Espacios Vectoriales - Parte 1

Definición (Espacio vectorial)

Sean V un conjunto no vacío, $\mathbb{K}$ un campo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $+$ y $\cdot$ dos operaciones llamadas suma y producto por escalar. Decimos que V es un ***espacio vectorial (E.V.)*** *sobre $\mathbb{K}$ si se cumplen los siguientes axiomas:*

(i) $+ : V \times V \longrightarrow V$ *(+ ley de composición interna en V)*

Es decir: $\forall\, u, v \in V,\ u + v \in V$

(ii) $\forall\, u, v \in V,\ u + v = v + u$ *(+ conmutativa)*

(iii) $\forall\, u, v, w \in V,\ (u + v) + w = u + (v + w)$ *(+ asociativa)*

(iv) $\exists\, \theta \in V : \forall v \in V,\ \theta + v = v + \theta = v$ *(existencia del neutro de la suma en V)*

θ *elemento neutro de la suma en V*

(v) $\forall\, v \in V,\ \exists\, v' \in V : v' + v = v + v' = \theta$ *(existencia de opuestos)*

($v' = -v$ opuesto de v)

(vi) $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ *($\cdot$ ley de composición externa en V)*

Es decir: $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in V,\ \lambda v \in V$

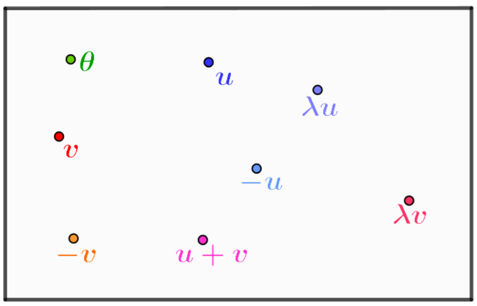
(vii) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, u, v \in V,\ \lambda\,(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *($\cdot$ distributivo respecto de la suma en V)*

(viii) $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall v \in V,\ (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ *($\cdot$ distributivo respecto de la suma en $\mathbb{K}$)*

(ix) $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in V,\ (\lambda\mu)\, v = \lambda(\mu v) = \mu\,(\lambda v)$ *($\cdot$ asociativa mixta)*

(x) $\forall\, v \in V,\ 1\, v = v$

V



Notación

Para indicar que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ se usa la cuaterna:

$$(V, +, \mathbb{K}, \cdot) \text{ E.V.}$$

la cual pone de manifiesto el conjunto V, la operación suma definida entre elementos de V, el campo $\mathbb{K}$ y la operación producto por escalar definida entre elementos de $\mathbb{K}$ y de V (en ese orden).

Observación

1. Los elementos $\lambda \in \mathbb{K}$ se llaman **escalares** y los elementos $v \in V$ se llaman **vectores**.
2. Cuando realizamos el producto por escalar, omitimos el símbolo $\cdot$ que representa esa operación. Es decir, escribimos λv en lugar de $\lambda \cdot v$
3. Cuando se sobreentienda el campo que estamos empleando, diremos simplente "V es espacio vectorial" en lugar de "V es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$"

Ejemplo

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Las siguientes cuaternas son ejemplos de espacios vectoriales pues se satisfacen los 10 axiomas de la definición. En cada apartado, $+$ y $\cdot$ son las operaciones usuales en cada conjunto.

1. $(\mathbb{K}^n, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V.

   En particular, todo campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo: $(\mathbb{K}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V.

   Es decir, $(\mathbb{R}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ son espacios vectoriales.
2. $(\mathbb{K}^{m\times n}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V.
3. $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V.
4. $(\mathbb{C}^{m\times n}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V.
5. $(\mathbb{C}^{m\times n}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ E.V.

Observación

Para demostrar que un conjunto V **no** es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ basta con probar, con un ejemplo numérico, que no se cumple alguno de los 10 axiomas de la definición de espacio vectorial. En tal caso, con un abuso de notación, diremos que $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ **no** es espacio vectorial.

Ejemplo

Los siguientes conjuntos **no** son espacios vectoriales sobre el campo indicado, con la suma y el producto por escalar usuales.

1. $\mathbb{R}$ **no** es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

   Efectivamente: el producto por escalar no es ley de composición externa pues si

   $\lambda = i \in \mathbb{C}$ y $v = 2 \in \mathbb{R},\ \lambda v = 2i \notin \mathbb{R}$

   Es decir, $(\mathbb{R}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ **no** es espacio vectorial.

2. $\mathbb{R}^{2\times 3}$ **no** es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

   Efectivamente: el producto por escalar no es ley de composición externa pues si

   $\lambda = i \in \mathbb{C}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},\ \lambda v = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^{2\times 3}$

   Es decir, $(\mathbb{R}^{2\times 3}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ **no** es espacio vectorial.

   En general, $(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ **no** es espacio vectorial, con $m, n \in \mathbb{N}$

Definición (Espacio vectorial real, espacio vectorial complejo)

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V. Decimos que:*

a) V *es* ***espacio vectorial real*** *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) V *es* ***espacio vectorial complejo*** *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Ejemplo

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Los siguiente son ejemplos de espacios vectoriales reales

1. $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. real

   En particular: $(\mathbb{R}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ son espacios vectoriales reales

2. $(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. real

   En particular: $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^{2\times 3}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ son espacios vectoriales reales

3. $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. real

   En particular: $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ son espacios vectoriales reales

4. $(\mathbb{C}^{m\times n}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. real

Ejemplo

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Los siguiente son ejemplos de espacios vectoriales complejos

1. $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$ E.V. complejo

   En particular: $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C}, \cdot)$, $(\mathbb{C}^2, +, \mathbb{C}, \cdot)$ son espacios vectoriales complejos

2. $(\mathbb{C}^{m\times n}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ E.V. complejo

Observación

1. Un conjunto no vacío puede ser tanto espacio vectorial real como espacio vectorial complejo, pero debe quedar claro que ambos espacios vectoriales son diferentes.

   Por ejemplo: $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. real y $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ E.V. complejo.

   Para evitar confusiones, **siempre** debe quedar claro el campo con el que se está trabajando.

2. Un conjunto no vacío puede ser espacio vectorial sobre un campo, pero no ser espacio vectorial sobre otro campo.

   Por ejemplo $(\mathbb{R}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V.real y $(\mathbb{R}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ **no** es espacio vectorial

   En consecuencia, el espacio vectorial depende tanto del conjunto V como del campo $\mathbb{K}$.

