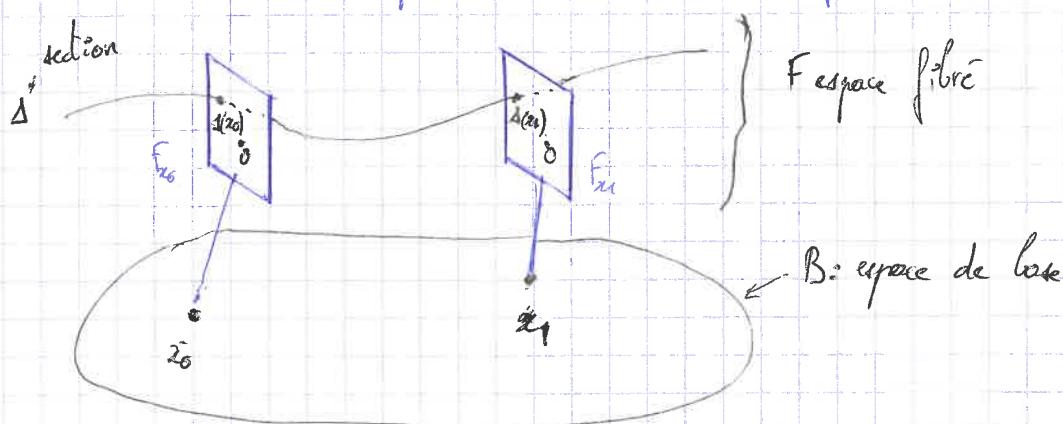
En effet, on note $e^{\circ} \in S$ un point de S . Un point de l'espace tangent $T_e S$ s'écrit ite° , $t \in \mathbb{R}$. On a alors un homéomorphisme : $h: (e^{\circ}, ite^{\circ}) \in TS \rightarrow (e^{\circ}, t) \in S \times \mathbb{R}$

1.6.1.4 Section d'un fibré vectoriel :

$F \rightarrow B$ est un espace fibré vectoriel. Une section globale du fibré est une application :

$$s: \begin{cases} B \rightarrow F \\ x \rightarrow s(x) \in F_x \end{cases}$$

On note $C^\infty(B; F)$ l'espace des sections C^∞ du fibré F .



- Si $F = B \times \mathbb{R}$ fibré trivial de rang 1, alors une section $s \in C^\infty(B, F)$ est une fonction numérique à valeur réelles $s: x \in B \rightarrow s(x) \in \mathbb{R}$ (aussi noté $s \in C^\infty(B)$)

- Si $F = B \times \mathbb{R}^n$, fibré trivial de rang n , une section est une fonction à n composantes réelles. $s(x) \in \mathbb{R}^n$.

- Pour un fibré quelconque, la notion de section généralise la notion de fonction numérique.

- Une section globale du fibré tangent $s \in C^\infty(S, TS)$ est tout simplement un champ de vecteurs sur S : $s(x) \in T_x S$ (tangents)

- Tout espace fibré admet des sections, en particulier la section nulle $s(x) = 0, \forall x$.

Trivialisation globale du fibré F : (1.6.6)

Thm: L'espace fibré $F \rightarrow B$ est trivial si et seulement si il existe n sections globales (s_1, \dots, s_n) telles que, en tout point $x \in B$, les vecteurs $(s_1(x), \dots, s_n(x))$ forment une base de l'espace fibré vectoriel F_x (au dessus de x).

On dit que (s_1, \dots, s_n) est une trivialisation globale du fibré F .
(Choix de l'angle global)

démo: si $x \in B$, $v \in F_x$ un point quelconque dans une fibre. On décompose v dans la base: $v = \sum_{i=1}^n t_i s_i(x)$, avec $t_i \in \mathbb{R}$.

