Transformaciones Lineales - Parte 2

En ésta última parte de la unidad vamos a ver que dada una transformación lineal, entre espacios vectoriales de dimensión finita, siempre es posible representar la transformación mediante una matriz de un cierto orden. Recíprocamente, dada una matriz se podrá determinar una transformación lineal asociada a ella, bajo ciertas condiciones.

Matriz asociada a una transformación lineal

Sean $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$, $(W,+,\mathbb{K},\cdot)$ E.V., $\alpha=\{v_1,\ldots,v_n\}$ base de V , $\beta=\{w_1,\ldots,w_m\}$ base de W y $T:V\to W$ T.L.

Como β es base de W, por la condición necesaria y suficiente para base, se tiene que:

$$\begin{aligned}\forall j &= 1,\cdots,n\ ,\ T(v_j)\in W,\ \exists!\ a_{1j},\cdots,a_{mj}\in\mathbb{K}:T(v_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,w_i\\ \forall j &= 1,\cdots,n\ ,\ \exists!\ a_{1j},\cdots,a_{mj}\in\mathbb{K}:[T(v_j)]_\beta=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^{m\times 1}\end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental de las transformaciones lineales y por la unicidad de las coordenadas, T queda **unívocamente determinada** por los $m.n$ escalares $a_{ij}\in\mathbb{K}$, con $1\le i\le m,\ 1\le j\le n$

Esto nos permite dar la siguiente definición.

Definición (Matriz asociada a una transformación lineal)

Sean $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$, $(W,+,\mathbb{K},\cdot)$ E.V., $\alpha=\{v_1,\ldots,v_n\}$ base de V , $\beta=\{w_1,\ldots,w_m\}$ base de W y $T:V\to W$ T.L. Se llama ***matriz asociada a la transformación lineal*** *respecto de las bases α y β a la matriz*

$$[T]_\alpha^\beta=\begin{pmatrix}[T(v_1)]_\beta & [T(v_2)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^{m\times n}$$

Observación

1. Sean $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$, $(W,+,\mathbb{K},\cdot)$ E.V., $\alpha=\{v_1,\ldots,v_n\}$ base de V, $\beta=\{w_1,\ldots,w_m\}$ base de W y $T:V\to W$ T.L.
   - Las columnas de la matriz $[T]_\alpha^\beta$ son las coordenadas, respecto de la base β (del espacio de llegada), de los transformados de los vectores de la base α (del espacio de partida).

- El orden de la matriz $[T]_\alpha^\beta$ es $m \times n = \dim W \times \dim V$
- La matriz asociada a T depende de las bases consideradas en los espacios vectoriales. Es decir, si se cambian las bases, cambia la matriz asociada.

2. Dados $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$, $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V., $\dim V = n$, $\dim W = m$, α y β bases fijas de V y W respectivamente y $T : V \to W$ una T.L. Entonces queda unívocamente determinada $[T]_\alpha^\beta \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

   Es decir, cada transformación lineal tiene asociada una única matriz respecto de unas bases fijas y dadas.

3. Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y fijadas α y β bases de dos espacios vectoriales V y W, respectivamente. Entonces queda unívocamente determinada la transformación lineal $T : V \to W$ tal que $A = [T]_\alpha^\beta$, donde se considera que las columnas de A son las coordenadas (respecto de β) de los transformados de los elementos de α.

   Es decir, cada matriz tiene asociada una única transformación lineal respecto de unas bases fijas y dadas

4. En particular, dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ siempre existe $T : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{m\times 1}$ tal que $T(X) = A \cdot X$, donde $A = [T]_\alpha^\beta$, siendo α base canónica de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ y β base canónica $\mathbb{K}^{m\times 1}$.

