Grundkurs für Excel – Part III

Nico Ludwig

Themen

- Einführung linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten
- Rechnerische und grafische Lösung linearer Gleichungssysteme
- Wertetabellen mit Excel erstellen
- Koordinatensysteme und lineare Graphen mit Excels Liniendiagrammen erstellen und Gleichungen damit grafisch lösen

Zur Einführung eine Problemstellung

- Leider sind solche Problemstellungen in der Schulmathematik oft ziemlich "konstruiert":
  - 12 Äpfel und 6 Birnen kosten 30 Euro
  - 3 Äpfel und 3 Birnen kosten 9 Euro
  - Gesucht: was kostet jeweils ein Apfel und eine Birne

- In der Realität gibt es aber schon relevante Problemstellungen:
  - In der Technik
  - Beim Angebotsvergleich in der BWL

- Aber <u>wir werden uns erst mal das konstruierte "Obstbeispiel" anschauen</u>!

Problemstellungen mathematisch formulieren

- Wir müssen unser Problem zunächst mathematisch "erklären":
  - Da sind unbekannte Größen x (Preis eines Apfels) und y (Preis einer Birne), für die gilt:

$$12x + 6y = 30$$
$$3x + 3y = 9$$

- Wir kennen die Gesamtbeträge 30€ und 9€ für versch. Apfel- und Birnenmengen.
  - Daraus können wir zwei Gleichungen "hinschreiben".
  - In den Gleichungen verbleiben zwei unbekannte Größen x und y ("Unbekannte").
  - Da wir mehr als eine gültige Gleichung für die selben Unbekannten angeben können, sprechen wir von einem Gleichungssystem (GS).
  - Genauer gesagt ist das ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Unbekannten.

Gleichungssysteme lösen – Part I

- Wir können das Gleichungssystem algorithmisch lösen.
  - Lösen heißt x und y bestimmen, für die die Gleichungen I und II gleichzeitig zutreffen:

$$\begin{array}{l} I\ 12x + 6y = 30 \\ II\ \ 3x + 3y = 9 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} I\ 12x + 6y = 30\ \wedge \\ II\ 3x + 3y = 9 \end{array} \right)$$

- Es gibt einige mathematische Verfahren, um so etwas auszurechnen:
  - Einsetzungsverfahren
  - Gleichsetzungsverfahren
  - (Additionsverfahren)
  - (Gaußsches-Eliminationsverfahren)

Gleichungssysteme lösen – Part II

- Wir verwenden hier das "Einsetzungsverfahren".
  - Es wird nach einer Unbekannten, z.B. y, mit Äquivalenzumformung aufgelöst.
    - D.h. wir wollen die Unbekannte auf einer Seite des Gleichheitszeichens alleine darstellen.
    - Äquivalenzumformung bedeutet, dass wir die Gleichung stets auf beiden Seiten umformen müssen.
  - Wir formen die Gleichung I nach y um,

$$12x + 6y = 30 \qquad | - 12x$$
$$6y = 30 - 12x \quad |: 6$$
$$\underline{\underline{y = \boxed{5 - 2x}}}$$

  - setzen dieses Ergebnis in II ein und machen die neue Gleichung etwas "kompakter":

$$3x + 3y = 9 \mid y = 5 - 2x$$
$$3x + 3\boxed{(5 - 2x)} = 9$$
$$3x + 15 - 6x = 9$$
$$\underline{\underline{-3x + 15 = 9}}$$

Gleichungssysteme lösen – Part III

- Die Gleichung, die wir nach Einsetzung erhielten wird jetzt <u>nach x umgeformt</u>:

$$-3x + 15 = 9 \quad | - 15$$
$$-3x = -6 \ | : \ -3$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

- x ist bekannt und kann in die nach y umgeformte Gleichung I <u>eingefügt werden</u>:

$$y = 5 - 2x \quad | \, x = 2$$
$$y = 5 - 2 \cdot 2$$
$$\underline{\underline{y = 1}}$$

- Daraus ergibt sich die Antwort "eine Birne kostet 1€, ein Apfel 2€":

$$12x + 6y = 30 \quad | \, y = 1; \ x = 2$$
$$3x + 3y = 9 \quad | \, y = 1; \ x = 2$$

Gleichungssysteme grafisch lösen – Part I

- Wir können dieses Gleichungssystem auch grafisch lösen.

