

# Mécanique Générale

## Mécanique Newtonienne

Lois de Newton:

- Un point matériel, soumis à un champ de forces dont la résultante est nulle, est soit au repos, soit en translation rectiligne uniforme.

• Principe fondamental de la dynamique:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La somme des forces s'appliquant au point matériel est égale à la dérivée temporelle de l'impulsion (quantité de mouvement).

Dans le cas où la masse est indépendante de temps:  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

• Principe d'action et réaction:

Si un point matériel 1 exerce une force  $\vec{F}_1$  sur un point matériel 2, selon la droite (12), alors le point matériel 2 exerce une force  $\vec{F}_2$  égale et opposée à  $\vec{F}_1$  sur le point 1.

Travail d'une force:  $\int dV = \vec{F} \cdot d\vec{s}$  ← travail fait par la force pour déplacer  $\Pi$  de  $P_1$  à  $P_2$   
 $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Le travail total produit dans le champ de force déplaçant  $\Pi$  de  $P_1$  à  $P_2$ .

Puissance:

Puissance instantanée fournie au point matériel pendant  $dt$ :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Si  $\vec{v}$  est la vitesse du point, et  $\vec{F}$  la force s'y appliquant:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## Théorème de l'énergie cinétique

Le travail d'une force le long du parcours  $\mathcal{E}$  de  $P_1$  à  $P_2$  est égal à la différence d'énergie cinétique en  $P_1$  et  $P_2$ :

(T)

$$W = \int_{\mathcal{E}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad (10)$$

(10)

$$W = T_2 - T_1 \quad |$$

### Force dérivant d'un potentiel:

On dit qu'une force dérive d'un potentiel si il existe une fonction scalaire  $V$  telle que:

$$\vec{F} = -\nabla V \quad \text{soit encore} \quad \nabla \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F} = 0$$

- Dans ce cas, le travail de la force pour déplacer le point  $P$  de  $P_1$  à  $P_2$  est indépendant du chemin parcouru, et vaut:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(P_1) - V(P_2) \quad (15)$$

- Un champ de force  $\vec{F}$  continue et dérivable dérive d'un potentiel, si et seulement si

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \text{le long de toute courbe fermée} \quad (\text{i.e. son travail est nul})$$

La fonction scalaire  $V$  s'appelle alors l'énergie potentielle, ou le potentiel.

Le potentiel est défini à une constante près:  $V = - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , où l'on suppose  $V(P_0) = 0$

### Energie totale

On déduit de (10) et (15):  $T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \iff$  Pour un champ de force  $\vec{F}$  dérivant

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1$$

d'un potentiel.

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + V_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + V_1$$

ssi alors, la quantité  $E = T + V$  appelle énergie totale se conserve.

## Impulsion

On appelle impulsion de la force  $\vec{F}$  l'intégrale sur le temps de la force  $\vec{F}$ :

$$P = \int_a^{t_2} \vec{F} dt$$

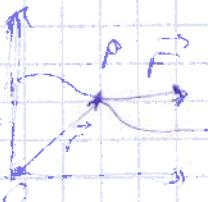
L'impulsion est égale à la variation de quantité de mouvement au cours du temps.

$$\int_a^{t_2} \vec{F} dt = m v_2 - m v_1 = p_2 - p_1$$

En effet:

$$\int_a^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m \vec{v}) dt = \int_{t_1}^{t_2} d(m \vec{v}) = [m \vec{v}]_{t_1}^{t_2} = m v_2 - m v_1$$

Ce théorème reste valable si la masse est variable, et si la force ne dérive pas d'un potentiel.



## Couple et moment cinétique

Le couple, ou moment de la force s'écrit:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Le module de  $\vec{\Gamma}$  caractérise l'effet de rotation produit par la force sur le point P par rapport à O.

On peut démontrer:  $\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(m(\vec{r} \times \vec{v}))$  (2)

On appelle moment cinétique la quantité  $\vec{\Omega} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$  par rapport au point O.

Ainsi, (2) s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \vec{\Omega} = \vec{\Gamma}$$

Le couple est égal à la variation du moment cinétique appliquée sur le point.

Ce théorème est valable si la masse est variable, ou si la force ne dérive pas d'un potentiel.

