(Thompson p. 53/54)

Ecoulements compressibles barotropes

Rappel de thermodynamique :

L'état thermodynamique est caractérisé par les variables thermo suivantes :

- P : pression
- T : température absolue
- ρ : masse volumique
- $v = \frac{1}{\rho}$: volume spécifique (par unité de masse)
- e : Energie interne spécifique
- $h = e + Pv$: enthalpie spécifique
- s : entropie spécifique

Toutes ces grandeurs sont des variables intensives (même s, entropie spécifique)

En plus de ces variables, il existe des coefficients de transport, se comportant comme les variables thermo :

μ : shear viscosity μ_b : bulk viscosity

κ : conductivité thermique

The "state principle" : L'état thermodynamique est fixé par n'importe quel couple de variables thermo indépendantes (provided que la composition chimique ne change pas par diffusion ou mélange).

Si l'on prend par exemple s et v comme variables indépendantes, les autres se déduisent :

$$\left.\begin{aligned} e &= e(s,v) \\ T &= T(s,v) \\ P &= P(s,v) \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{ Relations appelées "équations d'état"}$$

Les équations du mouvement peuvent ainsi être écrites de façon à n'engager que 2 variables thermodynamiques.

(Thompson, p 56)

Equation d'état thermique :

$\boxed{P = P(v, T)}$ qui peut également s'écrire : $f(P, v, T) = 0$

ou $v = v(P, T)$

Equation d'état thermique pour un gaz idéal : $\boxed{Pv = rT}$ $\left(r = \frac{R}{M}\right)$

Cette équation d'état thermique ne suffit pas pour déterminer l'ensemble de l'état thermodynamique.

Ainsi, $s(v, T)$ ne peut pas être déterminée. On doit alors introduire une seconde équation d'état :

Equation d'état calorique :

$\boxed{e = e(v, T)}$ $(e = c_v T)$

On peut (également sinon) introduire une équation d'état potentielle (ou canonique) :

$\boxed{e = e(s, v)}$ Contient implicitement la spécification complète de toutes les grandeurs thermodynamiques.

Entropie et écoulements barotropes (éventuellement isentropiques)

L'entropie est une grandeur qu'on peut trouver sympa, surtout lorsqu'on l'assume constante dans l'écoulement : l'état thermodynamique est alors fixé par la connaissance d'1 seule variable thermodynamique !

Ainsi : $\boxed{e = e(s, v)}$ devient : $\boxed{e = e(v)}$ (EOS calorique) potentiel

De la même façon, EOS thermal devient :

$\boxed{P = P(v, T)} \rightarrow \boxed{P = P(v)}$, ou encore $\boxed{P = P(\rho)}$

Gaz parfait : $\boxed{P = (\gamma - 1)\rho e}$, $\gamma > 1$

polytropique $\boxed{e = C_v T}$

(Dubois, p.7)

Després / Dubois :

$$\begin{cases} P = (\gamma-1)\rho e \\ e = C_v T \end{cases}$$

On peut introduire l'entropie spécifique par :

$$\boxed{P = K\rho^{\gamma} e^{s/c_v}}$$

soit

$$\boxed{s = C_v \ln\left(\frac{P}{K\rho^{\gamma}}\right)}$$

Després p 12

L'entropie vérifie l'équation de transport : (Pour les eqs. d'Euler)

$$\left[\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} = 0\right]$$

Autrement dit, l'entropie est invariante le long des lignes de courant.

Ce qui motive l'étude des écoulements barotropes

$e = C_v T$

$$\boxed{P = P(\rho)}$$

$P = \rho c^2$

Pour rappel :

- G.P : $P = (\gamma-1)\rho e$
- SG : $P = (\gamma-1)\rho e + P_\infty$
- NASG : $P = \frac{(\gamma-1)\rho e}{1-\rho b} + P_\infty$

Thompson, p. 59.