- Hierzu formen wir beide Gleichungen nach der Unbekannten y um:
  - Für I haben wir das schon:

$$y = -2x + 5$$

  - Dann formen wir II noch nach y um:

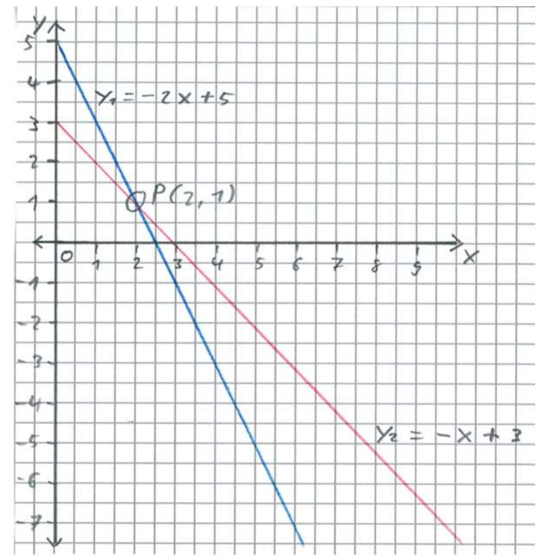
$$y = -x + 3$$

- Achtung: wir müssen die Übersichtlichkeit waren!
  - Daher benennen wir y für die Gleichungen in y_1 und y_2 um:

$$y_1 = -2x + 5$$
$$y_2 = -x + 3$$

Gleichungssysteme grafisch lösen – Part II

- Wie lösen wir das Gleichungssystem also grafisch?
  - Wir tragen beide Gleichungen in ein Koordinatensystem (KS) ein und erhalten zwei Graphen.
  - Der Graph jeder Gleichung zeigt grafisch welchem x welches y zugeordnet wird.
  - Der Koordinatenpunkt, an dem sich die Graphen schneiden, ist dann der Punkt, an dem in beiden Gleichungen dem gleichen x das gleiche y zugeordnet wird.
  - => Der Schnittpunkt der Graphen P(2, 1) stellt die grafische Lösung des Gleichungssystems dar.

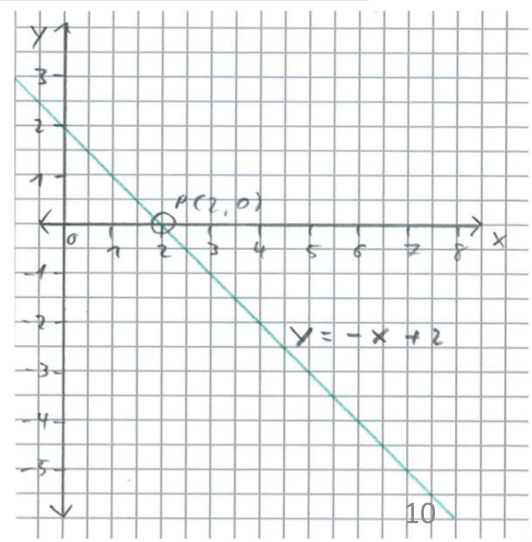


Gut zu wissen:
Mittlerweile wird im deutschen Schulunterricht für Koordinaten die Notation P(x|y) verwendet, wir halten uns aber an die international gebräuchliche Notation P(x, y).

Gleichungssysteme grafisch lösen – Part III

- Ein weitere Möglichkeit Gleichungssysteme zu lösen ist die Nullstellensuche.
  - Eine Nullstelle ist ein x-Wert einer Gleichung, deren zugehöriger y-Wert 0 ist.
    - Grafisch gedeutet, schneidet der Graph einer Gleichung an einer Nullstelle die x-Achse.
  - Hierzu fassen wir beide nach y umgeformte Gleichungen in eine zusammen.
  - Wir suchen die Stelle x, an denen y_1 gleich y_2 ist.
  - Die neue Gleichung wird vereinfacht und dieses mal nach 0 aufgelöst:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -2x+5 \\
y_2 &= -x+3 && \mid y_1 = y_2 \\
-x+3 &= -2x+5 && \mid +x, -3 \\
0 &= -x+2 \\
&\underline{x=2}
\end{aligned}
$$



  - Sowohl die grafische als auch die rechnerische Lösung lautet x = 2, das ist die Stelle, aber wir sind noch nicht fertig! Wie ist denn der Wert von y?

