Espacios Vectoriales - Parte 2

En esta segunda parte estudiaremos los conceptos de generador de un espacio vectorial y independencia lineal de un subconjunto del espacio, los cuales permitirán definir más adelante el concepto de base.

Definición (Generador)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$. *Decimos que:*

$$S \text{ es } \textbf{generador} \text{ de } V \Leftrightarrow \forall v \in V,\ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Observación

- De la definición surge que:

  $$S \text{ es generador de } V \Leftrightarrow V = \langle S \rangle$$

  Es decir, S es generador de V sí y sólo si **todo** $v \in V$ se escribe como combinación lineal de los elementos del conjunto S. En este caso también se dice que S genera V.

- Si un elemento del espacio vectorial V **no** se escribe como combinación lineal de los elementos del conjunto S, entonces S **no** es generador de V y $V \neq \langle S \rangle$

  Es decir, para probar que un conjunto **no** es generador de un espacio vectorial, basta con mostrar con un ejemplo numérico que un elemento del espacio no es combinacion lineal de los elementos de S.

Ejemplo

Dados $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. y $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Determina si S es generador de $\mathbb{R}^3$.

Resolución

Sean $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. y $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$, donde $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0), v_4 = (0, -1, 1)$

Por definición de generador:

$$S \text{ es generador de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^3,\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i v_i$$

Debemos averiguar si un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S.

Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ¿$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i v_i$?

Para poder responder, trabajemos con la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \lambda_1 (1, 0, -1) + \lambda_2 (0, 1, 1) + \lambda_3 (1, 1, 0) + \lambda_4 (0, -1, 1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_4)\end{aligned}$$

Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^3$ se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = y \\ \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_4 = z \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de forma matricial,

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(A \,|B\,) = \left(\begin{array}{rrrr|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \underset{f_3+1f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x+z \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3+(-1)f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x+z-y \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}f_3}{\sim_f} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2}(x-y+z) \end{array}\right)$$

$$\underset{f_2+1f_3}{\sim_f} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(x+y+z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(x-y+z) \end{array}\right)$$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$rg\,(A) = rg\,(A\,|B\,) = 3 \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow} \text{el sistema es compatible (tiene solución)}$$

Por lo tanto, $\forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{4} \lambda_1 v_i$

Respuesta: S genera $\mathbb{R}^3$

Observa que en este caso el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones, pues $n = 4$) y el sistema equivalente es

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{2}(x+y+z) \\ \lambda_4 = \frac{1}{2}(x-y+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - \lambda_3 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(x+y+z) - \lambda_3 \\ \lambda_4 = \frac{1}{2}(x-y+z) \end{cases}, \forall \lambda_3$$

$\therefore\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \exists\lambda_1 = x-\lambda_3, \lambda_2 = \frac{1}{2}(x+y+z)-\lambda_3, \lambda_3, \lambda_4 = \frac{1}{2}(x-y+z)\in\mathbb{R}:$
$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,1,0)+\lambda_4(0,-1,1)$

Ejemplo

Dados $(\mathbb{R}^3,+,\mathbb{R},\cdot)$ E.V. y $S=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,-1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$. Determina si S es generador de $\mathbb{R}^3$. En caso negativo, halla el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por S

Resolución

Sean $(\mathbb{R}^3,+,\mathbb{R},\cdot)$ E.V. y $S=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,-1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$, donde $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(1,0,1)$, $v_3=(0,-1,1)$

Veamos si S genera $\mathbb{R}^3$. Por definición de generador:

$$S \text{ es generador de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \forall v\in\mathbb{R}^3, \exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R} : v=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i v_i$$

Veamos si un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal de los elementos de S.

Sea $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ¿$\exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R} : v=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i v_i$?

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(0,-1,1)\\ &= (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1-\lambda_3, \lambda_2+\lambda_3)\end{aligned}$$

Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^3$ se tiene que:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 = x\\ \lambda_1-\lambda_3 = y\\ \lambda_2+\lambda_3 = z\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de forma matricial, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}:$

$$(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 1 & 0 & x\\ 1 & 0 & -1 & y\\ 0 & 1 & 1 & z\end{array}\right) \underset{f_2+(-1)f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & x\\ 0 & -1 & -1 & y-x\\ 0 & \boxed{1} & 1 & z\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{f_1+(-1)f_3\\ f_2+1f_3}}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & x-z\\ 0 & 0 & 0 & y-x+z\\ 0 & 1 & 1 & z\end{array}\right)$$

