Grundkurs für Excel Part V

Nico Ludwig

Themen

- Von Gleichungen zu Funktionen

- Überblick über ganzrationale Funktionen

- Koordinatensysteme für Graphen ganzrationaler Funktionen mit Excels Liniendiagrammen erstellen

- Einfache Analyse ganzrationaler Funktionen anhand deren Graphen

Von Gleichungen zu Funktionen – Part I

- Nun ist es soweit die Idee der Gleichungen noch etwas weiter zu denken.

- Die bisherigen Gleichungen liefern <u>zu einer Stelle (x) stets genau einen Wert (y)</u>.
  - => Diese Gleichungen definieren sogenannte <u>eindeutige Abbildungen</u>.

- Eindeutige Abbildungen bilden die <u>Grundlage für mathematische Funktionen</u>.

- <u>Alle unsere bisherigen Gleichungen können als Funktionen formuliert werden!</u>

Von Gleichungen zu Funktionen – Part II

- Für m. Funktionen hat sich eine etwas <u>andere Schreibweise</u> entwickelt.
- Anstatt $y = x^2 - 2x + 8$ schreibt/spricht/liest man auch:
  - "Die Funktion f wird definiert durch x wird zugeordnet x Quadrat plus zwei x plus acht":
  $$f\colon x \longmapsto x^2 - 2x + 8$$
  - Oder auch "f von x gleich x Quadrat plus zwei x plus acht":
  $$f(x) = x^2 - 2x + 8$$
- Die letztere Schreibweise "f von x" <u>werden wir ab jetzt benutzen</u>.
  - <u>Warum?</u> Naja, weil wir uns mit dieser Schreibweise viel besser ausdrücken können!
  - Statt "Welchen Wert hat f an der Stelle fünf?" fragen wir jetzt "Welchen Wert hat f von fünf?", oder eben "Welchen Wert hat f(5)?"

Von Gleichungen zu Funktionen – Part III

- Hier noch weitere Beispiele: die neue Schreib- und Sprechweise ergibt Sinn!

- (1) "Die Fläche eines Quadrates ist eine Funktion seiner Seitenlänge.":
  - Oder: Quadratfläche(Seitenlänge) = Seitenlänge^2
  - Und wir sehen auch: die Quadratfläche ist von der Seitenlänge abhängig.

- (2) Excel nutzt die gleiche Schreibweise für seine Funktionen, z.B. SUMME(A1:B4).
  - "Die Summe von Bereich A1:B4".

$$g(x) = 4x^2 + 7x - 23$$

- (3) g ist auch eine Funktion, sie heißt nur g und nicht f!
  - Also: "g von x gleich vier x hoch zwei plus sieben x minus dreiundzwanzig"

Die Begriffswelt der Funktionen

- Die Gliederung von Gleichungen wird jetzt noch etwas weiter formalisiert.
- Mit der Einführung von Funktionen müssen wir neue Begriffe einführen:

  $y = ax^2 + bx + c \;\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ Beispiel: $f(x) = x^2 - 2x + 8$

  - Der Gleichungsterm dieser Funktion, $x^2 - 2x + 8$, wird als Polynom bezeichnet.
    - Das Wort "Polynom" kommt aus dem Griechischen und bedeutet "vielnamig". Vergl. auch "Binom" für "zweinamig".
    - Polynome sind endliche Summengleichungen von Produkten von Potenzen natürlicher Exponenten einer Unbekannten.
  - Formal werden Polynome anhand der größten vorkommenden Potenz in Grade eingeteilt:
  - => Das Polynom $x^2 - 2x + 8$ ist also ein Polynom zweiten Grades.
  - => Die Funktion f ist eine quadratische Funktion, oder auch eine Funktion zweiten Grades.
  - Wir werden in diesem Kurs jedoch keine Polynome rechnerisch lösen!

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Funktionen polynomialer Definition werden ganzrationale Funktionen genannt.
  - => Also ist f auch eine ganzrationale (gr.) Funktion zweiten Grades.

Ganzrationale Funktionen – Part I

- Gr. Funktionen sind von großer Bedeutung in der Mathematik.
  - Viele Sachverhalte in Natur, Technik und Wirtschaft lassen sich damit beschreiben.
  - Sie bilden die Grundlage für Fragestellungen der höheren Mathematik (h.M.).
  - Die Ergebnisse von Polynomen sind so wichtig, dass es eine Abkürzung dafür gibt, das Summenzeichen:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad n \geq 0 \qquad \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad n \geq 0$$

  - Das Summenzeichen $\sum$ (griech. großes Sigma) beschreibt das Ergebnis einer "Vielgliedersumme".
    - Das Summenzeichen nutzt ja auch Excel für die Durchführung von Bereichssummen!
    - Entgegen der Behauptung mancher Lehrer sind Mathematiker nicht faul, sondern für so wichtige Sachverhalte sind Abkürzungsschreibweisen absolut erforderlich!