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\Upsilon}{\rho T} - \nabla \cdot q$$

$\longrightarrow$ dissipation function : $\Upsilon = 2\mu \xi_{ij}\xi_{ij} + \left(\mu_b - \frac{2}{3}\mu\right)\xi_{kk}^2$

$$\left[\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla} s = \frac{\Upsilon}{\rho T} - \vec{\nabla}\cdot q\right]$$

Si tu négliges dissipation visqueuse et conduction thermique (échange de chaleur) :
adiabatique reversible = isentropique

Conditions satisfaites lorsque les gradients sont limités, i.e. loin des couches limites, chocs, sillages.

Écoulement isentropique : $\frac{Ds}{Dt} = 0$

Écoulement homentropique : $\frac{Ds}{Dt} = \vec{\nabla} s = 0$

Entropie est la même pour toutes les particules fluides

- $Pv = RT$: gaz idéal
- $Pv = RT$ + ... } gaz parfait (thermally and calorically perfect)

Entropie et Vorticité (Éq. de Crocco - Vazsonyi)

(Thompson p 71)

Vorticité : $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix}$ $\qquad \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & v & w \end{vmatrix}$$

Identités vectorielles utiles :

$$\begin{cases} \cdot \ (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} = \overbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{u})}^{\vec{\Omega}} \times \vec{u} + \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} \\ \cdot \ \vec{\nabla}^2 \vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u}) - \vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{u})}_{\vec{\Omega}} \end{cases}$$

$\to$ rot(rot($\vec{u}$)) = grad(div $\vec{u}$) $- \nabla^2(\vec{u})$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{\rho}\left(\mu_v + \frac{1}{3}\mu\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u})$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{\mu}{\rho}\vec{\nabla}^2\vec{u} + \frac{1}{\rho}\left(\mu_v + \frac{1}{3}\mu\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u})$$

$\to$ Crocco - Vazsonyi

Peut être réécrit, à l'aide des identités utiles.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\nabla}\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{\mu}{\rho}\vec{\nabla}^2\vec{u} + \frac{1}{\rho}\left(\mu_v + \frac{1}{3}\mu\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u})$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\nabla}\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \mu(\vec{\nabla} \times \vec{\Omega}) + \frac{1}{\rho}\left(\mu_v + \frac{4}{3}\mu\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u})$$

$$\left[\vec{\nabla}P = \rho\vec{\nabla}h - \rho T\vec{\nabla}s\right]$$

Un écoulement irrotationnel, incompressible ne connaît pas d'efforts visqueux

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{u} = T\vec{\nabla}s - \vec{\nabla}\left(h + \frac{u^2}{2} + \psi\right) - \mu v(\vec{\nabla} \times \vec{\Omega}) + \left(\mu_v + \frac{4}{3}\mu\right)v\,\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u})}$$

H : cte de Bernoulli

Pour un écoulement permanent, inviscide :

$$\boxed{\vec{\Omega} \times \vec{u} = T\vec{\nabla}s - \vec{\nabla}H}$$

ex : écoulements de coins

Si H et s sont constants.

$$\left[\vec{\Omega} \times \vec{u} = \vec{0}\right]$$

- . si $\vec{u} = \vec{0}$
- . si $\vec{\Omega}$ est parallèle à $\vec{u}$ (Beltrami flows)
- . si $\vec{\Omega} = \vec{0}$

L'équation de Crocco-Vazsonyi peut se réécrire : (en prenant sa circulation)

$$\boxed{\frac{D\vec\Omega}{Dt} = (\vec\Omega\cdot\vec\nabla)\vec u - \vec\Omega(\vec\nabla\cdot\vec u) + \underbrace{\vec\nabla T\times\vec\nabla s} + \left(\mu_b+\frac{4}{3}\mu\right)\left(\vec\nabla v\times\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec u)\right) + \mu\left(v\,\nabla^2\Omega - \vec\nabla v\times(\vec\nabla\times\vec\Omega)\right)} \quad (2.46)$$

