Trabajo Práctico 2

1. Dadas las siguientes matrices con elementos en $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Determina su adjunta y verifica la propiedad de la adjunta.

   b) Indica cuáles de las matrices son inversibles y encuentra su inversa. Usando el apartado anterior.

   c) ¿Cómo son los cofactores de la fila 1 de las matrices C y D?¿Por qué?

2. Dadas las matrices con elementos en $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & x \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix},\ x \neq 0 \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcula su adjunta.

   b) ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, las matrices son inversibles?

   c) ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, las matrices tienen rango máximo?

   d) Sin realizar operaciones elementales ¿para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, las matrices no son equivalentes por filas a la identidad?

   e) Para $x = 2$, encuentra:

      i) la inversa de las matrices dadas.

      ii) la inversa de la adjunta de las matrices dadas.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones, usando inversa y propiedad de adjunta:

   a) $(adjA) \cdot X - B^{-1} = \Theta$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

   b) $A \cdot X = B$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$c)$ $X \cdot A^t = (adjB)^t$ con $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

4. Determina $x \in \mathbb{R}$ para que:

$a)$ $adjA = \begin{pmatrix} x^2 & -3 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$b)$ $adjA = \begin{pmatrix} 2x & 0 & -5 \\ -9x & 1 & 24 \\ -3 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. Clasifica (sin resolver) los siguientes sistemas según la cantidad de soluciones que admitan:

$a)$ $\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -2x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$

6. Usando determinante, calcula el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que los siguientes sistemas admitan:

$a)$ Infinitas soluciones.

$b)$ Solución única.

i) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ (1+k)\,x + 2y + z = 0 \\ k^2x - y + z = 0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x + (k+1)\ y + z = 0 \\ x + y + (k+1)\ z = 0 \\ (k+1)\ x - y + z = 0 \end{cases}$

7. Resuelva los siguientes sistemas. En caso de ser posible utiliza matriz inversa.

$a)$ $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ y + 2z = 4 \\ -y - 4z = 10 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} 5x - 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2z - 5x = 2 \end{cases}$

$c)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. Usando determinante, indica para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $\begin{cases} k\,x + 4\,k\,y = -5 \\ (1+k)\ x + 2\,k\,y = -4 \end{cases}$ es compatible determinado.

9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1-m \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

a) Sin hacer cuentas, explica porqué C no es inversible. Justifica de dos maneras diferentes.

b) Determina para qué valores de $m \in \mathbb{R}$ la matriz A^t es inversible.

c) ¿Para qué valores de $m \in \mathbb{R}$ se puede asegurar que el sistema $A \cdot X = B$, con $B \neq \theta$ será compatible?

d) Para $m = 1$, determine la matriz X tal que $X \cdot adjA = C^t$

10. Dados los planos $\pi_1 : x + y + mz = m$, $\pi_2 : mx + my + z = 1$ y $\pi_3 : 2x + my + z = m$, usando determinante responde:

a) ¿Para que valor de $m \in \mathbb{R}$ los planos se intersectan en un punto?

b) Si $m = 0$ ¿en que punto se intersectan los planos?