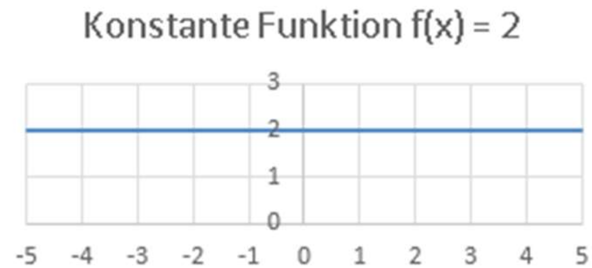
Ganzrationale Funktionen – Part II

- In der Definition von f $f(x) = ax^2 + bx + c$
  - nennen wir x den Parameter der Funktion.
    - Polynome haben nur einen Parameter, der gleichzeitig die einzige Unbekannte darstellt.
- Beim Aufruf von f $f(5)$
  - bezeichnen wir die 5 als das Argument, das an f übergeben wird.
    - Die 5 ist also die, em, "Bekannte", die den Platz des x im Polynom einnimmt.
    - (Der Begriff "Argument" -> Excel hat sich auch sehr stark an der Begriffswelt der m. Funktionen orientiert.)
- Gr. Funktionen können wir alle möglichen Zahlen als Argumente übergeben.
  - Naja, zumindest alle reellen Zahlen (**R**), das sind aber auch unendlich viele.
  - Daher ist das x in fs Polynom keine Unbekannte mehr, sondern eine Variable.

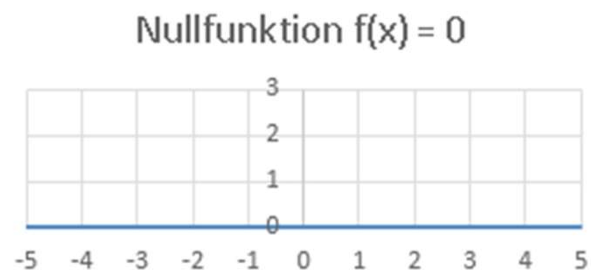
Gut zu wissen:
In der Mathematik werden für Zahlenbereiche/Grundmengen oft große "Doppelstrichbuchstaben", wie $\mathbb{R}$ verwendet. Aber eigentlich sind diese Buchstaben nur für die handschriftliche "Simulation" fetter Schrift vorgesehen. Die Grundmengensymbole sind eigentlich nur fette Großbuchstaben ohne Doppelstrich. – Die Fettschriftvariante ohne Doppelstrich darf generell für Ausdrucke verwendet werden (LaTeX kennt sogar nur diese)!

Ganzrationale Funktionen – Part III

- Konstante Funktion, gr. Funktion nullten Grades
  $f(x) = c$ Beispiel: $f(x) = 2$
  - Ordnet jedem x eine Konstante zu.
  - Der Graph ist eine Parallele zur x-Achse.



  - Konstante Funktionen sind nicht von einer Variablen abhängig!
  - Spezialfall: die Nullfunktion $f(x) = 0$