→ lorsque le couple extérieur agissant sur le point P est nul, ~~alors~~ le moment cinétique ne varie pas (conservation du moment cinétique).

## Systèmes de points matériel

Les principes énoncés précédemment s'appliquent au centre de masse du système de points matériel.

### Liaisons holonomes et non holonomes:

En pratique, le mouvement d'un point ou d'un système de points est souvent limité.  
Par exemple, pour un solide inéférable.

Les limitations du mouvement sont appelées liaisons.

Une liaison est dite holonome si l'existe une équation algébrique caractérisant l'état du système de la forme :

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

avec  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  les vecteurs coordonnées des particules,  $i \in [1, N]$  nombre de particules.

Si l'équation de la contrainte dépend du temps ( $\frac{df}{dt} \neq 0$ ) elle est dite rheonome.

Sinon, scléronome.

### Exemple de contraintes non holonomes:

Un corps M ponduel dont les mouvements sont limités à l'intérieur d'une sphère (de rayon R)

$$10m < R \text{ soit } \|\vec{r}_i - \vec{r}_0\| \leq 0 \quad (\text{ne s'exprime pas } f(\vec{r}_i, t) = 0)$$

• Une masse à l'extrémité d'un ressort :  $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + w_0^2 \vec{x} = 0$ , avec  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(Bauart, p-111)

Soit un système de points matériels :  $\vec{Q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_p(t), t]^T$

$q$ : coordonnées générales

Le nombre de degrés de liberté peut être abaissé par des liaisons, relations de type géométrique, ou cinématique.

Liaison géométrique : stationnaire (scléronome) :  $f_i(q_1, \dots, q_p) = 0$       instationnaire (rheonome) :  $f_i(q_1, \dots, q_p, t) = 0$       :  $F(Q) = 0$ , c'est à dire  $p$  relations

Liaison cinématique (non holonomes) :  $(\alpha) Q' = u$        $\left( \begin{array}{c} \text{polaires} \\ \vdots \\ \text{plan} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{degrés de liberté} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) = 0$        $p$  degrés de liberté respectés       $n + s$  équations.

## • Déplacements virtuels :

Considérons à un instant donné 2 configurations possibles du système, qui soient compatibles avec les forces et les liaisons. Pour passer d'une configuration à une autre, il faut donner au  $i^{\text{me}}$  point matériel un déplacement  $\delta r_i$  de l'ancienne position à la nouvelle. On appelle  $\delta r_i$  déplacement virtuel, pour le distinguer du mouvement réel  $dr_i$ , ayant lieu pendant une intervalle de temps où les forces et les liaisons varient.

## • Principe des travaux virtuels : (Pour un système en équilibre)

Pour qu'un système de points matériels soit en équilibre, la force résultante sur chaque point doit être nulle, i.e.  $\vec{F}_i = \vec{0}$ .

Alors, le travail virtuel  $W_v = \vec{F}_i \cdot \delta r_i = 0$  pour chaque point.

Sommons tous les travaux virtuels :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (\text{avec } N \text{ nb de points dans le système})$$

S'il existe des liaisons ; on peut écrire :  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(A)} + \vec{F}_i^{(R)}$

force appliquée  
au point  $i$       force de liaison

Si l'on suppose que la somme des travaux des forces de liaison est nulle (vrai pour un solide indéformable), et pour les mouvements sur des courbes et des surfaces parfaitement lisses, on obtient :

Principe des travaux virtuels :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(A)} \cdot \delta r_i = 0 \quad (7.14)$$

force appliquée uniquement

- Équilibre dans les champs de force dérivant d'un potentiel; stabilité de l'équilibre

Si  $V$  est le potentiel d'un système de points matériels qui dépendent des coordonnées  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , le système est en équilibre si :  $\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial V}{\partial q_N} = 0$  (31)

La somme des travaux virtuels appliquée sur le système est :

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_N} \cdot \delta q_N = 0$$

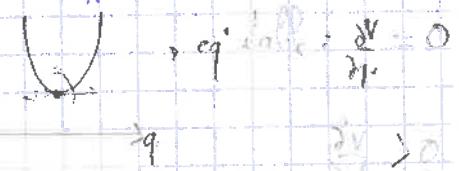
Eq (31) est ainsi équiv

au principe des travaux vir

Un système de points matériels est en équilibre stable, si le potentiel est minimal.

