

# Commande non linéaire - TP3

Jean-clément Ringenbach, Niels Mortensen, Nicolas Lefebure

Le système étudié est un joint exible dont les équations de la dynamiques sont données par:

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + MgL \sin(q_1) + k(q) (q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q) (q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (1)$$

ou la fonction de rappel du ressort  $k(q)$  s'exprime de la manière suivante:

$$k(q) = K + (q_1 - q_2)^2 \quad (2)$$

## Question 1

Nous pouvons réécrire le système d'équations dynamiques précédent sous la forme d'un système du premier ordre affine:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3)$$

ou  $f(x)$  et  $g(x)$  sont donnés par:

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{(x_1-x_3)(k+(x_1-x_3)^2)}{1} - \frac{GLM \sin(x_1)}{1} \\ 1 \\ x_4 \\ \frac{(x_1-x_3)(k+(x_1-x_3)^2)}{J} \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} \quad (4)$$

## Question 2

Afin de vérifier les conditions de rang et d'involutivité, nous pouvons construire les distributions suivantes:

$$C = \{g, [f, g], [f, [f, g]], [f, [f, [f, g]]]\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & \frac{6(x_1-x_3)}{I \cdot J} (x_2 - x_4) \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \sigma_2 \\ \frac{1}{J} & 0 & -\sigma_2 & -\frac{6(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{J^2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Sachant que:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{3x_1^2 - 6x_1x_3 + 3x_3^2 + k}{I \cdot J} \\ \sigma_2 &= \frac{3x_1^2 - 6x_1x_3 + 3x_3^2 + k}{J^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Ainsi que:

$$\bar{C} = \{g, [f, g], [f, [f, g]]\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3x_1^2 - 6x_1x_3 + 3x_3^2 + k}{1J} \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{3x_1^2 - 6x_1x_3 + 3x_3^2 + k}{J^2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Nous sommes particulièrement intéressés par l'accessibilité autour du point d'origine. Or lorsque  $C$  est de rang  $n = 4$  dans un ensemble ouvert d'intérêt, alors le système est dit accessible. Par continuité, il nous suffit donc d'évaluer  $C$  à  $x = 0$  et d'évaluer son rang en calculant son déterminant:

$$C[x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{1J} \\ 0 & 0 & \frac{k}{1J} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Son déterminant est alors:

$$\det(C) = \frac{k^2}{I^2 J^4} \neq 0 \quad (9)$$

Pour l'involutivité de  $\bar{C}$ , nous avons vérifié que le crochet d'éléments de la matrice retombent dans la famille de ceux-ci, avec le code MATLAB suivant:

```
dtemp = 0;
for i = 1 : 3
    d = simplify(det([Cbar_check(:, i), Cbar]));

    if (d == 0)
        dtemp = dtemp + 1;
    end
end
```

### Question 3

Nous pouvons ensuite construire une forme  $\omega$  qui annule la distribution  $\bar{C}$  en utilisant la fonction MATLAB NULL(). Ce vecteur dans le nullspace de  $\bar{C}$  qui a été trouvé est :

$$\omega(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

### Question 4

Il nous faut maintenant intégrer  $\omega(x)$ . Pour ce faire, nous trouvons deux fonctions  $\mu$  et  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que:

$$\omega_i = \mu \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (11)$$

Une solution évidente et que nous avons choisie est donnée par:

$$\mu(x) = 1 \quad h(x) = x_1, \quad (12)$$

avec laquelle on devrait donc, en théorie, avoir une sortie  $z = h(x) = x_1$  linéarisée.

### Question 5

Maintenant, on peut simplement appliquer une commande proportionnelle sur le système linéarisé dans le but de le stabiliser à 0. Cela revient en réalité à appliquer une commande non-linéaire au système dans sa forme réellement non-linéaire. Pour le gain de régulation du système linéarisé donné  $k$ , on a la simple loi de contrôle sur l'état linéarisé  $z$  (en bien gardant en vue l'état réel du système  $x$ ):

$$v(z(x)) = -kz(x) \quad (13)$$

et la loi de commande non-linéaire à appliquer sur le l'état  $x$  devient (c.f. donnée):

$$u(x) = \kappa(x) = \frac{v(z(x)) - \alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{-kz(x) - L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (14)$$

avec

$$z(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \dots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (16)$$

On connaît toutes ces expressions, et on peut par conséquent calculer explicitement  $u(x)$ , qui a une forme trop compliquée pour être affichée ici.

## Question 6

Une fois en marche, ce contrôle appliqué à partir des conditions initiales fournies est visible à la figure 1. On y voit que le système stabilise effectivement tous ses états à zéro.

Plusieurs autres conditions initiales sont donné à la figure 2.

On voit que lorsque l'amplitude des conditions initiales augmente, la complexité des trajectoires (oscillations torturées) devient plus grande. Malgré cela, le système se stabilise toujours. Cela était attendu, car la résolution est analytique et exacte, et de par l'absence totale de bruit dans ces simulations.