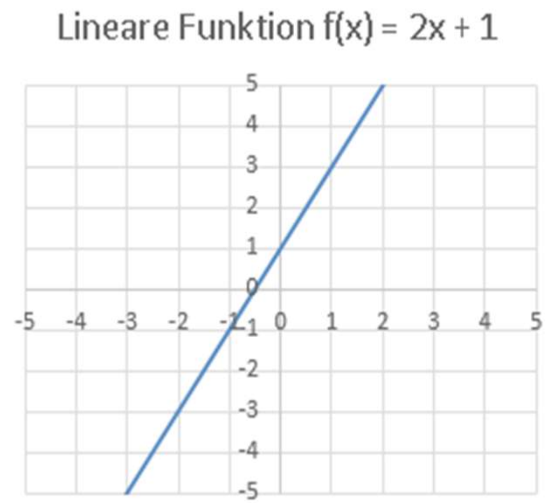
Ganzrationale Funktionen – Part IV

- Lineare Funktion, gr. Funktion ersten Grades, affine Abbildung

  $f(x) = ax + b$ Beispiel: $f(x) = 2x + 1$

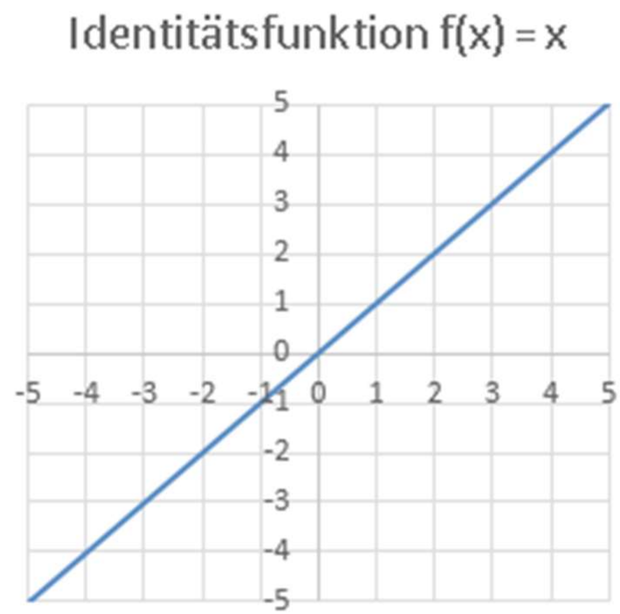
  $a \neq 0$

  – Der Graph ist einfach eine Gerade.



Ganzrationale Funktionen – Part V

- Lineare Funktion, Spezialfall: Identitätsfunktion
  $f(x) = x$
  - Ordnet jedem x sich selbst zu.
  - Der Graph ist eine Gerade, die im KS die Quadranten I und III winkelhalbiert.



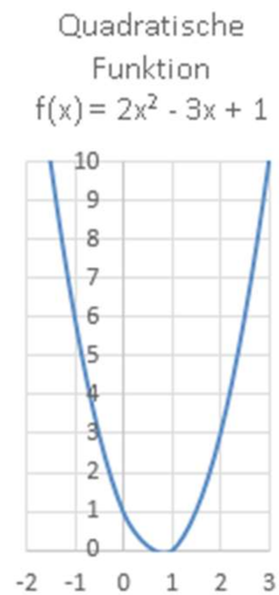
Ganzrationale Funktionen – Part VI

- Quadratische Funktion, gr. Funktion zweiten Grades

  $f(x) = ax^2 + bx + c$ Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

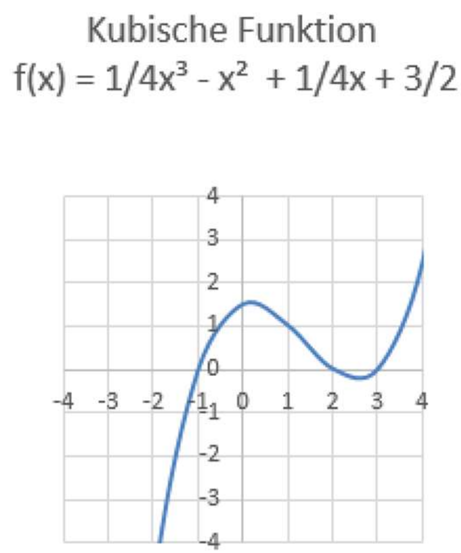
  $a \neq 0$

  - Der Graph wird als (<u>quadratische</u>) <u>Parabel</u> bezeichnet.



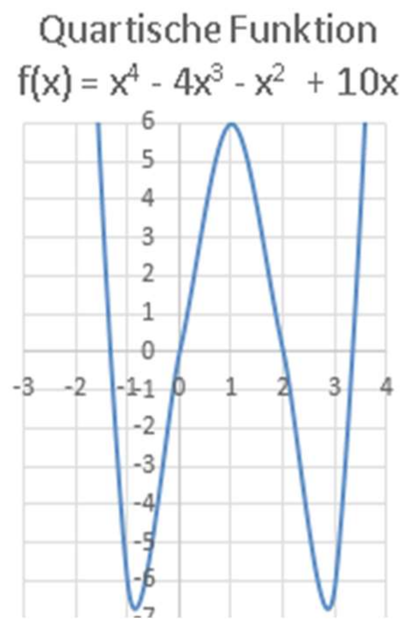
Ganzrationale Funktionen – Part VII

- Kubische Funktion (lat. cubus = Würfel), gr. Funktion dritten Grades.
  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Beispiel: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$
  $a \neq 0$
  – Der Graph wird als Parabel dritten Grades bezeichnet.



