Determintes - Parte 2

En esta segunda parte emplearemos determinantes para encontrar la inversa de matrices no singulares. En lo que sigue trabajaremos con matrices cuadradas.

Definición (Matriz adjunta)

*Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $n > 1$. Se llama **matriz adjunta de** A, y se denota $\operatorname{adj} A$, a la transpuesta de la matriz cuyos elementos son los cofactores de los elementos de A.*

En símbolos:

$$\text{adj } A = (\alpha_{ij})^t = (\alpha_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times n},\ \textit{con } \alpha_{ij} \textit{ cofactor de } \langle A\rangle_{ij}$$

Es decir:

$$\forall i,j : 1 \leq i,j \leq n,\ \ \langle \text{adj } A\rangle_{ij} = \alpha_{ji}$$

Observación

La adjunta de una matriz está definida sólo para matrices cuadradas de orden $n > 1$.

Ejemplo

En caso de ser posible, determina la adjunta de las siguientes matrices

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Resolución

1) **No** es posible determinar la adjunta de A por **no** ser una matriz cuadrada.

2) Es posible determinar la adjunta de B por ser una matriz cuadrada de orden 3. Calculemos entonces los cofactores de cada uno de sus elementos:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\ ,\quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6\ ,\quad \alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2\ ,\quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4\ ,\quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1\ ,\quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\ ,\quad \alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Luego, } \operatorname{adj} B = (\alpha_{ij})^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A continuación, encotraremos la adjunta de una matriz de orden 2.

Observación

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ entonces $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$

En efecto

$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} D(d) = d \qquad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} D(c) = -c$

$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} D(b) = -b \qquad \alpha_{22} = (-1)^{2+2} D(a) = a$

Entonces, $\operatorname{adj} A = (\alpha_{ij})^t = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Luego

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Regla Práctica: para determinar la adjunta de una matriz de orden 2 se intercambian los elementos de la diagonal y los de la diagonal secundaria se multiplican por -1.

Ejemplo

Determina la adjunta de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Resolución:

Por la observación anterior se tiene que $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Propiedad (de la matriz adjunta)

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \text{ con } n > 1, \ A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = D(A)\, \mathbb{I}_{n\times n}$$

Demostración

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $n > 1$. Debemos probar que: $A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = D(A)\,\mathbb{I}_{n\times n}$

La doble igualdad anterior está definida, pues:

$A \in \mathbb{K}^{n\times n} \quad \wedge \quad \operatorname{adj} A \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow A \cdot \operatorname{adj} A,\ \operatorname{adj} A \cdot A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$D(A) \in \mathbb{K} \quad \wedge \quad \mathbb{I} \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow D(A)\,\mathbb{I} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Con lo cual las matrices son comparables. Probemos ahora, que son iguales, es decir que:

$$\forall i,j : 1 \le i,j \le n,\ \langle A \cdot \operatorname{adj} A\rangle_{ij} = \langle \operatorname{adj} A \cdot A\rangle_{ij} = \langle D(A)\,\mathbb{I}\rangle_{ij}$$

Efectivamente:

$\forall i,j : 1 \le i,j \le n$,

$$\begin{aligned}
\langle A \cdot \text{adj } A\rangle_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} \langle A\rangle_{ih}\,\langle \operatorname{adj} A\rangle_{hj} \quad \text{por definición de producto de matrices} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \langle A\rangle_{ih}\ \alpha_{jh} \quad \text{por definición de matriz adjunta} \\
&= \begin{cases} D(A) & \text{si} \quad i = j \qquad \text{por desarrollo del determinante por fila } i \\ 0 & \text{si} \quad i \ne j \qquad \text{por último teorema (Det.-parte 1) para filas pues } i \ne j \end{cases} \\
&= D(A)\ \delta_{ij} \quad \text{por definición de Delta de Kronecker} \\
&= D(A)\,\langle \mathbb{I}\rangle_{ij} \quad \text{por definición de } \mathbb{I}_{n\times n} \\
&= \langle D(A)\,\mathbb{I}\rangle_{ij} \quad \text{por definición de producto de escalar por matriz}
\end{aligned}$$

Luego, por definición de igualdad de matrices se tiene que: $A \cdot \operatorname{adj} A = D(A)\,\mathbb{I}_{n\times n}$

Análogamente

$\forall i,j : 1 \le i,j \le n$,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{adj} A \cdot A\rangle_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} \langle \operatorname{adj} A\rangle_{ih}\,\langle A\rangle_{hj} \quad \text{por definición de producto de matrices} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \alpha_{hi}\ \langle A\rangle_{hj} \quad \text{por definición de matriz adjunta} \\
&= \begin{cases} D(A) & \text{si} \quad i = j \qquad \text{por desarrollo del determinante por columna } j \\ 0 & \text{si} \quad i \ne j \qquad \text{por último teorema (Det.-parte 1) para columnas pues } i \ne j \end{cases} \\
&= D(A)\ \delta_{ij} \quad \text{por definición de Delta de Kronecker} \\
&= D(A)\,\langle \mathbb{I}\rangle_{ij} \quad \text{por definición de } \mathbb{I}_{n\times n} \\
&= \langle D(A)\,\mathbb{I}\rangle_{ij} \quad \text{por definición de producto de escalar por matriz}
\end{aligned}$$

