Sistemas Lineales

Definición (Ecuación lineal)

*Sea $n \in \mathbb{N}$. Se llama **ecuación lineal** en las n variables o incógnitas $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$ a toda expresión del tipo:*

$$a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \cdots + a_n\ x_n = b \qquad (1)$$

donde

$a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n \in \mathbb{K}$ *son los coeficientes y*

$b \in \mathbb{K}$ *es el término independiente de la ecuación* (1)

Observación

- El nombre **lineal** se debe a que la ecuación (1) es de primer grado en las variables de dicha ecuación. Es decir que, una ecuación lineal no incluye productos o raíces de variables. Tampoco aparecen las variables como argumentos de funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Por lo tanto, las variables sólo aparecen elevadas a la primera potencia.

- Las variables algunas veces aparecen sin subíndices, como por ejemplo x, y, z, en lugar de $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Ejemplo

Las siguientes ecuaciones son lineales

- $3x_1 - 2x_2 + \sqrt{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = -9$ ecuación lineal en 4 variables: x_1, x_2, x_3, x_4
- $4x - y + 7z = 2$ ecuación lineal en 3 variables: x, y, z
- $2x + 6y - 5z + 3t = 0$ ecuación lineal en 4 variables: x, y, z, t

Ejemplo

Las siguientes ecuaciones no son lineales porque no tienen la forma (1)

- $x_1 - 3\,(x_2)^5 = 1$
- $x \cdot y - z = 0$
- $x - \operatorname{sen} y = 0$
- $4\sqrt{x_1} - 5x_2 + \log x_3 = 2$

Definición (Sistema de ecuaciones lineales)

*Un **sistema** de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$ en $\mathbb{K}$ tiene*

- ***forma escalar**:*

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n = b_m \end{cases}$$

  donde a_{ij}, b_i están dados, con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, siendo:

  - $a_{ij} \in \mathbb{K}$ *los coeficientes*
  - $b_i \in \mathbb{K}$ *los términos independientes*

- ***forma matricial**:*

$$A \cdot X = B$$

  donde las matrices A y B estan dadas, siendo:

  - $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *la matriz de los coeficientes o matriz del sistema*
  - $B = (b_i) \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ *la matriz de los términos independientes*
  - $X = (x_j) \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ *la matriz de las incógnitas*

Observación

- Las matrices simplifican la escritura de un sistema en la forma escalar pues permiten escribirlo de manera más simple en la forma matricial.

  Dada la forma escalar podemos obtener la forma matricial y viceversa empleando el producto e igualdad de matrices:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot X = B, \text{ donde } A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n},$$
$$B = (b_i) \in \mathbb{K}^{m\times 1},\ X = (x_j) \in \mathbb{K}^{n\times 1}$$

- La matriz $(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$, llamada **matriz ampliada del sistema** $A \cdot X = B$, será de mucha utilidad al momento de resolver el sistema.

Ejemplo

Dada la matriz ampliada del sistema, $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, determina la forma escalar y matricial del mismo sabiendo que sus variables son $x,\ y,\ z$.

- Forma escalar: $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

- Forma matricial: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Definición (Sistema homogéneo y no homogéneo)

Sea el sistema $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$. Se dice que:

1) *El sistema es **homogéneo** si $B = \Theta_{m\times 1}$*

2) *El sistema es **no homogéneo** si $B \neq \Theta_{m\times 1}$*

Observación

Un sistema de m ecuaciónes lineales con n incógnitas es homogéneo si los m términos independientes son iguales a 0 (cero). En caso contrario, es no homogéneo.

Ejemplo

Dados los sistemas

$$S_1 : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

S_1 es homogéneo y S_2 es **no** homogéneo.

Definición (Solución de un sistema)

Sea el sistema $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$. Se dice que:

$$X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} \textit{ es } \textbf{\textit{solución del sistema}} \Leftrightarrow A \cdot X_0 = B$$

Observación

Para un sistema expresado en forma escalar:

$$S_1 : \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n = b_m \end{cases}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1} \text{ es solución de } S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\ s_1 + a_{12}\ s_2 + \ldots + a_{1n}\ s_n = b_1 \\ a_{21}\ s_1 + a_{22}\ s_2 + \ldots + a_{2n}\ s_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\ s_1 + a_{m2}\ s_2 + \ldots + a_{mn}\ s_n = b_m \end{cases}$$

Es decir, $s_1,\ s_2,\ \ldots\ ,\ s_n$ verifican las m ecuaciones con n incógnitas del sistema.

