Trabajo Práctico

1) En cada uno de los siguientes apartados, analiza si los vectores X_i, con $i = 1, 2$ son vectores propios de la matriz A asociados al valor propio λ.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2} \qquad \lambda = 2+3i\ ; \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 3i \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \qquad \lambda = -1\ ; \quad X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Determina cuáles de los vectores dados son vectores característicos de A asociados a un valor característico λ:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Determina $a\ ,\ b \in \mathbb{R}$ para que X_1 y X_2 sean vectores propios asociados a algún valor propio de la matriz A:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

4) Dadas las siguientes matrices y polinomios:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2} \qquad p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 12$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \qquad p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3} \qquad p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda$

En cada uno de los apartados anteriores determina:

i. si p es el polinomio característico de la matriz A.

ii. los valores propios de la matriz A.

iii. sin hacer más cálculos, determina cuáles de las matrices dadas son inversibles.

iv. para las matrices que sean inversibles, calcula los valores propios de A^{-1}, usando teorema.

5) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2} \qquad C = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3}$$

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

a) Obtiene los espacios propios asociados a cada valor propio de la matriz.

b) Determina una base para cada espacio propio y la dimensión de los mismos.

c) ¿Puedes obtener una base de $\mathbb{K}^{n\times1}$ formada por vectores propios ? En caso afirmativo hállala.

6) De la matriz $A = \begin{pmatrix} -a & 2 & 1 \\ 2 & 0 & b \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ se sabe que $\lambda = 0$ es uno de sus valores propios y que un vector propio de A asociado al valor λ es $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de a, b y $c \in \mathbb{R}$.

b) Para los valores de a, b y $c \in \mathbb{R}$ hallados en $a)$:

i. Encuentra el espacio propio correspondiente al valor propio negativo.

ii. Calcula el determinante de A usando dos métodos distintos.¿Qué relación hay entre los valores propios y la inversibilidad de la matriz A?

7) De la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b^2 & -1 \\ a & 2 & 3 \\ -a & b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ se sabe que $\lambda = 2$ es uno de sus valores propios y que un vector propio de A asociado al valor λ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de a, b y $c \in \mathbb{R}$.

b) Para los valores de a, b y $c \in \mathbb{R}$ hallados en $a)$.

i. Encuentra el espacio propio correspondiente al valor propio doble.

ii. Calcula la traza de $\left(A^T\right)^{-1}$ usando dos métodos distintos.