Grundkurs für Excel Part IV

Nico Ludwig

Themen

- Von linearen zu quadratischen Gleichungssystemen
- Verschiedene Möglichkeiten quadratische Gleichungssysteme grafisch zu lösen
- Koordinatensysteme für quadratische Graphen mit Excels Liniendiagrammen erstellen und Gleichungen damit grafisch lösen
- Grafische Interpretation der Lösungen von Normalparabel-Gerade Kombinationen

Quadratische Gleichungssysteme

- Das Lösen von LGS ist nach etwas Übung relativ einfach.
  - Das Lösungsverfahren, ob rechnerisch oder grafisch, ist immer gleich.
  - Die Veranschaulichung als Graph ist besonders eingängig und verständlich.
  - Mit Excel, das WT und Diagramme unterstützt, sind LGS kein Problem.

- Darauf aufbauend wollen mir uns jetzt noch ein anderes GS anschauen.
  - Wir werden nun <u>quadratische</u>, also <u>nicht-lineare</u> GS lösen (QGS).
  - Hierbei können wir Excel <u>genauso</u> einsetzen, wie bei den LGS.

Quadratische Gleichungssysteme lösen – Part I

- Ein QGS, ist ein GS, in dem eine Unbekannte vorkommt, die quadriert wird.
  - Wir verwenden wieder zwei Gleichungen, um das zu besprechen:

$$I \quad x^2 - 2x = -8$$
$$II \quad -x^2 + x = -7$$

  - Wir können die Gleichungen direkt einheitlich (y_1 und y_2) umformen, das ist recht einfach:
    - (Das geht mit einer gewöhnlichen Äquivalenzumformung.)

$$y_1 = \quad x^2 - 2x + 8$$
$$y_2 = -x^2 + x + 7$$

- Eigentlich ist das QGS dem LGS ziemlich ähnlich.
  - Es ist aber ein sogenanntes "quadratisches Glied" hinzugekommen.
  - Wir müssen gleich noch ein paar mathematische Fachbegriffe einführen.
  - Wir werden in diesem Kurs jedoch keine QGS rechnerisch lösen, sondern nur ein paar Ansätze besprechen!

Quadratische Gleichungssysteme lösen – Part II

- Wir müssen zunächst noch klären, was die Gliederung einer Gleichung ist.
  - Allgemein hat eine quadratische Gleichung folgenden Aufbau:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

    - ax^2 heißt quadratisches Glied. Es hat den Koeffizienten a, d.h. lediglich, dass x^2 mit a multipliziert wird.
    - bx ist das lineare Glied mit dem Koeffizienten b. Wir kennen es schon von den linearen Gleichungen.
      - Eine quadratische Gleichung mit linearem Glied wird auch als gemischt quadratisch bezeichnet.
    - c ist das Absolutglied, welches wir auch bei linearen Gleichungen finden.
      - Das Absolutglied ist nicht veränderlich, da es von x gar nicht erst abhängt!
  - Also gliedern wir den Term unserer Gleichung y_1 "auseinander":

$$x^2 - 2x + 8$$

    - x^2 ist das quadratische Glied, es hat keinen Koeffizienten, d.h. aber nur das der Koeffizient den Wert 1 hat
    - -2x ist das lineare Glied, es hat den Koeffizienten -2.
    - Und letztlich ist die 8 das Absolutlied.

Gut zu wissen:
Wenn ein Glied den Koeffizienten 1 hat, sagt man das Glied ist in der Normalform. Der Koeffizienten 1 wird ja einfach weggelassen, denn die Multiplikation mit 1 ist neutral. Also in unserem y_1 ist das quadratische Glied in der Normalform.

Quadratische Gleichungssysteme lösen – Part III

- Wir besprechen jetzt <u>drei Auffassungen</u>, wie die Lösung von quadratischen Gleichungen <u>rechnerisch</u> formuliert werden kann.
- (1) Ein GS von mindestens zwei quadratischen Gleichungen lösen -> <u>wir suchen wieder die gemeinsame(n) Stelle(n)</u>, für die beides zutrifft:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 - 2x + 8 \\ y_2 &= -x^2 + x + 7 \end{aligned}$$

- (2) Umformung/<u>Zusammenfassung der Gleichung, so dass die Nullstelle(n) ermittelt werden</u>.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 8 &= -x^2 + x + 7 && | -7 \\ x^2 - 2x + 1 &= -x^2 + x && | -x \\ x^2 - 3x + 1 &= -x^2 && | +x^2 \\ \underline{\underline{2x^2 - 3x + 1}} &\underline{\underline{= 0}} \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungssysteme lösen – Part IV