Luego, por definición de igualdad de matrices se tiene que: $\operatorname{adj} A \cdot A = D(A)\, \mathbb{I}_{n\times n}$

Por lo tanto

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n},\ \text{con } n > 1,\ A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = D(A)\, \mathbb{I}_{n\times n}$$

■

Observación

Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $n > 1$, las matrices $A \cdot \operatorname{adj} A$ y $\operatorname{adj} A \cdot A$ son matrices escalares con el escalar igual a $D(A)$

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = \begin{pmatrix} D(A) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & D(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & D(A) \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Comprobar la propiedad de la adjunta para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Resolución:

En el ejemplo anterior vimos que $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Luego,

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\, \mathbb{I}_{2\times 2} \quad (1)$$

$$\operatorname{adj} A \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\, \mathbb{I}_{2\times 2} \quad (2)$$

Por otra parte,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) - 4(-1) = -2 \quad (3)$$

De (1), (2) y (3) se tiene que: $A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = D(A)\, \mathbb{I}_{2\times 2}$

Teorema (Condición necesaria y suficiente para matriz inversible)

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$A \textit{ es inversible} \Leftrightarrow D(A) \neq 0$$

Demostración

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

($\Rightarrow$) Queremos probar la implicación: A inversible $\Rightarrow D(A) \neq 0$

Por hipótesis, A es inversible, entonces

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \quad \text{por definición de matriz inversible}$$

Trabajemos con la siguiente igualdad: $A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_{n\times n}$

Como las matrices $A \cdot A^{-1}$, $\mathbb{I}_{n\times n}$ son iguales, sus determinantes también lo son:

$$D\left(A \cdot A^{-1}\right) = D\left(\mathbb{I}_{n\times n}\right)$$

Por propiedad adicional 2 y axioma 4 de determinantes, se tiene que

$$D\left(A\right) \cdot D\left(A^{-1}\right) = 1$$

Por ser un producto no nulo en $\mathbb{K}$, sus factores son no nulos, entonces $D\left(A\right) \neq 0$ $\left(\text{más aún } D\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{D\left(A\right)}\right)$

Luego

$$A \text{ inversible} \Rightarrow D(A) \neq 0$$

($\Leftarrow$) Queremos probar ahora la implicación: $D(A) \neq 0 \Rightarrow A$ inversible

- Sea $n = 1$:

  Como $A = (a_{11}) = a_{11} \in \mathbb{K}$ y $D\left(A\right) = D\left(a_{11}\right) = a_{11}$

  Por hipótesis, $D(A) \neq 0$, es decir $a_{11} \neq 0$.

  Luego $\exists \left(a_{11}\right)^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}} \neq 0 : a_{11} \cdot \dfrac{1}{a_{11}} = \dfrac{1}{a_{11}} \cdot a_{11} = 1$

  Por lo tanto, A es inversible y se tiene que $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}}$

- Sea $n > 1$

  Como $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, por propiedad de la matriz adjunta, se tiene que

  $$A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = D\left(A\right) \mathbb{I}_{n\times n}$$

  Trabajemos con la siguiente igualdad: $A \cdot \operatorname{adj} A = D\left(A\right) \mathbb{I}_{n\times n} \quad (*)$

Por hipótesis $D(A) \neq 0$, entonces $\exists\,(D(A))^{-1} = \dfrac{1}{D(A)} \neq 0$ (recordemos que $D(A) \in \mathbb{K}$)

Multiplicando la ecuación $(*)$ por el escalar $\dfrac{1}{D(A)} \neq 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D(A)}\,(A \cdot \operatorname{adj} A) &= \frac{1}{D(A)}\,(D\,(A)\,\mathbb{I}) \\
A \cdot \left(\frac{1}{D(A)}\,\operatorname{adj} A\right) &= \underbrace{\left(\frac{1}{D(A)}\,D\,(A)\right)}_{=1}\mathbb{I} \qquad \text{por propiedad asociativa mixta del producto de escalar por matriz} \\
A \cdot \left(\frac{1}{D(A)}\,\operatorname{adj} A\right) &= \mathbb{I}
\end{aligned}$$

Por teorema (página 16, de la teoría de Matrices - Parte 2), se tiene que A es inversible $\left(\text{más aún, } A^{-1} = \dfrac{1}{D(A)}\,\operatorname{adj} A\right)$

Luego

$$D(A) \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible}$$

$\blacksquare$

La demostración del teorema nos provee una **fórmula para calcular la inversa** de una matriz no singular (usando determinante y matriz adjunta) y otra para calcular su determinante.