3. Como vimos, la noción de espacio vectorial está definida sobre cualquier campo. Trabajaremos principalmente con espacios vectoriales reales aunque mencionaremos brevemente los espacios vectoriales complejos.

El siguiente resultado se acepta **sin demostración.**

Proposición

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. Entonces:

a) El elemento neutro de V es único.

b) Cada elemento de V tiene un único opuesto.

Definición (Diferencia de vectores)

*Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $u, v \in V$. La **diferencia** de u y v (en ese orden) se define como*

$$u - v = u + (-v)$$

El siguiente teorema se acepta **sin demostración.**

Teorema

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V. Las siguientes afirmaciones valen:*

a) ***Propiedad Uniforme****: Sean* $u, v \in V$*, entonces*

$$u = v \;\Rightarrow\; \forall w \in V,\; u + w = v + w$$

b) ***Propiedad Cancelativa****: Sean* $u, v, w \in V$*, entonces*

$$u + w = v + w \;\Rightarrow\; u = v$$

Consecuencias (de la definición de E.V.)

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. Las siguientes afirmaciones son consecuencias inmediatas de los axiomas de espacio vectorial:

1. $\forall\, v \in V,\; 0v = \theta$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\; \lambda\theta = \theta$
3. Sean $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$ entonces
$$\lambda v = \theta \;\Rightarrow\; \lambda = 0 \;\vee\; v = \theta$$
4. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\; \forall\, v \in V,\quad \lambda(-v) = (-\lambda)v = -(\lambda v)$
5. $\forall\, v \in V,\; (-1)v = -v$
6. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\; \forall\, u, v \in V,\; \lambda\,(u - v) = \lambda u - \lambda v$
7. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K},\; \forall\, v \in V,\; (\lambda - \mu)\, v = \lambda v - \mu v$
8. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V - \{\theta\}$ entonces
$$\lambda v = \mu v \;\Rightarrow\; \lambda = \mu$$
9. Sean $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}\,, u, v \in V$ entonces
$$\lambda u = \lambda v \;\Rightarrow\; u = v$$

Demostración

Para demostrar éstas afirmaciones nos limitaremos a aplicar los axiomas que definen un espacio vectorial, las propiedades del lema anterior y la definición de diferencia cuando sea necesario.

1. Sea $v \in V$

$$\begin{aligned} v &= 1v \quad \text{por axioma (x) de la definición de E.V.} \\ &= (1+0)\,v \quad \text{por propiedad de } \mathbb{K},\ 1 = 1+0 \\ &= 1v + 0\,v \quad \text{por distributiva de } \cdot \text{ respecto de la suma en } \mathbb{K} \\ &= v + 0\,v \quad \text{por axioma de la definición de E.V.} \\ \therefore v &= v + 0\,v \end{aligned}$$

   Por la unicidad del neutro en V, $0v$ es el neutro de la suma en V

   Luego $\forall\, v \in V,\ 0\,v = \theta$

2. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$

   Por ser $\cdot$ ley de composición externa en V, se tiene que $\lambda\theta \in V$. Entonces:

$$\begin{aligned} \lambda\theta &= \lambda\,(\theta + \theta) \quad \text{pues } \theta \text{ es neutro en } V\ ,\ \theta = \theta + \theta \\ &= \lambda\theta + \lambda\theta \quad \text{por distributiva de } \cdot \text{ respecto de la suma en } V \\ \therefore \lambda\theta &= \lambda\theta + \lambda\theta \end{aligned}$$

   Por la unicidad del neutro en V, $\lambda\theta = \theta$.

   Luego, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\theta = \theta$.

3. Sean $\lambda \in \mathbb{K},\ v \in V : \lambda v = \theta$. Queremos demostrar que $\lambda = 0 \ \vee \ v = \theta$.

   Supongamos por el absurdo que $\lambda \neq 0 \wedge v \neq \theta$

   Como $\lambda \neq 0$ se tiene que $\exists \lambda^{-1} \in \mathbb{K} : \lambda^{-1}\lambda = 1$ (todo escalar no nulo tiene inverso). Entonces

$$\begin{aligned} v &= 1v \quad \text{por axioma (x) de la definición de E.V.} \\ &= \left(\lambda^{-1}\lambda\right) v \quad \text{pues } \lambda^{-1}\lambda = 1 \\ &= \lambda^{-1}\,(\lambda v) \quad \text{por axioma (ix) de la definición de E.V.} \\ &= \lambda^{-1}\theta \quad \text{por hipotesis } \lambda v = \theta \\ &= \theta \quad \text{por consecuencia 2.} \\ \therefore v &= \theta \ \textbf{Absurdo!} \end{aligned}$$

   El absurdo provino de suponer que $\lambda \neq 0 \ \wedge \ v \neq \theta$.

Luego, dado $\lambda \in \mathbb{K},\ v \in V$, si

$$\lambda v = \theta \ \Rightarrow \ \lambda = 0 \ \vee \ v = \theta$$

Las restantes demostraciones **se dejan como ejercicio**.

■

Observación

Las consecuencias (1.), (2.) y (3.), pueden expresarse de manera sintética como:

Sean $\lambda \in \mathbb{K},\ v \in V$, entonces

$$\lambda v = \theta \ \Leftrightarrow \ \lambda = 0 \ \vee \ v = \theta$$

Definición (Combinación lineal)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V. y* $v_1, \cdots, v_n \in V$. *Decimos que*

$$v \in V \ \textit{es } \textbf{\textit{combinación lineal}} \textit{ de } v_1, \cdots, v_n \ \Leftrightarrow \ \exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$$

Observación

- El siguiente es un enunciado equivalente de la definición anterior:

  Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $S = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$.

  $$v \in V \text{ es } \textbf{combinación lineal} \text{ de los elementos de } S \ \Leftrightarrow \ \exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$$

- El elemento neutro de V siempre es combinación lineal de los elementos de S pues $\forall i : 1 \leq i \leq n,\ v_i \in S$ y $\theta_V = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_i + \cdots + 0\, v_n$

- Todo elemento de S se escribe como combinación lineal de los elementos $S \subset V$ pues $\forall i : 1 \leq i \leq n,\ v_i \in S$ y $v_i = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 1 v_i + \cdots + 0\, v_n$

Ejemplo

Sean $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. y $S = \{(1, -1), (2, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Expresa, en caso de ser posible, los vectores $u = (0, 1)$, $v = (1, 0)$ y $\theta = (0, 0)$ como combinación lineal de los elementos de S.

