Espacios Vectoriales - Parte 3

En esta última parte de la unidad definiremos el concepto de base de un espacio vectorial, el cual agrupa los conceptos ya estudiados de generador y conjunto linealmente independiente.

Definición (Base de un E.V.)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V*, $V \neq \{\theta\}$ *y* $S \subset V$.

$$S \text{ es una } \textbf{base} \text{ de } V \Leftrightarrow \begin{cases} S \text{ es } \textbf{l.i.} \\ S \text{ es } \textbf{generador} \text{ de } V \end{cases}$$

Ejemplo

Sea $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. Determina si los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}^2$

1. $S = \{(1, 0), (-1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$

2. $S = \{(1, 0), (-1, 1), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$

3. $S = \{(1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$

Resolución

1. Sea $S = \{(1, 0), (-1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Queremos determinar si S es base de $\mathbb{R}^2$ es decir, si S es l.i y generador de $\mathbb{R}^2$

   Llamemos $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (-1, 1)$

   - ¿S es l.i.?
     Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz cuyas filas están formadas por las componentes de los vectores v_1 y v_2

     Por teorema sabemos que:

     $$S \text{ es l.i.} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

     Calculemos entonces el determinante de A

     $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow S$ es l.i.

- ¿S es generador de $\mathbb{R}^2$?

  Por definición de generador:

  $$S \text{ es generador de } \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

  Sea $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ¿$\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$?

  Trabajemos con la igualdad:

  $$\begin{aligned} (x, y) &= \lambda_1 (1, 0) + \lambda_2 (-1, 1) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2) \end{aligned}$$

  Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^2$ se tiene que: $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y \end{cases}$

  Resolviendo el sistema de forma matricial, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

  $$(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & \boxed{1} & y \end{array}\right) \underset{f_1 + 1 f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x + y \\ 0 & 1 & y \end{array}\right)$$

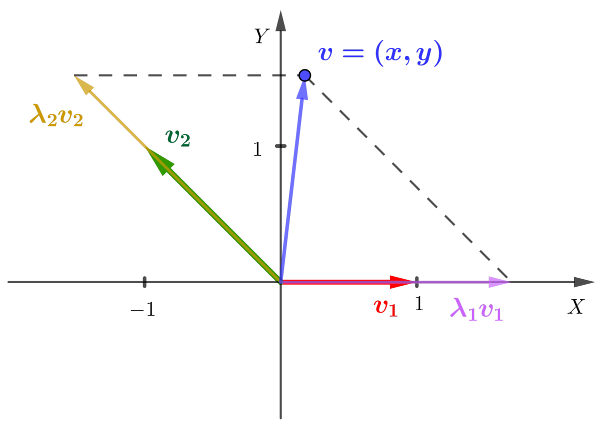
  $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

  $$rg\,(A) = rg\,(A\,|B\,) = 2 \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow} \text{el sistema es compatible (tiene solución)}$$

  Por lo tanto, $\forall v = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1 = x + y, \lambda_2 = y \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

  Entonces, S genera $\mathbb{R}^2$

Luego, como S es l.i. y generador de $\mathbb{R}^2$, S es base de $\mathbb{R}^2$



Respuesta: S es base de $\mathbb{R}^2$

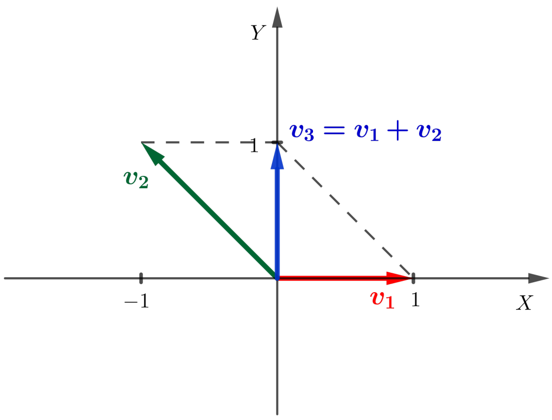
2. Sea $S = \{(1,0), (-1,1), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Queremos determinar si S es base de $\mathbb{R}^2$ es decir, si S es l.i y generador de $\mathbb{R}^2$

   Llamemos $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (-1,1)$ y $v_3 = (0,1)$

   ¿S es l.i.?