El sistema es compatible $\overset{\text{por R-F}}{\Leftrightarrow} rg(A) = rg(A\,|B\,) = 2 \Leftrightarrow y-x+z=0$

Es decir, solo los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen con la condición $y - x + z = 0$ se pueden expresar como combinación lineal de los elementos de S

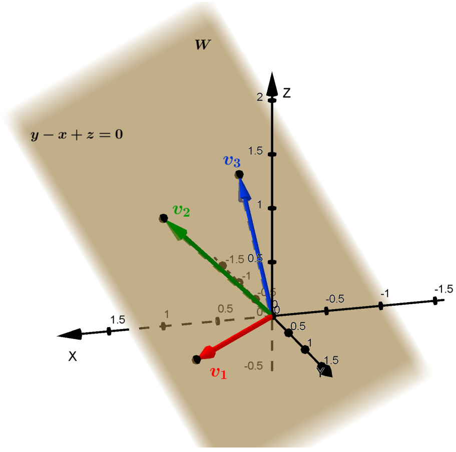
Por ejemplo: $v = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ **no** puede expresarse como combinación lineal de los elementos de S pues $0 - 1 + 0 \neq 0$

$\exists\, v = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, v \neq \lambda_1 (1, 1, 0) + \lambda_2 (1, 0, 1) + \lambda_3 (0, -1, 1)$

Respuesta: S **no** genera $\mathbb{R}^3$, sino S genera el subespacio

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x + z = 0\right\}$$

pues $\forall v = (y + z, y, z) \in W$, $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : (x, y, z) = \lambda_1 (1, 1, 0) + \lambda_2 (1, 0, 1) + \lambda_3 (0, -1, 1)$



Ejemplo

Sea $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V., siendo $V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \text{ es diagonal}\}$. Determina cuales de los siguientes conjuntos S es un generador de V:

1. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$
2. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Resolución

Sea $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V., con $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$.

En cada apartado debemos analizar:

- $S \subset V$
- Todo elemento de V se puede expresar como combinación lineal de los elementos de S.

1. Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

- $S \subset V$ pues los elementos de S son matrices diagonales
- Por definición de generador:

$$S \text{ es generador de } V \Leftrightarrow \forall v \in V,\, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Veamos si un elemento arbitrario de V se escribe como combinación lineal de los elementos de S.

Sea $v = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in V$ ¿$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$?

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - 2\lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces por igualdad de matrices se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = y \end{cases}$$

Como los sistemas son equivalentes, resolvemos el último $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & x \\ 1 & -2 & y \end{array}\right) \underset{f_2+(-1)f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-x \end{array}\right)$$

$$\underset{(-\frac{1}{3})f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3}(x-y) \end{array}\right) \underset{f_1+(-1)f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(x-y) \end{array}\right)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad rg\,(A) = rg\,(A\,|B\,) = 2 \Rightarrow \text{el sistema es compatible}$$

Entonces $\forall v = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in V$, $\exists \lambda_1 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \lambda_2 = \frac{1}{3}(x-y) \in \mathbb{R}$:

$$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Respuesta: S genera V

2. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \not\subset V$ pues $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin V$ ya que no es diagonal

Respuesta: S **no** genera V

Ejemplo

Dados $(W, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \wedge x = z\}$.

Determina un conjunto generador de W.

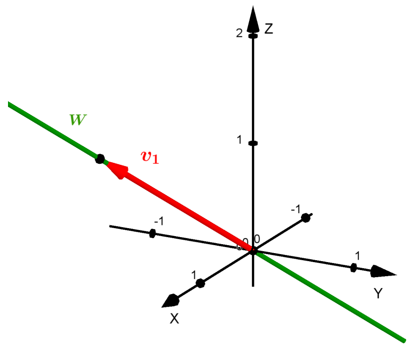
Resolución

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x \;\wedge\; x = z\} = \{(x, -x, x) \in \mathbb{R}^3\} = \{x\,(1, -1, 1) : x \in \mathbb{R}\}$

$\therefore\; W = \langle(1, -1, 1)\rangle$

Luego $S = \{(1, -1, 1)\} \subset W$ es un generador de W pues $W = \langle S \rangle$

Respuesta: $S = \{(1, -1, 1)\}$ es un generador de W



Observa que: $v_1 = (1, -1, 1)$ es el vector dirección de la recta:

$$\begin{cases} x = -y \\ x = z \end{cases}$$

Teorema

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V, con $V \neq \{\theta_V\}$, $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ tal que S es generador de V.