Ejemplo

Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

se tiene que:

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución del sistema pues $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ **no** es solución del sistema pues $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

  Observar que $x = 0,\ y = -7,\ z = -2$ verifican la segunda ecuación, pero no así la primera del sistema en su forma escalar.

Definición (Conjunto solución de un sistema)

*Sea el sistema $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$. Se llama **conjunto solución del sistema** al siguiente conjunto:*

$$C_S = \left\{ X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} \ / \ A \cdot X_0 = B \right\}$$

Es decir, el conjunto solución de un sistema es el conjunto formado por todas las soluciones que verifican las m ecuaciones con n incógnitas del mismo.

Ejemplo

El conjunto solución del sistema $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ es

$$C_S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-z \\ z-1 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \right\}$$

(más adelante veremos como determinarlo)

Observemos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in C_S$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \notin C_S$, lo cuál se deduce fácilmente en este ejemplo.

Sistemas compatibles e incompatibles

Dado el sistema $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$. Una pregunta natural que surge es la siguiente

$$¿\ \exists\ X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X_0 = B\ ?, \text{ es decir } ¿\ C_S \neq \emptyset\ ?$$

En lo que sigue vamos a dar respuesta a este interrogante. Para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición (Sistema compatible e incompatible)

Sea el sistema $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$. Se dice que el sistema

*1) $A \cdot X = B$ es **compatible** $\Leftrightarrow C_S \neq \emptyset$*

- *Si el sistema tiene solución única, se dice **compatible determinado***
- *Si el sistema tiene infinitas soluciones, se dice **compatible indeterminado***

2) $A \cdot X = B$ *es* ***incompatible*** $\Leftrightarrow C_S = \emptyset$

Equivalentemente

$A \cdot X = B$ *es* ***compatible*** $\Leftrightarrow \exists X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X_0 = B$

$A \cdot X = B$ *es* ***incompatible*** $\Leftrightarrow \forall X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X_0 \neq B$

Observación

- En resumen

$$\text{Sistema:}\begin{cases} \text{Compatible } (C_S \neq \emptyset) \begin{cases} \text{Determinado (solución única)} \\ \text{Indeterminado (infinitas soluciones)} \end{cases} \\ \text{Incompatible } (C_S = \emptyset, \text{ no tiene solución}) \end{cases}$$

- Los sistemas **homogéneos**, $A \cdot X = \Theta_{m\times 1}$, son siempre **compatibles** pues

$$A \cdot \Theta_{n\times 1} = \Theta_{m\times 1} \Rightarrow \Theta_{n\times 1} \in C_S \Rightarrow C_S \neq \emptyset$$

donde $\Theta_{n\times 1}$ **no necesariamente es solución única** de $A \cdot X = \Theta_{m\times 1}$.

Los sistemas homogéneos tienen, al menos, una solución

Hasta ahora no podemos afirmar si los sistemas no homogéneos son o no son compatibles

Ejemplo

El sistema

- $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$ es compatible pues $C_S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-z \\ z-1 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \right\} \neq \emptyset$

- $\begin{cases} x + z = -1 \\ y - z = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ es incompatible, pues $C_S = \emptyset$ (queda pendiente comprobar ésto)

Definición (Sistemas equivalentes)

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$, $C \in \mathbb{K}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{K}^{p\times 1}$. Se dice que los sistemas $A \cdot X = B$ y $C \cdot X = D$ son ***equivalentes*** *si tienen el mismo conjunto solución.*

Observación

Las matrices A y C de los sistemas de la definición anterior no necesariamente tienen el mismo orden, pero ambas tienen el mismo número de columnas. Es decir, los sistemas tienen el mismo número de incognitas.

Ejemplo

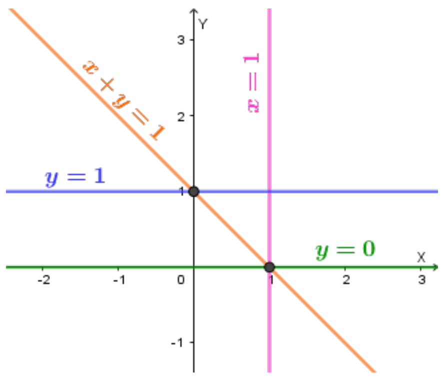
Dados los sistemas

$$S_1 : \begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \end{cases} , \quad S_2 : \begin{cases} x+y=1 \\ x=1 \end{cases} , \quad S_3 : \begin{cases} x+y=1 \\ x=1 \\ y=0 \end{cases} , \quad S_4 : \begin{cases} x+y=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Como $C_{S_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \right\} = C_{S_2} = C_{S_3}$ y $C_{S_4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \right\}$ entonces

