# Determinantes - Parte 1

**Definición (Determinante de orden n)**

*Sea $n \in \mathbb{N}$. Se llama **determinante de orden** $n$ a toda función $D : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ que verifica los siguientes axiomas:*

*1) Si* $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A_j = A'_j + A''_j,\ 1 \leq j \leq n$ *entonces*

$$\begin{aligned} D(A) &= D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A'_j + A''_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \\ &= D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A'_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A''_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*2) Si* $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A_j = \alpha A'_j,\ 1 \leq j \leq n,\ \alpha \in \mathbb{K}$ *entonces*

$$\begin{aligned} D(A) &= D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \alpha A'_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha\, D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A'_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*3) Si* $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_h & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A_h = A_j,\ h \neq j,\ 1 \leq h, j \leq n$ *entonces*

$$D(A) = D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} = 0$$

*4)* $D\left(\mathbb{I}_{n\times n}\right) = 1$

**Notación**

Para denotar el determinante de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se emplea indistintamente alguna de las siguientes notaciones:

$$D(A) \quad o \quad |A|$$

**Observación**

- Como $D : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ es función, cada matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene asociado un **único** escalar $D(A) \in \mathbb{K}$.

- La notación $|A|$ no debe confundirse con la matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, pues $|A|$ es un escalar de $\mathbb{K}$ que está asociado a la matriz $A$.

- La notación $|A|$ no debe confundirse con las barras de valor absoluto de un número real. Dicha notación es clara en el contexto, ya que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $|A|$ se refiere al determinante de una matriz. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $|A|$ es un n$^o$ real positivo, negativo o cero; a diferencia del valor absoluto de un n$^o$ real que siempre es no negativo.

Veamos algunos ejemplos de como aplicar los axiomas.

**Ejemplo**

Dados $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Calcule los siguientes determinantes sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -5$

1) $\begin{vmatrix} a & b + a\,e \\ c & d + c\,e \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a\,c & b\,c \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$

**Resolución**

1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b + a\,e \\ c & d + c\,e \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a\,e \\ c & c\,e \end{vmatrix} && \text{por axioma 1 (para columna 2)} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + e \underbrace{\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{por axioma 3}}} && \text{por axioma 2 (para columna 2)} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -5 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ a\,c & b\,c \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 1 & b \\ c & b\,c \end{vmatrix} && \text{por axioma 2 (para columna 1)} \\ &= a\,b \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & c \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{por axioma 3}}} && \text{por axioma 2 (para columna 2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} && \text{por axioma 2 (para columna 1)} \\ &= a\,b \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{=1 \\ \text{por axioma 4}}} && \text{por axioma 2 (para columna 2)} \\ &= a\,b \end{aligned}$$

**Ejemplo**

Usando los axiomas de la definición calcula el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = -2\ \mathbb{I}_{3\times 3}$$

**Resolución**

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+2 \\ 0 & 1 & 0+2 \\ 3 & 1 & 3+2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{por axioma 1 (para columna 3)} \\
&= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{por axioma 3} \\ \text{pues } c_1=c_3}} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{por axioma 3} \\ \text{pues } c_2=c_3}} \quad \text{por axioma 2 (para columna 3)} \\
&= 0 + 2 \cdot 0 \\
\therefore |A| &= 0
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
|F| &= |-2\ \mathbb{I}_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-2)^3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{=1 \\ \text{por axioma 4}}} \quad \text{por axioma 2 (aplicado 3 veces consecutivas, una en cada columna)} \\
&= (-2)^3 \cdot 1 \\
\therefore |F| &= -8
\end{aligned}$$

En lo que sigue analizaremos la existencia de la función determinante de orden $n$. Comenzaremos estudiando los determinates de órdenes 1, 2 y 3 y posteriormente estudiaremos los determinantes de orden arbitrario.

**Casos particulares**

Las siguientes son funciones determinantes de orden $n$, con $n = 1, 2, 3$, pues verifican los 4 axiomas de la definición anterior, **omitiremos su prueba** en este curso.

- **Determinante de orden** 1

  Si $n = 1,\ A = (a_{11}) \in \mathbb{K}^{1\times 1}$.