Si $\exists\, v_{i_0} \in S : v_{i_0}$ es combinación lineal de los demás elementos de S entonces $S - \{v_{i_0}\}$ es generador de V

Demostración

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V, con $V \neq \{\theta_V\}$, $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ tal que S es generador de V. Queremos probar la siguiente implicación:

$\exists\, v_{i_0} \in S : v_{i_0}$ es combinación lineal de los demás elementos de $S \Rightarrow S - \{v_{i_0}\}$ es generador de$V$

Por hipótesis:

- S es generador de V entonces

$$\forall v \in V,\ \exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad (1)$$

- $\exists\ v_{i_0} \in S : v_{i_0}$ es combinación lineal de los demás elementos de S, entonces

$$\exists\, \mu_1, \cdots, \mu_{i_0-1}, \mu_{i_0+1}, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K} : v_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \mu_i v_i \quad (2)$$

Probemos que $S - \{v_{i_0}\}$ es generador de V, utilizando (1) y (2) :

$\forall v \in V, \exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ y $\exists\, \mu_1, \cdots, \mu_{i_0-1}, \mu_{i_0+1}, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{por (1)} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \lambda_i v_i + \lambda_{i_0} v_{i_0} \quad \text{por ser } V \text{ E.V.} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \lambda_i v_i + \lambda_{i_0} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \mu_i v_i \quad \text{por (2)} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \underbrace{(\lambda_i + \lambda_{i_0}\mu_i)}_{=\alpha_i} v_i \quad \text{por ser } V \text{ E.V} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\forall v \in V, \exists\, \alpha_1, \cdots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i v_i$$

Es decir, **todo** $v \in V$ es combinación lineal de los elementos de

$S - \{v_{i_0}\} = \{v_1, \cdots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \cdots, v_n\}$

Luego, por la definición de generador, se tiene que $S - \{v_{i_0}\}$ es generador de V ■

Ejemplo

Sean $(W, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V., con $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x + z = 0\}$.

Determina si $S' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ es generador de W

Resolución

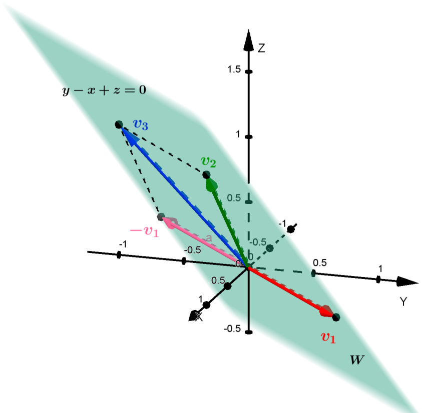
En un ejemplo anterior se probó que el conjunto $S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 1)\}$ genera el espacio W.

Si observamos, $S' = S - \{(0,-1,1)\}$ y el vector $(0,-1,1)$ es combinación lineal de los demás elementos de S pues:

$$(0,-1,1) = (-1)\,(1,1,0) + (1,0,1)$$

Luego, por el teorema anterior, S' genera W

Respuesta: S' genera W



Definición (Conjunto linealmente dependiente e independiente)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$. *Decimos que:*

a) S es ***linealmente dependiente (l.d.)*** $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *no todos nulos* $: \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = \theta$

b) S es ***linealmente independiente (l.i.)*** $\Leftrightarrow$ *S* ***no*** *es linealmente dependiente.*

Es decir:

$$S \text{ es } \mathbf{l.i.} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = \theta \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \text{ solución única} \right)$$

Observación

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V y $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$.

- S es **l.i**. si la **única** manera de expresar a θ como combinación lineal de los elementos de S es la **trivial**. Es decir:

$$\theta = 0\ v_1 + 0\ v_2 + \ldots + 0\ v_n$$

- S es l.d. si hay **otras** maneras de expresar a θ como combinación lineal de los elementos de S además de la trivial.