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ T.L. tal que $T(x, y, z) = (z - x, y)$. Determina la matriz asociada a T respecto de $\alpha = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $\beta = \{(1, -2), (-2, 5)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

Resolución

Por definición de matriz asociada, $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} [T(1,0,-1)]_\beta & [T(0,1,0)]_\beta & [T(1,1,0)]_\beta \end{pmatrix}$

Queremos determinar las coordenadas respecto de la base β de los transformados de los elementos de la base α. Para ello

- $T(1, 0, -1) = (-1 - 1, 0) = (-2, 0) \in \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
(-2, 0) \in \mathbb{R}^2 &\overset{\beta \text{ base de } \mathbb{R}^2}{\Rightarrow} \exists!\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : (-2, 0) = \lambda_1 (1, -2) + \lambda_2 (-2, 5) \\
&\Rightarrow \exists!\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} -2 = \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 0 = -2\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{cases} \quad (1)
\end{aligned}
$$

de donde se sigue que $[T(1,0,-1)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

- $T(0,1,0) = (0-0,1) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (0,1) \in \mathbb{R}^2 &\overset{\beta \text{ base de } \mathbb{R}^2}{\Rightarrow} \exists!\, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} : (0,1) = \lambda_3 (1,-2) + \lambda_4 (-2,5) \\ &\Rightarrow \exists!\, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} : \begin{cases} 0 = \lambda_3 - 2\lambda_4 \\ 1 = -2\lambda_3 + 5\lambda_4 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $[T(0,1,0)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$

- $T(1,1,0) = (0-1,1) = (-1,1) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (-1,1) \in \mathbb{R}^2 &\overset{\beta \text{ base de } \mathbb{R}^2}{\Rightarrow} \exists!\, \lambda_5, \lambda_6 \in \mathbb{R} : (-1,1) = \lambda_5 (1,-2) + \lambda_6 (-2,5) \\ &\Rightarrow \exists!\, \lambda_5, \lambda_6 \in \mathbb{R} : \begin{cases} -1 = \lambda_5 - 2\lambda_6 \\ 1 = -2\lambda_5 + 5\lambda_6 \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $[T(1,1,0)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix}$

Para determinar dichas coordenadas, resolvamos los tres sistemas trabajando simultáneamente con las matrices ampliadas de los mismos

$$(A\,|B\,|C\,|D\,) = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} \boxed{1} & -2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{f_2+2f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_1+2f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & -10 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad (*)$$

Entonces,

- para el sistema (1)

  $rg(A) = rg(A\,|B\,) = 2 = \text{n}^o$ de incógnitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado

  el sistema equivalente es $\begin{cases} \lambda_1 = -10 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow [T(1,0,-1)]_\beta = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix}$

- para el sistema (2)

  $rg\,(A) = rg\,(A\,|C\,) = 2 = \text{n}^o$ de incógnitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado

  el sistema equivalente es $\begin{cases} \lambda_3 = 2 \\ \lambda_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow [T\,(0,1,0)]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- para el sistema (3)

  $rg\,(A) = rg\,(A\,|D\,) = 2 = \text{n}^o$ de incógnitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado

  el sistema equivalente es $\begin{cases} \lambda_5 = -3 \\ \lambda_6 = -1 \end{cases} \Rightarrow [T\,(1,1,0)]_\beta = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Luego $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ formada por las tres últimas columnas de $(*)$

Respuesta $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ T.L. tal que $T\,(X) = A \cdot X$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Determina la matriz asociada a la transformación lineal respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 1}$ y de $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Resolución

Sean $T : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ T.L. tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 1}$, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canónica de $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

$$\therefore T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2y \\ x - y \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz asociada a una T.L. se tiene que:

$$[T]_\alpha^\beta = \left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_\beta \ \left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_\beta \right) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Determinemos ahora las coordenadas en la base β de los transformados de los elementos de la base α (como la base β es la canónica, las coordenadas se obtienen trivialmente):

- $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

  $\therefore \left[T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

- $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

  $\therefore \left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

Respuesta: $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Observa que:

$[T]_\alpha^\beta = A$ siendo A la matriz dada en la definición de T y esto sucede porque α y β son las **bases canónicas** de los respectivos espacios.