Resolución

Sean $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V y $S = \{(1, -1), (2, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$

Analicemos si los vectores u, v, θ son combinaciones lineales de $v_1 = (1, -1)$ y $v_2 = (2, 0)$

- Por definición de combinación lineal:

$$u = (0,1) \in \mathbb{R}^2 \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2 \;\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i\, v_i$$

Trabajemos entonces con la igualdad anterior:

$$(0,1) = \lambda_1\,(1,-1) + \lambda_2\,(2,0) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

siendo $(A|\,B) = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ la matriz ampliada del sistema (1)

- Análogamente:

$$v = (1,0) \in \mathbb{R}^2 \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2 \;\Leftrightarrow\; \exists\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{2} \mu_i\, v_i$$

Entonces

$$(1,0) = \mu_1\,(1,-1) + \mu_2\,(2,0) = (\mu_1 + 2\mu_2, -\mu_1) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mu_1 + 2\mu_2 = 1 \\ -\mu_1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

siendo $(A|\,C) = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ la matriz ampliada del sistema (2)

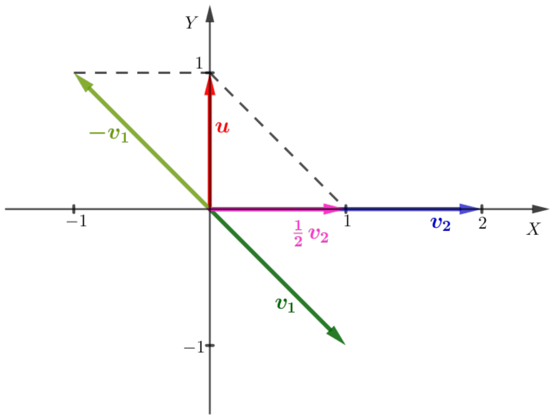
Observemos que las matrices de los sistemas (1) y (2) son iguales pero las matrices de los términos independientes son diferentes. Entonces podemos resolver simultánemente los sistemas, para evitar realizar dos veces las mismas operaciones elementales de filas. Para ello trabajamos, con la matriz ampliada colocando las dos columnas de los términos independientes, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (A|\,B|C) &= \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(-1)f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{f_1+(-1)f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{rr|r|r} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \\ &\underset{\frac{1}{2}f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{rr|r|r} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

Para el sistema (1) : $rg\,(A) = rg\,(A|\,B) = n = 2 \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado, siendo $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore\; \exists \lambda_1 = -1,\; \lambda_2 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} : u = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i\, v_i \;\Rightarrow\; u \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2$$

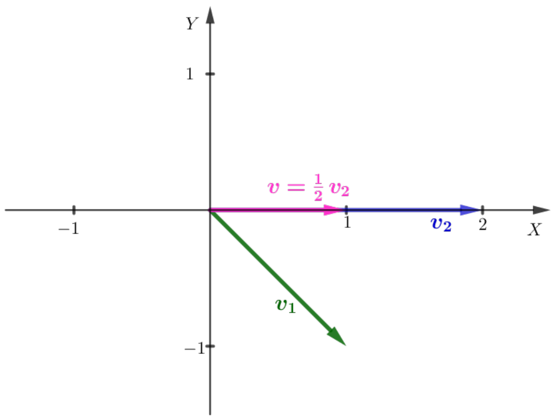
Asi, $u = -v_1 + \frac{1}{2} v_2$



Para el sistema (2) : $rg\,(A) = rg\,(A|\,C) = n = 2 \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado, siendo $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ \exists \mu_1 = 0,\ \mu_2 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{2} \mu_i\, v_i \ \Rightarrow\ v \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2$$

Asi, $v = 0v_1 + \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}v_2$



- Para responder si $\theta = (0,0)$ es combinación lineal de v_1, v_2, se procede igual, resolviendo el sistema homogéneo: $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 = 0 \end{cases}$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Entonces se debería agregar una columna con 0 en todos los pasos de $(*)$, pero obviamente no aporta a la resolución del mismo.

  Para este sistema: $rg\,(A) = rg\,(A|\,\Theta) = n = 2 \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible determinado, con $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$\therefore\ \exists \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \in \mathbb{R} : \theta = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i\, v_i \ \Rightarrow\ \theta \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2$$

  Así, $\theta = 0\,v_1 + 0\,v_2$.

Ejemplo

Sean $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V y $S = \{(2,0,1), (1,-1,0), (3,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$. Expresa, en caso de ser posible, los vectores $u = (1,1,1)$, $v = (-1,2,0)$, $\theta = (0,0,0)$ como combinación lineal de los elementos de S.

Resolución

Sean $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V y $S = \{(2,0,1), (1,-1,0), (3,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$

Analicemos si los vectores u, v, θ son combinaciones lineales de $v_1 = (2,0,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$ y $v_3 = (3,1,2)$:

- Por definición de combinación lineal:

$$u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3 \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2, v_3 \;\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : u = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, v_i$$

  Trabajando con la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}(1,1,1) &= \lambda_1 (2,0,1) + \lambda_2 (1,-1,0) + \lambda_3 (3,1,2) = (2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, -\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 1 \end{cases} \qquad (1)\end{aligned}$$

  siendo $(A|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ la matriz ampliada del sistema (1)

- Análogamente:

$$v = (-1,2,0) \in \mathbb{R}^3 \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2, v_3 \;\Leftrightarrow\; \exists\, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{3} \mu_i\, v_i$$

  Entonces

$$\begin{aligned}(-1,2,0) &= \mu_1 (2,0,1) + \mu_2 (1,-1,0) + \mu_3 (3,1,2) = (2\mu_1 + \mu_2 + 3\mu_3, -\mu_2 + \mu_3, \mu_1 + 2\mu_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu_1 + \mu_2 + 3\mu_3 = -1 \\ -\mu_2 + \mu_3 = 2 \\ \mu_1 + 2\mu_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)\end{aligned}$$

  siendo $(A|\,C) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ la matriz ampliada del sistema (2)