- (3) Das quadratische Glied in der Normalform alleinstellen, dann haben wir eine lineare und eine quadratische "Normalgleichung" auf den jew. Seiten des =:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x + 8 &= -x^2 + x + 7 && |-7 \\
x^2 - 2x + 1 &= -x^2 + x && |-x \\
x^2 - 3x + 1 &= -x^2 && |-x^2 \\
-3x + 1 &= -2x^2 && |:-2 \\
\underline{\underline{\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}}} &\underline{\underline{= x^2}}
\end{aligned}
$$

quadratische Gleichung (Normalform): $y = x^2$

lineare Gleichung: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

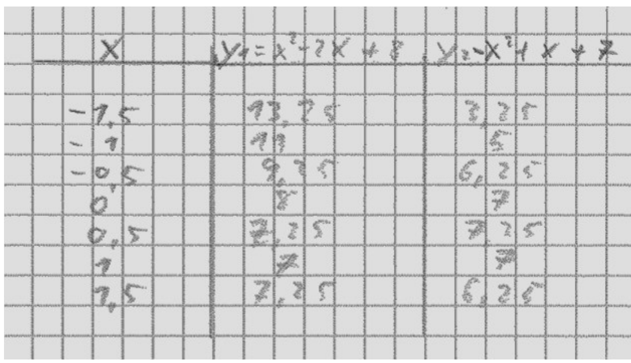
- Alle Lösungsansätze lassen sich mit mathematischen Verfahren lösen.
  - Es wurde eben angedeutet, dass QGS sogar mehrere Lösungen haben können!

- Wir werden sie aber mit Excel, WT und Diagrammen grafisch lösen.
  - Also, wie versprochen: wir werden sie nicht rechnerisch lösen!

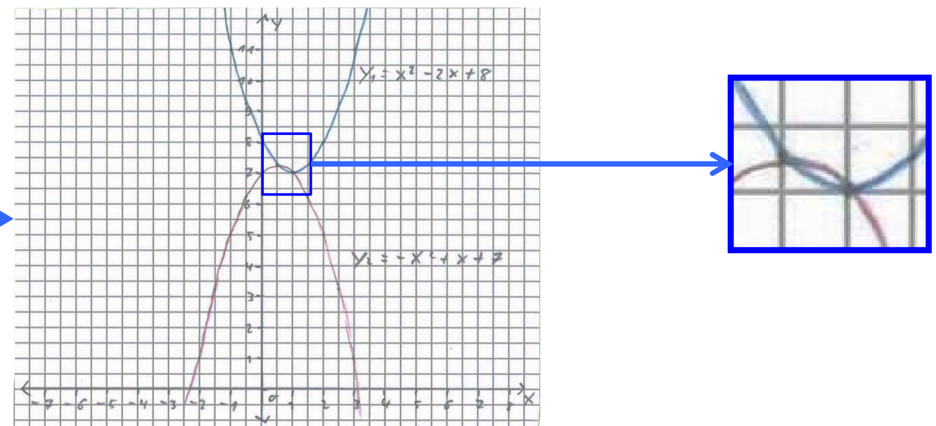
Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part I

- Ansatz (1): Suche einer gemeinsamen Stelle zweier quadratischer Gleichungen:

$$y_1 = \quad x^2 - 2x + 8$$
$$y_2 = -x^2 + x + 7$$



X	$y_1 = x^2 - 2x + 8$	$y_2 = -x^2 + x + 7$
-1,5	13,25	3,25
-1	11	5
-0,5	9,25	6,25
0	8	7
0,5	7,25	7,25
1	7	7
1,5	7,25	6,25

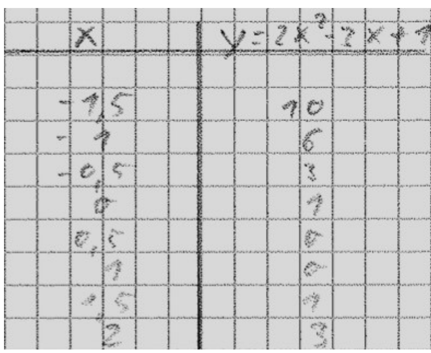


- An WT und dem Graphen erkennt man, dass es <u>zwei gemeinsame Punkte</u> gibt!
  - Es handelt sich um <u>keine lineare Gleichungen</u>: Die Graphen quadratischer Gleichungen stellen <u>Kurven</u> dar!
  - Die Graphen quadratischer Gleichungen heißen <u>Parabeln</u>.
  - Die <u>Schnittpunkte der Parabeln</u> liegen bei S_1(0,5, 7,25) und S_2(1, 7).