Ejemplo

Determina explícitamente la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a T respecto de las bases $\alpha = \{(1,3), (-1,-2)\}$ y $\beta = \{(0,1,0), (1,0,-1), (1,-1,1)\}$ es $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Resolución

Como α es base de $\mathbb{R}^2$, sabemos que

$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists\,!\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R} : (x,y)=\lambda_1\,(1,3)+\lambda_2\,(-1,-2)$

Determinemos, para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ los escalares únicos $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, trabajando con la igualdad:

$$\begin{aligned}(x,y) &= \lambda_1\,(1,3)+\lambda_2\,(-1,-2)\\ &= (\lambda_1-\lambda_2, 3\lambda_1-2\lambda_2)\end{aligned}$$

Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^2$, se tiene que: $\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=x\\ 3\lambda_1-2\lambda_2=y\end{cases}$

Resolviendo el sistema de forma matricial, $\forall x,y\in\mathbb{R}$:

$$(A\,|B\,)=\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1} & -1 & x\\ 3 & -2 & y\end{array}\right)\underset{f_2+(-3)f_1}{\sim_f}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & x\\ 0 & \boxed{1} & y-3x\end{array}\right)\underset{f_1+1f_2}{\sim_f}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & y-2x\\ 0 & 1 & y-3x\end{array}\right)$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$:

$rg\,(A)=rg\,(A\,|B\,)=2=$ n^o de incógnitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado

(tiene solución única)

$\therefore\,\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists!\ \lambda_1=y-2x, \lambda_2=y-3x\in\mathbb{R} : (x,y)=\lambda_1\,(1,3)+\lambda_2\,(-1,-2)$

Como los vectores son iguales entonces sus transformados son iguales, luego:

$$\begin{aligned}T\,(x,y) &= T\,(\lambda_1\,(1,3)+\lambda_2\,(-1,-2))\\ &= \lambda_1 T\,(1,3)+\lambda_2 T\,(-1,-2) \quad \text{pues } T \text{ es T.L.}\\ &= (y-2x)\,T\,(1,3)+(y-3x)\,T\,(-1,-2) \quad (*)\end{aligned}$$

Resta determinar $T\,(1,3)$ y $T\,(-1,-2)$ para lo cuál usaremos la matriz A dada:

Como $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ es la matriz asociada a T respecto de las bases α y β , entonces

$$[T\,(1,3)]_\beta=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [T\,(-1,-2)]_\beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

Luego, por definición de coordenadas, tenemos que:

- $[T(1,3)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T(1,3) = 1(0,1,0) - 1(1,0,-1) + 2(1,-1,1) = (1,-1,3)$

  $\therefore\ T(1,3) = (1,-1,3)$

- $[T(-1,-2)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow T(-1,-2) = 0(0,1,0) + 1(1,0,-1) - 2(1,-1,1) = (-1,2,-3)$

  $\therefore\ T(-1,-2) = (-1,2,-3)$

Entonces, reemplazando en $(*)$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (y-2x)(1,-1,3) + (y-3x)(-1,2,-3) \\ &= (x, y-4x, 3x) \end{aligned}$$

Respuesta: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ T.L. tal que $T(x,y) = (x, y-4x, 3x)$

La siguiente propiedad, que se acepta **sin demostración**, relaciona la matriz asociada a una transformación lineal y las coordenadas de un vector del espacio de partida con las coordenadas de su transformado, respecto de bases dadas para cada espacio.

Propiedad

Sean $(V,+,\mathbb{K},\cdot), (W,+,\mathbb{K},\cdot)$ E.V de dimensión finita y $T : V \to W$ T.L., α base de V, β base de W. Entonces

$$\forall v \in V, \quad [T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta \cdot [v]_\alpha$$

Observación

Dado $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$ E.V y $T : V \to V$ operador lineal **se puede** o **no** considerar la misma base en el espacio de partida que en el espacio de llegada. Si se considera la misma base α en ambos espacios vectoriales la matriz cuadrada asociada al operador lineal se denota:

$$[T]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Ejemplo

Determina explícitamente la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a T respecto de las bases $\alpha = \{(1,0), (-1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ y $\beta = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ es $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Resolución

En este caso, vamos a usar la propiedad anterior para determinar explícitamente T.