Gleichungssysteme grafisch lösen – Part IV

- Wir haben zwar x gefunden, aber das ist nur die Stelle, an der die zusammengefasste Gleichung den Wert 0 hat.
  - Um auch noch y zu erhalten, müssen wir x in y_1 oder y_2 einsetzen und auflösen:

$$y_2 = -x + 3 \mid x = 2$$
$$\underline{\underline{y = 1}}$$

- Aber warum dieses kompliziertere Verfahren?
  - Die Nullstellensuche kann leicht auf andere Gleichungssysteme angewendet werden!
  - Insbesondere auf nicht-lineare Gleichungssysteme!

Gleichungssysteme grafisch lösen – Part V

- Zunächst nochmal zum Hintergrund der Nullstellensuche:
  - Wir wissen, das wir die Stelle suchen an der $y_1 = y_2$ ist, deshalb können wir gleichsetzen:

$$y_2 = y_1$$
$$-x + 3 = -2x + 5$$

  - In der M. ist es üblich, dann alles auf eine Seite des = zusammenzufassen, so dass auf der anderen Seite nur noch 0 steht und eine neue Gleichung, unabhängig von y_1 und y_2 entsteht:

$$-x + 3 = -2x + 5 \quad | + x, -3$$
$$0 = -x + 2$$

  - Auflösen nach x ergibt die gesuchte Stelle, aber nur für y = 0 in der zusammengefassten Gleichung:

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

  - Aber das zugehörige y müssen wir wieder in einer der Ursprungsgleichungen (y_1 oder y_2) suchen:

$$y_2 = -x + 3 \mid x = 2$$
$$\underline{\underline{y = 1}}$$

Gleichungssysteme grafisch lösen – Begriffe

- Stelle
  - Einfache Erklärung: Eine Stelle ist eine spezifische Position auf der x-Achse des KS.
  - Eine Nullstelle einer Gleichung, ist ein x-Wert, dessen zugehöriger y-Wert 0 ist.
- Wert
  - Einfache Erklärung: Ein Wert ist eine spezifische Position auf der y-Achse des KS.
- Punkt
  - Eine spezifische Position im KS, die einer Stelle (x) einen Wert (y) zuordnet.
- Graph (Diagramm)
  - Die Menge aller Punkte einer Gleichung, bzw. deren grafische Darstellung im KS.

Gleichungssysteme grafisch lösen – Vorgehensweise

- Das Einzeichnen der Graphen <u>linearer Gleichungen</u> in ein KS ist recht einfach.
  - Eigentlich braucht man nur ein Lineal, um die Punkte zu verbinden.

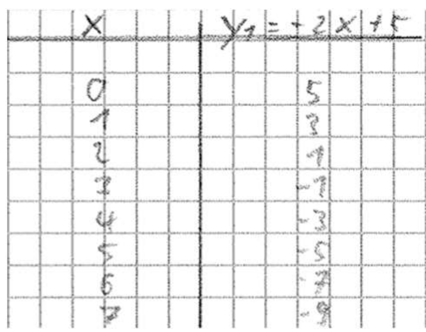
- Man kann auch eine Wertetabelle (WT) anfertigen und die Punkte in das KS abtragen.

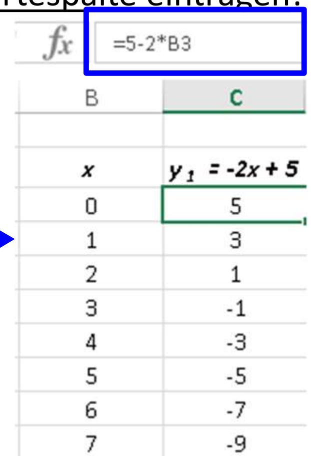
x	$y_1 = -2x + 5$
0	5
1	3
2	1
3	-1
4	-3
5	-5
6	-7
7	-9

- Jetzt kommt Excel ins Spiel! <u>Warum machen wir uns die Mühe die WT selbst zu erstellen?</u>

Gleichungssysteme grafisch lösen – Wertetabellen

- Wenn wir die WT in Excel erstellen, lassen wir einfach Excel die Werte ausrechnen!
  - Wir müssen die Gleichung ja nur als Excel-Formel in die Wertespalte eintragen!





