Transformaciones Lineales - Parte 1

En esta unidad estudiaremos las funciones definidas entre espacios vectoriales sobre un mismo campo.

Recordar que:

Una transformación, aplicación, mapeo o función T es una regla que relaciona cada elemento de un conjunto de partida A, llamado dominio, con un único elemento del conjunto de llegada B. Si $a \in A$, $T(a) \in B$ y se dice que $T(a)$ es la imagen o transformado de a bajo la acción de T.

Notación: $\begin{aligned} T : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto T(a) \end{aligned}$

Definición (Transformación lineal)

*Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$, $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V (sobre el mismo campo $\mathbb{K}$) y $T : V \rightarrow W$ una función. Se dice que T es una **transformación lineal** de V en W (**T.L.**) si:*

a) $\forall\, u, v \in V,\ T(u + v) = T(u) + T(v)$

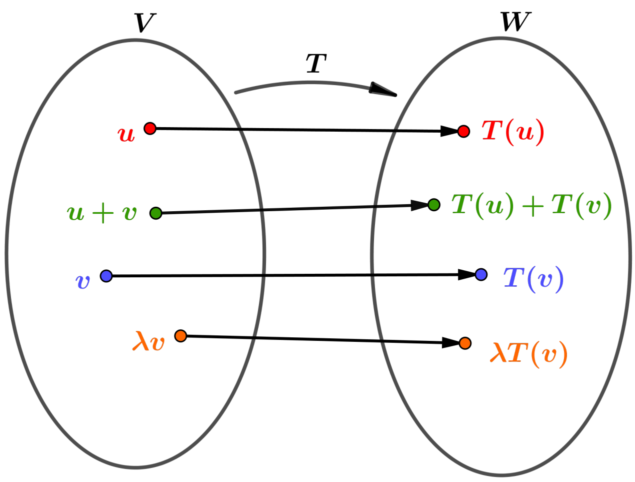
b) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in V,\ T(\lambda v) = \lambda T(v)$

Observación

De acuerdo con la definición anterior:

1. Una transformación lineal es una función definida entre espacios vectoriales, sobre el mismo campo, que **preservan** las operaciones de suma y producto por escalar:

    - la imagen de una suma en V es la suma de las correspondientes imágenes en W
    - la imagen de un múltiplo de un elemento de V es el múltiplo de su imagen en W



2. Para mostrar que una cierta transformación **no** es lineal basta con dar un ejemplo numérico de cual axioma **no** se verifica.

Ejemplo

Determina si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los espacios vectoriales indicados:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (z - x, 4y)$
2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x) = (x, x^2, x^3)$
3. $T : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ tal que $T(X) = A \cdot X$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ fija
4. $T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $T(A) = A^t$
5. $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x + y, 2y, -z)$

Resolución

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (z - x, 4y)$. ¿Es T transformación lineal?

   (Observemos que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son espacios vectoriales reales con la suma y el producto por escalar usuales en cada espacio)

   Para responder, analizamos si se verifican los axiomas de la definición de transformación lineal:

   a) ¿$\forall u, v \in \mathbb{R}^3,\ T(u + v) = T(u) + T(v)$?

   Sean $u = (x_1, y_1, z_1),\ v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\
&= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \text{por definición de suma de vectores} \\
&= ((z_1 + z_2) - (x_1 + x_2), 4(y_1 + y_2)) \quad \text{por definición de } T \\
&= (z_1 - x_1 + z_2 - x_2, 4y_1 + 4y_2) \quad \text{por prop. distrib., conmut. y asoc. en } \mathbb{R} \\
&= (z_1 - x_1, 4y_1) + (z_2 - x_2, 4y_2) \quad \text{por definición de suma de vectores} \\
&= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \quad \text{por definición de } T \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

   $\therefore \forall u, v \in \mathbb{R}^3,\ T(u + v) = T(u) + T(v)$

b) ¿$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ v \in \mathbb{R}^3,\ T(\lambda v) = \lambda T(v)$?