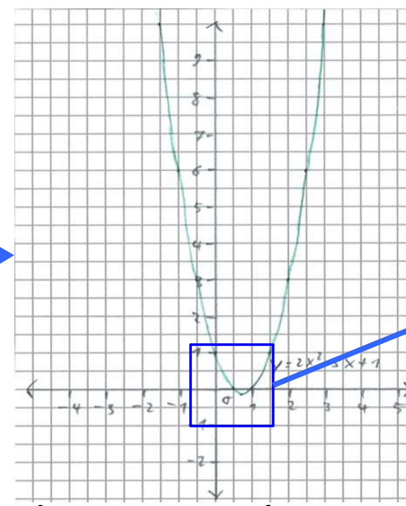
Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part II

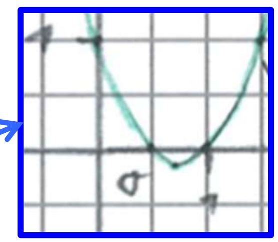
- Ansatz (2): Nullstellensuche der zusammengefassten quadratischen Gleichung:

$$y_1 = \quad x^2 - 2x + 8 \qquad\qquad \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$y_2 = -x^2 + x + 7$$



x	y=2x²-3x+1
-1,5	10
-1	6
-0,5	3
0	1
0,5	0
1	0
1,5	1
2	3



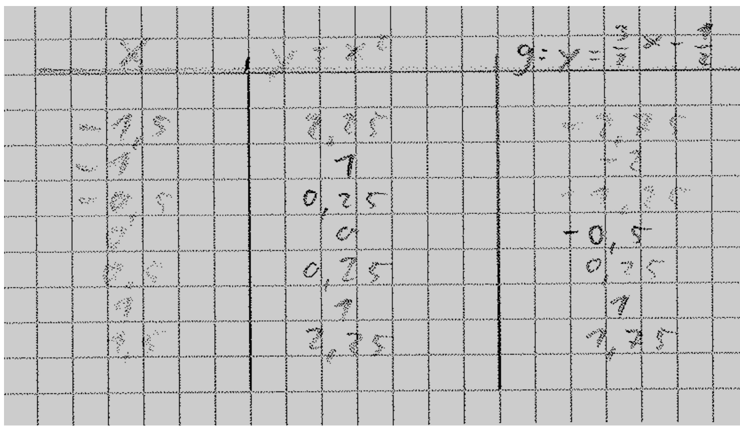


- An WT und Graph erkennt man, dass es <u>auch zwei Nullstellen</u> gibt!
  – => Also gibt es zwei Lösungen: die Stellen x_1 = 0,5 und x_2 = 1.
  – Eingesetzt in y_1: $0{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}5 + 8 = 7{,}25$; $1^2 - 2 \cdot 1 + 8 = 7$=> P_1(0,5, 0,75) und P_2(1, 7).

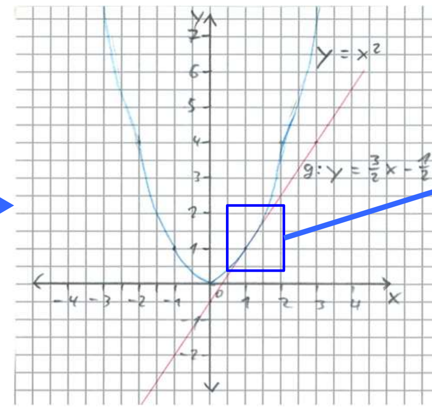
Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part III

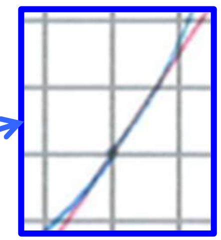
- Ansatz (3): quadratisches Glied in der Normalform und lineare Gleichung:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 - 2x + 8 \\ y_2 &= -x^2 + x + 7 \end{aligned} \Rightarrow x^2 - 2x + 8 = -x^2 + x + 7 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{aligned} y &= x^2 \\ g: y &= \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$



x	$y = x^2$	$g: y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
-1,5	2,25	-2,75
-1	1	-2
-0,5	0,25	-1,25
0	0	-0,5
0,5	0,25	0,25
1	1	1
1,5	2,25	1,75

