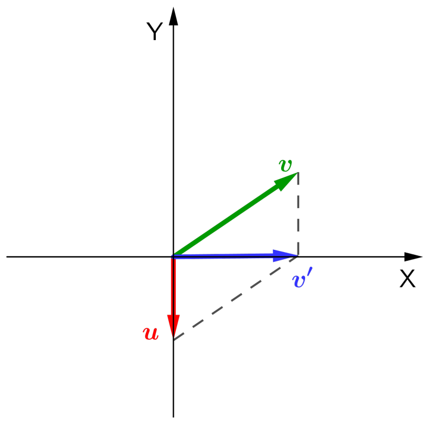
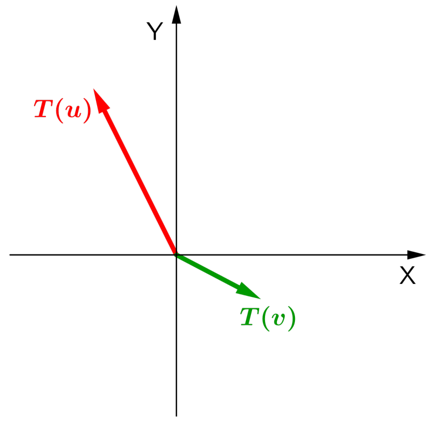
Trabajo Práctico 1 - Transformaciones Lineales

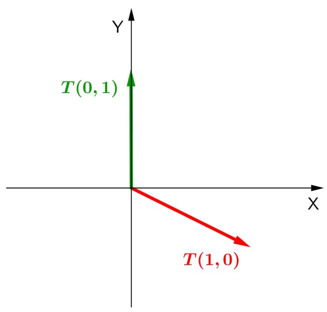
1) Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal:

   a) Dados los vectores $u, v, v' \in \mathbb{R}^2$ representa en el sistema de coordenadas de la derecha el transformado del vector $v' \in \mathbb{R}^2$.





   b) Dados los vectores $T(1,0)$ y $T(0,1)$ del sistema de coordenadas, representa gráficamente el transformado de los vectores $u = (2,1)$ y $v = (-1,-2)$



2) Dadas las siguientes transformaciones lineales determina, en cada caso, la imagen del vector v', sabiendo que:

   a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (-1,1,1)$, $T(0,1) = (0,1,-1)$ y $v' = (3,1) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $T:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = (-3,6)$, $T(v) = (5,-1)$ y $v' = \frac{2}{3}u - 2v \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

   c) $T:\mathbb{C}^{2\times 1} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tal que $T(u) = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T(v) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ y $v' = 4v - 3iu \in \mathbb{C}^{2\times 1}$.

3) Dados los vectores $u = (1,3)\,, v = (-2,1) \in \mathbb{R}^2$ y las funciones:

   $T_1:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_1(x,y) = (x,-y)$

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_2\,(x, y) = (x - 1, y)$

$T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_3\,(x, y) = (x, x^2)$

a) Representa los vectores u y v en un sistema de coordenadas, calcula gráfica y analíticamente los vectores $u + v$ y $3v$

b) Para cada una de las funciones dadas, completa las siguientes tablas calculando el transformado de los vectores indicados:

$T_1\,(u)$	$T_1\,(v)$	$T_1\,(3u)$	$3\,T_1\,(u)$	$T_1\,(u+v)$	$T_1\,(u) + T_1\,(v)$	$T_1\,(\theta)$

$T_2\,(u)$	$T_2\,(v)$	$T_2\,(3u)$	$3\,T_2\,(u)$	$T_2\,(u+v)$	$T_2\,(u) + T_2\,(v)$	$T_2\,(\theta)$

$T_3\,(u)$	$T_3\,(v)$	$T_3\,(3u)$	$3\,T_3\,(u)$	$T_3\,(u+v)$	$T_3\,(u) + T_3\,(v)$	$T_3\,(\theta)$

c) Grafica los vectores obtenidos en el apartado anterior usando un sistema de coordenadas diferentes para cada tabla.