=5-2*B3

B	C
x	y_1 = -2x + 5
0	5
1	3
2	1
3	-1
4	-3
5	-5
6	-7
7	-9

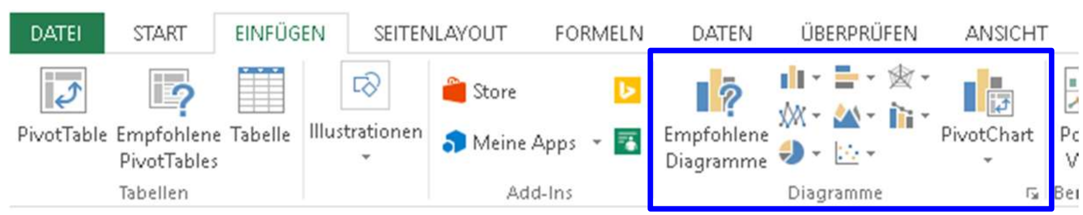
  - Es wurde ein "sinnvoller" Zahlenbereich [0, 7] für die Stellen gewählt und in B3:B10 eingetragen.
    - Das machen wir selbstverständlich mit Excels automatischer Erzeugung aufsteigender Werte.
  - Die Wertespalte enthält also die Formel der Gleichung in der "Excel-Schreibweise".
    - Die Variable x (es ist jetzt keine Unbekannte mehr) ist in der Excel-Schreibweise ein relativer Zellbezug auf die Stellen in der B-Spalte.
    - Die automatische Werteerzeugung der C-Spalte berechnet dann die Werte aus den Zeilen der B-Spalte mit den relativen Zellbezügen.

Gleichungssysteme grafisch lösen – Diagramme als Graphen

- Aber wir sind noch nicht "am Ende", Excel kann uns noch weiter helfen.
  - Wir können aus der WT ein Diagramm erzeugen und uns den Graphen durch Excel zeichnen lassen.

- Schritte:
  - Erst selektieren wir den Bereich der Daten, den wir visualisieren wollen, d.h. die x-und y-Werte in B2:C10.
  - Nun aktivieren wir das "EINFÜGEN"-Ribbon:

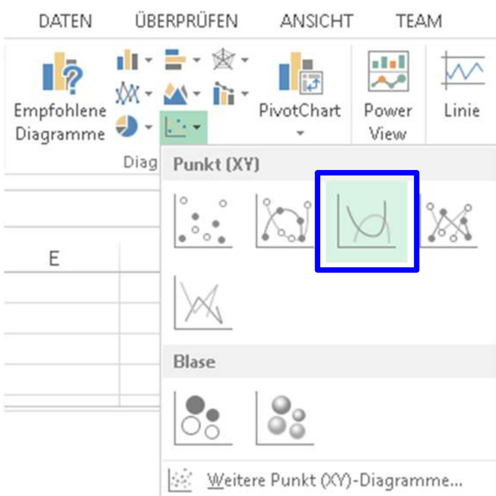
x	$y_1 = -2x + 5$
0	5
1	3
2	1
3	-1
4	-3
5	-5
6	-7
7	-9

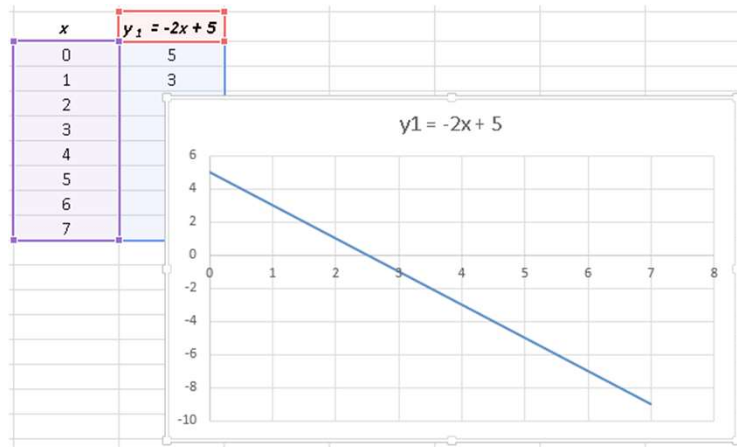


  - Und weiter gehts...