Dans le cas où le potentiel ne dépend que d'une coordonnée, il suffit que :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0$$



Les autres cas d'équilibre sont dits instables.

- Principe de d'Alembert: (Principe des travaux virtuels pour la dynamique)

Le théorème (7.11) ne s'applique qu'à la statique des systèmes. Pour la dynamique,

notons la 2<sup>nde</sup> loi de Newton :  $\vec{F}_v = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{p}_v$  ← accélération du  $v^{th}$  point matériel

soit encore

$$\vec{F}_v - \vec{p}_v = 0$$

Elle dernière équation que le système mobile peut être considéré comme un système

en équilibre, sous l'action d'une force  $\vec{F}_v - \vec{p}_v$ , égale à la force appliquée, et d'une force  $-\vec{p}_v = -\frac{d}{dt}(m\vec{v}_0)$ , appelée force d'inertie appliquée au point  $v_0$ .

On peut ainsi considérer la dynamique comme un cas spécial de la statique.

# Équations de Lagrange

angles, distances, quantités, ...

## • Cordonnées généralisées:

Soit un système de  $N$  points matériel, repéré par  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  coordonnées indépendantes.   
 $n$ : nombre de degrés de liberté du système.

## • Équations de transformation

Dans le repère Oxyz, la vecteur position de la  $i^{\text{e}}$  particule est:  $r_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ .

Passages des coordonnées spatiales aux coordonnées généralisées:

$$\begin{cases} r_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{cases} \quad (2)$$

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (3)$$

$\uparrow$   
vecteur

On suppose que les fonctions intervenant dans (2) et (3) sont continues et dérivées continues.

Si le temps n'intervient pas explicitement dans (2) ou (3): système scléronôme

Si (2) dépend du temps (par ex: mouvement soumis à des liaisons): système rhéonome

Si toutes les liaisons peuvent être représentées par des équations du type  $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$

$\Rightarrow$  Système holonomique. Sinon, non-holonomique.

(On a vu précédemment:  $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad \leftarrow \text{équation d'état}$ )

$\uparrow$   
vecteur  
position

$\downarrow$   
nombre de points matériel dans le système

ici:  $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$

$\uparrow$   
coordonnée  
généralisée

$\downarrow$   
nombre de degrés de liberté

Si toutes les forces agissant sur le système dérivent d'un potentiel:

$\Rightarrow$  Système conservatif. Sinon, non conservatif.

- L'énergie cinétique du système s'écrit :  $T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v^2$  vecteur

On peut l'écrire comme une forme quadratique des vitesses généralisées  $\dot{q}_a$  : (p.18)

### Forces généralisées :

Soit  $W$  le travail total fourni à un système de points matériel par des forces  $F_v$  agissant sur la  $v^{e}$  particule, on a :

$$d\varphi_p = \sum_{a=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_a} \cdot dq_a$$

$$\text{Travail: } dW = \sum_{v=1}^N F_v \cdot dr_v$$

$$= \sum_{v=1}^N \left( \sum_{a=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_a} \cdot F_a \right) dq_a$$

$$dW = \sum_{a=1}^n \varphi_a \cdot dq_a$$

$$\text{avec } \varphi_a = \sum_{v=1}^N F_v \cdot \frac{\partial r_v}{\partial q_a}$$

principe de l'énergie cinétique

Force généralisée associée à la coordonnée généralisée  $q_a$

$r_v$ : vecteur position de la particule  $v$

$q_a$ : coordonnée généralisée, projection sur le degré de liberté  $a$ .

### Équations de Lagrange:

On peut relier l'énergie cinétique  $T$  à la force généralisée  $\varphi_a$  par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \varphi_a \quad (7)$$

$$(\vec{F} = -\vec{\nabla}V)$$

Pour un système conservatif, les forces dérivent d'un potentiel! Ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad (8) \text{ où } L = T - V \text{ est le Lagrangien du système}$$

Les équations de Lagrange sont valables pour des systèmes holonomes, qu'ils soient scléronomes ou rhéonomes.