Resolvamos simultánemente los sistemas:

$$(A|\,B|C) \quad = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{f_1+(-2)f_3}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_1+1f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (**)$$

Para el sistema (1) : $rg\,(A) = rg\,(A|\,B) = 2 < n = 3 \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible indeterminado, el sistema equivalente es $\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = -1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - 2\lambda_3 \end{cases}, \forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\therefore\ \exists \lambda_1 = 1 - 2\lambda_3,\ \lambda_2 = -1 + \lambda_3, \lambda_3 \in \mathbb{R} : u = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, v_i \ \Rightarrow\ u \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2, v_3$$

Si llamamos $\alpha_3 = k$ se obtiene que:

$$u = (1 - 2k)\, v_1 + (-1 + k)\, v_2 + kv_3, \forall k \in \mathbb{R}$$

NOTAR QUE: u se escribe de infinitas formas como combinación lineal de v_1, v_2, v_3

Para el sistema (2) : $rg\,(A) = 2 \wedge rg\,(A|\,C) = 3 \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es incompatible

$$\therefore\ \nexists\, \mu_1,\ \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{3} \mu_i\, v_i \ \Rightarrow\ v \textbf{ no} \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2, v_3$$

- Para responder si $\theta = (0, 0,0)$ es combinación lineal de v_1, v_2, v_3, procedemos igual resolviendo el sistema homogéneo: $\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$, con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

  Para este sistema: $rg\,(A) = rg\,(A|\,\Theta) = 2 < n = 3 \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow}$ el sistema es compatible indeterminado, el sistema equivalente es $\begin{cases} \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}, \forall \alpha_3 \in \mathbb{R}$

  $$\therefore\ \exists \alpha_1 = -2\alpha_3,\ \alpha_2 = \alpha_3, \alpha_3 \in \mathbb{R} : \theta = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\, v_i \Rightarrow \theta \text{ es combinación lineal de } v_1, v_2, v_3$$

  Si llamamos $\alpha_3 = k$ se obtiene que:

  $$\theta = -2kv_1 + kv_2 + kv_3, \forall k \in \mathbb{R}$$

NOTAR QUE: θ se escribe de infinitas formas como combinación lineal de v_1, v_2, v_3, donde una de ellas es la combinación lineal trivial: $\theta = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$

Subespacio vectorial

En muchas aplicaciones importantes del álgebra lineal los espacios vectoriales utilizados aparecen como subespacios de espacios más grandes. Esto motiva la siguiente definición.

Definición (Subespacio vectorial)

*Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V., $W \subset V$ y $W \neq \emptyset$. Decimos que W es **subespacio** de V si W es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, bajo las operaciones de suma y producto por escalar definidas en V.*

En símbolos:

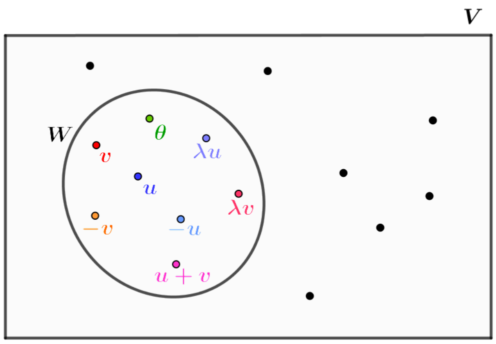
$$W \text{ es } \textbf{subespacio} \text{ de } V \Leftrightarrow (W, +, \mathbb{K}, \cdot) \ \text{E.V.}$$

Observación

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V.

1. $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. Entonces

$$W \text{ es subespacio de } V \Rightarrow \begin{cases} \theta_V \in W \\ \forall w \in W, \quad -w \in W \end{cases}$$



2. Los conjuntos $W_1 = \{\theta_V\}$ y $W_2 = V$ son subespcios vectoriales de V, llamados **subespacios triviales** de V, pues ambos conjuntos satisfacen los 10 axiomas de la definición de espacio vectorial.

Para afirmar que un conjunto no vacío $W \subset V$ es un subespacio de V se deben verificar, en un principio, los 10 axiomas de la definición.de espacio vectorial. Como la mayoría de los axiomas son heredados del espacio "más grande" V, no será necesario verificarlos a todos. El siguiente teorema establece que basta verificar que $+$ es ley de composición interna y $\cdot$ ley de composición externa en W.

Teorema (Condición necesaria y suficiente para subespacio)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V. y* $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. *Entonces*

$$W \textit{ es } \boldsymbol{subespacio} \textit{ de } V \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{(a)} \quad + : W \times W \longrightarrow W \\ \textit{(b)} \quad \cdot : \mathbb{K} \times W \longrightarrow W \end{cases}$$

Demostración

$(\Rightarrow)$ Queremos probar:

$$W \text{ es } \textbf{subespacio} \text{ de } V \Rightarrow \begin{cases} \text{(a)} \quad + : W \times W \longrightarrow W \\ \text{(b)} \quad \cdot : \mathbb{K} \times W \longrightarrow W \end{cases}$$

Por hipótesis W es subespacio de V, entonces $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ es espacio vectorial. Luego (a) y (b) son válidas.

$(\Leftarrow)$ Se debe probar que:

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad + : W \times W \longrightarrow W \\ \text{(b)} \quad \cdot : \mathbb{K} \times W \longrightarrow W \end{cases} \Rightarrow W \text{ es } \textbf{subespacio} \text{ de } V$$

Por hipótesis (a) y (b) se cumplen:

(a) $\forall w_1, w_2 \in W,\ w_1 + w_2 \in W$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in W,\ \lambda w \in W$

Queremos probar que W es subespacio de V, entonces por definición de subespacio, $(W, +, \mathbb{K}, \cdot)$ debe ser espacio vectorial. Es decir, veamos que se verifican, para W, los 10 axiomas de la definición de espacio vectorial.