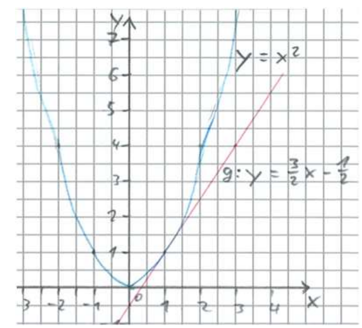




- An den Graphen ist die Lösung <u>kaum zu erkennen</u>, aber die <u>WT gibt Aufschluss</u>!
  - Wieder die Bestätigung: Die Schnittpunkte von Parabel/Gerade liegen auch hier bei x_1= 0,5 und x_2 = 1.
  - Für y_1 ergibt sich: $0{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}5 + 8 = 7{,}25;\ 1^2 - 2 \cdot 1 + 8 = 7$ => P_1(0,5, 0,75) und P_2(1, 7).

Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part IV

- Wir verwenden den Ansatz quadratisches Glied in Normalform und lineare Gleichung.

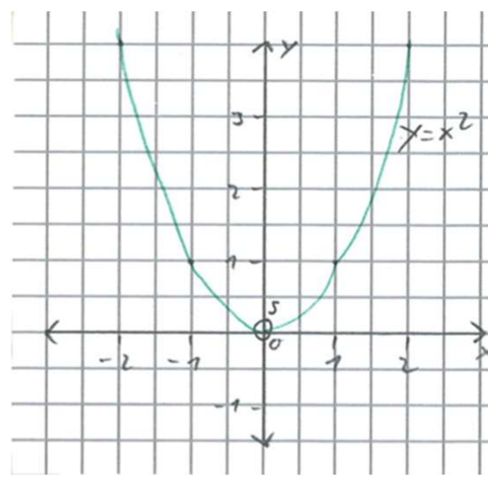


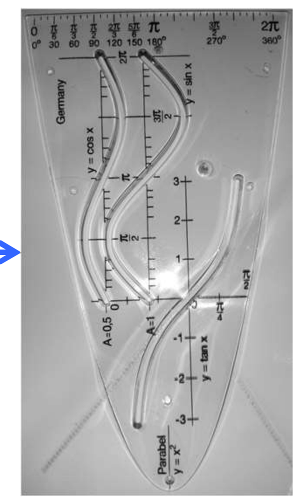
- Gründe:
  - Simples Zeichnen der Graphen
    - Die normalisierte Form des quadratischen Gliedes sieht immer so aus: $y = x^2$
    - Der Clou: die Parabel des normalisierten quadratischen Gliedes sieht auch immer gleich aus, sie heißt Normalparabel.
    - Für das Einzeichnen der Normalparabel kann man immer die selbe Schablone verwenden!
    - Die "Spitze" der Normalparabel, der Scheitelpunkt, sitzt immer am selben Punkt (0, 0), dem Ursprung des KS (O).
      - Ursprungspunkt des KS wird mit einem großen O bezeichnet (lat. origio = Ursprung).
    - Die Normalparabel ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
    - Das Einzeichnen des Graphen der linearen Gleichung ist mit dem Lineal sowieso einfach.
  - Die Lösungen dieses GS kann man an den beiden Graphen (Gerade und Parabel) gut veranschaulichen.
    - Dazu später mehr!
  - Der Ansatz bietet eine gute Basis, um noch komplexere Gleichungen/GS zu lösen.
    - Wir schauen uns auch hierzu später noch ein Beispiel an!

Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part V

- Wenn wir eine Normalparabel von Hand zeichnen, sieht das schrecklich aus:
  - Immerhin können wir in etwa den Verlauf, die Symmetrie zur y-Achse und den Scheitelpunkt S(0, 0) erkennen.
  - Für KS mit der Dimensionierung 1LE ≙ 1cm gibt es eine Normalparabelschablone im Handel.
  - Die Graphen mit der Normalparabel-Schablone sehen dann "glatt" aus!
- Aber ... Eins nach dem anderen!