Si certaines forces dérivent d'un potentiel  $V$ , tandis que d'autres non (par ex, frottements), on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = \varphi_a \quad \text{avec } L = T - V, \text{ et } \varphi_a \text{ les forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel.}$$

## Rappel équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \phi_k$$

(Équations du 2<sup>nd</sup> ordre par rapport aux positions  $q_k$  et aux dérivées  $\dot{q}_k$ )

Si les forces dérivent d'un potentiel (système conservatif):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

avec  $L = T - V$

équation

potentiel

$$L = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 - V$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2}{2} m \ddot{v} = m \ddot{v}$$

$$\text{éq. de Lagrange: } \frac{d}{dt} m \ddot{v} + F = 0$$

Supposons qu'il existe  $m$  liaisons de la forme: (avec  $m < n$ , degrés de libertés)

$$\sum_k A_k \dot{q}_k + A dt = 0, \quad \sum_k B_k \dot{q}_k + B dt = 0,$$

Soit encore

$$\sum_k A_k \dot{q}_k + A = 0, \quad \sum_k B_k \dot{q}_k + B = 0,$$

On peut remplacer les équations de Lagrange par:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \phi_k + \lambda_1 A_k + \lambda_2 B_k + \dots$$

où les  $m$  paramètres  $\lambda_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange.

Si les forces dérivent d'un potentiel:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \lambda_1 A_k + \lambda_2 B_k + \dots$$

quantité de mouvement généralisée:

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

variables généralisées

Si le système est conservatif et que  $T$  ne dépend que des  $q_k$ :

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

## Équations de Lagrange des systèmes non holonomes :

→ (Rappel : holonome si l'existe  $\phi(q_1, \dots, q_n, t) = 0$ )  
l'ordre de liberté

Si il existe m liaisons de la forme :  $\sum_a A_a dq_a + A dt = 0$  (3)  
soit encore  $\sum_a A_a \dot{q}_a + A = 0$  (4)

Alors on peut écrire les équations de Lagrange en faisant intervenir m multiplicateurs de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \varphi_a + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1 + \lambda_3 C_1 + \dots + \lambda_m M_1 \quad (5)$$

Si que les forces dérivent d'un potentiel :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = \varphi_a + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1 + \dots + \lambda_m M_1$$

Cette formulation reste valable pour des systèmes holonomes. En effet, on peut toujours écrire une liaison  $\phi(q_1, \dots, q_n, t) = 0$  sous la forme :

$$\sum_a \frac{\partial \phi}{\partial q_a} dq_a + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = 0, \text{ qui est bien de la forme (3)}$$

Les multiplicateurs de Lagrange caractérisent les m liaisons du système non-holonomes, au sein des équations de Lagrange.

## Équations de Lagrange pour des percussions:

Supposons que les forces  $F_i$  agissant sur un système soient telles que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} F_i dt = g_i \quad \text{où } \Delta t \text{ est l'intervalle de temps.}$$

On appelle  $g_i$  une percussion ( $\approx$  travail temporel?)

Les indices 1 et 2 représentent les quantités avant, et après percussion :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right)_2 - \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right)_1 = \tilde{F}_i \quad \text{avec } \tilde{F}_i \text{ les impulsions généralisées.}$$

$$\tilde{F}_i = \sum_j g_{ij} \cdot \frac{\partial v}{\partial q_i}$$

Variation de la quantité de mouvement généralisée = impulsion généralisée

## Mécanique Hamiltonienne

Rappels: Lagrangien:  $L = T - V$

$$Eqs de Lagrange pour un système conservatif: \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{eq par degré de libat})$$

On définit le Hamiltonien  $H$  à partir du Lagrangien: (transformée de Legendre)

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (1)$$

$$(T_{\text{canonique}} = p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2 \text{ convexes})$$

avec  $p_i$  quantité de mouvement généralisée:  $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2$$

Le Hamiltonien dépend des quantités de mouvement généralisées, et des coordonnées généralisées  $q_i$   
 (On peut éliminer les vitesses généralisées  $\dot{q}_i$  dans (1)) (en utilisant les eqs de Lagrange)

$$H = H(p_i, q_i, t)$$

Les équations du mouvement s'écrivent:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

Équations de Hamilton.

