Trabajo Práctico 1

1. Determina si los vectores X, Y y Z son combinación lineal de los vectores del conjunto S. Expresa, cuando sea posible, al vector mencionado como combinación lineal de los vectores de cada conjunto:

   a) $S_1 = \{(4,1), (-1,2)\} \subset \mathbb{R}^2$

   i) $X = (-11, 4)$ ii) $Y = (1, -2)$ iii) $Z = (0, 0)$

   b) $S_2 = \{(1,1,-1), (2,0,2), (0,-1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$

   i) $X = (1, -1, 1)$ ii) $Y = (0, 0, 0)$ iii) $Z = (2, 1, 0)$

   c) $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

   i) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ii) $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

   d) $S_4 = \{(i, -i, 0, 0), (0, -1, 3i, 0), (-1, 1, -i, 0)\} \subset \mathbb{C}^4$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$

   i) $X = (i, -3, 3i, 4)$ ii) $Y = (0, 0, 0, 0)$ iii) $Z = (-1, 0, 2i, 0)$

2. Determina $k \in \mathbb{R}$ para que cada vector X dado cumpla con la condición:

   a) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ k \end{pmatrix}$ sea combinación lineal de los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

   b) $X = (2, k, 3k)$ pertenezca a $\langle (1,1,2), (3,0,6) \rangle \subset \mathbb{R}^3$.

   c) $X = (2, 2k, k^2 - 3)$ sea un punto del plano generado por $(1,1,0)$ y $(-1,0,1)$.

3. Determina explícitamente el subespacio generado por los vectores:

   a) $v_1 = (1,4,0), v_2 = (1,2,1), v_3 = (0,-2,1) \in \mathbb{R}^3$

   b) $v_1 = (1,-1), v_2 = (2,1) \in \mathbb{R}^2$

   c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

4. Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ espacio vectorial. Determina, en cada caso, si el conjunto W es subespacio vectorial de V, siendo $+$ y $\cdot$ las operaciones usuales en cada espacio. En caso de ser posible, grafica usando Geogebra los conjuntos W que son subespacios de V

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

      i) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = z\}$ ii) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y - x = z + 2x = 0\}$

   b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

      i) $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ A \text{ es inversible}\}$ ii) $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ tr\,(A) = 0\}$

   c) $V = \mathbb{C}^{3\times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

      i) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \\ 2y & t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2} / t = x - z \right\}$ ii) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 1+i & -x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2} \right\}$

   d) $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

      i) $W = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \|z\| = 0\}$ ii) $W = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im}(z) = 2\operatorname{Re}(z)\}$

   e) $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

      i) $W = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im}(z) = 1\}$ ii) $W = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im}(z) = 2\operatorname{Re}(z)\}$

5. Determina $a, b \in \mathbb{R}$ para que los siguientes conjuntos sean subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

   a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ ax - y + b = 0\}$
   b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = z - bx = a\}$

6. Dados los conjuntos U y W, determina si $\langle U \rangle = \langle W \rangle$ siendo:

   a) $U = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$, $W = \{(2, 3, 2), (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$

   b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 1}$.

7. Determina $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que $(\alpha, \beta, \beta, -1) \in \langle (2, -1, 3, 2), (-1, 1, 1, -3), (0, 1, 1, -4) \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

8. Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (0, 1, 2)$, $w = (1, 0, -5) \in \mathbb{R}^3$. Califica con verdadero o falso (V o F) las siguientes afirmaciones y justifica tus respuestas:

i) $(0,2,4)$ es combinación lineal de u, v

ii) $(0,0,0) \notin \langle u, v, w\rangle$

iii) $w \in \langle u, v\rangle$

a) $\langle u, v, w\rangle = \langle u, v\rangle$

iv) $\langle u, v, w\rangle = \mathbb{R}^3$

9. Una placa triangular de masa m=3g y con densidad y grosor uniformes tiene vértices en $v_1 = (1,0)\,, v_2 = (4,2)$ y $v_3 = (10,1)\,.$

    a) Grafica la situación.

    b) Determina el centro de masa de la placa considerando que la misma es equivalente a un sistema de masas puntuales de 1g cada una que se ubican sobre los vértices de dicha placa.

    c) ¿Es cierto que $(5,1) \in \langle v_1, v_2, v_3\rangle$?

10. Una empresa minera posee en funcionamiento dos minas, M_1 y M_2. La extracción diaria en la mina M_1 genera 4 toneladas de cobre y 1 tonelada de plata, mientras que la extracción diaria en la M_2 genera 3 toneladas de cobre y 500 kg de plata. Si $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ son las matrices de producción diaria de las minas M_1 y M_2 respectivamente:

    a) ¿Cómo interpretas a los vectores $7v_1 + 7v_2$ y $15v_1 + 15v_2$?

    b) ¿Qué ecuación (donde figuren v_1 y v_2) plantearías para saber la producción lograda en marzo si en ese mes la empresa sólo extrajo material de la M_2 ?

    c) ¿Qué ecuación, donde figuren v_1 y v_2, plantearías para saber la producción lograda en abril si en ese mes la mina M_2 trabajó la mitad del mes pero la M_1 trabajó el mes completo?

    d) ¿Cuántos días deberá trabajarse en cada mina para lograr extraer 100 toneladas de cobre y 20 toneladas de plata?