Ganzrationale Funktionen – Part VIII

- Quartische Funktion (lat. quartus = der Vierte), gr. Funktion vierten Grades
  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ Beispiel: $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x$
  $a \neq 0$
  - Der Graph wird als Parabel vierten Grades bezeichnet.

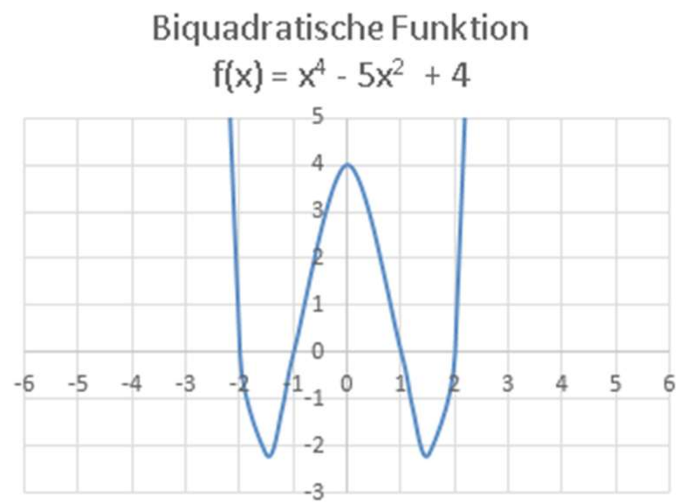


  - Quartische Funktionen werden in der Schulmathematik i.d.R. nicht besprochen.

Ganzrationale Funktionen – Part IX

- Biquadratische Funktion
  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ Beispiel: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
  $a \neq 0$

  – Der Graph wird auch als Parabel vierten Grades bezeichnet, aber diese Parabel ist immer achsensymmetrisch zur y-Achse.



Mit ganzrationalen Funktionen arbeiten – Part I

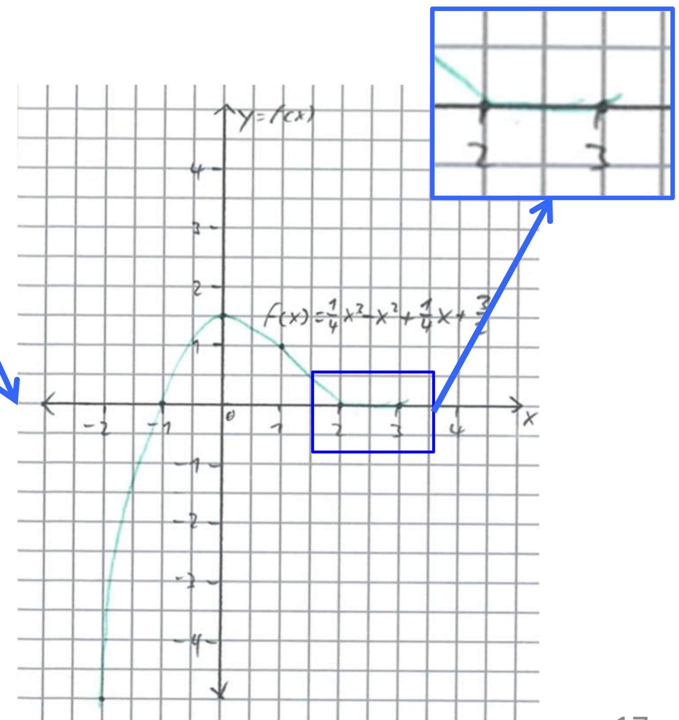
- In der h.M. werden insbesondere die Eigenschaften von Funktionen analysiert.
  - Diesem Teilbereich der Mathematik widmet sich die sogenannte <u>Analysis</u>.
  - <u>In diesem Kurs gehen wir nicht ganz so weit, weil man noch einige Grundlagen dazu wissen muss!</u>
  - Wir werden uns vor allem mit den Graphen gr. Funktionen beschäftigen.
  - Die Analyse von F., die die <u>Eigenschaften des Graphen</u> bestimmt wird <u>Kurvendiskussion</u> genannt.
- Zur Sache:
  - Das händische Zeichnen der Graphen gr. Funktionen ist eine Qual!
  - Man muss oft <u>viele Punkte berechnen</u>, um die Kurven "glatt" zu zeichnen.
  - Mittlerweile wissen wir aber, wie wir uns die Arbeit mit Excel <u>deutlich</u> erleichtern können. ☺
  - Und das probieren wir jetzt aus!