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
T(\lambda v) &= T(\lambda(x, y, z)) \\
&= T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \text{por definición de producto de un escalar por un vector} \\
&= (\lambda z - \lambda x, 4(\lambda y)) \quad \text{por definición de } T \\
&= (\lambda(z - x), \lambda(4y)) \quad \text{por prop. distrib., conmut. y asoc. en } \mathbb{R} \\
&= \lambda(z - x, 4y) \quad \text{por definición de producto de un escalar por un vector} \\
&= \lambda T(x, y, z) \quad \text{por definición de } T \\
&= \lambda T(v)
\end{aligned}$$

$\therefore \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ v \in \mathbb{R}^3,\ T(\lambda v) = \lambda T(v)$

Luego, como se cumplen a) y b), se tiene que T es transformación lineal.

Respuesta: T es T.L.

2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x) = (x, x^2, x^3)$. ¿Es T transformación lineal?

a) ¿$\forall u, v \in \mathbb{R},\ T(u + v) = T(u) + T(v)$?

Observar que

$$\begin{aligned}
T(1 + 2) &= T(3) = \left(3, 3^2, 3^3\right) \quad \text{por definición de } T \\
\therefore T(1 + 2) &= (3, 9, 27)
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
T(1) + T(2) &= \left(1, 1^2, 1^3\right) + \left(2, 2^2, 2^3\right) \quad \text{por definición de } T \\
&= (1, 1, 1) + (2, 4, 8) \\
\therefore T(1) + T(2) &= (3, 5, 9)
\end{aligned}$$

$\therefore\ \exists u = 1, v = 2 \in \mathbb{R} : T(1 + 2) \neq T(1) + T(2)$

Luego, como no se cumple a), T **no** es transformación lineal

Respuesta: T **no** es T.L.

3. $T : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ tal que $T(X) = A \cdot X$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ fija. ¿Es T transformación lineal?

   a) ¿$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ T(X+Y) = T(X) + T(Y)$?

   Sean $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$\begin{aligned} T(X+Y) &= A\cdot(X+Y) && \text{por definición de } T \\ &= A\cdot X + A\cdot Y && \text{por prop. distributiva del producto} \\ & && \text{respecto de la suma de matrices} \\ &= T(X) + T(Y) && \text{por definición de } T \end{aligned}$$

   $\therefore \forall X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ T(X+Y) = T(X) + T(Y)$

   b) ¿$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ X \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ T(\lambda X) = \lambda T(X)$?

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\begin{aligned} T(\lambda X) &= A\cdot(\lambda X) && \text{por definición de } T \\ &= \lambda(A\cdot X) && \text{por prop. asociativa mixta} \\ & && \text{del producto de matrices} \\ &= \lambda T(X) \end{aligned}$$

$\therefore \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ X \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ T(\lambda X) = \lambda T(X)$

Luego, como se cumplen a) y b), T es transformación lineal

Respuesta: T es T.L.

4. y 5. se dejan como ejercicios.

Consecuencias (de la definición de T.L.)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$, $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V y $T : V \to W$ una T.L. Entonces:

1. $T(\theta_V) = \theta_W$
2. $\forall\, v \in V,\ T(-v) = -T(v)$
3. $\forall\, u, v \in V,\ T(u-v) = T(u) - T(v)$
4. $\forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall\ v_1, \cdots, v_n \in V,\ T\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, T(v_i)$

   Las transformaciones lineales **preservan** las combinaciones lineales. Es decir, el transformado de una combinación lineal es la combinación lineal de los transformados.

Demostración

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$, $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V y $T : V \to W$ una T.L.

1. Por consecuencia de la definición de espacio vectorial, sabemos que $\forall v \in V,\ 0\,v = \theta_V$

   Entonces

$$\begin{aligned} T(\theta_V) &= T(0\,v) \\ &= 0\,T(v) \quad \text{pues } T \text{ es T.L.} \\ &= \theta_W \quad \text{pues } T(v) \in W \text{ y por consecuencia de la def. de E.V.} \end{aligned}$$

   $\therefore T(\theta_V) = \theta_W$

2. Por consecuencia de la definición de espacio vectorial, sabemos que $\forall v \in V,\ (-1)\ v = -v$

   Sea $v \in V$:

$$\begin{aligned} T(-v) &= T((-1)v) \\ &= (-1)\,T(v) \quad \text{pues } T \text{ es T.L.} \\ &= -T(v) \quad \text{pues } T(v) \in W \text{ y por consecuencia de la def. de E.V.} \end{aligned}$$