Efectivamente, como:

- $W \neq \emptyset$ entonces W tiene al menos un elemento.
- $W \subset V \;\Leftrightarrow\; \forall w \in W,\ w \in V$ por definición de subconjunto

(i) $+ : W \times W \to W$ pues se verifica (a)

(ii) $+$ es conmutativa en W pues $+$ es conmutativa en V y $W \subset V$

(iii) $+$ es asociativa en W pues $+$ es asociativa en V y $W \subset V$

(iv) Existencia del neutro en W. Probemos que:

$$\exists \theta \in W : \forall w \in W, \theta + w = w + \theta = w$$

Por consecuencia (1) de la definición de espacio vectorial: $\forall v \in V,\ 0v = \theta_V$

En particular, se satisface para los elementos de $W \subset V$. Así

$$\forall w \in W,\ 0w = \theta_V \quad (1)$$

Por hipótesis (b), para $\lambda = 0$ y $\forall w \in W$, se tiene que: $0w \in W \quad (2)$

De (1) y (2) se sigue que:

$$\theta_V \in W \quad (3)$$

Como V es espacio vectorial: $\forall v \in V,\ \theta_V + v = v + \theta_V = v$

En particular, tambien se satisface para los elementos de $W \subset V$. Así

$$\forall w \in W,\ \theta_V + w = w + \theta_V = w \quad (4)$$

Luego, de (3) y (4), tenemos que el neutro de V es neutro en W. Es decir:

$$\exists \theta_V \in W : \forall w \in W,\ \theta_V + w = w + \theta_V = w$$

(v) Existencia de opuestos en W. Probemos que:

$$\forall w \in W, \exists\,(-w) \in W : -w + w = w + (-w) = \theta_V$$

Por consecuencia (5) de la definición de espacio vectorial: $\forall v \in V,\ (-1)\,v = -v$

En particular, se satisface para los elementos de $W \subset V$. Así

$$\forall w \in W,\ (-1)\,w = -w \quad (5)$$

Por hipótesis (b), para $\lambda = -1$ y $\forall w \in W$, se tiene que:

$$(-1)\,w \in W \quad (6)$$

De (5) y (6) se sigue que:

$$\forall w \in W, \exists\,(-w) \in W \quad (7)$$

Como V es espacio vectorial: $\forall v \in V, \; -v + v = v + (-v) = \theta_V$

En particular, tambien se satisface para los elementos de $W \subset V$. Así

$$\forall w \in W, \; -w + w = w + (-w) = \theta_V \quad (8)$$

Luego, de (7) y (8), tenemos que todo elemento de W tiene su opuesto. Es decir:

$$\forall w \in W, \; \exists\, (-w) \in W, \; -w + w = w + (-w) = \theta_V$$

El resto de los axiomas se verifican en $W \subset V$ pues valen en V por ser V espacio vectorial.

■

Observación

Dado $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V.

- Para demostrar que un determinado conjunto W es un subespacio de V, empleando la condición necesaria y suficiente para subespacio, debemos probar que se verifican:

  (i) $W \subset V$

  (ii) $W \neq \emptyset$

  (iii) $+ : W \times W \longrightarrow W$

  (iv) $\cdot : \mathbb{K} \times W \longrightarrow W$

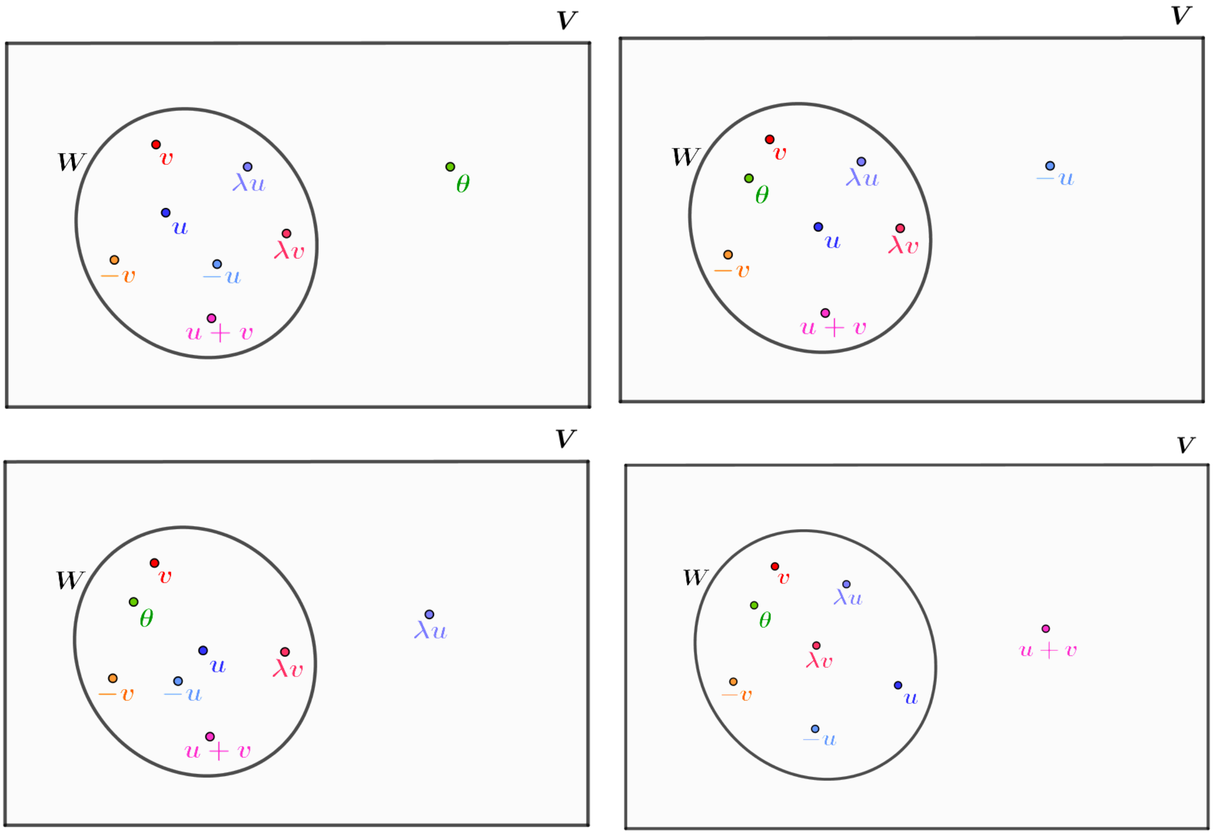
  donde (i), (ii) son hipótesis generales para poder usar la condición necesaria y suficiente.