- S_1 y S_2 son equivalentes
- S_2 y S_3 son equivalentes (a pesar de que tienen distinta cantidad de ecuaciones)
- S_1 y S_3 son equivalentes
- S_1 y S_4 **no** son equivalentes por lo tanto S_2 y S_4 no son equivalentes y tampoco S_3 y S_4

Gráficamente:



Teorema

Sean los sistemas $A \cdot X = B$ *y* $C \cdot X = D$*, con* $A,\ C \in \mathbb{K}^{m\times n}$*,* $B,\ D \in \mathbb{K}^{m\times 1}$*.*

$$\textit{Si } (A \mid B) \sim_f (C \mid D) \textit{ entonces los sistemas son equivalentes.}$$

Demostración

Por hipótesis $(A \mid B) \sim_f (C \mid D)$

$\Rightarrow \ \exists P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ producto de un n° finito de matrices elementales : $(A \mid B) = P \cdot (C \mid D)$

por condición necesaria y suficiente de equivalencia por filas

$\Rightarrow \ \exists P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ inversible : $(A \mid B) = (P \cdot C \mid P \cdot D)$

por ser producto de matrices inversible y por partición particular del producto

$\Rightarrow \ \exists P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ inversible : $A = P \cdot C \ \wedge \ B = P \cdot D \qquad (2)$

Queremos probar que los sistemas $A \cdot X = B$ y $C \cdot X = D$ son equivalentes, es decir que tienen el mismo conjunto solución.

Sean

$$\begin{aligned} C_{S_1} &= \left\{X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X_0 = B\right\} \qquad (3) \\ C_{S_2} &= \left\{X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : C \cdot X_0 = D\right\} \qquad (4) \end{aligned}$$

los conjuntos solución de los sistemas $A \cdot X = B$ y $C \cdot X = D$, respectivamente.

Probemos que $C_{S_1} = C_{S_2}$

Por definición de igualdad de conjuntos

$$C_{S_1} = C_{S_2} \Leftrightarrow C_{S_1} \subset C_{S_2} \ \wedge \ C_{S_2} \subset C_{S_1}$$

Probemos entonces ambas inclusiones de conjuntos:

- $C_{S_1} \subset C_{S_2}$?

$$\begin{aligned} X_0 \in C_{S_1} &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X_0 = B \quad \text{por (3)} \\ &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : (P \cdot C) \cdot X_0 = P \cdot D \quad \text{por (2)} \\ &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : P^{-1} \cdot (\,(P \cdot C) \cdot X_0) = P^{-1} \cdot (P \cdot D) \\ &\quad\ \text{premultiplicamos por } P^{-1} \text{ pues } P \text{ es inversible} \\ &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot (C \cdot X_0) = \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot D \\ &\quad\ \text{por ser el prod. de matrices asociativo y por (2)} \\ &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : C \cdot X_0 = D \quad \text{pues } P^{-1}{\cdot}P = \mathbb{I}_{m\times m} \\ &\quad\ \text{e } \mathbb{I}_{m\times m} \text{ es neutro multiplicativo en } \mathbb{K}^{m\times m} \\ &\Rightarrow X_0 \in C_{S_2} \quad \text{por (4)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por definición de inclusión de conjuntos, $C_{S_1} \subset C_{S_2}$

- $C_{S_2} \subset C_{S_1}$?

$$\begin{aligned} X_0 \in C_{S_2} &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : C \cdot X_0 = D \quad \text{por (4)} \\ &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : P \cdot (\,C \cdot X_0) = P \cdot D \quad \text{premultiplicamos por } P \text{ en ambos miembros} \\ &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : (P \cdot C) \cdot X_0 = P \cdot D \quad \text{por ser el prod. de matrices asociativo} \\ &\Rightarrow X_0 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X_0 = B \quad \text{por (2)} \\ &\Rightarrow X_0 \in C_{S_1} \quad \text{por (3)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por definición de inclusión de conjuntos, $C_{S_2} \subset C_{S_1}$

Luego, por definición de igualdad de conjuntos se tiene que

$$C_{S_1} = C_{S_2}$$

de modo que los sistemas $A \cdot X = B$ y $C \cdot X = D$ son equivalentes. ■

Observación (Muy importante)

Emplearemos el teorema anterior para hallar el conjunto solución de un sistema pero resolviendo otro sistema equivalente al dado, que será mucho más sencillo de resolver y que esta relacionado con la matriz escalón reducida por filas.