(équations du 1<sup>er</sup> degré, contrairement aux eqs de Lagrange)

Pour un système conservatif:  $H = T + V$  : Energie totale

$$E_C \hookrightarrow E_T$$



## Formulation Hamiltonienne

Le Hamiltonien se définit :  $H = \sum_{a=1}^n p_a \dot{q}_a - L$

avec  $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$  quantité de mouvement généralisée.  $= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$  si système conservatif

$\checkmark$  énergie cinétique

$q_i$ : vitesse généralisée

$L = T - V$  : Lagrangien (Energie cinétique - le potentiel)

Le Hamiltonien est une fonction des coordonnées généralisées, et des quantités de mouvement généralisées.

$$H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) = H(p_a, q_a, t)$$

Équations de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}(p_a, q_a) \\ \dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}(p_a, q_a) \end{cases} \quad (3)$$

Lorsque le système est conservatif, on peut interpréter le Hamiltonien comme son énergie totale (cinétique et potentielle), soit :

$$H = T + V$$

On appelle coordonnée cachée  $q_a$  une coordonnée qui n'apparaît pas explicitement dans le Lagrangien.

$$\text{On a alors : } \dot{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0$$

et  $p_a$  est une constante, que l'on appelle constante du mouvement.

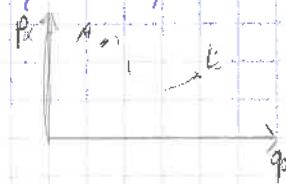
On a aussi dans ce cas :

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = 0$$

## Espace des phases

Il est commode d'imaginer un espace à  $2n$  dimensions dans lequel un point est repéré par les  $2n$  coordonnées :  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$

C'est l'espace des phases.



Si donc le système se déplace dans l'espace à 3 dimensions :

son point représentatif décrit une courbe, obéissant aux éqs. (3).

## Théorème de Liouville

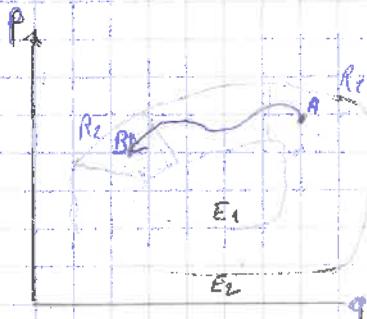
conservatifs

Soit un grand nombre de systèmes ayant le même Hamiltonien. Il est représentatif de l'énergie totale, ici constante :  $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = E = \text{de}$

ce que l'on peut représenter par une surface dans l'espace des phases.

On suppose que les énergies de tous les systèmes

sont comprises entre  $E_1$  et  $E_2$ . Les trajectoires de l'évolution des systèmes sont comprises entre les 2 surfaces  $H = E_1$  et  $H = E_2$ .



Supposons les systèmes se trouvent initialement dans la région  $R_1$ , et situés dans la région  $R_2$  au temps  $t$ .

## Théorème de Liouville:

Les volumes à  $2n$  dimensions  $R_1$  et  $R_2$  sont égaux.

Sait-on : En appelant densité le nombre de points par unité de volume, la densité est constante.

Dedukt, brinide

## Calcul des variations:

Un problème usuel est de trouver une courbe  $y = Y(x)$  reliant 2 points  $x=a$  et  $x=b$  de telle sorte que l'intégrale  $\int_a^b F(x, y, y') dx$  soit extrémale (avec  $y' = \frac{dy}{dx}$ )

On peut montrer qu'une condition nécessaire pour que cette intégrale ait un extrémum est :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (g)$$

que l'on appelle équation d'Euler. Ce problème fait partie des calculs des variations (ou de Lagrange).

## Principe de Hamilton:

La ressemblance de (g) avec les équations de Lagrange amène à se poser de déterminer les trajectoires qui rendent extrémales la quantité :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt$$

avec  $L$  le Lagrangien.

Des conditions nécessaires pour que  $I$  soit extrémale sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0, \text{ qui sont justement les équations de Lagrange}$$

Principe de Hamilton: Un système mécanique conservatif évolue au cours du temps de façon à rendre extrémales la quantité

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (h)$$

que l'on appelle l'action.