d) Usa los enlaces T_1 , T_2 , T_3 para analizar si las funciones T_1, T_2, T_3 preservan las operaciones suma y producto por escalar. Identifica cuales de ellas no son transformaciones lineales.

e) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, completa los siguientes enunciados con: “$=$” “$\neq$” “si” “no”

i) $T_2\,(0, 0) \ldots (0, 0) \Rightarrow T_2 \ldots..$ es transformación lineal

ii) $T_3\,(0, 0) \ldots (0, 0) \wedge T_3\,(u) + T_3\,(v) \ldots T_3\,(u + v) \Rightarrow T_3 \ldots..$ es transformación lineal

4) Determina, en caso de existir, una transformación lineal

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times1}$ tal que

i) $T\,(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, T\,(2, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, T\,(-2, -1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

ii) $T\,(2, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, T\,(-2, -1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, T\,(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 2, -1)\,,\ T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, -1)\,,$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2,1,1) \text{ y } T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1,-2,0)$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, tal que

i) $T(1,1) = 2+i$, $T(-1,1) = -2+i$

ii) $T(1,1) = 2+i$, $T(2,2) = 4+2i$

5) Dadas $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales:

- $F(1,-1) = (0,-1,2)$ y $F(2,1) = (3,1,1)$
- $T(1,1) = (2,1,-1)$ y $T(1,3) = (6,1,-3)$
- $H(1,0) = (1,0,1)$ y $H(0,1) = (1,1,-1)$

Determina si:

a) $F = T$ b) $F = H$

6) Determina núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, tal que $T(x,y) = (x+y, iy, x+2y)$, donde los espacios vectoriales son complejos.

c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z,t) = (x+y+t, -x+z-t)$

7) Dada la transformación lineal

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x+2y, 3z-x-y)$.
Determina:

i) $\mathrm{Nu}(T)$, una base para el mismo e interpreta geométricamente dicho subespacio.

ii) $\dim \mathrm{Im}(T)$, sin hallar explícitamente el subespacio imagen.

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$ definida por $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$

Determina:

i) $\mathrm{Im}(T)$, una base para el mismo.

ii) $\dim \mathrm{Nu}(T)$, sin hallar explícitamente el subespacio núcleo.

iii) ¿$(0,1,0) \in \mathrm{Nu}(T)$? Interpreta geométricamente el subespacio $\mathrm{Nu}(T)$.

8) Dada $T : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$ transformación lineal definida por $T(X) = A \cdot X$. Para

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & k-4 \\ 2 & k-3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina

i) $k \in \mathbb{R}$ para que $\mathrm{Nu}(T) = \{\theta\}$

ii) $t \in \mathbb{R}$ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$, siendo $k = 5$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2+k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina $k \in \mathbb{R}$ para que $\mathrm{Nu}(T) \neq \{\theta\}$

9) En septiembre de 2020 la proporción de infectados por COVID-19 en la provincia de Tucumán según sintomatología y lugar de aislamiento estaba dada por la siguiente tabla:

	Asintomáticos	Sintomáticos
sala	$0,3$	$0,8$
UTI	0	$0,2$
C.A.C.	$0,7$	0

UTI: unidad de terapia intensiva

C.A.C.: centro de aislamiento comunitario

Si $T : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ es la transformación lineal definida por $T(X) = A \cdot X$, donde A es la matriz de proporción de infectados (dada por la tabla anterior) y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ representa la cantidad de infectados en la provincia, donde x son los asíntomáticos e y los sintomáticos

a) ¿Qué representa la imagen del vector X?

b) Si hubieran 320 pacientes asintomáticos y 40 sintomáticos ¿Cuántos pacientes estarían internados en salas, en C.A.C. y en UTI en ese momento?

c) Si en ese momento Tucumán disponía de 1528 camas en sala, 277 camas en UTI y 980 camas en C.A.C ¿Cuál es el número de infectados sintomáticos y asintomáticos que se podían atender?