Trabajo Práctico 1

1. Sabiendo que:
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -5 \;, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 2$$
Calcula el determinante de las siguientes matrices de $\mathbb{R}^{3\times 3}$, usando los axiomas de la definición y/o las propiedades.
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Sabiendo que: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -3$ calcula los siguientes determinantes:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2k & h & g \end{vmatrix}$ $\quad c)$ $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix}$ $\quad e)$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3k \\ g & h & k \end{vmatrix}$

$b)$ $\begin{vmatrix} 6a & -2b & c \\ 3d & -e & f/2 \\ 3g & -h & k/2 \end{vmatrix}$ $\quad d)$ $\begin{vmatrix} a & b+c+a & c \\ d & e+f+d & f \\ g & h+k+g & k \end{vmatrix}$

3. Dados los siguientes determinantes:

i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ $\quad$ i i) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ i v) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

iii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad$ v) $\begin{vmatrix} \cos\pi & 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & \cos\pi & -6 \end{vmatrix}$

   $a)$ Calcula sus valores.

   $b)$ Usando algunos de los resultados del apartado anterior, calcula:
$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Calcula para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ el determinante de cada matriz dada será nulo.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & a \\ a & a & c \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ c & a & b & 0 \end{pmatrix} \qquad D = A + \mathbb{I}_{3\times 3} \qquad F = 3C$$

5. Usando propiedades y axiomas de definición de determinante, califica con verdadero (V) o falso (F). Justifica adecuadamente.

a) $\begin{vmatrix} x+y & 1 & x \\ y+z & 1 & y \\ z+x & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & 1 & x \\ z & 1 & y \\ x & 1 & z \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ i & 1 & 0 \\ i+2 & 1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ i & 0 & 1 \\ 2 & i & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -4 & 3 & -12 \\ -12 & 3 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 3^2 \cdot 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & -10 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

6. Prueba las siguientes identidades en $\mathbb{K}$:

a) $\begin{vmatrix} x & 0 & b \\ -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = ax + b$

b) $\begin{vmatrix} -2 & x & x^2 \\ -2 & y & y^2 \\ -2 & z & z^2 \end{vmatrix} = -2\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$

c) $\begin{vmatrix} x & 0 & c \\ -1 & x & b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = ax^2 + bx + c$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1+x & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x^2\,(3+x)$

$e)$ $\begin{vmatrix} x^3 & 4x^2 & x^3 & x^2 \\ 4x & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 & -x^2 \end{vmatrix} = 9x^5$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

$a)$ $\begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ -x^2 & x \end{vmatrix} = 0$

$b)$ $\begin{vmatrix} x+1 & i & i \\ i & x+1 & i \\ i & i & x+1 \end{vmatrix} = 0$

$c)$ $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2-x \\ -2 & 1+x & 4 \\ 2+x & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$d)$ $\begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$e)$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & x & x-7 \\ 16 & x^2 & x^2-25 \end{vmatrix} = 0$

$f)$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x-5$

8. Determina el valor de las siguientes sumas teniendo en cuenta que α_{ij} es el cofactor del elemento

$\langle A\rangle_{ij}$ $\sum_{h=1}^{3} \langle A\rangle_{1h}\,\alpha_{2h}$ y $\sum_{h=1}^{3} \langle A\rangle_{3h}\,\alpha_{2h}$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

9. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{p\times q}$

$a)$ Determina bajo qué condiciones de $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ se pueden calcular los siguientes determinantes: $|A \cdot B|\,, |-6B|\,, |A^t \cdot B|\,, |A^4|\,.$

$b)$ Si $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ $|A| = 3$ y $|B| = -2$ calcula los determinantes indicados en el apartado anterior.