Ejemplo

Determina la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos en el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$

1. $S = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

2. $S = \{(1,1,0), (1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

Resolución

1. Sean $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. y $S = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, donde $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,-1,1)$

   Veamos si S es l.d. o l.i. en $\mathbb{R}^3$. Por las definiciones dadas:

$$\begin{array}{lcl} S \text{ es l.d.} & \Leftrightarrow & \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ no todos nulos} : \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, v_i = \theta \\ S \text{ es l.i.} & \Leftrightarrow & \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, v_i = \theta \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ solución única} \right) \end{array}$$

   Trabajemos entonces con la combinación lineal : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \theta$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 (1,1,0) + \lambda_2 (1,0,1) + \lambda_3 (0,-1,1) &= (0,0,0) \\ (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

   Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^3$ se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema homogéneo en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_2+(-1)f_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_1+(-1)f_3 \\ f_2+1f_3}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   $rg\,(A) = rg\,(A\,|\theta\,) = 2 < 3 = \text{n}^o$ de incógnitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible indeterminado

   El sistema equivalente es $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \quad \forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Entonces

$$\exists\,\lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = -\lambda_3, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ no todos nulos} : \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, v_i = \theta$$

Respuesta: S es l.d.

Observa que:

$\forall \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_3\,(1,1,0) - \lambda_3\,(1,0,1) + \lambda_3\,(0,-1,1) = (0,0,0)$

En particular, si:

- $\lambda_3 = 1, \qquad (1,1,0) - (1,0,1) + (0,-1,1) = (0,0,0)$
- $\lambda_3 = -2, \qquad -2\,(1,1,0) + 2\,(1,0,1) - 2\,(0,-1,1) = (0,0,0)$
- $\lambda_3 = 0, \qquad 0\,(1,1,0) - 0\,(1,0,1) + 0\,(0,-1,1) = (0,0,0)$

2. Sean $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. y $S = \{(1,1,0)\,,(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, donde $v_1 = (1,1,0)\,, v_2 = (1,0,1)$

Veamos si S es l.d. o l.i. en $\mathbb{R}^3$. Por las definiciones dadas:

$$S \text{ es l.d.} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ no todos nulos} : \sum_{i=1}^{2} \lambda_i\, v_i = \theta$$

$$S \text{ es l.i.} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{2} \lambda_i\, v_i = \theta \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ solución única} \right)$$

Trabajemos entonces con la combinación lineal : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \theta$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_1\,(1,1,0) + \lambda_2\,(1,0,1) &= (0,0,0) \\ (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^3$ se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema homogéneo en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_1+(-1)f_2}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_3+(-1)f_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\,(A) = rg\,(A\,|\theta\,) = 2 = \text{n}^o$ de incógnitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado por lo tanto tiene solución única, la trivial $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i\, v_i = \theta \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ (solución única)}$$

Por lo tanto S es l.i. pues la única manera de expresar a θ como combinación lineal de los elementos de S es la trivial: $0\,(1,1,0) + 0\,(1,0,1) = (0,0,0)$

Respuesta: S es l.i.

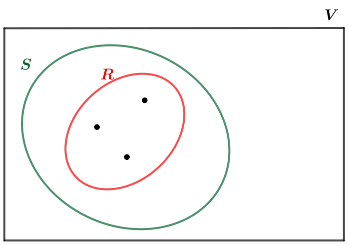
Consecuencias (de la definición de conjunto l.i. y l.d.)

Sea $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$ E.V y $R\,,S \subset V$ tales que $R\,,S \neq \emptyset$

1) Sea $R \subset S$:

$$R \text{ es l.d.} \Rightarrow S \text{ es l.d.}$$

Es decir, todo conjunto que contenga un conjunto l.d. es l.d.

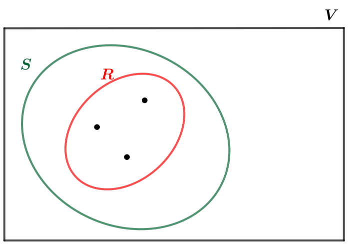


R l.d. $\Rightarrow$ S l.d.

2) Sean $R \subset S$:

$$S \text{ es l.i.} \Rightarrow R \text{ es l.i.}$$

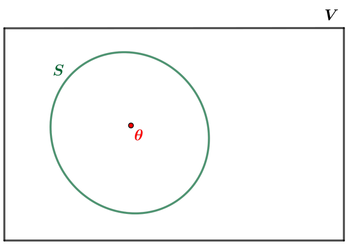
Es decir, todo subconjunto de un conjunto l.i. es l.i.



S l.i. $\Rightarrow$ R l.i.