Gleichungssysteme grafisch lösen – Diagramme

- In der Gruppe "Diagramm" selektieren wir "Punkt (XY)"/"Punkte mit interpolierten Linien":

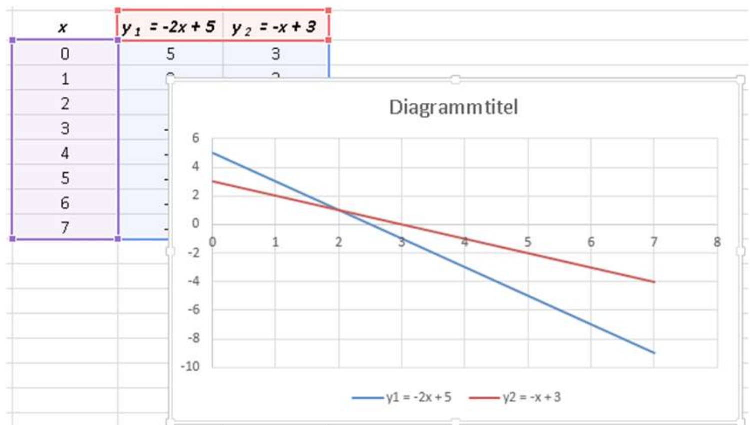




- Als Resultat erhalten wir ein Liniendiagramm, also eigentlich einen Graphen, in Rohform.

Gleichungssysteme grafisch lösen – Diagramme

- Das klappt auch mit <u>mehreren Gleichungen in einer WT</u>. Hier z.B. mit y_1 und y_2:

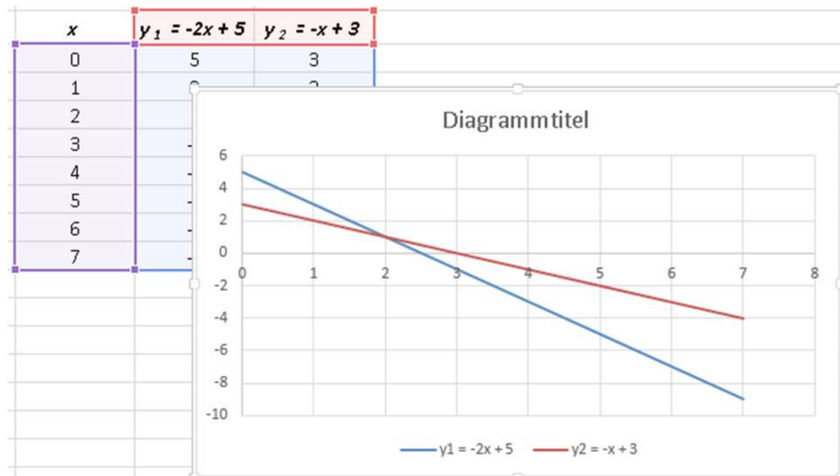


  – <u>Wir sehen hier die grafische Lösung unseres Gleichungssystems!</u>
    - => Ja, <u>die Lösung (Schnittpunkt) stimmt</u>!

  – Die Graphen werden den Gleichungen farblich in der Legende zugeordnet.

Liniendiagramme formatieren – Part I

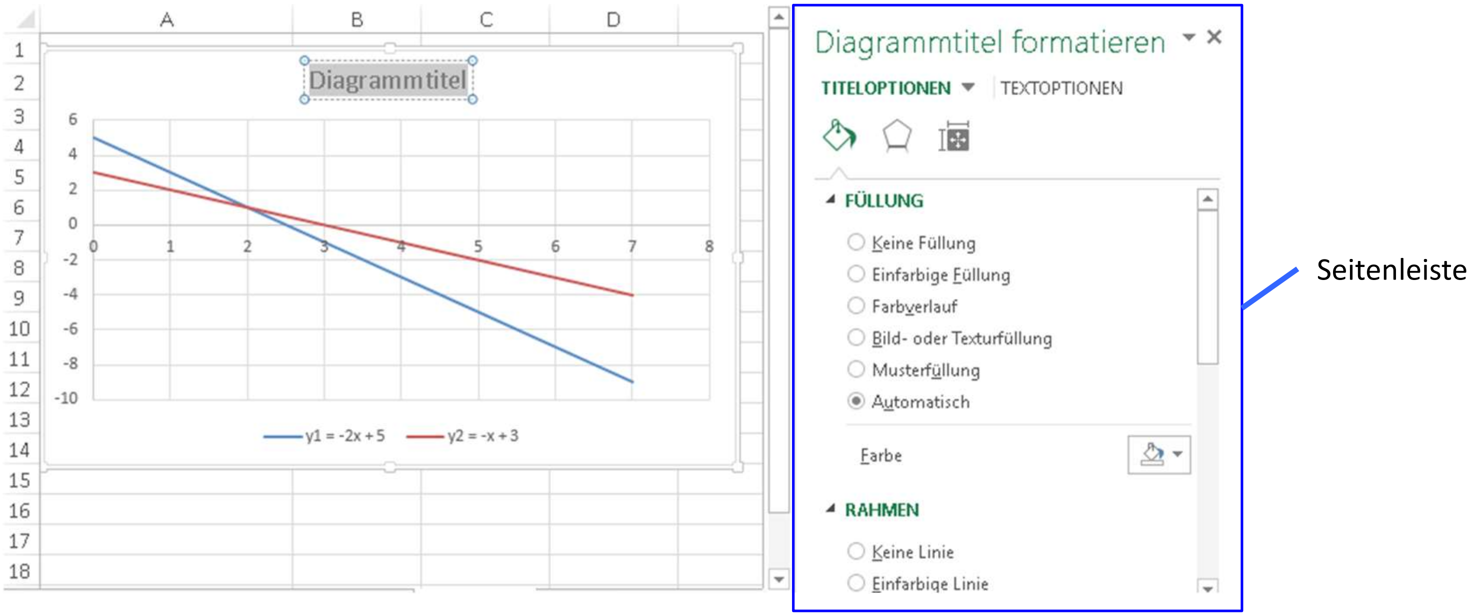
- Wir wollen den Graphen unseres Gleichungssystems noch etwas formatieren.