  Para probar (ii), es decir $W \neq \emptyset$, basta con encontrar algún elemento que pertenezca a dicho conjunto. Para ello conviene probar que $\theta_V \in W$. Pues si $\theta_V \notin W$, W **no** es subespacio de V ya que W **no** es espacio vectorial dado que no tiene elemento neutro (recuerda que el neutro de un E.V. es único). Que $\theta_V \notin W$ no significa que $W = \emptyset$, ya que puede tener otros elementos.

- En el caso de observar que para W **no se cumple**:

  - alguna de las condiciones anteriores: (iii), (iv) concluimos (por la condición necesaria y suficiente para subespacio) que W **no** es subespacio de V, justificando con un contraejemplo.

- alguno de los 10 axiomas de la definición de espacio vectorial (justificando con un contraejemplo), concluimos que W **no** es espacio vectorial en si mismo. Luego, por definición de subespacio vectorial, W **no** es subespacio de V.



Ejemplo

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. Prueba que los siguientes conjuntos W son subespacios vectoriales de V, siendo $+$ y $\cdot$ las operaciones usuales en cada espacio. Justifica adecuadamente tu respuesta.

1. $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V.

   a) $W = \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot X = X \cdot A\}$, con $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ fija.

   b) $W = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^t = A\}$

2. Sea $(\mathbb{K}^{n\times 1}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $W = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X = \Theta\}$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matriz fija.

Resolución

Para probar que los conjuntos dados son subespacios vectoriales de los espacios indicados, empleamos la condición necesaria y suficiente para subespacios.

1. Dado $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V

   a) Veamos que $W = \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot X = X \cdot A\}$ cumple con las cuatro condiciones antes mencionadas:

   (i) $W \subset \mathbb{K}^{n\times n}$ pues los elementos de W son matrices cuadradas de orden n que conmutan (con el producto) con una matriz A fija.

   (ii) $W \neq \emptyset$ pues $\Theta_{n\times n} \in W$ ya que $A \cdot \Theta_{n\times n} = \Theta_{n\times n} \cdot A$

   (iii) Probemos que la suma es ley de composición interna en W.

   Es decir: $\forall X, Y \in W,\ X + Y \in W$

   Sean $X, Y \in W$:

   $X \in W \Rightarrow X \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge\ A \cdot X = X \cdot A \quad (1)$

   $Y \in W \ \Rightarrow\ Y \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge\ A \cdot Y = Y \cdot A \quad (2)$

   Como $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se tiene que $X + Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$ pues $\mathbb{K}^{n\times n}$ es E.V.

   Resta probar que $X + Y$ conmuta (con el producto) con A, es decir que, $A \cdot (X + Y) = (X + Y) \cdot A$

   Efectivamente:

   $$\begin{aligned} A \cdot (X + Y) &= A \cdot X + A \cdot Y && \text{por prop. distributiva del producto respecto a la suma de matrices} \\ &= X \cdot A + Y \cdot A && \text{por (1) y (2)} \\ &= (X + Y) \cdot A && \text{por prop. distributiva del producto respecto a la suma de matrices} \end{aligned}$$

   $\therefore X + Y \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge\ A \cdot (X + Y) = (X + Y) \cdot A \Rightarrow X + Y \in W$

   Luego $\forall X, Y \in W,\ X + Y \in W$

   (iv) Probemos que el producto por escalar es ley de composición externa en W.

   Es decir: $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall X \in W,\ \lambda X \in W$

   Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $X \in W$:

   $X \in W \ \Rightarrow\ X \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge\ A \cdot X = X \cdot A \quad (3)$

   Como $\lambda \in \mathbb{K}$ y $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se tiene que $\lambda X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ pues $\mathbb{K}^{n\times n}$ es E.V.

   Resta probar que λX conmuta (con el producto) con A, es decir que,

   $A \cdot (\lambda X) = (\lambda X) \cdot A$

   Efectivamente:

$$
\begin{aligned}
A \cdot (\lambda X) &= \lambda\,(A \cdot X) \quad \text{por propiedad asociativa mixta del producto de matrices}\\
&= \lambda\,(X \cdot A) \quad \text{por } (3)\\
&= (\lambda X) \cdot A \quad \text{por propiedad asociativa mixta del producto de matrices}
\end{aligned}
$$

$\therefore \lambda X \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge \ A \cdot (\lambda X) = (\lambda X) \cdot A \ \Rightarrow \ \lambda X \in W$

Luego $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall X \in W,\ \lambda X \in W$

Como se cumplen (i), (ii), (iii), (iv), entonces por la condición necesaria y suficiente para subespacios, se tiene que $W = \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot X = X \cdot A\}$ es subespacio de $\mathbb{K}^{n\times n}$

b) Probemos que $W = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^t = A\}$ cumple con las hipótesis de la condición necesaria y suficiente para subespacio:

(i) $W \subset \mathbb{K}^{n\times n}$ pues los elementos de W son las matrices cuadradas de orden n simétricas.

(ii) $W \neq \emptyset$ pues $\Theta_{n\times n} \in W$ ya que $(\Theta_{n\times n})^t = \Theta_{n\times n}$

(iii) ¿$+ : W \times W \to W$? Es decir, ¿$\forall A, B \in W,\ A + B \in W$?

Sean $A, B \in W$:

$A \in W \Rightarrow A \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge \ A^t = A \quad (*1)$

$B \in W \Rightarrow B \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge \ B^t = B \quad (*2)$

Como $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se tiene que $A + B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, por ser $\mathbb{K}^{n\times n}$ E.V.

Resta probar que $A + B$ es simétrica, es decir que, $(A + B)^t = A + B$

Efectivamente:

$$
\begin{aligned}
(A + B)^t &= A^t + B^t \quad \text{por propiedad de la transpuesta de matrices}\\
&= A + B \quad \text{por } (*1) \text{ y } (*2)
\end{aligned}
$$

$\therefore A + B \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge \ (A + B)^t = A + B \Rightarrow A + B \in W$

Luego $\forall A, B \in W,\ A + B \in W$

(iv) ¿$\cdot : \mathbb{K} \times W \to W$? Es decir, ¿$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in W,\ \lambda A \in W$?

Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A \in W$:

$A \in W \Rightarrow A \in \mathbb{K}^{n\times n} \wedge A^t = A \quad (*3)$

Como $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se tiene que $\lambda A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ pues $\mathbb{K}^{n\times n}$ es E.V.