Le terme $\vec\nabla T\times\vec\nabla s$ s'annule si n'importe quelle variable thermo est constante dans l'écoulement. Par exemple, pour les écoulements isentropiques. (barotropes)

Dans le cas invisicide, homentropique ($\vec\nabla s = 0$), l'équation devient :

$$\boxed{\frac{D\vec\Omega}{Dt} = (\vec\Omega\cdot\vec\nabla)\vec u - \vec\Omega(\vec\nabla\cdot\vec u)}$$ Équation de transport de la vorticité (2.47)

⇒ Un écoulement initialement sans vorticité le reste en l'absence de $\vec\nabla s$ (gradient d'entropie) ou forces visqueuses.

. Pour un écoulement incompressible : $\nabla v = \vec\nabla\cdot\vec u = 0$

$$\boxed{\frac{D\vec\Omega}{Dt} = (\vec\Omega\cdot\vec\nabla)\vec u + \nu\nabla^2\vec\Omega}$$ Convection - diffusion de la vorticité

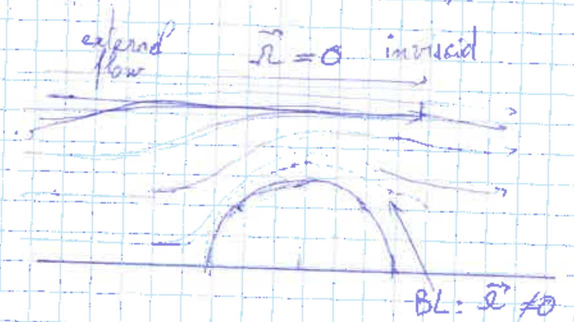
$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \vec u\cdot\vec\nabla\vec\Omega = (\vec\Omega\cdot\vec\nabla)\vec u + \nu\nabla^2\Omega$$

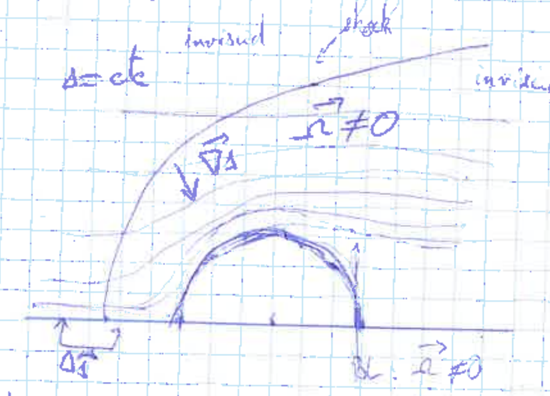
. Pour un écoulement compressible (invisicide).

$$\boxed{\frac{D\, v\vec\Omega}{Dt} = (v\vec\Omega\cdot\vec\nabla)\vec u + v(\vec\nabla T\times\vec\nabla s)}$$ Thompson, p. 74

Vorticity equation of Vazsonyi

(Lien entre vorticité et $\vec\nabla s$)





Dans le cas d'un choc, ~~l'entropie~~ le saut d'entropie max se situe sur la ligne centrale. (L'intensité du choc diminue away de la ligne centrale. ⇒ Il se crée un gradient d'entropie perpendiculaire aux lignes de courant), qui génère de la vorticité dans cet écoulement invisicide.

La vorticité générée est perpendiculaire au gradient d'entropie $\vec{\nabla}s$

$\boxed{\text{Théorème d'Hadamard:}}$ L'écoulement en aval d'un choc courbe est rotationnel.