- Wir sollten mindestens diese Punkte anpassen:
  - Die y-Werte sind nicht "dicht": Sie stehen in Zweierschritten, besser sind Einserschritte.
  - Es sind nicht alle Quadranten des KS sichtbar.
  - Die Überschrift/Diagrammtitel sollte besser lauten.

Liniendiagramme formatieren – Part II

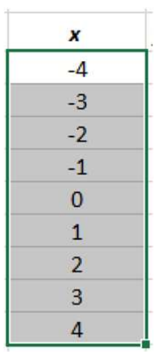
- Ein Doppelklick auf den Diagrammtitel macht ihn editierbar.

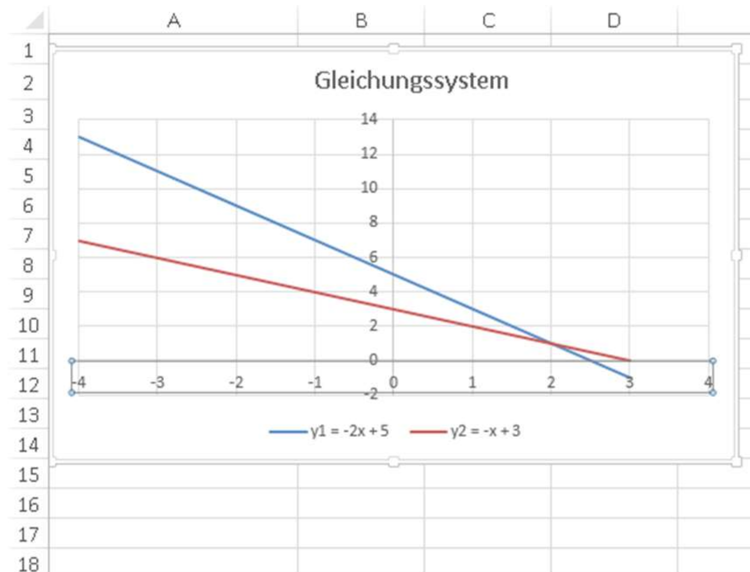


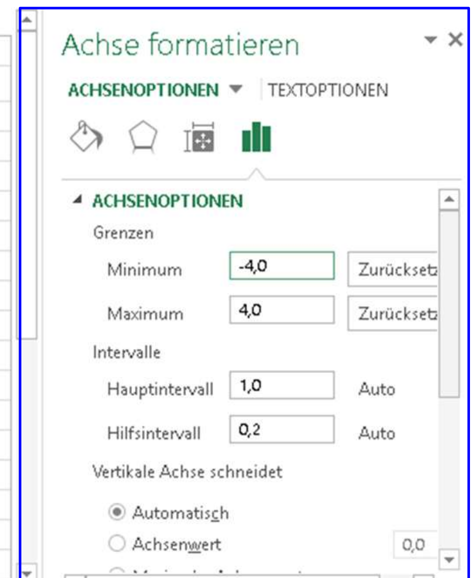
- Wir können den Text direkt bearbeiten und auch über die Seitenleiste formatieren.