Resta probar que λA es simétrica, es decir que, $(\lambda A)^t = \lambda A$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} (\lambda A)^t &= \lambda A^t \quad \text{por propiedad de la transpuesta de matrices} \\ &= \lambda A \quad \text{por } (*3) \end{aligned}$$

$\therefore \lambda A \in \mathbb{K}^{n\times n} \ \wedge \ (\lambda A)^t = \lambda A \Rightarrow \lambda A \in W$

Luego $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in W,\ \lambda A \in W$

Como se cumplen (i), (ii), (iii), (iv), entonces por la condición necesaria y suficiente para subespacios, $W = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^t = A\}$ es subespacio de $\mathbb{K}^{n\times n}$

2. Se deja como ejercicio.

Ejemplo

Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. Prueba que los siguientes conjuntos W **no** son subespacios vectoriales de V, siendo $+$ y $\cdot$ las operaciones usuales en V. Justifica adecuadamente tu respuesta.

1. Sea $(\mathbb{K}^{n\times 1}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $W = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X = B\}$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ matrices fijas no nulas tales que el sistema $A \cdot X = B$ sea compatible.

2. Sea $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V.

   a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

   b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$

3. Sea $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - 2y + 3\}$

Resolución

1. Dado $(\mathbb{K}^{n\times 1}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V.

   Sea $W = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X = B\}$, con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ matrices fijas no nulas tales que el sistema $A \cdot X = B$ es compatible. ($\therefore W \subset \mathbb{K}^{n\times 1} \wedge W \neq \emptyset$)

   Observemos que el elemento neutro de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ no pertenece a W pues $A \cdot \Theta_{n\times 1} = \Theta_{n\times 1} \neq B$

   Como $\Theta_{n\times 1} \notin W$, por definición de espacio vectorial, W **no** es espacio vectorial. Luego, por la definición de subespacio, W **no** es subespacio vectorial de V

2. Dado $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V.

a) Sea $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

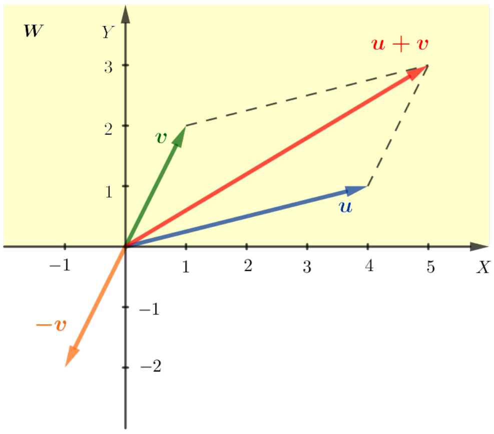
Observemos que $v = (1, 2) \in W$ y $-v = (-1, -2) \notin W$ (pues tiene ordenada negativa)

Luego, W **no** es subespacio de $\mathbb{R}^2$, por no ser espacio vectorial (no todo elemento de W tiene su opuesto en W)

Notar que: A pesar de que W **no** es subespacio de $\mathbb{R}^2$:

- $(0, 0) \in W$
- $+$ es ley de composición interna en W, pues $\forall u, v \in W,\ u + v \in W$.

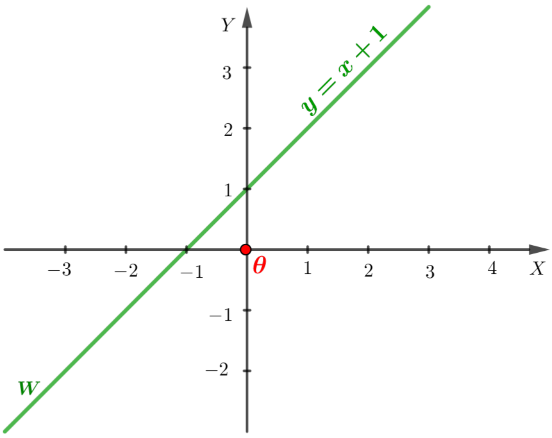
Ambos hechos se comprueban fácilmente de la siguiente gráfica.



b) Sea $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$

Observemos que el elemento neutro de $\mathbb{R}^2$, $\theta = (0, 0) \notin W$ pues $0 \neq 0 + 1$

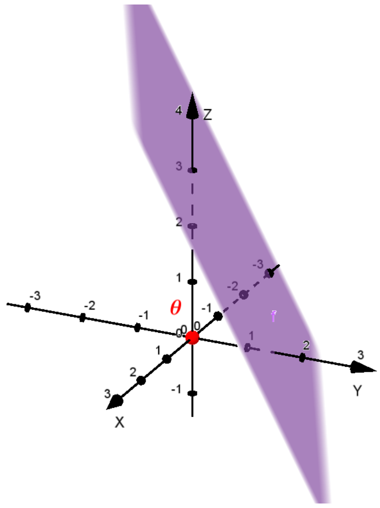
Luego, W **no** es espacio vectorial y por lo tanto W **no** es subespacio de $\mathbb{R}^2$.



3. Dado $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - 2y + 3\}$

Observemos que el elemento neutro de $\mathbb{R}^3$, $\theta = (0, 0, 0) \notin W$ pues $0 \neq 0 - 2 \cdot 0 + 3$

Luego, W **no** es espacio vectorial y por lo tanto W **no** es subespacio de $\mathbb{R}^3$.



Observación

- Las rectas que **no** pasan por el origen de coordenadas **no** son subespacios de $\mathbb{R}^2$.
- Las rectas y los planos que **no** pasan por el origen de coordenadas **no** son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

Definición (Subespacio generado por un conjunto)

*Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$. El **subespacio generado** por S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S, que se denota $\langle S \rangle$ y se dice que S genera a $\langle S \rangle$. Es decir*

$$\langle S \rangle = \left\{ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i \in V : \lambda_i \in \mathbb{K}, \; \forall i = 1, \ldots, n \right\}$$

Notación

$\langle S \rangle = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$

Observación

- $\theta_V \in \langle S \rangle$ pues $\theta_V = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \ldots + 0\, v_n$
- Todos los elementos de S pertenecen el subespacio generado por S, es decir $S \subset \langle S \rangle$:

  $v_1 \in \langle S \rangle$ pues $v_1 = 1v_1 + 0\, v_2 + \ldots + 0\, v_n$

  $v_2 \in \langle S \rangle$ pues $v_2 = 0\, v_1 + 1v_2 + \ldots + 0\, v_n$

  $\vdots$

  $v_n \in \langle S \rangle$ pues $v_n = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \ldots + 1v_n$