  La función $D : \mathbb{K}^{1\times 1} \to \mathbb{K}$ definida como

  $$D\,(A) = D\,(a_{11}) = a_{11}$$

  **es función determinante de orden** 1

  **Ejemplo**

  $D\,(4) = 4,\ D\,(-3) = -3$

- **Determinante de orden** 2

  Si $n = 2,\ A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{2\times 2}$

  La función $D : \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K}$ definida como

  $$D\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

  **es función determinante de orden** 2.

  Podemos escribir la fórmula anterior de manera más simple evitando los subíndices:

  $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

  La misma nos permite calcular fácilmente los determinantes de matrices de orden 2, mediante la siguiente

  **Regla Práctica** para el desarrollo del determinante de orden 2

  $$\begin{vmatrix} {\color{red}a} & {\color{blue}b} \\ {\color{blue}c} & {\color{red}d} \end{vmatrix} = {\color{red}a\,d} - {\color{blue}b\,c}$$

  Se efectua el producto de los elementos en la "diagonal principal" y luego se resta el producto de los elementos de la "diagonal secundaria".

**Ejemplo**

Calcula los siguientes determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\,(-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\,(-1) - (-2)\,2 = 0$$

**Observación**

Sabemos que dada una matriz el valor de su determinante es único, pero esto no quiere decir que matrices diferentes no puedan tener el mismo valor del determinante. En el ejemplo anterior, se puede observar que dos matrices diferentes tienen asociado el mismo escalar para de sus determinantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

- **Determinante de orden** 3

  Si $n = 3,\ A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{3\times 3}$.

  La función $D : \mathbb{K}^{3\times 3} \to \mathbb{K}$ definida como

$$\begin{aligned} D\,(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} \end{aligned}$$

  **es función determinante de orden** 3.

  La fórmula anterior consta de 6 términos (3 precedidos con signo $+$ y 3 con signo $-$), cada término tiene 3 elementos de la matriz ubicados en filas y columnas diferentes. Por lo cual, no resulta sencilla de aplicar y recordar.

- Para $n > 3$, la fórmula que define la función determinante de orden $n$ (que se construye como la anterior) resulta poco práctica de utilizar pues a medida que $n$ crece, esta expresión tiene cada vez más términos.

En lo que sigue encontraremos la expresión de la función determinante para matrices de orden $n$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, empleando determinantes de matrices de un orden menor $(n-1)$. Para ello necesitamos la siguiente notación.

**Notación**

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $n > 1$. Denotamos con $A\,(i/j)$ a la submatriz que se obtiene eliminando fila $i$ y columna $j$ de $A$. Es decir

$$A\,(i/j) \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$$

**Ejemplo**

Dadas las matrices con elementos reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; \mathbb{I}_{4\times4}$$

Escribe las siguientes submatrices: $A\,(2/1)\,,\ C\,(3/3)\,,\ G\,(1/2)\,,\ \mathbb{I}\,(2/3)$

**Resolución**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A\,(2/1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C\,(3/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow G\,(1/2) = (1) = 1$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{I}\,(2/3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Desarrollo del determinante por una fila**

Sea $n > 1$. La función $D : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ definida como

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, |A\,(i/j)| \quad (\text{con } i \text{ fijo}, 1 \leq i \leq n)$$

**es función determinante de orden** $n$ (se acepta sin demostración) y se conoce como el **desarrollo del determinante por la fila** $i$ **de** $A$.

**Observación**

- El desarrollo del determinante por la fila $i$ de $A$, que es un determinante de orden $n$, se escribe en función de determinantes de matrices de orden $n-1$.

- El resultado del determinante es el mismo independientemente de la particular elección de la fila por la que se realiza el desarrollo.

**Ejemplo**

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Calcula el determinante $A$ realizando el desarrollo por cada una de las filas

**Resolución**

- Desarrollo del determinante de $A$ por fila 1 :

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, |A\,(1/j)| \\
&= 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 1\,(-1) - 1\,(-3) + 2\,[(-1)\,(-1) - 1\cdot 2] + 3\,[(-1)\,(-3) - 1\cdot 2] \\
&= -1 + 3 + 2\,(1-2) + 3\,(3-2) \\
\therefore |A| &= 3
\end{aligned}$$

- Desarrollo del determinante de $A$ por fila 2 :

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j}\, a_{2j}\ |A\,(2/j)| \\
&= (-1)\,(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= [(-2)\,(-1) - 3\,(-3)] + [1\,(-1) - 3 \cdot 2] - [1\,(-3) - (-2)\,2] \\
&= 2 + 9 - 1 - 6 - (-3 + 4) \\
\therefore |A| &= 3
\end{aligned}$$

- Desarrollo del determinante de $A$ por fila 3 : también se obtiene $|A| = 3$ (se deja como **ejercicio** comprobar este resultado)

La siguiente definición nos permitirá escribir de manera mas sencilla la expresión para el desarrollo del determinante por una fila.