On a un isomorphisme entre le fibré F et le fibré trivial $B \times \mathbb{R}^n$:

$$h: (x, v) \in F \rightarrow (x, t_1, \dots, t_n) \in B \times \mathbb{R}^n$$

1.7: Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 sur S^1

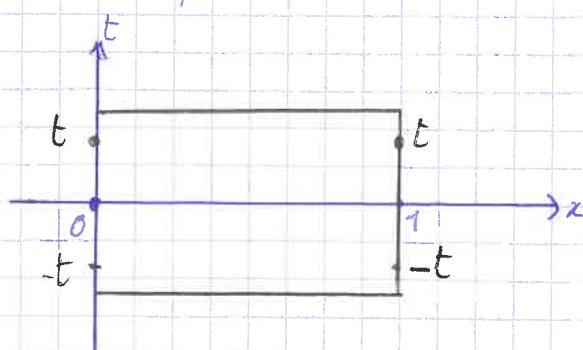
On considère l'espace de base $B = S^1$, de rang $n=1$, (le cercle.)

rang 1, chaque fibre est isomorphe à la droite \mathbb{R}

2 exemples:

• Le fibré trivial $S^1 \times \mathbb{R}$, obtenu à partir du fibré $[0,1] \times \mathbb{R}$ sur le segment $\underset{x \in}{[0,1]}$, en identifiant les points $(0,t) \sim (1,t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

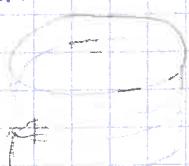
• Le fibré de Möbius, obtenu à partir du fibré $[0,1] \times \mathbb{R}$ sur segment $x \in [0,1]$ en identifiant $(0,t) \sim (1-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$



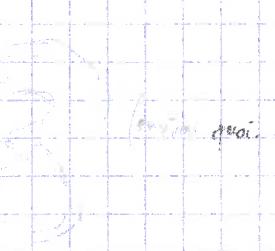
Proposition: Le fibré de Möbius n'est pas trivial (1.7.1)

Demo: Coupe ton fibré trivial et ton fibré de Möbius par la section nulle.

trivial



Möbius



Le complément de la section nulle ($s(x) = 0, \forall x$) a deux composantes connexes pour le fibré trivial, alors que ce complément n'a qu'une composante pour le fibré de Möbius i.e.: il n'y a pas d'isomorphisme entre ces 2 compléments.

Théorème: Tout espace fibré réel $F \rightarrow S^1$ de rang 1 est isomorphe au fibré trivial, ou au fibré de Möbius. Ainsi, il n'y a que 2 classes d'équivalences:

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}^1(S^1) = \{0, 1\}$$

associé à un indice SW .

$SW=0$: fibré trivial

$SW=1$: fibré de Möbius

SW est l'indice de Stiefel-Whitney. On dit que SW caractérise la topologie du fibré F .

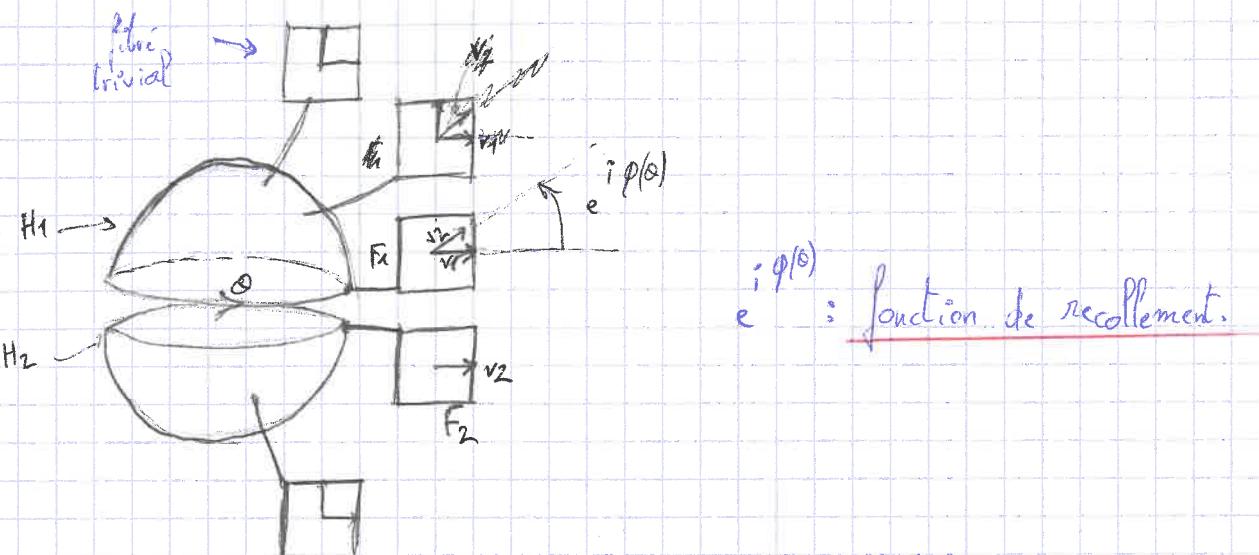
Remarque: l'indice de Stiefel-Whitney correspond au nombre de $\frac{1}{2}$ tours que font les fibres au-dessus de l'espace de base S^1 .