Pour illustrer la non-linéarité de manière flagrante, la figure 3 montre les trajectoires de deux conditions initiales juste proportionnellement différentes (sur la même ligne dans l'espace des phases). Un système linéaire n'aurait pas montré de différence dans l'allure globale de ces deux résultats, or ici des oscillations complexes apparaissent.

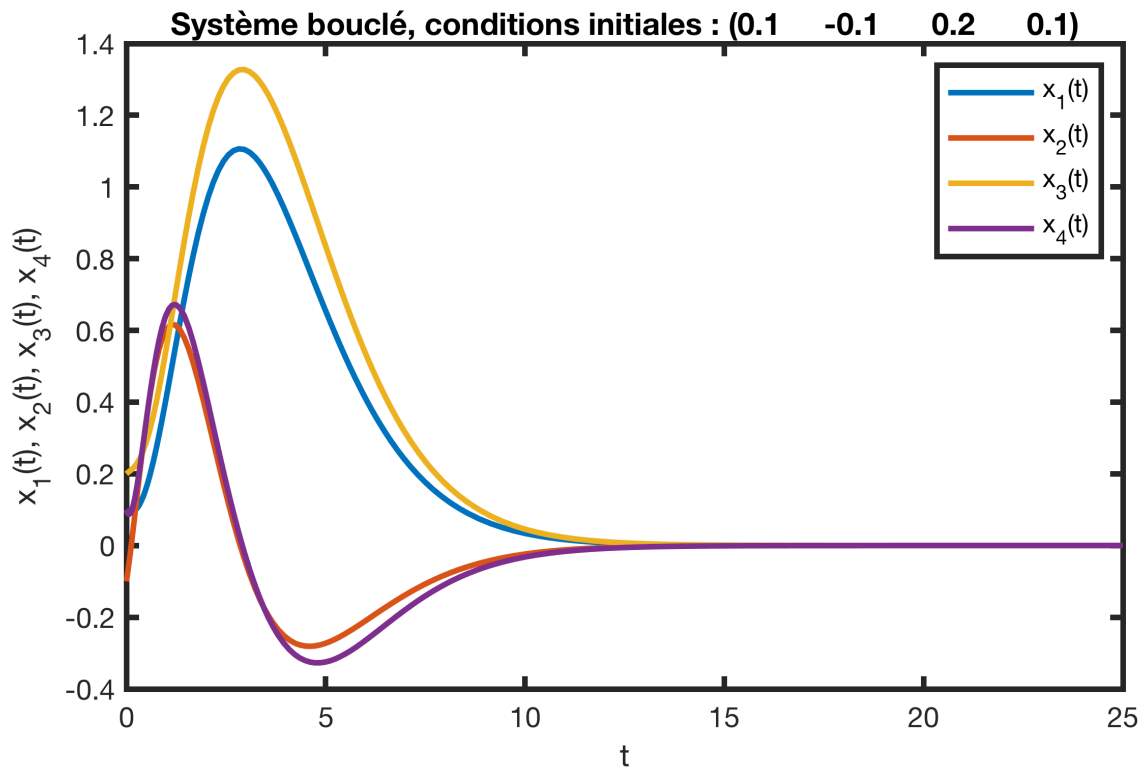


Figure 1: Test du contrôle avec les conditions initiales données.