**Definición (Cofactor de un elemento)**

*Sean $n > 1$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se llama* ***cofactor del elemento*** *$a_{ij}$, y se denota $\alpha_{ij}$, al escalar:*

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A(i/j)| \in \mathbb{K}$$

**Observación**

Usando cofactores, el **desarrollo del determinante por la fila** $i$ de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $n > 1$, se escribe de manera más sencilla como:

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_{ij} \quad (\text{con } i \text{ fijo}, 1 \le i \le n)$$

donde $\alpha_{ij}$ es el cofactor del elemento $a_{ij}$.

**Ejemplo**

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

1) Determina los cofactores de los elementos de la fila 3 de $A$

2) Calcula el desarrollo del determinante por la fila 3.

**Resolución**

1) $\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

2) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} \cdot \alpha_{3j} = 2\,(-5) + (-3)\,(-4) + (-1)\,(-1) = 3$

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

**Teorema (Unicidad de la función *D*)**

- *La función* $D : \mathbb{K}^{1\times1} \to \mathbb{K}$ *tal que*

$$D(A) = D(a_{11}) = a_{11}$$

*es la **única** función determinante de orden* 1

- *La función* $D : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ *tal que*

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_{ij} \text{ (con } i \text{ fijo, } 1 \leq i \leq n\text{)}$$

*es la **única** función determinante de orden $n$, con $n > 1$.*

**Observación**

El teorema anterior nos permite asegurar que las únicas funciones determinantes de órdenes 1, 2 y 3 son las funciones dada en los Casos Particulares, para $n = 1, 2, 3$

Las propiedades de determinantes son las que facilitarán la tarea del cálculo de determinantes para matrices de cualquier orden.

**Propiedades**

1) Si se permutan dos columnas de una matriz, los correspondientes determinantes son opuestos.

   Es decir: Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $i \neq j$, entonces $D(A) = -D(A')$.

2) Si una matriz tiene una columna nula, entonces su determinante es igual a cero.

   Es decir:
   Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A_i = \Theta_{n\times 1}$ entonces $D(A) = 0$.

3) Si a una columna de una matriz se le suma un múltiplo de otra columna, los correspondientes determinantes son iguales.

   Es decir:
   Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i + \alpha A_j & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $D(A) = D(A')$.

**Demostración**

1) Sean $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $i \neq j$. Queremos probar que $D(A) = -D(A')$

   Consideremos $B = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i + A_j & \cdots & A_j + A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ entonces, por el axioma 3 de la definición de determinante, se tiene que $D(B) = 0$ pues $B$ tiene dos columnas iguales.
   Entonces

$$
\begin{aligned}
\underbrace{D(B)}_{=0} &= D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i + A_j & \cdots & A_j + A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} \\
&= D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_j + A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_j + A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} \\
&\quad \text{por axioma 1} \\
&= D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} + \underbrace{D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ por axioma } 3} + \\
&\quad + \underbrace{D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ por axioma } 3} + D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} \quad \text{por axioma 1} \\
0 &= D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_i & \cdots & A_n \end{pmatrix} \\
0 &= D(A) + D(A') \\
\therefore D(A) &= -D(A')
\end{aligned}
$$

2) Sea $A = \begin{pmatrix} A_1 \cdots A_i \cdots A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A_i = \Theta_{n\times 1}$. Queremos probar que $D(A) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} D(A) &= D\begin{pmatrix} A_1 \cdots \Theta \cdots A_n \end{pmatrix} \quad \text{pues } A_i = \Theta_{n\times 1} \\ &= D\begin{pmatrix} A_1 \cdots 0A_i' \cdots A_n \end{pmatrix} \text{ pues } \Theta_{n\times 1} = 0\,A_i' \text{ , con } A_i' \in \mathbb{K}^{n\times 1} \\ &= 0\,D\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_i' \cdots A_n \end{pmatrix} \quad \text{por axioma 2} \\ \therefore D\,(A) &= 0 \end{aligned}$$

3) Sean $A = \begin{pmatrix} A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} A_1 \cdots A_i + \alpha A_j \cdots A_j \cdots A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Queremos probar que $D(A) = D(A')$.

Entonces

$$\begin{aligned} D\,(A') &= D\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_i + \alpha A_j \cdots A_j \cdots A_n \end{pmatrix} \\ &= D\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 \cdots \alpha A_j \cdots A_j \cdots A_n \end{pmatrix} \\ &\quad \text{por axioma 1} \\ &= D\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n \end{pmatrix} + \alpha \underbrace{D\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_j \cdots A_j \cdots A_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ por axioma 3}} \\ &\quad \text{por axioma 2} \\ &= D\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n \end{pmatrix} \\ \therefore D\,(A') &= D\,(A) \end{aligned}$$

■

**Observación (Importante)**

La propiedad 3 permitirá hacer la **mayor cantidad de ceros posibles en una fila,** para luego calcular el determinante de manera más rápida y sencilla aplicando **el desarrollo del determinante por esa fila.**

Si un elemento vale cero, el producto de este por su correspondiente cofactor es cero, reduciendo así la cantidad de cofactores a calcular y en consecuencia, la cantidad de términos no nulos que aportan al desarrollo del determinante por esa fila.