Le cas $SW=2$ est isomorphe au fibré trivial.

On convient que $SW \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, i.e. SW est un entier modulo 2.

Remarquons que dans \mathbb{R}^3 , un ruban faisant un tour (= 2π tour) ne peut pas être déformé continuellement vers le fibré trivial. (dans \mathbb{R}^4 , ce serait possible)

1.8) Topologie d'un fibré vectoriel de rang 2, sur S^2



Considérons la sphère, coupée le long de l'équateur. On obtient deux hémisphères, H_1 et H_2 .

On considère les fibrés triviaux $F_1 = H_1 \times \mathbb{R}^2$, et $F_2 = H_2 \times \mathbb{R}^2$.

Pour construire un fibré sur S^2 , il faut décider comment identifier les fibres de F_1 avec celles de F_2 , au-dessus de l'équateur.

Soit θ l'angle qui caractérise un point de l'équateur.

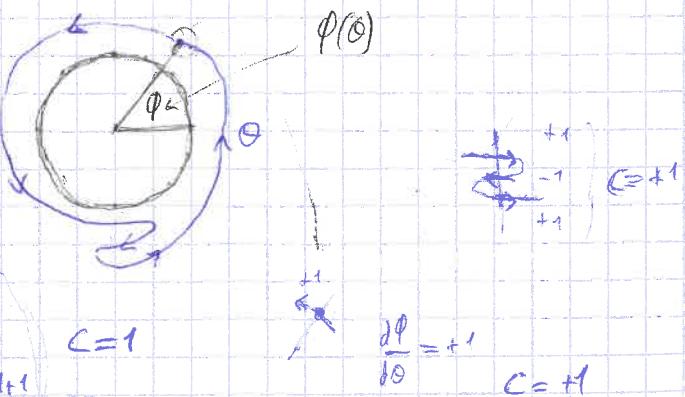
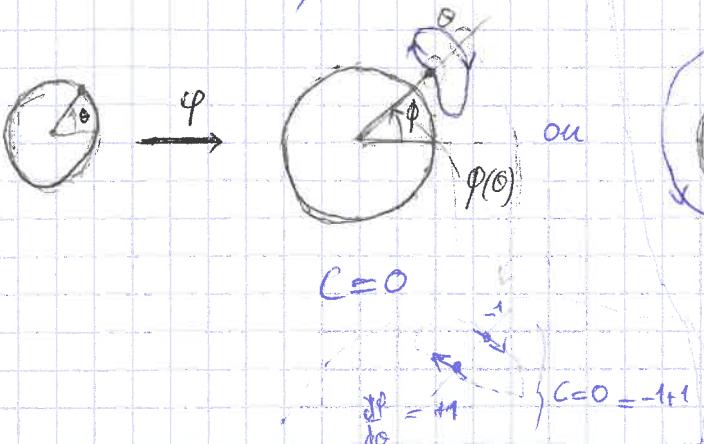
$\phi(\theta) \in S^1$ l'angle qui signifie que la fibre $F_2(\theta)$ est recollé à la fibre $F_1(\theta)$ après une rotation d'angle $\phi(\theta)$.

Après recollement, on obtient un fibré $F \rightarrow S^2$ de rang 2

fonction de recollement: $\phi: \theta \in S^1 \rightarrow \phi(\theta) \in S^1$

fonction continue et périodique: $\phi(2\pi) = \phi(0) + 2\pi c, c \in \mathbb{Z}$

Faisons varier θ entre 0 et 2π . Observons ϕ :



L'indice entier C représente le nombre de tours que fait φ lorsque θ fait un tour.