Sea el sistema $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad &\Rightarrow \quad \exists!\ E_{rf}(A) \in \mathbb{K}^{m\times n} : A \sim_f E_{rf}(A) \quad \text{por teorema} \\ &\Rightarrow \quad \exists P \in \mathbb{K}^{m\times m} \text{ producto de un n° finito de matrices elementales} : E_{rf}(A) = P \cdot A \quad (5) \\ &\qquad \text{por condición necesaria y suficiente de equivalencia por filas de matrices} \end{aligned}$$

Si a la matriz B le aplicamos las mismas operaciones elementales de filas que llevan A a la $E_{rf}(A)$ se obtiene $D \in \mathbb{K}^{m\times 1}$:

$$D = P \cdot B \quad (6)$$

Entonces, $\exists\, P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ producto de un n° finito de matrices elementales:

$$\begin{aligned} P \cdot (A \mid B) &= (P \cdot A \mid P \cdot B) \quad \text{por partición particular del producto} \\ &= (E_{rf}(A) \mid D) \quad \text{por (5) y (6)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(A \mid B) \sim_f (E_{rf}(A) \mid D)$$

Luego, por el teorema anterior, los sistemas $A \cdot X = B \wedge E_{rf}(A) \cdot X = D$ son equivalentes, es decir tienen el mismo conjunto solución. Siendo el sistema

$$\boxed{E_{rf}(A) \cdot X = D \quad \textbf{más sencillo para resolver que el sistema dado}}$$

pues la matriz $E_{rf}(A)$ esta formada, en su mayoria, por elementos que valen 0 y 1

Regla Practica: Dado el sistema $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ matrices dispuestas como en el siguiente cuadro. Aplicamos operaciones elementales de filas a la matriz ampliada $(A \mid B)$ hasta obtener $(E_{rf}(A) \mid D)$:

A	B	
$E_1 \cdot A$	$E_1 \cdot B$	e_1
$E_2 \cdot E_1 \cdot A$	$E_2 \cdot E_1 \cdot B$	e_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underbrace{E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1}_{P} \cdot A$	$\underbrace{E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1}_{P} \cdot B$	e_s
$E_{rf}(A)$	D	$\Rightarrow$ **Resolvemos:** $E_{rf}(A) \cdot X = D$

pues los sistemas $A \cdot X = B \wedge E_{rf}(A) \cdot X = D$ son equivalentes.

El siguiente teorema, que se acepta **sin demostración**, permitirá decidir cuando un sistema tiene solución (compatible) y cuando carece de solución (incompatible).

Teorema (Rouché - Frobenius)

Dado el sistema $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$. Entonces:

1) $A \cdot X = B$ *es **incompatible*** $\Leftrightarrow$ $rg(A) \neq rg\,(A \mid B)$

2) $A \cdot X = B$ *es **compatible*** $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg\,(A \mid B)$

a) $A \cdot X = B$ *es **compatible determinado*** $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg\,(A \mid B) = n$

b) $A \cdot X = B$ *es **compatible indeterminado*** $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg\,(A \mid B) < n$

siendo n el número de incógnitas

Observación

Dado el sistema homogéneo $A \cdot X = \Theta_{m\times 1}$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Por el teorema de Rouché-Frobenius, sabemos que todo sistema homogéneo es siempre compatible pues $rg\,(A) = rg\,(A \mid \Theta)$, por lo cual la columna nula de los términos independientes no aporta un vector columna canónico diferente a los de la $E_{rf}(A)$. Entonces en el caso de los sistemas homogéneos se trabaja directamente con la matriz A del sistema y no con la matriz ampliada $(A \mid \Theta)$.