Ejemplo

Sean $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. Determina el subespacio generado por $S = \{(2,0,1), (1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Resolución

Por definición, $\langle S \rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S, es decir:

$$\langle S \rangle = \{v = \lambda_1 (2,0,1) + \lambda_2 (1,-1,0) : \lambda_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1,2\} \subset \mathbb{R}^3$$

Para determinar si $\langle S \rangle$ es todo $\mathbb{R}^3$ o un subespacio contenido estrictamente en él, procedemos como sigue:

$$v \in \langle S \rangle \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 (2,0,1) + \lambda_2 (1,-1,0)$$

Sea $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = (2\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_2, \lambda_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x \\ -\lambda_2 = y \\ \lambda_1 = z \end{cases}$$

Para cada $x, y, z \in \mathbb{R}$, resolvemos dicho sistema que sabemos debe ser compatible, pues $\langle S \rangle \neq \emptyset$:

$$(A|\,B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ \boxed{1} & 0 & z \end{array}\right) \underset{f_1+(-2)f_3}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{1} & x-2z \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right) \underset{f_2+1f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x-2z \\ 0 & 0 & x-2z+y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right)$$

$$rg\,(A) = rg\,(A|\,B) = 2 = n \Leftrightarrow x - 2z + y = 0$$

Luego

$$\langle S \rangle = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\right\}$$

El subespacio generado por S es el plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $(0,0,0)$ y cuyo vector normal es $N = (1,1,-2) \in \mathbb{R}^3$.

Notar que:

$$\left.\begin{array}{r} N \perp (2,0,1) \\ N \perp (1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow N \parallel (2,0,1) \times (1,-1,0) = (1,1,-2)$$

Teorema

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$.

Entonces $W = \langle S \rangle$ es subespacio vectorial de V.

Demostración

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$. Para probar que

$$W = \left\{ w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i, \;\; \lambda_i \in \mathbb{K}, \;\; \forall i = 1, \ldots, n \right\} \subset V$$

es subespacio de V empleamos la condición necesaria y suficiente para subespacio:

(i) $W \subset V$ por definición del conjunto W sus elementos pertenecen a V pues V es E.V.

(ii) $W \neq \emptyset$ pues $\theta_V \in W$ ya que $\theta_V = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \ldots + 0\, v_n$

(iii) ¿$+ : W \times W \longrightarrow W$? ¿$\forall w_1, w_2 \in W, \;\; w_1 + w_2 \in W$?

Sean $w_1, w_2 \in W$ tales que

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i, , \;\text{ con } \lambda_i \in \mathbb{K}, \;\; \forall i = 1, \ldots, n. \\ w_2 &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, v_i, \;\text{ con } \mu_i \in \mathbb{K}, \;\; \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \; v_i \qquad \begin{array}{l} \text{por ser } V \text{ E.V. sobre } \mathbb{K} \text{ (+ asociativa y conmutativa,} \\ \cdot \text{ distributivo respecto de la suma en } \mathbb{K}) \end{array} \\ \therefore w_1 + w_2 &\in W \end{aligned}$$

(iv) ¿$\cdot : \mathbb{K} \times W \longrightarrow W$? ¿$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \;\; w \in W, \lambda w \in W$?

Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in W$ tal que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i, \;\text{ con } \lambda_i \in \mathbb{K}, \;\; \forall i = 1, \ldots, n$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lambda w &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) \; v_i \qquad \begin{array}{l} \text{por ser } V \text{ E.V. sobre } \mathbb{K} \\ (\cdot \text{ distributivo respecto de la suma en } \mathbb{K}) \end{array} \\ \therefore \lambda w &\in W \end{aligned}$$

Luego, por la condición necesaria y suficiente para subespacio, se tiene que $W = \langle S \rangle$ es subespacio vectorial de V. ■

Ejemplo

Por el teorema anterior, sabemos que $\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, donde $\langle S \rangle$ es el conjunto obtenido en el ejemplo previo al teorema.

Observación

El teorema anterior permite demostrar de manera "más simple" que ciertos conjuntos W son subespacios de un espacio vectorial V, pues sólo basta con expresar a W como el conjunto de **"todas las combinaciones lineales"** de un determinado conjunto S.

Ejemplo

Sea $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. Demuestra que los siguientes conjuntos W son subespacios de V, siendo

1. $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0,\ z + 3y = 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - t \right\}$

Resolución

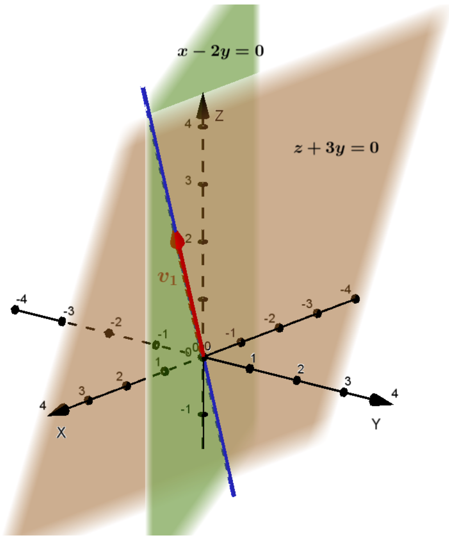
1. Dado $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V., expresemos al conjunto W de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y,\ z = -3y\right\} \\ &= \left\{(2y, y, -3y) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{y\,(2, 1, -3) \in \mathbb{R}^3\right\} \quad \text{por ser } \cdot \text{ ley de composición externa en } \mathbb{R}^3 \\ &= \{y\,(2, 1, -3) : y \in \mathbb{R}\} \\ \therefore W &= \langle (2, 1, -3) \rangle \end{aligned}$$

Como W es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1 = (2, 1, -3)$, entonces por el teorema anterior, W es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Notar que:

- $S = \{(2, 1, -3)\} \subset W$ pues $v_1 \in W$
- W es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen de coordenadas y cuya dirección está dada por $v_1 = (2, 1, -3)$



2. Dado $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, expresemos al conjunto W como:

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2x - t & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Luego, como W es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, se tiene que W es subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Notar que: $S \subset W = \langle S \rangle$