Mit ganzrationalen Funktionen arbeiten – Part II

- Betrachten wir uns diese kubische Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$
  - Erstellen wir eine Wertetabelle dazu:

x	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$
−3	−15
−2	−5
−1	0
0	1,5
1	1
2	0
3	0

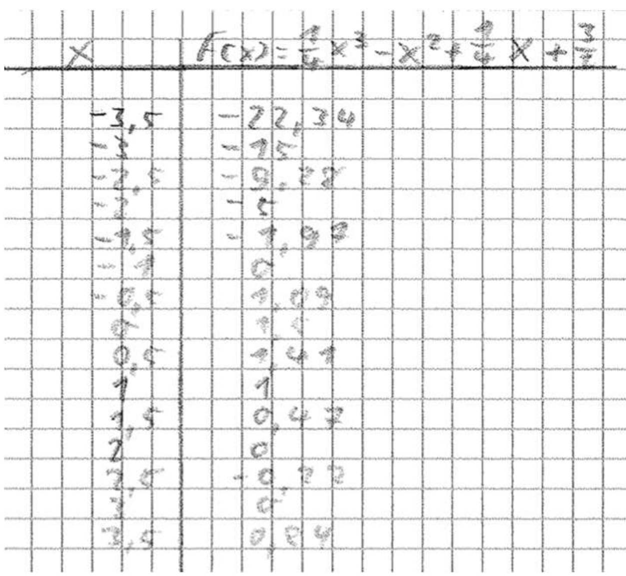
  - Und den Graphen:



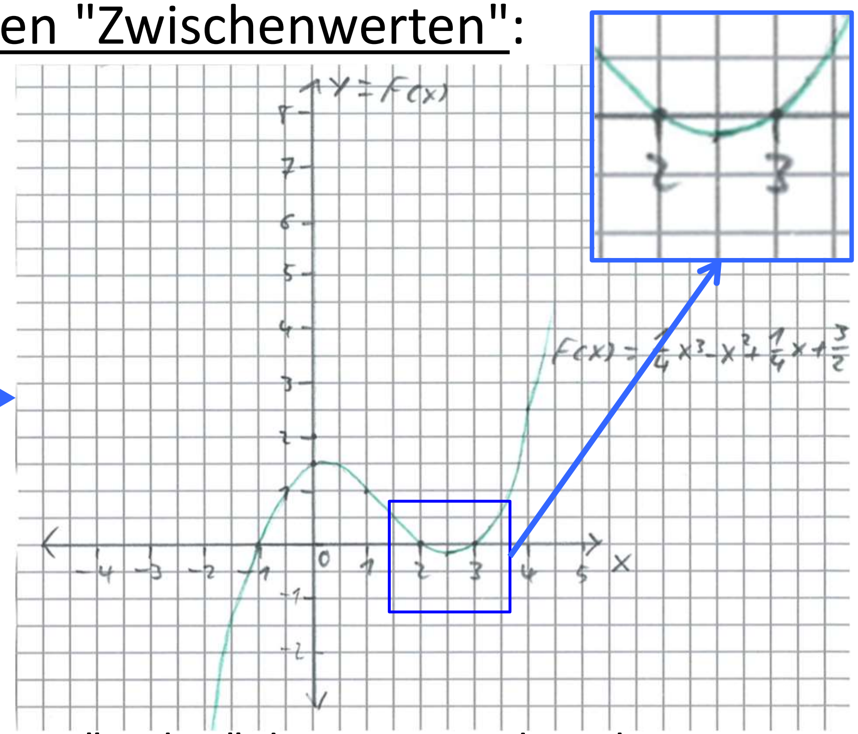
  - Am Graphen sehen wir aber, dass da noch "Luft" nach oben" ist. Der Graph ist sehr grob.
    - Z.B. zwischen x = 2 und x = 3 "geht noch was"!
  - Verbessern wir das: Mehr berechnete Punkte => bessere "Dichte" der Daten und glattere Kurven.