Acoustique et "Condensation"

Thompson, p. 160

On suppose un écoulement isentropique ($s = cte$), inviscide. Barotrope : $P = P(\rho)$

Perturbation de pression : $\left[p' = P - P_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_s (\rho - \rho_0)^2 + \cdots \right]$

$c_0^2 = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s\right]_0$; $\rho' = \rho - \rho_0$ (ρ^{ϵ} in Thompson)

Si tu négliges les termes d'ordre élevé :

$$\left[p' = c_0^2 (\rho - \rho_0) \right]$$

Note que c_0^2 est connue en fonction de l'état uniforme : $c_0^2 = c^2(P_0, T_0)$

Introduisons la "condensation" $\left[s = \frac{\rho'}{\rho_0} \right]$ $\left[s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right]$

La perturbation de pression s'écrit : $\left[p' = s \rho_0 c_0^2 \right]$ (4.7) $\left[p' = \rho_0 c_0^2 s \right]$

* Equations de continuité et momentum pour Euler flow :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \end{cases}$$

On peut remplacer les variables par les grandeurs non perturbées. Les termes convectifs disparaissent.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P \end{cases}$$

Les équations sont linéaires.

Introduisons la condensation $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho'}{\rho_0}$ (et Eq. 4.7) :

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 & (4.13) \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + c_0^2 \vec{\nabla} s = 0 & (4.14) \end{cases}$$

On peut déduire des équations précédentes une Equation d'onde pour la condensation : $S = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 S = 0}$$ ← Équation de d'Alembert.

On peut montrer, qu'à condition que $\vec{\Omega} = 0$, le champ de vitesse $\vec{u}$ satisfait aussi l'éq. d'onde.

De même, toutes les grandeurs thermo pouvant s'exprimer à partir de la condensation S, $(P, T, \rho, \ldots)$ obéissent aussi à l'Éq d'onde.

L'acoustique, c'est assumer un état initial au repos, inviscide. D'après (2.47) état initial non rotationnel inviscid le reste, tu peux écrire que puisque $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$, la vitesse est le gradient d'une quantité (dérive d'1 potentiel)

$$\boxed{\vec{u} = \vec{\nabla} \phi}$$ $\phi(\vec{x}, t)$: vitesse potentielle.

Si on insère cette vitesse potentielle dans l'éq. de qdm : (4.14)

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0^2 S\right) = 0$$

intègre

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0^2 S = h(t)$$ → On peut prendre $h(t) = 0$ sans impacter $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$

Ainsi $$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \left[\frac{\rho'}{\rho_0} = \left[S = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right]\right.$$ (4.17)

Ainsi, à la fois ρ' (ou S condensation) et le champ de vitesse $\vec{u}$ peuvent s'exprimer par les dérivées de la vitesse potentielle ϕ.

Si tu prends $\frac{\partial}{\partial t}$ de Eq. 4.17 et que tu injectes 4.13 : $\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \phi\right]$

d'Alembert nous dit que son Eq. d'onde a pour solution, ϕ de la forme générale :

$$\boxed{\phi(\vec{x}, t) = F(\vec{x} - c_0 t) + G(\vec{x} + c_0 t)}$$

ou encore $$\phi(\vec{x}, t) = F\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + G\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$$

Solution pour le potentiel. Ainsi, puisque $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$:

$$\left[\vec{u} = \vec{e}\,(F' + G')\right]$$ (4.32)

Thompson p 170

unit vector in $\vec{x}$ direction

et $\eta = x - c_0 t$

$F = F(\eta)$

$F' = \frac{\partial F}{\ldots}$

Condensation $S = \frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$

où $\left[S = \frac{1}{c_0}\left(F' + G'\right)\right]$ (4.33) Ainsi, la condensation et la vitesse ont 1 simple relation.

définissons : $f(x - c_0 t) = +\frac{F'}{c_0}$ et $g(x + c_0 t) = \frac{-G'}{c_0}$

Les Eqs. 4.32 et 4.33 deviennent : $\begin{cases} u = c_0(f - g) \\ S = f + g \end{cases}$ Condition accoustique : $S \lll 1$

$\left[\frac{|\rho'|}{\rho_0} \lll 1\right]$

$S \lll 1$, soit encore $\boxed{u \lll c_0}$ soit encore : $\left[|p'| \ll \rho_0 c_0^2\right]$

Pour les explosions, détonations, ce n'est plus vérifié. Nécessite une théorie non-linéaire adéquate (p. 17)