Para ello, consideremos un vector genérico del espacio de partida $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y determinemos sus coordenadas respecto de la base α.

Como α es base de $\mathbb{R}^2$, sabemos que

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists!\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : (x,y) = \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (-1,1)$

Determinemos, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ los escalares únicos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, para ello trabajamos con la igualdad:

$$\begin{aligned} (x,y) &= \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (-1,1) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2) \end{aligned}$$

Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^2$, se tiene que: $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y \end{cases}$

Resolviendo el sistema de forma matricial, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & \boxed{1} & y \end{array}\right) \underset{f_1+1f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & y \end{array}\right)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$rg\,(A) = rg\,(A\,|B\,) = 2 = \text{n}^o$ de incógnitas $\overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado (tiene solución única)

$\therefore\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists!\, \lambda_1 = x+y,\ \lambda_2 = y \in \mathbb{R} : (x,y) = \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (-1,1)$

y $[(x,y)]_\alpha = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$ (1)

Por la propiedad anterior, sabemos que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
[T\,(x,y)]_\beta &= [T]_\alpha^\beta \cdot [(x,y)]_\alpha \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{por (1)} \\
&= \begin{pmatrix} 2y-x \\ 4x+5y \\ -y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ [T\,(x,y)]_\beta = \begin{pmatrix} 2y-x \\ 4x+5y \\ -y \end{pmatrix}$$

Luego, por definición de coordenadas,

$$\begin{aligned}
T\,(x,y) &= (2y-x)\,(0,0,1) + (4x+5y)\,(0,1,0) - y\,(1,0,0) \\
&= (-y, 4x+5y, 2y-x)
\end{aligned}$$

Respuesta: $T\,(x,y) = (-y, 4x+5y, 2y-x)$

Definición (Matrices semejantes)

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que:

$$A \text{ y } B \text{ son } \textbf{\textit{semejantes}} \Leftrightarrow \exists\ P \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ inversible} : B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

La siguiente proposición, que se acepta **sin demostración**, afirma que las matrices cuadradas asociadas a un operador lineal en diferentes bases son semejantes.

Proposición

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V, $\dim V = n$, α y β bases de V y $T : V \to V$ T.L. Entonces $[T]_\alpha$ y $[T]_\beta$ son semejantes.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. *A es inversible*
2. $A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n}$
3. *A es producto de un número finito de matrices elementales*
4. $rg\,(A) = n$
5. *$A \cdot X = \Theta_{n\times 1}$ es compatible determinado*
6. *$A \cdot X = B$ es compatible determinado $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$*
7. $D\,(A) \neq 0$
8. *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
9. *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es generador de $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
10. *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es l.i. en $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
11. *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es una base de $\mathbb{K}^{1\times n}$*
12. *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es generador de $\mathbb{K}^{1\times n}$*
13. *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es l.i. en $\mathbb{K}^{1\times n}$*
14. *$\mathrm{Nu}\,(T) = \{\theta_{\mathbb{K}^{n\times 1}}\}$ siendo $T : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ T.L. definida por $T\,(X) = A \cdot X$*
15. *$\mathrm{Im}\,(T) = \mathbb{K}^{n\times 1}$ siendo $T : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ T.L. definida por $T\,(X) = A \cdot X$*
16. *$\mathrm{Nu}\,(T) = \{\theta_V\}$ siendo $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V., $\dim V = n$, $T : V \to V$ T.L. tal que $[T]_\alpha^\beta = A$, siendo α, β bases de V*
17. *$\mathrm{Im}\,(T) = V$ siendo $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V., $\dim V = n$, $T : V \to V$ T.L. tal que $[T]_\alpha^\beta = A$, siendo α, β bases de V*

NOTAR QUE: estos resultados fueron justificados a lo largo de las 5 primeras unidades.