3) $\theta \in S \Rightarrow S$ es l.d.

Es decir, todo conjunto que contenga al vector nulo es l.d.



$\theta \in S \Rightarrow S$ l.d.

4) Sea $v \in V : v \neq \theta$ entonces $\{v\}$ es l.i.

Es decir, todo conjunto unitario $\{v\} \subset V$, con $v \neq \theta$, es l.i.

5) Sean $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $v \in V$:

$$S \text{ es l.i.} \wedge \; S \cup \{v\} \text{ es l.d.} \Rightarrow v \text{ es combinación lineal de los elementos de } S$$

6) Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, con $n > 1$

$$S \text{ es l.d.} \Leftrightarrow \exists\, v_{i_0} \in S : v_{i_0} \text{ es combinación lineal de los demás elementos de } S$$

Demostración

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V

1) Sean R y S subconjuntos no vacíos de $V : R \subset S$. Queremos probar que

$$R \text{ es l.d.} \Rightarrow S \text{ es l.d.}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que:

$$R = \{v_1, \ldots, v_q\}\, , S = \{v_1, \ldots, v_n\}\, , \text{ con } q < n$$

Por hipótesis R es l.d entonces, por la definición de l.d,

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q \in \mathbb{K} \text{ no todos nulos} : \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i = \theta$$

Como $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i + 0v_{q+1} + \cdots + 0v_n = \theta$, se tiene que

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q, \lambda_{q+1} = 0, \cdots, \lambda_n = 0 \in \mathbb{K} \text{ no todos nulos} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta$$

la cual es una combinación lineal de los elementos de S que es igual al vector nulo, con **no todos** los escalares nulos. Entonces, por la definición de l.d, S es l.d.

Luego, $\emptyset \neq R \subset S \subset V$:

$$R \text{ es l.d} \Rightarrow S \text{ es l.d.}$$

2) Esta afirmación es la contrarrecíproca de 1), con lo cuál ya queda demostrada.

3) Sea $\emptyset \neq S \subset V$. Queremos probar que

$$\theta \in S \Rightarrow S \text{ es l.d.}$$

Para ello es suficiente probar que $\{\theta\}$ es l.d pues cualquier otro conjunto S, con $\theta \in S$, será tal que $\{\theta\} \subset S$ y por la consecuencia 1), S será l.d.

Efectivamente:

$$\exists \lambda = 1 \in \mathbb{K} \text{ no nulo} : \lambda\theta = \theta \Rightarrow \{\theta\} \text{ es l.d.}$$

4) Sea $v \in V : v \neq \theta$. Queremos probar que $\{v\}$ es l.i.

   Por consecuencia 3) de espacio vectorial:

$$\lambda v = \theta \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = \theta$$

   Por hipótesis $v \neq \theta$ entonces

$$\lambda v = \theta \Rightarrow \lambda = 0$$

   Luego, por la definición de l.i., $\{v\} \neq \{\theta\}$ es l.i.

5) Sean $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $v \in V$. Queremos probar que

$$S \text{ es l.i.} \wedge S' = S \cup \{v\} \text{ es l.d.} \Rightarrow v \text{ es combinación lineal de los elementos de } S$$

   Por hipótesis $S' = \{v_1, \dots, v_n, v\} \subset V$ es l.d, entonces

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{K} \text{ no todos nulos} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda v = \theta \quad (*)$$

   Aseguramos que $\lambda \neq 0$ pues en caso contrario, es decir $\lambda = 0$, se tiene que

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ no todos nulos} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta$$

   lo cual afirmaría que S es l.d. y estaría en contra de la hipótesis que S es l.i.

   Entonces efectivamente $\lambda \neq 0$, por lo tanto $\exists \lambda^{-1} \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\lambda v &= -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{por existencia de opuestos en } V \text{ y de } (*) \\
\lambda^{-1}(\lambda v) &= \lambda^{-1}\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \quad \text{por consecuencia de la def. de E.V. pues } \lambda \neq 0 \\
\underbrace{\left(\lambda^{-1}\lambda\right)}_{=1} v &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(-\lambda^{-1}\lambda_i\right)}_{\mu_i} v_i \quad \text{pues } V \text{ es un E.V. y } \lambda \text{ es independiente de } i \\
v &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \quad \text{pues } 1v = v
\end{aligned}$$

$$\therefore \exists\, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

   Luego, v es combinación lineal de los elementos de S.