   $\therefore \forall\, v \in V,\ T(-v) = -T(v)$

3. Se deja como ejercicio

4. Se acepta **sin demostración**

■

Observación

Escribamos las cosecuencias anteriores de una manera equivalente:

- Por la consecuencia 1)

$$T : V \to W \text{ es T.L.} \Rightarrow T(\theta_V) = \theta_W$$

  Es decir, una aplicación lineal transforma el nulo del primer espacio vectorial en el nulo del segundo espacio.

  Esto **no** quiere decir que si una función $T : V \to W$ es tal que $T(\theta_V) = \theta_W$ esto sea suficiente para afirmar que T es T.L., como se puede ver en el siguiente ejemplo:
  $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x) = (x, x^2, x^3)$ **no** es T.L y $T(0_{\mathbb{R}}) = (0, 0, 0) = \theta_{\mathbb{R}^3}$

Por el contrarecíproco se tiene que:

$$T\left(\theta_V\right) \neq \theta_W \;\Rightarrow\; T : V \to W \;\; \textbf{no} \text{ es T.L}$$

Esta última implicación resulta útil para probar que una transformación **no** es lineal.

- Por la consecuencia 4)

$$T : V \to W \;\text{ es T.L.} \Rightarrow \forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall\, v_1, \cdots, v_n \in V,\; T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, T\left(v_i\right)$$

Por el contrarecíproco se tiene que:

$$\exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \exists\, v_1, \cdots, v_n \in V,\; T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i\right) \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, T\left(v_i\right) \Rightarrow\; T : V \to W \;\; \textbf{no} \text{ es T.L}$$

Es decir si hay alguna combinación lineal que **no** se preserva bajo T, entonces T **no** es T.L.

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x+1, y-z)$. Determina si T es transformación lineal

Resolución

Como $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0+1, 0-0) = (1,0) \neq (0,0)$, es decir $T\left(\theta_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\right) \neq \theta_{\mathbb{R}^2}$, entonces T **no** es transformación lineal

Respuesta: T **no** es T.L.

Definición (Operador y funcional lineal)

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. Se define

a) ***Operador lineal*** *a toda transformación lineal $T : V \to V$*

b) ***Funcional lineal*** *a toda transformación lineal $T : V \to \mathbb{K}$*

Ejemplo

Determina si las siguientes funciones son operadores lineales:

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\left(x, y\right) = (x, -y)$
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\left(x, y\right) = (y, x-1)$

Resolución

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, -y)$. ¿Es T operador lineal?

   (Observemos que $\mathbb{R}^2$ es espacio vectorial real con la suma y el producto por escalar usuales)

   Para responder, analizamos si se verifican los axiomas de definición de transformación lineal:

   a) ¿$\forall u, v \in \mathbb{R}^2,\ T(u+v) = T(u) + T(v)$?

   Sean $u = (x_1, y_1)\,,\ v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{por definición de suma de vectores} \\
&= (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) \quad \text{por definición de } T \\
&= (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) \quad \text{por prop. distributiva en } \mathbb{R} \\
&= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) \quad \text{por definición de suma de vectores} \\
&= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \quad \text{por definición de } T \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}
$$

   $\therefore \forall u, v \in \mathbb{R}^2,\ T(u+v) = T(u) + T(v)$

   b) ¿$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in \mathbb{R}^2,\ T(\lambda v) = \lambda T(v)$?