Si l'extrémum de (h) est souvent un minimum, on appelle aussi ce principe "principe de moindre action".

On symbolise le fait que (h) soit extrémale par :  $\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_a, \dot{q}_a, t) dt = 0$

Rappel:  $p_x = \frac{dt}{dq_x} = \frac{\partial L}{\partial q_x}$  pour 1 système conservatif

## Transformations canoniques

Il peut être utile de vouloir changer de système de coordonnées généralisées.

Soient  $p_x, q_x$  les anciennes coordonnées généralisées de type de mouvement et de position,  $P_x, Q_x$  les nouvelles. La transformation est:

$$P_x = P_x(p_x, q_x, t), \quad Q_x = Q_x(p_x, q_x, t) \quad (15)$$

Nous nous intéressons aux transformations dites "canoniques", pour lesquelles il existe une fonction  $\mathcal{H}$  telle que:

$$\mathcal{H}(P_x, Q_x, t)$$

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_x}, \quad \dot{Q}_x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x}$$

Les coordonnées  $P_x, Q_x$  sont alors les coordonnées canoniques.

Les Lagrangiens en fonction des anciennes et nouvelles coordonnées sont:

/  $L(p_x, q_x, t)$  et  $\mathcal{L}(P_x, Q_x, t)$ . Ils sont liés aux Hamiltoniens  $H(P_x, Q_x, t)$ .  
Pourquoi pas  $L(Q_x, \dot{q}_x, t)$ ?

et  $\mathcal{H}(P_x, Q_x, t)$  par les équations:

$$H = \sum_{a=1}^n p_a \dot{q}_a - L$$

$$\mathcal{H} = \sum_{a=1}^n P_a \dot{Q}_a - \mathcal{L}$$

Le changement de coordonnées (15) est une transformation canonique si:

$$\sum_{a=1}^n p_a dq_a - \sum_{a=1}^n P_a dQ_a \text{ est une différentielle totale}$$

Fonction génératrice:

D'après le principe de Hamilton, la transformation (15) doit être telle que  $\int_L dt$  et  $\int \mathcal{L} dt$  soient toutes les deux extrémales, soit  $S \int_L dt = S \int \mathcal{L} dt = 0$

Cette condition est satisfaite si l'il existe une fonction  $\mathcal{G}$  telle que

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = L - \mathcal{L}$$

$\mathcal{G}$  est une fonction génératrice

$$S \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \text{et} \quad S \int_{t_1}^{t_2} \dot{S} dt = 0$$

par soustraction  $S \int_{t_1}^{t_2} (L - \dot{S}) dt = 0$  mais si  $L - \dot{S} = \frac{d\dot{S}}{dt}$

alors  $S \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\dot{S}}{dt} dt = S [\dot{S}(t_2) - \dot{S}(t_1)] = 0$   $\dot{S}$  est la fonction génératrice.

Rappel :  $\frac{d\dot{S}}{dt} = L - \dot{S}$  avec  $L = L(p_x, q_x, t)$   
 $\dot{S} = \dot{S}(p_x, q_x, t)$

$\dot{S}$  est la fonction génératrice.

Si on peut écrire cette fonction génératrice  $\dot{S}$  en fonction de  $q_x$  et  $p_x$ , on la note :

$$\dot{S} = \dot{S}(q_x, p_x, t)$$

On peut montrer que :

(23)

$$p_x = \frac{\partial \dot{S}}{\partial q_x}$$

$$q_x = \frac{\partial \dot{S}}{\partial p_x}$$

$$\dot{S}'(p_x, q_x, t) = \dot{S} + H(p_x, q_x, t)$$

avec

$$\dot{p}_x = - \frac{\partial \dot{S}}{\partial q_x}$$

$$\dot{q}_x = \frac{\partial \dot{S}}{\partial p_x}$$

(24)

### Équation de Hamilton-Jacobi

Si on peut trouver une transformation canonique telle que  $\dot{S}'(p_x, q_x, t) = 0$ , on voit par (24) que  $p_x$  et  $q_x$  sont constants ( $p_x$  et  $q_x$  sont des coordonnées cachées).

On peut trouver  $p_x$  et  $q_x$  par la transformation, et donc le mouvement du système.

