Trabajo Práctico 2

1) Sea $(W, +, \mathbb{R}, \cdot)$ espacio vectorial siendo W el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^3$ pertenecientes a la recta de ecuación $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

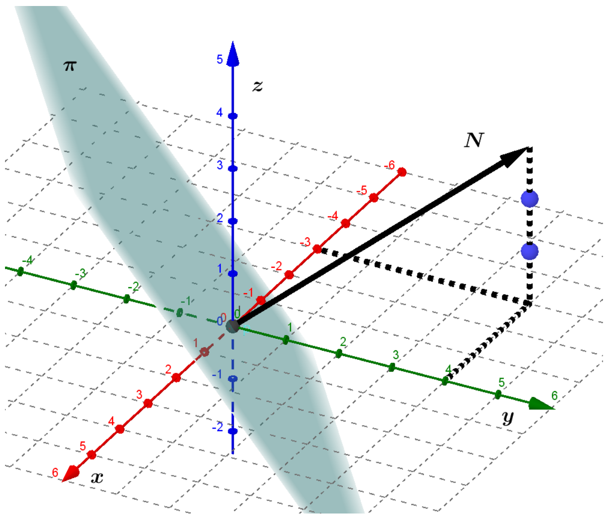
   a) Escribe la definición de W en lenguaje simbólico.

   b) Determina cuáles de los siguientes conjuntos son generadores de W (usa consecuencias de la definición cuando sea posible):

      i) $G_1 = \{(1, -1, 3)\}$
      ii) $G_2 = \{(-2, 2, -6), (1, -1, 3)\}$
      iii) $G_3 = \{(1, -1, 3), (0, 1, 2)\}$
      iv) $G_4 = \{(1, 0, 1)\}$

   c) ¿Qué representa geométricamente el vector $v \in G_1$ para la recta dada? ¿Todos los generadores tienen igual cantidad de elementos?

2) Dado $(W, +, \mathbb{R}, \cdot)$ espacio vectorial, siendo W el plano π de la imagen:



   a) Escribe la definición de W en lenguaje simbólico

   b) Determina cuáles de los siguientes conjuntos son generadores de W (usa consecuencias de la definición cuando sea posible):

      i) $G_1 = \{(1, 0, 1), (0, 3, -4)\}$
      ii) $G_2 = \{(0, 0, 1), (-1, 0, -3)\}$
      iii) $G_3 = \left\{(1, 0, 1), (0, 3, -4), \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)\right\}$
      iv) $G_4 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, -1)\}$

   c) En base a lo realizado en el apartado anterior:¿Cuál es la cantidad mínima de vectores necesaria para generar un plano en $\mathbb{R}^3$?

   d) Calcula el producto vectorial de los vectores v_1 y $v_2 \in G_1$.¿Qué representa geométricamente para el plano el vector $v_1 \times v_2$?

e) Interpreta geométricamente al $\langle G_4 \rangle$ y explica su posición relativa respecto al plano π.

3) Considerando $K = \mathbb{R}$, determina, en cada caso, si S es un conjunto generador del espacio vectorial V :

a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, siendo $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$

b) $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (-2, -1, 0)\}$, siendo $V = \mathbb{R}^3$

c) $S = \{(1, -1)\}$ siendo V la primera bisectriz.

d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, siendo V el conjunto de las matrices diagonales de orden 2 con elementos reales.

4) Dado $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ espacio vectorial, determina, en cada caso, si el conjunto S es generador del espacio vectorial V. En caso negativo, halla (si es posible) el subespacio $W \subset V$ generado por S.

a) V es el conjunto de las matrices de traza nula de orden 2 y elementos reales.

i) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) $V = \mathbb{C}$

i) $S = \left\{1 - i\,\sqrt{3}, -1 + i\,\sqrt{3}\right\} \subset \mathbb{C}$

ii) $S = \{1, -1 + i\,\} \subset \mathbb{C}$

iii) $S = \{1, -1 + i\,, 0\} \subset \mathbb{C}$

c) $V \subset \mathbb{R}^3$ es el conjunto de los puntos del plano de ecuación $x + y + 2z = 0$

i) $S = \{(0, -4, 2), (0, -2, 1)\}$

ii) $S = \{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$

iii) $S = \left\{(2, 0, -1), (0, 0, 0), \left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Interpreta geométricamente los subespacios generados por cada conjunto S.

d) $V \subset \mathbb{R}^{4\times 1}$ es el conjunto de las soluciones del sistema $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 3z + t = 0 \end{cases}$

i) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

5) Determina si S es linealmente dependiente o independiente en el espacio vectorial V.

a) Si $V = \mathbb{R}^3$:

i) $S = \{(1,-2,1),(2,-1,-1)\}$

ii) $S = \{(1,-2,1),(2,-1,-1),(1,0,0)\}$

iii) $S = \{(1,-2,1),(2,-1,-1),(1,1,-2)\}$

iv) $S = \{(1,0,0),(0,0,0)\}$

b) Si $V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \; / \; \langle A\rangle_{21} = 0\}$:

i) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

iv) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) Si $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ y S es el conjunto formado por las columnas de la matriz A :

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

d) Si V es el conjunto solución del sistema homogéneo $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$

i) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

6) Determina (usando determinante) los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el conjunto:

a) $S = \{(1,1,1),(a,-1,2),(a^2,1,4)\}$ sea linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$.

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\}$ sea linealmente dependiente en $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

c) S formado por las filas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{pmatrix}$ sea linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$.