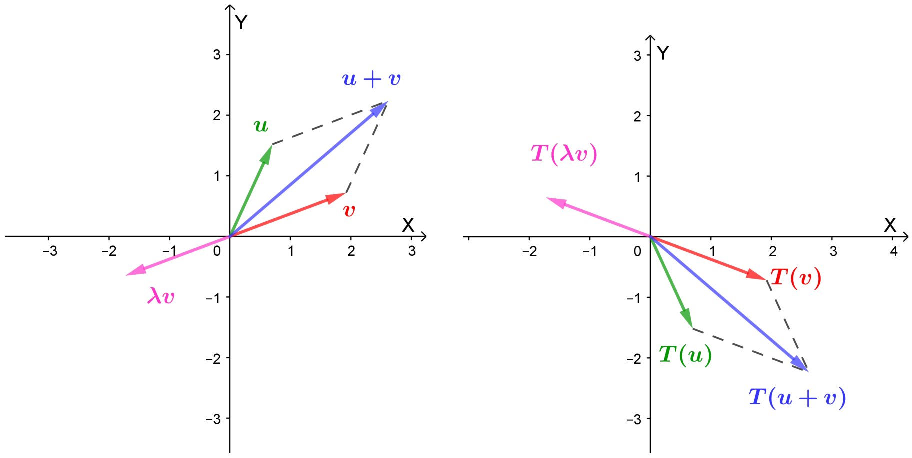
   Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
T(\lambda v) &= T(\lambda(x, y)) \\
&= T(\lambda x, \lambda y) \quad \text{por definición de producto de un escalar por un vector} \\
&= (\lambda x, -(\lambda y)) \quad \text{por definición de } T \\
&= (\lambda x, \lambda(-y)) \quad \text{por prop. conmutativa y asociativa en } \mathbb{R} \\
&= \lambda(x, -y) \quad \text{por definición de producto de un escalar por un vector} \\
&= \lambda T(x, y) \quad \text{por definición de } T \\
&= \lambda T(v)
\end{aligned}
$$

   $\therefore \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in \mathbb{R}^2,\ T(\lambda v) = \lambda T(v)$

   Luego, como se cumplen a) y b), se tiene que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es transformación lineal.

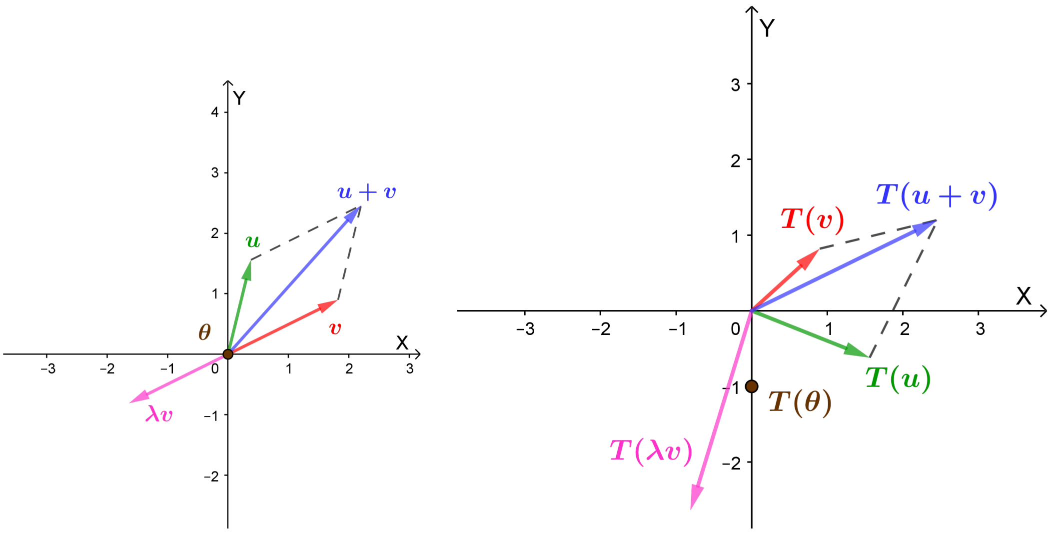
   Respuesta: T es operador lineal.



2. Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (y, x-1)$

   Como $T(0,0) = (0, 0-1) = (0,-1) \neq (0,0)$, es decir $T(\theta_{\mathbb{R}^2}) \neq \theta_{\mathbb{R}^2}$, entonces T **no** es transformación lineal.

Respuesta: T **no** es operador lineal



OBSERVA QUE T **no** preserva las operaciones suma y producto por escalar.

El siguiente ejemplo **se deja como ejercicio**.

Ejemplo

Determina si las siguientes transformaciones son funcionales lineales:

1. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x,y,z) = x - 3y$

2. $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $T(x,y) = x - 2y + i$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

El siguiente teorema, que se acepta **sin demostración**, es esencial para determinar explícitamente una T.L. cuando se conocen los transformados de los elementos de una base del espacio de partida.