Mit ganzrationalen Funktionen arbeiten – Part III

- Erstellen wir also eine WT mit zusätzlichen "Zwischenwerten":



x	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$
-3,5	-22,34
-3	-15
-2,5	-9,28
-2	-5
-1,5	-1,93
-1	0
-0,5	1,09
0	1,5
0,5	1,47
1	1
1,5	0,47
2	0
2,5	-0,22
3	0
3,5	0,84



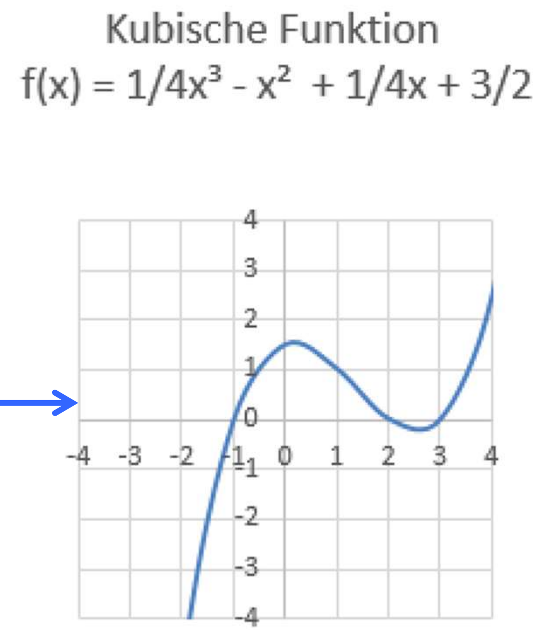
- Ja! Mehr berechnete Punkte führen zu einer besseren "Dichte" der Daten und zu glatteren Kurven.
  - Mit den genaueren Daten ist jetzt auch eine "Delle" zwischen $x = 2$ und $x = 3$ zu sehen, die mit den gröberen Daten der vorherigen WT noch gar nicht sichtbar war!

Mit ganzrationalen Funktionen arbeiten – Part IV

- Wie gesagt ist es eine Quälerei WT zu erstellen, die zu glatten Graphen führen.
  - Natürlich ist das "händische" Zeichnen der Graphen selbst auch nicht ohne.
  - Fairerweise sei erwähnt, dass es im Handel flexible Kurvenlineale dafür gibt.

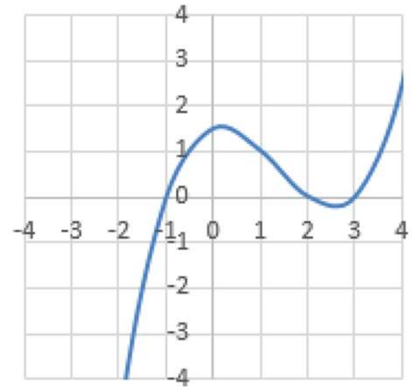
- Also bemühen wir jetzt Excel für die WT und den Graphen:

	A	B
3	x	$y = f(x) = 1/4x^3 - x^2 + 1/4x + 3/2$
4	-3,5	-22,34375
5	-3	-15
6	-2,5	-9,28125
7	-2	-5
8	-1,5	-1,96875
9	-1	0
10	-0,5	1,09375
11	0	1,5
12	0,5	1,40625
13	1	1
14	1,5	0,46875
15	2	0
16	2,5	-0,21875
17	3	0
18	3,5	0,84375



Eine grobe Analyse des Graphen von f

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$



- Der Graph der Funktion zeigt grob die Besonderheiten von f:
  - An den Stellen -1, 2 und 3 ist der Funktionswert Null. Es sind die Nullstellen von f.
  - Zwischen den Stellen 0 und 0,5 hat f einen "Buckel", einen lokalen Maximalwert.
  - Zwischen den Stellen 2 und 3 hat f eine "Delle", einen lokalen Minimalwert.
  - Zwischen 1 und 1,5 "kippt" der Kurvenverlauf, dort befindet sich eine Wendestelle.
- All diese Eigenschaften und noch mehr lassen sich noch genauer bestimmen.
  - Das ist Thema der gymnasialen Oberstufe, und wird hier nicht mehr besprochen.

Mit ganzrationalen Funktionen in Excel arbeiten

- Vorteile:
  - Wir können die "Dichte" der x-Werte vergrößern, in Excel ist das mühelos möglich.
    - Mit je mehr Werten wir eine Funktion "füttern", desto "glatter" werden die Graphen.
    - Von Hand müssten wir sowohl die Wertetabelle als auch den Graphen neu zeichnen!
  - Kurven lassen sich beliebig formatieren, so dass sie professionell aussehen.
  - Ergebnisse aus Excel können z.B. in Word direkt verwendet werden: Stichwort OLE.

- Aber Tacheles:
  - Bitte Excel alleine nicht dazu verwenden, um die Hausaufgaben zu machen!
  - Ist es vielmehr sinnvoll, damit z.B. die Hausaufgaben zu überprüfen.