$y = x^2$





Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part VI

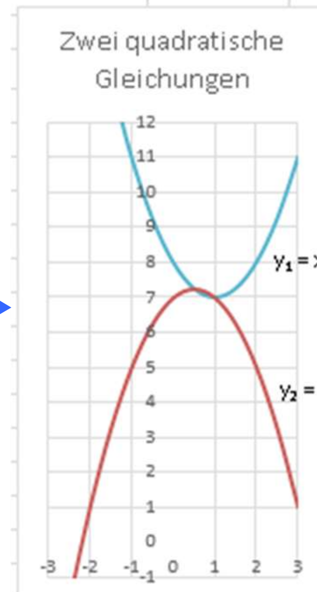
- Der Vollständigkeit halber, setzen wir erst mal Ansatz (1) mit Excel um.
  - D.h. zwei quadratische Gleichungen.

$$y_1 = \quad x^2 - 2x + 8$$
$$y_2 = -x^2 + x + 7$$

x	$y_1 = x^2 - 2x + 8$	$y_2 = -x^2 + x + 7$
-1,5	13,25	3,25
-1	11	5
-0,5	9,25	6,25
0	8	7
0,5	7,25	7,25
1	7	7
1,5	7,25	6,25

=B5^2-2*B5+8

x	$y_1 = x^2 - 2x + 8$	$y_2 = -x^2 + x + 7$
-4	32	-13
-3,5	27,25	-8,75
-3	23	-5
-2,5	19,25	-1,75
-2	16	1
-1,5	13,25	3,25
-1	11	5
-0,5	9,25	6,25
0	8	7
0,5	7,25	7,25
1	7	7
1,5	7,25	6,25
2	8	5
2,5	9,25	3,25
3	11	1
3,5	13,25	-1,75

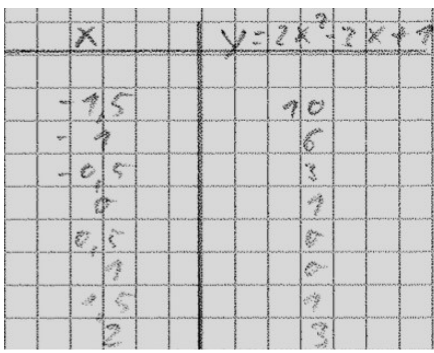


- Achtung: in einer Excel-Formel schreiben wir anstatt x^2 x^2, bzw. B5^2.

Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part VII

- Der Vollständigkeit halber, setzen wir auch noch Ansatz (2) mit Excel um.
  - D.h. Nullstellensuche der zusammengefassten quadratischen Gleichung.

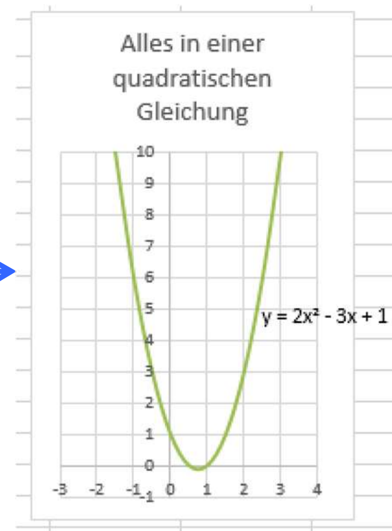
$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$



x	y = 2x² - 3x + 1
-1,5	10
-1	6
-0,5	3
0	1
0,5	0
1	0
1,5	1
2	3

fx = 2*B5^2-3*B5 +1

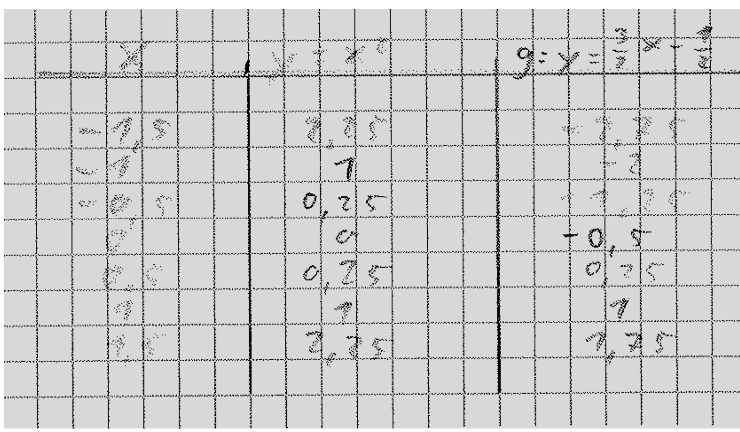
B	C
x	y = 2x² - 3x + 1
-4	45
-3,5	36
-3	28
-2,5	21
-2	15
-1,5	10
-1	6
-0,5	3
0	1
0,5	0
1	0
1,5	1
2	3
2,5	6
3	10
3,5	15



Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part VIII

- Nun setzen wir auch den Ansatz (3), den wir weiter besprechen wollen, mit Excel um.
  - D.h. <u>quadratisches Glied in Normalform und lineare Gleichung</u>.