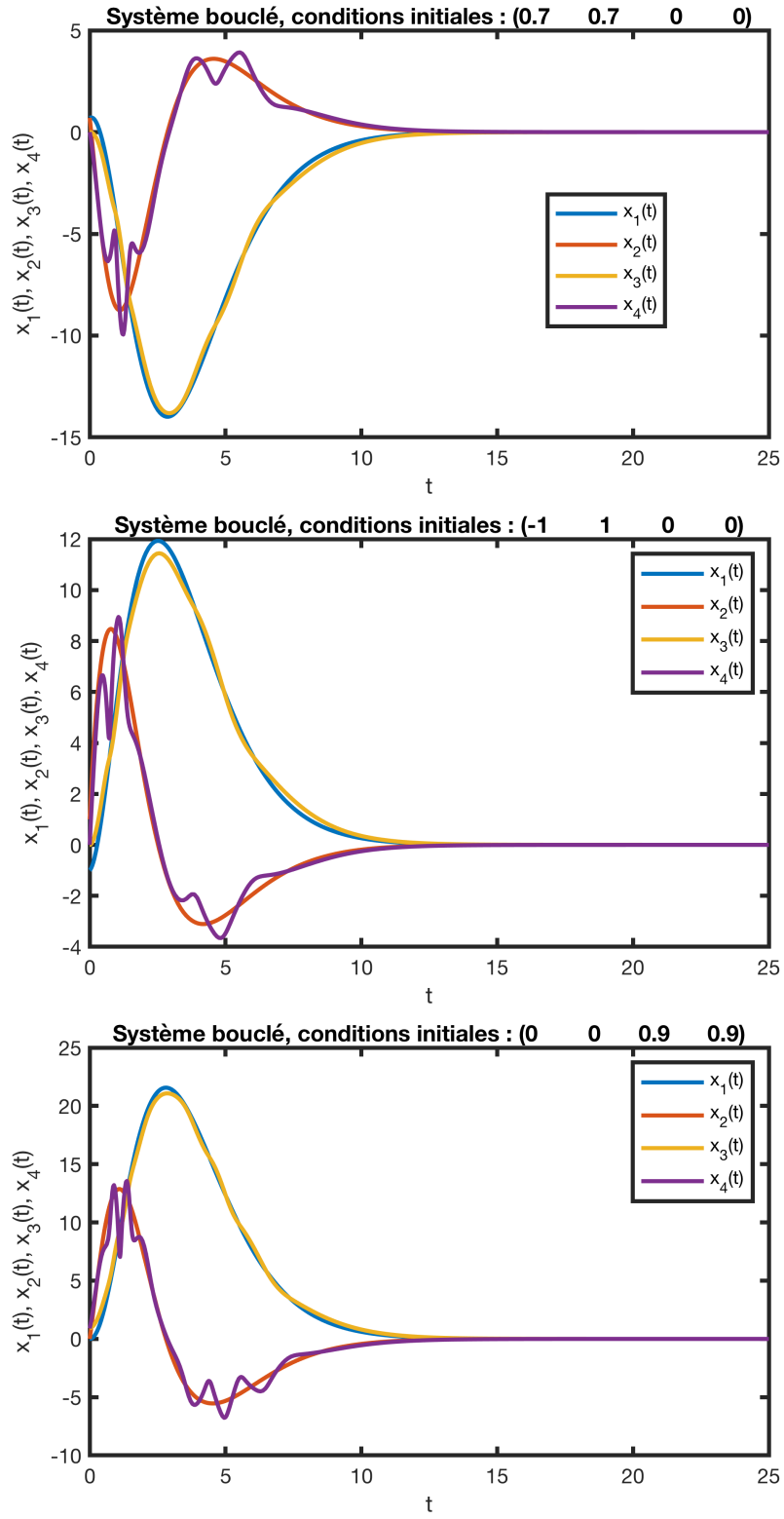


Figure 2: Déroulement du contrôle pour d'autres conditions initiales.

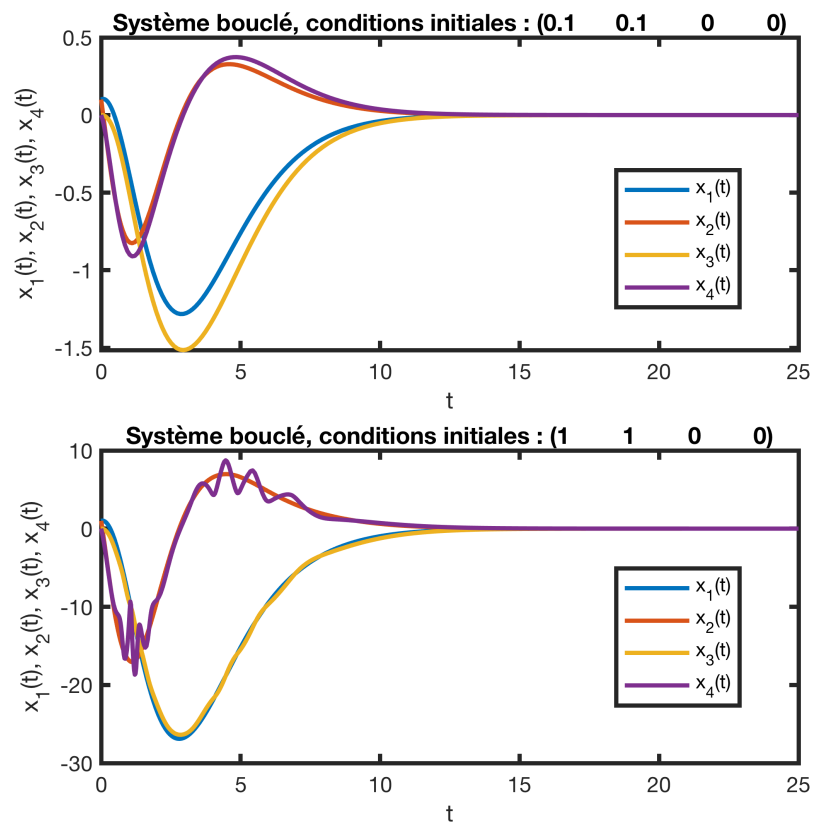


Figure 3: Déroulement du contrôle pour deux conditions initiales alignées.