Trabajo Práctico 3

1. Dados $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ espacios vectoriales y α y β bases de V:

   a) Determine las coordenadas del vector $v \in V$ en la base α. Grafique v como combinación lineal de los elementos de α.

   b) Determine las coordenadas del vector $v \in V$ en la base β. Grafique v como combinación lineal de los elementos de β.

   i) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha = \{(0,-1), (1,2)\}$ y $\beta = \{(1,0), (0,1)\}, v = (-1,2)$

   ii) $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha = \{(-1,1,1), (0,0,1), (1,1,0)\}$ y $\beta = \{(-1,1,0), (2,0,1), (-1,-2,-1)\}$, $v = (-1,0,3)$

2. Determine una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales:

a) $(\mathbb{R}^{2\times 3}, +, \mathbb{R}, .)$ b) $(\mathbb{C}^2, +, \mathbb{R}, .)$ c) $(\mathbb{C}^2, +, \mathbb{C}, .)$

3. Dados los espacios vectoriales del TP2:

   a) ¿Cuál/es de los conjuntos generadores del espacio vectorial W del problema 2 son base de W? Justifica adecuadamente.

   b) ¿Cuál/es de los conjuntos generadores del espacio vectorial V del problema 4b son base de V? Justifica adecuadamente.

4. Dados los espacios vectoriales del TP2:

   a) ¿Cuál/es de los conjuntos l.i. del espacio vectorial V del problema 5b son base de V? Justifica adecuadamente.

   b) ¿Cuál/es de los conjuntos l.i. del espacio vectorial V del problema 5d son base de V? Justifica adecuadamente.

5. En cada caso determine si el conjunto S es base del espacio vectorial $(V, +, \mathbb{R}, .)$:

   a) $V = \mathbb{R}^2$

   i) $S = \{(-1,2), (2,-3)\}$ En caso afirmativo, calcula $[(-5,8)]_S$.

   ii) $S = \{(2,1), (-4,-2)\}$

   iii) $S = \{(1,1), (1,-1)\}$ En caso afirmativo, calcula $[(2,2)]_S$.

   iv) $S = \{(-1,-1), (0,1), (-1,0)\}$

   b) $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$

   i) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. En caso afirmativo, calcula $\left[\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right]_S$

6. Determine en cada caso, si el conjunto $S = \{(1,1), (1,0), (0,i), (i,i)\}$ es base del espacio vectorial $(\mathbb{C}^2, +, \mathbb{K}, .)$. En caso afirmativo dé las coordenadas del vector $(4+i, 2-2i)$:

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

7. Determine si el conjunto S es base del espacio vectorial $(W, +, \mathbb{R}, .)$:

   a) $S = \{(1,0,5), (2,-1,3)\}$ y $W = \{(x, y, 5x+7y) \in \mathbb{R}^3\}$. En caso afirmativo, determine la dimensión de W y dé otra base para el espacio vectorial.

   b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} y-t & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \right\}$. En caso negativo determine una base y la dimensión de W.

   c) $S = \{(-1,i), (i,1)\}$ y $W = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 = iz_2\}$.

8. Determine si el conjunto S es base del espacio vectorial $(W, +, \mathbb{C}, .)$:

   a) $S = \{(-1,i), (i,1)\}$ y $W = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 = iz_2\}$.

   b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} y-t & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : z = 0 \right\}$. En caso afirmativo, diga cual es la dimensión de W y dé otra base para dicho espacio vectorial.

9. Determine $a, b \in \mathbb{R}$ para que el conjunto S sea base de V :

   a) $S = \{(2,a,3), (0,1,0), (2b, 0, 3b+1)\}, V = \mathbb{R}^3$

   b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^{2x2}$

   c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, V = \left\{ X \in \mathbb{R}^{4\times 1} : A \cdot X = \theta, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$