Il nous faut trouver la bonne fonction génératrice.

D'après la 3<sup>e</sup> eq de (23), avec  $\dot{S}' = 0$ , il vient :

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial q_x} + H(p_x, q_x, t) = 0$$

Équation de Hamilton-Jacobi

ou :  $\frac{\partial \dot{S}}{\partial q_x} + H(\frac{\partial \dot{S}}{\partial p_x}, q_x, t) = 0$

## éqP Hamilton-Jacobi:

Si on a  $\frac{\partial f}{\partial t}(p_a, q_a, t) = 0$ ,  $p_a, q_a$  sont constantes

et :

$$\frac{\partial f(q_a, p_a, t)}{\partial t} + H(p_a, q_a, t) = 0 \quad (25)$$

ou

$$\frac{\partial f(q_a, p_a, t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial f}{\partial q_a}, q_a, t\right) = 0 \quad (26)$$

## Solution de l'équation de Hamilton-Jacobi:

L'équation fait intervenir  $n+1$  variables ( $q_1, \dots, q_n$  et  $t$ ), la solution contient  $n+1$  constantes.

On laisse tomber une constante additive arbitraire, et on note les  $n$  autres  $\beta_1, \dots, \beta_n$  (ancienne n'étant additive). On peut écrire la solution sous la forme :

$$f = f(q_1, \dots, q_n, \beta_1 - \beta_2, t) \quad (27)$$

Quand on a obtenu cette expression solution, on peut déterminer les anciennes coordonnées de qualité de mouvement par :

$$p_a = \frac{\partial f}{\partial q_a} \quad (28)$$

De plus, si on identifie les  $\frac{p_a}{\beta_a}$  avec les  $\beta_a$ , on a :

$$q_a = \frac{\partial f(q_a, p_a, t)}{\partial p_a} = \tau_a \quad \text{où les } \tau_a \text{ sont des constantes.} \quad (29)$$

Et l'aide des relations (27) à (29), on peut exprimer les positions généralisées  $q_a$  comme des fonctions des  $\beta_a$ ,  $\tau_a$  et de  $t$ , ce qui nous donne le mouvement du système.

## Éqs du Hamiltonien indépendant du temps

Il peut être utile de chercher la solution sous la forme :

$$g(q_1, q_2, p_1, \dots, p_n, t) = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n) + F(t) \quad (\text{separation des variables})$$

on trouve alors  $F(t) = -Et$ .

En posant  $S = S_1(q_1) + \dots + S_n(q_n)$ , l'éq (26) se réduit à :

$$H\left(\frac{\partial S(q)}{\partial q_a}, q_a\right) = E \quad (32)$$

où  $E$  est une constante, représentant l'énergie du système.

On peut obtenir directement l'éq (32) en cherchant une fonction génératrice indépendante du temps. Les éqs (23), (24) sont alors remplacées par :

$$p_a = \frac{\partial S(q)}{\partial q_a}$$

$$Q_a = \frac{\partial S(q)}{\partial P_a}$$

$$g = H = E$$

avec

$$\dot{P}_a = -\frac{\partial g}{\partial Q_a}$$

$$\dot{Q}_a = \frac{\partial g}{\partial P_a}$$

## Variables d'action et Variables angulaires

La méthode de Hamilton est utile pour l'étude des systèmes périodiques. La projection sur tout plan  $(p_a, q_a)$  de la trajectoire du point représentant l'état du système forme une courbe fermée  $C_x$ .

On appelle variable d'action l'intégrale curviligne :  $I_a = \oint_{C_x} p_a dq_a$

Appel :  $\frac{\partial g}{\partial t}(q_a, p_a, t) + H(p_a, q_a, t) = 0 \quad (25)$

(Équation de Hamilton-Jacobi)

$$\frac{\partial g}{\partial t}(q_a, p_a, t) + H\left(\frac{\partial g}{\partial q_a}, q_a, t\right) = 0 \quad (27)$$

On peut montrer que  $S$  peut s'écrire sous la forme:

$$S = S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n) \quad (36)$$

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial q_a}$$

$$Q_a = \frac{\partial S}{\partial I_a}$$

(Voir Sanders JFI 2024 pour Noether-Stokes)