Teorema (Fundamental de las transformaciones lineales)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$, $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V., V de dimensión finita,* $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *base de* V *y* $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \subset W$ *un conjunto cualquiera.*

Entonces $\exists !\ T : V \to W$ *T.L. tal que* $\forall i : 1 \leq i \leq n\,,\ T(v_i) = w_i$.

Observación

El teorema anterior pone de manifiesto la importancia de las bases en un espacio vectorial puesto que toda T.L. entre dos E.V. queda **unívocamente** determinada por los transformados de los elementos de una **base del espacio dominio**.

Ejemplo

Determina, en caso de existir, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,1) = (2,1)$, $T(-1,1,0) = (-3,1)$, $T(0,0,1) = (0,1)$

Resolución

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,1) = (2,1)$, $T(-1,1,0) = (-3,1)$, $T(0,0,1) = (0,1)$.

Para responder, utilizaremos el Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales.

Averigüemos primero si $S = \{(1,0,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Llamemos $v_1 = (1,0,1)\,,\ v_2 = (-1,1,0)\,,\ v_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$

Por la condición necesaria y suficiente para base:

$$S \text{ es base de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \forall v \in V, \exists !\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, v_i$$

Veamos si un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar de manera **única** como combinación lineal de los elementos de S

Sea $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ¿$\exists !\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$?

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= \lambda_1 (1,0,1) + \lambda_2 (-1,1,0) + \lambda_3 (0,0,1) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3) \end{aligned}$$

Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^3$, se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y \\ \lambda_1 + \lambda_3 = z \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de forma matricial, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \underset{f_1+1f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \underset{f_3+(-1)f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x-y+z \end{array}\right)$$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$rg\,(A) = rg\,(A\,|B\,) = 3 = \text{n}^o$ de incognitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado (tiene solución única)

$\therefore\ \forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \exists !\ \lambda_1 = x + y, \lambda_2 = y, \lambda_3 = -x - y + z \in \mathbb{R}$:

$$v = \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \lambda_3\, v_3 \qquad (*)$$

Luego, por condición necesaria y suficiente para base, S es base de $\mathbb{R}^3$

Como se conocen los transformados de los elementos de una base del espacio dominio entonces, por el teorema fundamental de las transformaciones lineales, **existe una única transformación lineal** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\,(1, 0, 1) = (2, 1)$, $T\,(-1, 1, 0) = (-3, 1)$, $T\,(0, 0, 1) = (0, 1)$ $\quad (**)$

Determinemos explicitamente T, para ello trabajamos con la igualdad de $(*)$:

$$(x, y, z) = \lambda_1\,(1, 0, 1) + \lambda_2\,(-1, 1, 0) + \lambda_3\,(0, 0, 1)$$

Como los vectores son iguales sus transformados también lo son:

$$\begin{aligned} T\,(x, y, z) &= T\,(\lambda_1\,(1, 0, 1) + \lambda_2\,(-1, 1, 0) + \lambda_3\,(0, 0, 1)) \\ &= \lambda_1 T\,(1, 0, 1) + \lambda_2 T\,(-1, 1, 0) + \lambda_3 T\,(0, 0, 1) \quad \text{por consecuencia de T.L} \\ &= (x+y)\ T\,(1, 0, 1) + y\,T\,(-1, 1, 0) + (-x-y+z)\ T\,(0, 0, 1) \quad \text{por } (*) \\ &= (x+y)\ (2, 1) + y\ (-3, 1) + (-x-y+z)\ (0, 1) \quad \text{por } (**) \\ \therefore T\,(x, y, z) &= (2x - y, y + z) \end{aligned}$$

Respuesta:

$\exists !\, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ T.L. tal que $T\,(x, y, z) = (2x - y, y + z)$ que cumple con

$T(1,0,1) = (2,1)$, $T(-1,1,0) = (-3,1)$, $T(0,0,1) = (0,1)$

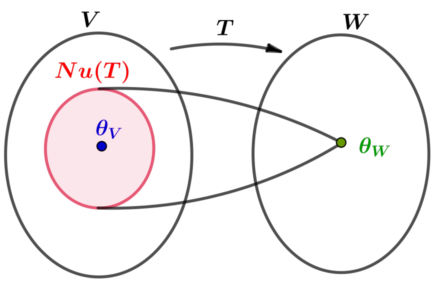
A continuación definiremos un par de conjuntos que están asociados a una transformación lineal.