Ejemplo

Determina el conjunto solución del siguiente sistema homogéneo e interpreta geométricamente su solución (en $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$$

Resolución

Por la observación anterior, escribamos la matriz del sistema, A, y realicemos operaciones elementales de filas hasta llegar a $E_{rf}(A)$:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_3+(-1)f_1 \\ f_4+(-2)f_1}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_1+(-1)f_2 \\ f_3+(-1)f_2 \\ f_4+1f_2}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{rf}(A)$$

$$rg(A)=rg\,(A\,|\,\Theta\,)=2<3=\text{n}^o \text{ de incógnitas} \overset{\text{teorema}}{\underset{\text{R-F}}{\Rightarrow}} \quad \text{Sistema compatible indeterminado}$$

(infinitas soluciones)

Resolvamos el sistema equivalente $E_{rf}(A)\cdot X=\Theta$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases}$$

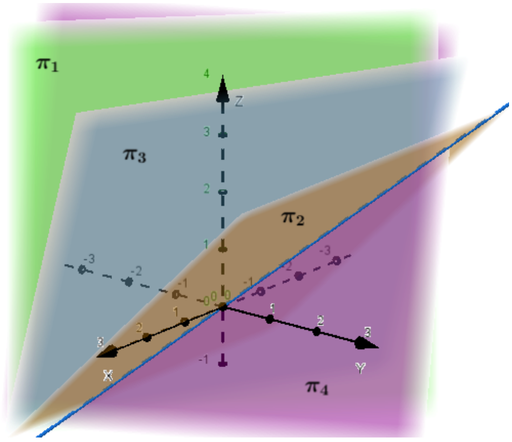
Luego

$$\begin{aligned} C_S &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} : x+z=0 \wedge y-z=0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \right\} \end{aligned}$$

Interpretación gemétrica

Como cada una de las ecuaciones del sistema son ecuaciones lineales en las variables $x,\ y,\ z$ estas representan planos en el espacio. Luego, los planos de ecuaciones

$\pi_1 : x+y=0$, $\pi_2 : y-z=0$, $\pi_3 : x+2y-z=0$ y $\pi_4 : 2x+y+z=0$ se intersectan en la recta de ecuación $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ (recta como intersección de planos) dada por el sistema equivalente.



Ejemplo

Determina el conjunto solución de los siguintes sistemas e interpreta geométricamente su solución (en $\mathbb{R}^3$)

1) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y+5z=8 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2z=-1 \\ y-z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Resolución

1) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

Escribamos la matriz ampliada asociada al sistema, $(A \mid B)$, y realicemos operaciones elementales de filas hasta llegar a $(E_{rf}(A) \mid D)$:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2+(-2)f_1 \\ f_3+(-1)f_1}}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_1+1f_2 \\ f_3+(-2)f_2}}{\sim_f}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{(-1)f_2 \\ (-1)f_3}}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = (E_{rf}(A) \mid D)$$

$$rg(A) = rg\,(A \mid B\,) = 3 = \text{n}^o\text{de incógnitas} \underset{\text{R-F}}{\overset{\text{teorema}}{\Rightarrow}} \quad \begin{array}{c}\text{Sistema compatible determinado}\\ \text{(solución única)}\end{array}$$

Resolvamos el sistema equivalente $E_{rf}(A) \cdot X = D$

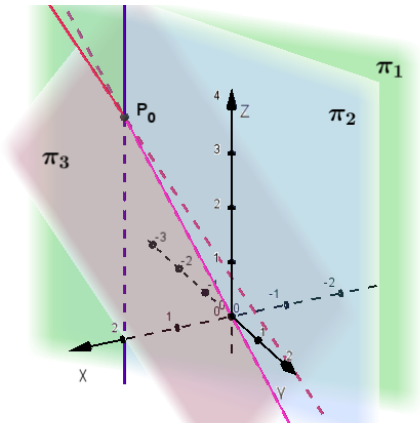
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Luego

$$C_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \right\}$$

Interpretación gemétrica

Como cada una de las ecuaciones del sistema son ecuaciones lineales en las variables $x,\ y,\ z$ estas representan planos en el espacio. Luego, los tres planos de ecuaciones $\pi_1 : x + y = -1$, $\pi_2 : 2x + y = 0,\ \pi_3 : x - y - z = 0$ se intersectan simultánemente el punto $P_0\,(1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$



2) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

Escribamos la matriz ampliada asociada al sistema, $(A \mid B\,)$, y realicemos operaciones elementales de filas hasta llegar a $(E_{rf}(A) \mid D\,)$:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 8 \\ \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{f_1+(-3)f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{f_2+1f_1}{\sim_f}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) = (E_{rf}(A) \mid D)$$

$rg(A) = rg(A \mid B) = 2 < 3 = \text{n}^o\text{de incógnitas} \underset{\text{R-F}}{\overset{\text{teorema}}{\Rightarrow}}$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Resolvamos el sistema equivalente $E_{rf}(A) \cdot X = D$