**Ejemplo**

Calcula los siguientes determinantes aplicando propiedades y desarrollo del determinante por la fila más conveniente

$$1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**Resolución**

1) Emplearemos la propiedad 3 para realizar la mayor cantidad de ceros posibles en la fila 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{c_1+1c_2 \\ c_3+(-1)c_2}}{\overset{\text{prop. 3}}{=}} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{0\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ (*)}} + 1\,(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \underbrace{0\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ (*)}}$$

por desarrollo del determinante por la fila 2 (por ser la más conveniente)

$$= (-1)\,2 - 5\,(-1) \quad \text{por cálculo del determinante de orden 2}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

**Observación**

La fila elegida para el desarrollo del determinante es la más conveniente pues tiene 2 elementos nulos, por lo que sólo se necesita calcular un cofactor. En la práctica no escribiremos los términos $(*)$ por ser nulos.

2) Usaremos la propiedad 3 para hacer la mayor cantidad de ceros posibles en la fila 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{c_4+1c_2}{\overset{\text{prop. 3}}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{1\,(-1)^{3+2}}_{=-1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{por desarrollo del determinante por la fila 3 (por ser la más conveniente)}$$

$$\underset{c_3+3c_2}{\overset{\text{prop. 3}}{=}} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1\,(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{por desarrollo del determinante por la fila 2 (por ser la más conveniente)}$$

$$= -\left[2 \cdot 3 - (-2)\,(-2)\right]$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

**Teorema (Propiedades adicionales)**

*1)* $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n},\ D(A) = D(A^t)$

*2)* $\forall A,\, B \in \mathbb{K}^{n\times n},\ D(A \cdot B) = D(A) \cdot D(B)$

**Observación (Importante)**

La propiedad adicional 1) permite expresar los axiomas y propiedades de determinantes para filas y el desarrollo del deteminante por columnas.

**Desarrollo del determinante por una columna**

Sea $n > 1$. La función $D : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ definida como

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, |A\,(i/j)| \quad (\text{con } j \text{ fijo}, 1 \leq j \leq n)$$

**es función determinante de orden** $n$ y se conoce como el **desarrollo del determinante por la columna** $j$ **de** $A$.

En terminos de cofactores:

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_{ij} \ , \text{ con } j \text{ fijo}$$

**Ejemplo**

Calcula, de la manera más conveniente, el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

**Resolución**

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} &= -3\,(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c}\text{por desarrollo del determinante por la columna 3} \\ \text{(por ser la más conveniente)}\end{array} \\
&\underset{c_1+3c_3}{\overset{\text{prop. 3}}{=}} 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 3\,(-1)\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c}\text{por desarrollo del determinante por la fila 1} \\ \text{(por ser la más conveniente)}\end{array} \\
&= -3\,[2 \cdot 4 - (-1)\,(-6)]
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

**Ejemplo**

Sean $A,\ B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $|A| = 2$ y $|B| = -1$. Calcula $|-2A \cdot B^t|$

**Resolución**

$$\begin{aligned} \left|-2A \cdot B^t\right| &= |-2A| \left|B^t\right| \\ &= (-2)^3 |A| |B| \\ &= -8 \cdot 2 \cdot (-1) \\ \therefore \left|-2A \cdot B^t\right| &= 16 \end{aligned}$$

**Ejemplo**
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Comprueba que $|A+B| \neq |A| + |B|$

**Resolución**

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Por otra parte

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

Luego $|A+B| \neq |A| + |B|$

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

**Teorema**
*Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $n > 1$.*

1) *La suma de los productos de los elementos de una fila de $A$ por los cofactores de los elementos correspondiente a otra fila es igual a cero.*

   *En símbolos:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{hj}\,\alpha_{ij} = 0, \quad \textit{con } h \neq i$$

*2) La suma de los productos de los elementos de una columna de $A$ por los cofactores de los elementos correspondiente a otra columna es igual a cero.*

*En símbolos:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ih}\,\alpha_{ij} = 0, \ \ \textit{con } h \neq j$$

**Ejemplo**

Verifica el teorema anterior usando los elementos de la fila 1 y los cofactores de la fila 2 de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\,\alpha_{2j} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$$