   Como $v_3 = v_1 + v_2$, v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2. Entonces, por consecuencias de la definición de l.i. y l.d., S es l.d.

   Luego S no es l.i

   Respuesta: S **no** es base de $\mathbb{R}^2$

3. Sea $S = \{(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Queremos determinar si S es base de $\mathbb{R}^2$ es decir, si S es l.i y generador en $\mathbb{R}^2$

   - S es l.i. por ser un conjunto unitario cuyo elemento es no nulo
   - ¿S es generador de $\mathbb{R}^2$?

     Por definición de generador:

     $$S \text{ es generador de } \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 (1,0)$$

     Sea $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ¿$\exists\ \lambda_1 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 (1,0)$?

     Trabajemos con la igualdad:

     $$\begin{aligned} (x,y) &= \lambda_1 (1,0) \\ &= (\lambda_1, 0) \end{aligned}$$

     Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^2$ se tiene que: $\begin{cases} \lambda_1 = x \\ 0 = y \end{cases}$

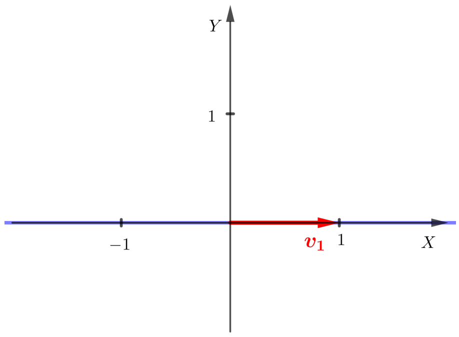
Resolviendo el sistema de forma matricial, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y \end{array}\right)$$

el sistema es compatible $\overset{\text{por R-F}}{\Leftrightarrow}$ $rg\,(A) = rg\,(A\,|B\,) = 1 \Leftrightarrow y = 0$

Luego S no genera $\mathbb{R}^2$.

Respuesta: S **no** es base de $\mathbb{R}^2$



Definición (E.V. de dimensión finita)

*Sea $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V., con $V \neq \{\theta\}$. Se dice que V es un E.V. de **dimensión finita** si tiene al menos una base finita. Es decir, si V es generado por un número finito de vectores l.i.*

Observación

En ésta asignatura sólo estudiaremos espacios vectoriales de dimensión finita.

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**. Éste nos asegura que de todo conjunto generador de un E.V. no nulo, se puede extraer una base para el espacio.

Teorema

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V, con $V \neq \{\theta\}$ y $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$.

S generador de $V \Rightarrow \exists\ S' \subset S : S'$ es l.i. y S' genera V

El siguiente teorema que se acepta **sin demostración** nos garantiza la existencia de alguna base en un espacio vectorial dado.

Teorema (Existencia de bases en un E.V.)

Todo espacio vectorial $V \neq \{\theta\}$ tiene al menos una base.

El siguiente teorema nos asegura que todo vector de un E.V. se expresa de manera única como combinación lineal de los elementos de una base del espacio.

Teorema (Condición necesaria y suficiente para base)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V, con* $V \neq \{\theta\}$ *y* $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$.

$$S \textit{ es una base de } V \Leftrightarrow \forall v \in V, \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$$

La n-úpla $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *representa las* ***coordenadas*** *de* $v \in V$ *respecto de la base* S*, que se denota*

$$[v]_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$$

Demostración

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V, $V \neq \{\theta\}$ y $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$.

($\Rightarrow$) Queremos probar que

$$S \text{ es una base de } V \Rightarrow \forall v \in V,\ \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$$

Por hipótesis S es base de V. Entonces, por definición de base, S es l.i. y generador de V.