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ y = z - 1 \end{cases}$$

Luego

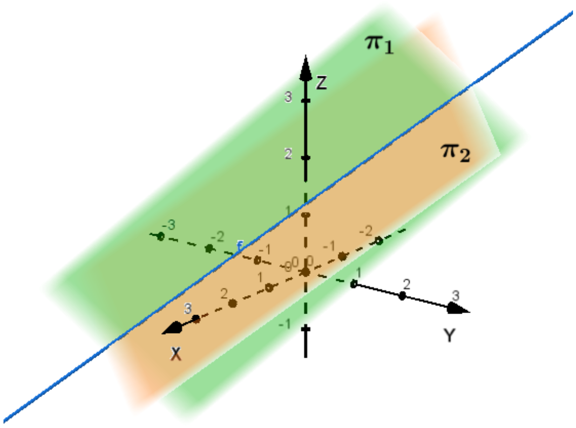
$$C_S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1} : x + z = 2 \wedge y - z = -1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 - z \\ z - 1 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1} \right\}$$

Interpretación gemétrica

Como cada una de las ecuaciones del sistema son ecuaciones lineales en las variables x, y, z estas representan planos en el espacio. Luego, los planos de ecuaciones

$\pi_1 : 3x-2y+5z = 8$, $\pi_2 : x-y+2z = 3$ se intersectan en la recta de ecuación $\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$ (recta como intersección de planos) dada por el sistema equivalente.



3) $\begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

Escribamos la matriz ampliada asociada al sistema, $(A \mid B)$, y realicemos operaciones elementales de filas hasta llegar a $(E_{rf}(A) \mid D)$:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{f_3+(-1)f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{f_3+(-1)f_2}{\sim_f}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_{rf}(A) \mid D)$$

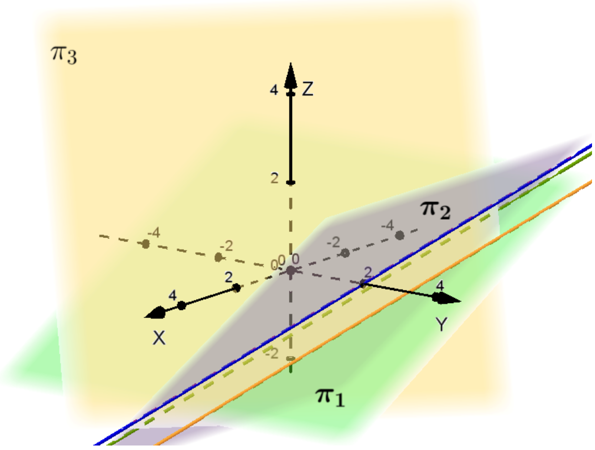
$$rg(A) = 2 \neq rg\,(A \mid B) = 3 \underset{\text{R-F}}{\overset{\text{teorema}}{\Rightarrow}} \text{Sistema incompatible.}$$

Luego

$$C_S = \emptyset$$

Interpretación gemétrica

Como cada una de las ecuaciones del sistema son ecuaciones lineales en las variables $x,\ y,\ z$ estas representan planos en el espacio. Luego, los tres planos de ecuaciones $\pi_1 : x+2z = -1$, $\pi_2 : y - z = 2,\ \pi_3 : x + y + z = 2$ no se intersectan simultánemente.



Observación

Si alguna matriz equivalente por filas a la matriz ampliada $(A \mid B)$ tiene una fila de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \mid c \end{pmatrix}, \; c \neq 0$$

entonces $rg\,(A) \neq rg\,(A \mid B)$ pues se puede determinar un vector canónico columna diferente en la columna de los términos independientes, por lo cual el sistema es incompatible.

Dicha fila implica la ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = c \neq 0$$

y ésta no se satisfece para nigún valor de $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.

El siguiente teorema presenta una serie de equivalencias que vincula matrices inversibles con sistemas de ecuaciones lineales.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) A es inversible

2) $A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n}$

3) A es producto de un número finito de matrices elementales

4) $rg\,(A) = n$

5) $A \cdot X = \Theta_{n\times 1}$ es compatible determinado

6) $A \cdot X = B$ es compatible determinado $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$

Notar que: varias de las equivalencias presentadas en el teorema fueron justificadas en la primera unidad, las relacionadas con sistemas de ecuaciones lineales son simples de justificar y quedan como ejercicio.

Al finalizar las restantes unidades agregaremos equivalencias al teorema.