Definición (Núcleo e imagen de una transformación lineal)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$, $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $T : V \to W$ *T.L. Llamamos*

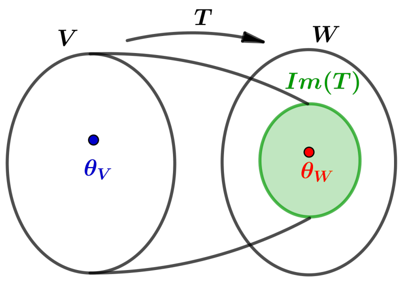
- ***Núcleo*** *de* T *al conjunto:*

$$\mathrm{Nu}\,(T) = \{v \in V : T\,(v) = \theta_W\}$$



- ***Imagen*** *de* T *al conjunto:*

$$\mathrm{Im}\,(T) = \{w \in W : \exists v \in V,\ T\,(v) = w\}$$



Teorema

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$, $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $T : V \to W$ *T.L. Entonces*

1) $\mathrm{Nu}\,(T)$ *es un subespacio vectorial de* V

2) $\mathrm{Im}\,(T)$ *es un subespacio vectorial de* W

Demostración

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot), (W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $T : V \to W$ T.L.

1) Para probar que $\mathrm{Nu}(T) = \{v \in V : T\,(v) = \theta_W\}$ es subespacio vectorial de V empleamos la condición necesaria y suficiente para subespacios.

   a) $\mathrm{Nu}(T) \subset V$ por definición del conjunto $\mathrm{Nu}(T)$ sus elementos pertenecen a V

   b) $\mathrm{Nu}(T) \neq \emptyset$ pues $\theta_V \in \mathrm{Nu}(T)$ ya que por consecuencia de la definición de T.L., $T\,(\theta_V) = \theta_W$

   c) ¿$+ : \mathrm{Nu}(T) \times \mathrm{Nu}(T) \longrightarrow \mathrm{Nu}(T)$? ¿$\forall v_1, v_2 \in \mathrm{Nu}(T), v_1 + v_2 \in \mathrm{Nu}(T)$?

   Sean $v_1, v_2 \in \mathrm{Nu}(T)$:

$$\begin{aligned} v_1 &\in \mathrm{Nu}(T) \Rightarrow v_1 \in V : T\,(v_1) = \theta_W \quad \text{por definición de } \mathrm{Nu}(T) \\ v_2 &\in \mathrm{Nu}(T) \Rightarrow v_2 \in V : T\,(v_2) = \theta_W \quad \text{por definición de } \mathrm{Nu}(T) \end{aligned}$$

Como $v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 \in V$ pues V es E.V. Así:

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \quad \text{pues } T \text{ es T.L.} \\ &= \theta_W + \theta_W \quad \text{pues } v_1, v_2 \in \mathrm{Nu}(T) \\ &= \theta_W \quad \text{pues } W \text{ es E.V.} \end{aligned}$$

$\therefore\ v_1 + v_2 \in V : T(v_1 + v_2) = \theta_W$

Entonces $v_1 + v_2 \in \mathrm{Nu}(T)$

Luego $\forall v_1, v_2 \in \mathrm{Nu}(T), v_1 + v_2 \in \mathrm{Nu}(T)$

d) ¿$\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Nu}(T) \longrightarrow \mathrm{Nu}(T)$? ¿$\forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in \mathrm{Nu}(T), \lambda v \in \mathrm{Nu}(T)$?

Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in \mathrm{Nu}(T)$:

$$v \in \mathrm{Nu}(T) \Rightarrow v \in V : T(v) = \theta_W \quad \text{por definición de } \mathrm{Nu}(T)$$

Como $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$, $\lambda v \in V$ pues V es E.V. Así:

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= \lambda T(v) \quad \text{pues } T \text{ es T.L.} \\ &= \lambda \theta_W \quad \text{pues } v \in \mathrm{Nu}(T) \\ &= \theta_W \quad \text{pues } W \text{ es E.V.} \end{aligned}$$

$\therefore \lambda v \in V : T(\lambda v) = \theta_W$ Entonces $\lambda v \in \mathrm{Nu}(T)$

Luego $\forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in \mathrm{Nu}(T), \lambda v \in \mathrm{Nu}(T)$

Por la condición necesaria y suficiente para subespacio, se tiene que $\mathrm{Nu}(T)$ es subespacio vectorial de V.

2) Para probar que $\mathrm{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V,\ T(v) = w\}$ es subespacio vectorial de W también empleamos la condición necesaria y suficiente para subespacios.

a) $\mathrm{Im}(T) \subset W$ por definición del conjunto $\mathrm{Im}(T)$ sus elementos pertenecen a W

b) $\mathrm{Im}(T) \neq \emptyset$ pues $\theta_W \in \mathrm{Im}(T)$ ya que por consecuencia de la definición de T.L., $\exists\ \theta_V \in V : T(\theta_V) = \theta_W$

c) ¿$+ : \mathrm{Im}\,(T) \times \mathrm{Im}\,(T) \longrightarrow \mathrm{Im}(T)$? ¿$\forall w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\,(T)\,, w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\,(T)$?

Sean $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\,(T)$:

$w_1 \in \mathrm{Im}\,(T) \Rightarrow w_1 \in W : \exists v_1 \in V,\ T\,(v_1) = w_1$ por definición de $\mathrm{Im}(T)$

$w_2 \in \mathrm{Im}\,(T) \Rightarrow w_2 \in W : \exists v_2 \in V,\ T\,(v_2) = w_2$ por definición de $\mathrm{Im}(T)$

Como $v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 \in V$ pues V es E.V.

$w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$ pues W es E.V.

Así:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= T\,(v_1) + T\,(v_2) \quad \text{pues } w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(T) \\ &= T\,(v_1 + v_2) \quad \text{pues } T \text{ es T.L.} \end{aligned}$$

$\therefore\ w_1 + w_2 \in W : \exists v_1 + v_2 \in V,\ T\,(v_1 + v_2) = w_1 + w_2$

Entonces $w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\,(T)$

Luego $\forall w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\,(T)\,, w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\,(T)$

d) ¿$\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Im}\,(T) \longrightarrow \mathrm{Im}\,(T)$? ¿$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in \mathrm{Im}\,(T)\,, \lambda w \in \mathrm{Im}\,(T)$?

Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in \mathrm{Im}\,(T)$

$w \in \mathrm{Im}\,(T) \Rightarrow w \in W : \exists v \in V,\ T\,(v) = w$ por definición de $\mathrm{Im}(T)$

Como $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$, $\lambda v \in V$ pues V es E.V.

$\lambda \in \mathbb{K}$, $w \in W$, $\lambda w \in W$ pues W es E.V.

Así:

$$\begin{aligned} \lambda w &= \lambda T\,(v) \quad \text{pues } w \in \mathrm{Im}(T) \\ &= T\,(\lambda v) \quad \text{pues } T \text{ es T.L.} \end{aligned}$$

$\therefore\ \lambda w \in W : \exists \lambda v \in V,\ T\,(\lambda v) = \lambda w$

Entonces $\lambda w \in \mathrm{Im}\,(T)$

Luego $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in \mathrm{Im}\,(T)\,, \lambda w \in \mathrm{Im}\,(T)$

Por la condición necesaria y suficiente para subespacio, se tiene que $\mathrm{Im}\,(T)$ es subespacio vectorial de W.

■

El siguiente resultado se acepta **sin demostración**.

Teorema

Sean $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$, $(W,+,\mathbb{K},\cdot)$ *E.V, V de dimensión finita y* $T:V\to W$ *T.L. Entonces*

$$\dim V = \dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Ejemplo

Dada la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $T(x,y,z)=\begin{pmatrix} x-z & y-x \\ -3x+3z & 0\end{pmatrix}$

1. Determina el núcleo de T y su dimesión
2. Determina la imagen de T y su dimesión
3. Comprueba que se cumple el teorema anterior.