Hemos probado que si a un conjunto l.i. le agregamos un elemento y el nuevo conjunto es l.d. entonces el elemento que se agregó es combinación lineal de los elementos del conjunto de partida.

6) Se deja como ejercicio.

■

Observación

- Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V y $S = \{v_1, v_2\} \subset V$.

  Por consecuencia 6)

$$\begin{aligned} S \text{ es l.d.} &\Leftrightarrow v_1 \text{ es combinación lineal de } v_2 \vee v_2 \text{ combinación lineal de } v_1 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : v_1 = \lambda v_2 \vee \exists \mu \in \mathbb{K} : \; v_2 = \mu v_1 \end{aligned}$$

  Es decir, un conjunto con dos elementos es l.d. si alguno de los vectores es múltiplo del otro

- Un enunciado equivalente de la consecuencia 6) es:

  Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$

$$S \text{ es l.i.} \Leftrightarrow \nexists \; v_{i_0} \in S : v_{i_0} \text{ es combinación lineal de los demás elementos de } S$$

  Es decir, S es l.i. si y sólo si ningún elemento de S es combinación lineal de los demás elementos de S

Ejemplo

Sea $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. Determina si los siguientes conjuntos son l.i o l.d en $\mathbb{R}^3$, siendo:

1. $S_1 = \{(0, -1, -2), (1, 2, 1), (1, 1, -1)\}$
2. $S_2 = \{(0, 0, 0), (1, 2, 3)\}$
3. $S_3 = \{(0, 1, 2), (0, 2, 4)\}$
4. $S_4 = \{(0, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 1, 1)\}$
5. $S_5 = \{(1, 0, 0)\}$

Resolución

1. Sea $S_1 = \{(0,-1,-2), (1,2,1), (1,1,-1)\}$

   S_1 es l.d. pues $(1,1,-1) = (0,-1,-2) + (1,2,1)$ (consecuencia 6)

2. Sea $S_2 = \{(0,0,0), (1,2,3)\}$

   S_2 es l.d. pues $\theta = (0,0,0) \in S$ (consecuencia 3)

3. Sea $S_3 = \{(0,1,2), (0,2,4)\}$

   S_3 es l.d. pues $(0,2,4) = 2(0,1,2)$

4. Sea $S_4 = \{(0,1,2), (0,2,4), (1,1,1)\}$

   S_4 es l.d. pues $S_3 \subset S_4 \wedge S_3$ es l.d. (consecuencia 1)

5. Sea $S_5 = \{(1,0,0)\}$

   S_5 es l.i. pues S_5 es un conjunto unitario y su único elemento es no nulo. (consecuencia 4)

El siguente teorema se acepta **sin demostración**.

Teorema

a) Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $(\mathbb{K}^{n\times 1}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $S = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$, *donde* A_j *es la columna* j *de* A. *Entonces*

$$S \text{ es l.i.} \Leftrightarrow D(A) \neq 0$$

Equivalentemente

$$S \text{ es l.d.} \Leftrightarrow D(A) = 0$$

b) Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $(\mathbb{K}^{1\times n}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $S = \left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\} \subset \mathbb{K}^{1\times n}$, *donde* $A^{(i)}$ *es la fila* i *de* A. *Entonces*

$$S \text{ es l.i.} \Leftrightarrow D(A) \neq 0$$

Equivalentemente

$$S \text{ es l.d.} \Leftrightarrow D(A) = 0$$

c) Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $(\mathbb{K}^n, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *es E.V. y* $S = \{v_1,\ v_2,\ \ldots\ ,\ v_n\} \subset \mathbb{K}^n$ *con* $v_i = (a_{i1}\ ,\ a_{i2}\ ,\ \ldots\ , a_{in})$*. Entonces*

$$S \text{ es l.i. } \Leftrightarrow D(A) \neq 0$$

Equivalentemente

$$S \text{ es l.d.} \Leftrightarrow D(A) = 0$$

Ejemplo

Sea $(\mathbb{R}^{3\times1}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V., determina si el conjunto S es l.i. o l.d., siendo

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{3\times1}$$

Resolución

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Por el teorema anterior, sabemos que

$$S \text{ es l.i} \Leftrightarrow D(A) \neq 0$$

Calculemos entonces el determinante de la matriz A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_2+(-1)c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Respuesta: S es l.i.