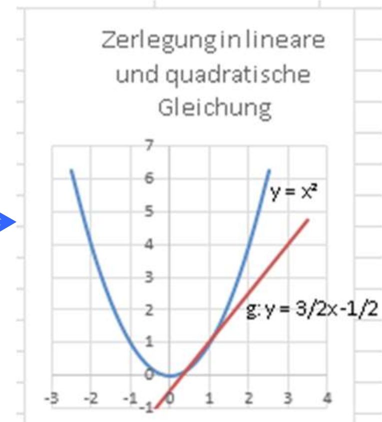
$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = x^2 \Rightarrow \begin{array}{c} y = x^2 \\ g: y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{array}$$



x	$y = x^2$	$g: y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
-1,5	2,25	-2,75
-1	1	-2
-0,5	0,25	-1,25
0	0	-0,5
0,5	0,25	0,25
1	1	1
1,5	2,25	1,75

f_x =B5^2

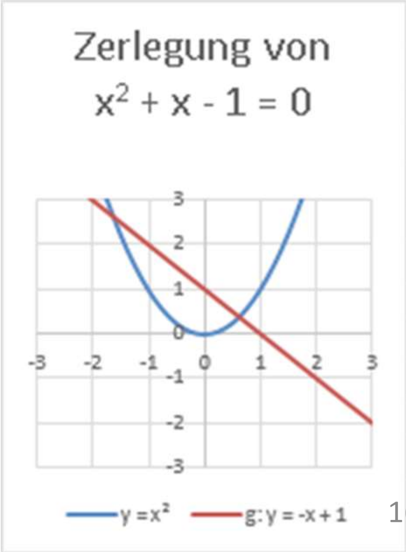
B	I	J
x	y = x²	g: y = 3/2x - 1/2
-4	16	-6,5
-3,5	12,25	-5,75
-3	9	-5
-2,5	6,25	-4,25
-2	4	-3,5
-1,5	2,25	-2,75
-1	1	-2
-0,5	0,25	-1,25
0	0	-0,5
0,5	0,25	0,25
1	1	1
1,5	2,25	1,75
2	4	2,5
2,5	6,25	3,25
3	9	4
3,5	12,25	4,75



Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part IX

- Also, der Ansatz quadratisches Glied in Normalform und lineare Gleichung ermöglicht es die Lösungen eines QGS gut zu veranschaulichen.
  - => Die Normalparabel/Gerade Graphenkombination kennt nur einfache Varianten.
    - Insbesondere hat die Normalparabel ihren Scheitelpunkt immer am Ursprung des KS!

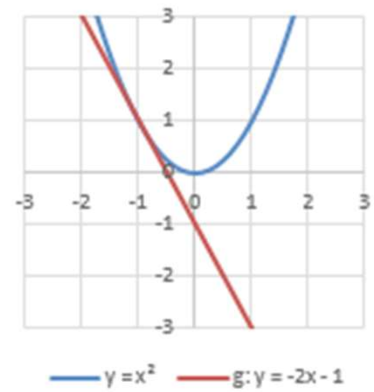
- Variante 1: existieren zwei Lösungen.
  - Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten.
  - Man sagt: "Die Gerade ist eine Sekante der Parabel."
    - lat. secare = schneiden
  - Die Sekante schließt mit der Parabel eine Segmentfläche ein.
    - Sie wird in der BWL auch manchmal als "Linse" bezeichnet.



Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part X

- Variante 2: existiert <u>genau eine Lösung</u>.
  - Die Gerade <u>berührt die Parabel</u> in <u>genau einem Punkt</u>.
  - Man sagt: "Die Gerade ist eine <u>Tangente</u> der Parabel."
    - lat. tangere = berühren

Zerlegung von
$x^2 + 2x + 1 = 0$



Quadratische Gleichungssysteme grafisch lösen – Part XI

- Variante 3: existiert <u>gar keine Lösung</u>:
  - Die Gerade <u>verläuft an der Parabel vorbei</u>.
  - Man sagt: "Die Gerade ist eine <u>Passante</u> der Parabel."
    - frz. passer = vorbeigehen

Zerlegung von

$x^2 + 2x + 3 = 0$