Resolución

1. Por definición de núcleo de T

$$\mathrm{Nu}(T) \quad = \quad \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z)=\theta_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\right\}$$

$$(x,y,z)\in\mathrm{Nu}(T)\Leftrightarrow (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x-z & y-x \\ -3x+3z & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{por def. de } T$$

por lo que queremos determinar $x,y,z\in\mathbb{R}:\begin{cases} x-z=0 \\ -x+y=0 \\ -3x+3z=0 \\ 0=0\end{cases}$

lo cual es equivalente a determinar $x,y,z\in\mathbb{R}:\begin{cases} x-z=0 \\ -x+y=0 \qquad (*) \\ -3x+3z=0\end{cases}$

Resolvemos el sistema $(*)$:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix} \underset{\substack{f_2+1f_1 \\ f_3+3f_1}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$rg(A)=(A\,|\theta)=2<3=\mathrm{n}^o$ de incógnitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible indeterminado,

el sistema equivalente es: $\begin{cases} x-z=0 \\ y-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z\end{cases}, \forall z\in\mathbb{R}$

Luego

$$\begin{aligned}\operatorname{Nu}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=z \ \wedge\ y=z\right\}\\ &= \left\{(z,z,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\end{aligned}$$

Determinemos ahora $\dim\operatorname{Nu}(T)$, para ello busquemos una base para $\operatorname{Nu}(T)$:

Sea $v=(z,z,z)\in\operatorname{Nu}(T)$

$v=(z,z,z)=z\,(1,1,1)$

$\therefore\ \forall v=(z,z,z)\in\operatorname{Nu}(T)\,,\ \exists!\,\lambda=z\in\mathbb{R}: v=\lambda\,(1,1,1)$

Sea $\alpha=\{(1,1,1)\}\subset\operatorname{Nu}(T)$

Luego por condición necesaria y suficiente para base, α es base de $\operatorname{Nu}(T)$ y $\dim\operatorname{Nu}(T)=1$

Respuesta: $\operatorname{Nu}(T)=\{(z,z,z)\in\mathbb{R}^3\}$ y $\dim\operatorname{Nu}(T)=1$

2. Por definición de imagen de T

$$\operatorname{Im}(T)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2} : \exists\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ T(x,y,z)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}(T)\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\\ \exists\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x-z & y-x\\ -3x+3z & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \quad \text{por def de } T\end{cases}$$

por lo que queremos determinar $a,b,c,d\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} x-z=a\\ -x+y=b\\ -3x+3z=c\\ 0=d\end{cases}$ sea compatible

Para ello trabajemos con la matriz ampliada del sistema:

$$(A\,|B\,)=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 0 & -1 & a\\ -1 & 1 & 0 & b\\ -3 & 0 & 3 & c\\ 0 & 0 & 0 & d\end{array}\right)\underset{\substack{f_2+1f_1\\ f_3+3f_1}}{\sim_f}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & a\\ 0 & 1 & -1 & a+b\\ 0 & 0 & 0 & 3a+c\\ 0 & 0 & 0 & d\end{array}\right)$$

el sistema es compatible $\Leftrightarrow rg\,(A)=rg\,(A\,|B\,)\Leftrightarrow 3a+c=0\ \wedge\ d=0$
(tiene solución)

Luego

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : 3a + c = 0 \ \wedge \ d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\} \end{aligned}$$

Determinemos ahora $\dim \operatorname{Im}(T)$, para ello busquemos una base para $\operatorname{Im}(T)$

Sea $w = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(T)$

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} a & b \\ -3a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -3a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore\ \forall w = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(T)\,,\ \exists!\, \lambda_1 = a, \lambda_2 = b \in \mathbb{R} : w = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sea $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \operatorname{Im}(T)$

Luego por condición necesaria y suficiente para base, β es base de $\operatorname{Im}(T)$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$

Respuesta: $\operatorname{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$

3. Debemos verificar que:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Nu}(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$$

Por los apartados anteriores sabemos que $\dim \operatorname{Nu}(T) = 1$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$

Luego, $\dim \operatorname{Nu}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Con lo cual se comprueba el teorema de las dimensiones.