Corolario

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible, con $n > 1$, entonces

1) $A^{-1} = \dfrac{1}{D(A)}\,\operatorname{adj} A$

2) $D\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{D\,(A)}$

Demostración

Es trivial, por la prueba del teorema anterior. $\blacksquare$

Observación

Un enunciado equivalente de la condición necesaria y suficiente de matriz inversible es el siguiente:

$$A \text{ es singular} \Leftrightarrow D(A) = 0$$

Veamos ahora como calcular, usando este corolario, la inversa de una matriz no singular.

Ejemplo

Dadas las matrices:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad 3)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Usando matriz adjunta halle, en caso de ser posible,

- la inversa de las matrices dadas
- el determinate de la inversa de las matrices **no** singulares.

Resolución:

1) Trabajemos con la matriz A

- Veamos si A es inversible.

Por condición necesaria y suficiente de matriz inversible, basta con averiguar si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{c_3+(-1)c_1}{\overset{\text{prop. 3}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Por lo tanto A es inversible.

Calculemos entonces los cofactores de cada uno de sus elementos de A:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\ , \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\ , \quad \alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2\ , \quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\ , \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\ , \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\ , \quad \alpha_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Entonces adj}\, A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = -\dfrac{1}{2}$

Respuesta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \left|A^{-1}\right| = -\frac{1}{2}$$

2) Trabajemos con la matriz B

- Veamos si B es inversible.

Por condición necesaria y suficiente de matriz inversible, basta con averiguar si $|B| \neq 0$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{f_3+(-3)f_1}{\overset{\text{prop. 3}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4+4 = 0$$

- Como B no es inversible, no es posible calcular $|B^{-1}|$

Respuesta: B **no** es inversible pues $|B| = 0$

Notar que: La matriz B no es inversible, sin embargo, en el ejemplo de la página 1 vimos que $\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Para la matriz C

- Calculemos $|C|$, para saber si C es inversible

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow C \text{ es inversible}$$

Por la regla práctica para la adjunta de una matriz de orden 2

$$\operatorname{adj} C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, por el corolario anterior

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \operatorname{adj} C = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $|C^{-1}| = \dfrac{1}{|C|} = -\dfrac{1}{2}$

Respuesta:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \left|C^{-1}\right| = -\frac{1}{2}$$

El siguiente teorema se acepta **sin demostración.**

Teorema (Otras propiedades de la matriz adjunta)

1) $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n},$ *con* $n > 1,\ D(\operatorname{adj} A) = [D(A)]^{n-1}$

2) $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n},$ *con* $n > 1,\ \operatorname{adj}(A^t) = (\operatorname{adj} A)^t$

3) $\forall A \in \mathbb{K}^{2\times 2},\ \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A$ *y* $D(\operatorname{adj} A) = D(A)$

4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *con* $n > 1$
Si A *es inversible entonces* $\operatorname{adj} A$ *es inversible y* $(\operatorname{adj} A)^{-1} = \operatorname{adj}(A^{-1}) = \dfrac{1}{D(A)} A$

Ejemplo

Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Determina $\operatorname{adj} B^t$ y verifica para ella el teorema anterior.

Resolución:

Sabemos, por el ejemplo de la página 1, que $\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Por definición de transpuesta, $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Calculemos los cofactores de los elementos de B^t

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\ , \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2\ , \quad \alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6\ , \quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4\ , \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\ , \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\ , \quad \alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Luego $\operatorname{adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (\operatorname{adj} B)^t$

Ejemplo

Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, determina $\operatorname{adj}(C^{-1})$ y verifica para ella el teorema anterior.

Resolución

Sabemos, por el ejemplo de la página 7, que C es inversible (pues $|C| = -2$),

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ y } \operatorname{adj} C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la regla práctica para la adjunta de una matriz de orden 2 se tiene que

$$\operatorname{adj}\left(C^{-1}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \operatorname{adj}(\operatorname{adj} C) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Por otra parte $|\operatorname{adj} C| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -2 = |C| \neq 0 \Rightarrow \operatorname{adj} C$ es inversible y

$$\begin{aligned} (\operatorname{adj} C)^{-1} &= \frac{1}{|\operatorname{adj} C|}\operatorname{adj}(\operatorname{adj} C) = \frac{1}{|C|}C \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{adj}\left(C^{-1}\right) \end{aligned}$$

A continuación recopilaremos los resultados equivalentes a matriz inversible, con los temas vistos hasta aquí.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) A *es inversible*

2) $A \sim_f \mathbb{I}_{n \times n}$

3) A *es producto de un número finito de matrices elementales*

4) $rg\,(A) = n$

5) $A \cdot X = \Theta_{n \times 1}$ *es compatible determinado*

6) $A \cdot X = B$ *es compatible determinado* $\forall B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$

7) $D\,(A) \neq 0$

NOTAR QUE: estos resultados fueron justificados a lo largo de las 3 primeras unidades.