Pour calculer C , fixons $\varphi_0 \in S^1$ et :

$$C = \sum_{\theta=\varphi'(p_0)} \text{sign}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta)\right)$$

$$C = \sum \text{sign}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}(0)\right)$$

C'est le degré de l'application $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$, ou winding number.

Deux fonctions φ et φ' sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même degré $C=C'$.

Par conséquent, les fibrés F et F' sont isomorphes si $C=C'$.

Théorème 7. Tout fibré réel $F \rightarrow S^2$ de rang 2 est isomorphe à un fibré construit comme ci-dessus, avec une fonction de recollement sur l'équateur $\theta \mapsto \varphi(\theta)$, ayant un degré $C \in \mathbb{Z}$. La classe d'équivalence du fibré F est caractérisée par $C \in \mathbb{Z}$ (appelé 1^{st} indice de Chern). Autrement dit :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}^2(S^2) = \mathbb{Z}$$

Preuve: Comme ci-dessus. On part d'un fibré F , on coupe la sphère S^2 , on obtient 2 fibrés $F_1 \rightarrow H_1$ et $F_2 \rightarrow H_2$. Chacun de ces fibrés est trivial, car les espaces de base sont des disques (espaces contractiles). Le fibré F est donc défini par sa fd. de recollement.

Théorème 8: Le fibré tangent TS^2 n'est pas trivial, son indice de Chern est :

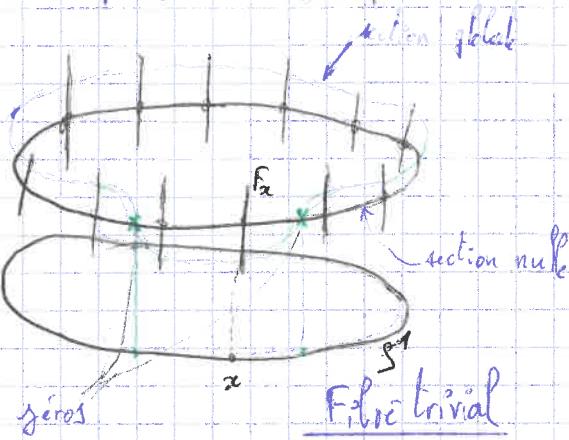
$$C(TS^2) = +2$$

Remarques: • Le fibré trivial $S^2 \times \mathbb{R}^2$ a un indice de Chern $C=0$ (les fibres sont les m^{es} à l'équateur)

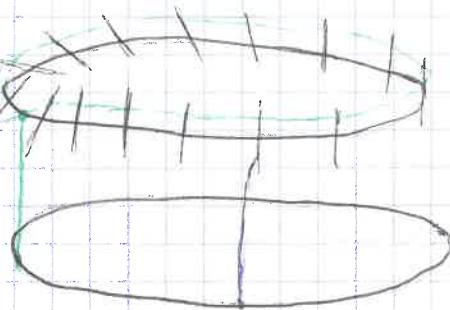
• On verra, en méca quantique, ($\text{spin } \frac{1}{2}$), un exemple de fibré $F \rightarrow S^2$ de rang 2 avec $C=-1$.

Ella fera ainsi trois exemples de fibrés sur S^2 , avec $C=0, +2, -1$

1.9. Topologie d'un espace fibré de rang 2 (sur S^1) à partir des zéros d'une section



$$SV = 1+1 = 0$$



$$SV = 1$$

On appelle zéro de la section s les points $x \in S^1$ tels que $s(x) = 0$

On rappelle que $SW(F) = \{0, 1\}$, selon que le fibré est trivial ou de Möbius.

$$\text{On note : } \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) = \{0, 1\}$$

Le groupe à 2 éléments (i.e entiers modulo 2) avec la règle commutative :

$$0+0=0, \quad 1+0=1, \quad 1+1=0$$

Théorème: Si $F \rightarrow S^1$ est un fibré réel de rang 1 sur S^1 , à une section globale, l'indice topologique est donné par :

$$SV(F) = \sum_{\substack{x \text{ tel que} \\ s(x)=0}} \sigma_s(x) \in \mathbb{Z}_2$$

ou $\sigma_s(x) = 1$ pour un zéro générique de la section s . Le résultat est indépendant de s .