Liniendiagramme formatieren – Part III

- Für die Anpassung der x-Achse ändern wir den Wertebereich in der WT auf [-4, 4].
  - Dann dehnt sich das KS nämlich auf den II. Quadranten aus!



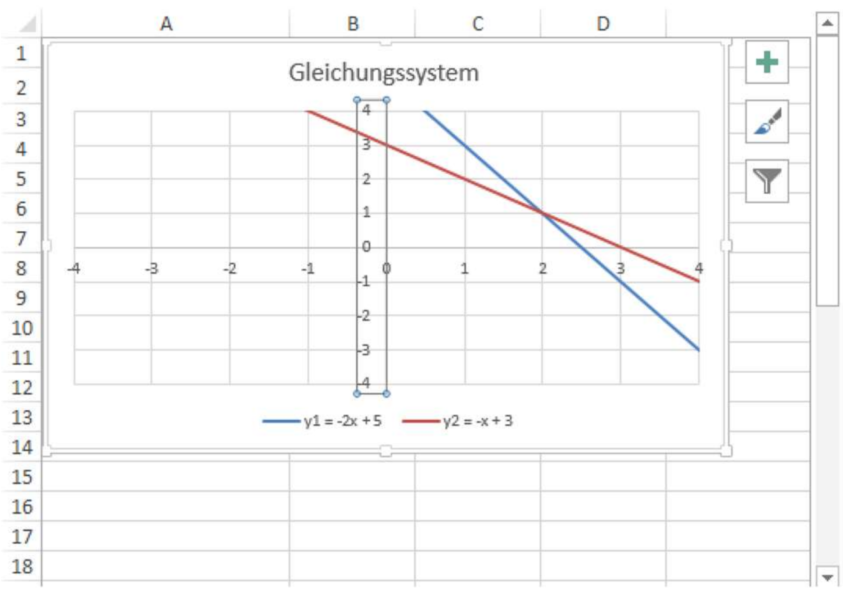


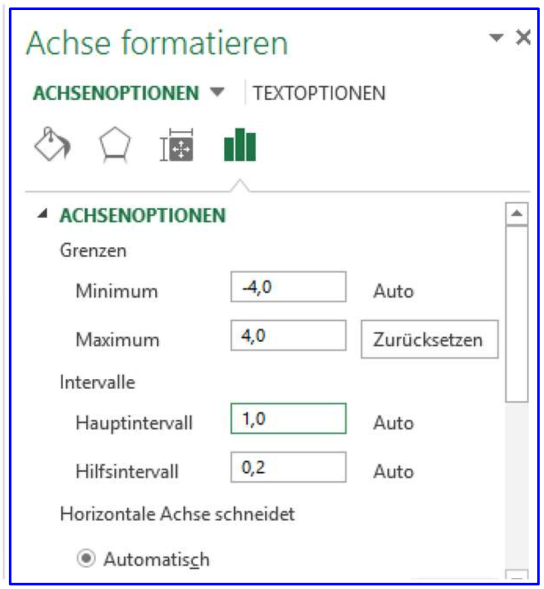


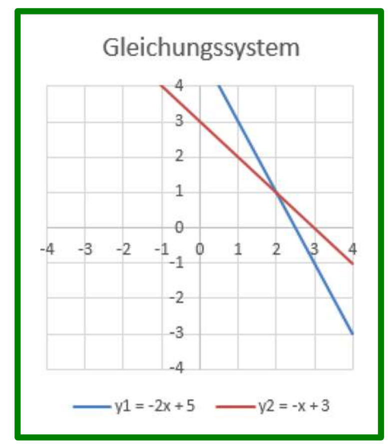
  - Nun selektieren wir die x-Achse und ändern die Grenzen/Intervalle in der Seitenleiste.
    - Der Graph "schiebt" sich nun über drei Quadranten in x ∈ [-4, 4].

Liniendiagramme formatieren – Part IV

- Nach dem selben Schema passen wir die y-Achse an:
  - Wir selektieren die y-Achse und ändern die Grenzen/Intervalle in der Seitenleiste.
  - Zuletzt skalieren wir die Größe des Diagramms, so dass das KS quadratisch kariert wird.







Fertig!