Por ser S generador de V:

$$\forall v \in V, \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \quad (1)$$

Tenemos garantizada ya la existencia de los escalares, sólo resta probar la unicidad de los mismos. Para ello supongamos que existen otros escalares, es decir:

$$\forall v \in V,\ \exists\, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, v_i \quad (2)$$

Por ser V espacio vectorial, de (1) y (2) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, v_i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, v_i &= \theta \\ \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\ v_i &= \theta \quad (3) \end{aligned}$$

Como por hipótesis S es l.i:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\, v_i = \theta \quad &\Rightarrow \quad \forall i = 1, \cdots, n,\ \lambda_i - \mu_i = 0 \text{ solución única} \\ &\Rightarrow \quad \forall i = 1, \cdots, n,\ \lambda_i = \mu_i\end{aligned}$$

Es decir, los escalares son únicos. Por lo tanto hemos probado que:

$$S \text{ es una base de } V \Rightarrow \forall v \in V,\ \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$$

($\Leftarrow$) Queremos probar que

$$\forall v \in V,\ \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \Rightarrow S \text{ es una base de } V$$

Por hipótesis

$$\forall v \in V,\ \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \qquad (3)$$

Por lo tanto, cada elemento de V se escribe de manera única como combinación lineal de los elementos de S

Debemos probar que S es base de V, es decir que S es l.i. y generador de V.

Por (3) tenemos garantizado que S es generador de V pues

$$\forall v \in V,\ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$$

Resta probar que S es l.i, es decir se debe probar que:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i\, v_i = \theta \Rightarrow \forall i = 1, \cdots, n,\ \mu_i = 0 \text{ solución única}$$

Trabajemos entonces con la combinación lineal:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i\, v_i = \theta \qquad (4)$$

Por ser θ neutro en V y por consecuencia 1) de E.V., se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} 0\, v_i = \theta \qquad (5)$$

Entonces, de (4) y (5):

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \, v_i = \theta \Rightarrow \forall i = 1, \cdots, n, \; \mu_i = 0 \text{ solución única}$$

pues, por (3), θ se escribe de manera única como combinación lineal de los elementos de S y la única combinación del nulo es la trivial. Por lo tanto, S es l.i.

Luego, S es una base de V

Hemos probado que:

$$\forall v \in V, \exists ! \; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i \Rightarrow S \text{ es una base de } V$$

$\blacksquare$

Observación

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V., $V \neq \{\theta\}$, $\;S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de V :

1. Las coordenadas de $v \in V$ están **bien definidas** pues:

   Dado $v \in V$ quedan unívocamente determinados los escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i$

   Recíprocamente:

   Dados $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ queda unívocamente determinado el vector $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i$

2. Toda base en un E.V. de dimensión finita determina un **sistema de coordenadas**. Los ejes coordenados son los subespacios generados por cada vector de la base

3. Las coordenadas de $v \in V$ dependen de la base y del orden de sus elementos.

4. Cuando se dice que $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de V, no sólo estamos dando un conjunto sino además una ordenación para los elementos de dicho conjunto.

Ejemplo

Sea $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. Determina si S es base de $\mathbb{R}^3$, con $S = \{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. En caso afirmativo halla las coordenadas de $(1, -1, 0)$ respecto de S

Resolución

Sea $S = \{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Llamemos $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$

Por la condición necesaria y suficiente para base:

$$S \text{ es base de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \forall v \in V, \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, v_i$$

Veamos si un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar de manera **única** como combinación lineal de los elementos de S

Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ¿$\exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \lambda_3\, v_3$?

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \lambda_1\,(1, 0, -1) + \lambda_2\,(2, 1, 0) + \lambda_3\,(0, 0, 1) \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_3) \end{aligned}$$

Entonces por igualdad de vectores en $\mathbb{R}^3$, se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = z \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de forma matricial, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & 0 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \underset{f_1+(-2)f_2}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & x-2y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3+1f_1}{\sim_f} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-2y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x-2y+z \end{array}\right)$$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$rg\,(A) = rg\,(A\,|B\,) = 3 = \text{n}^o \text{ de incognitas} \overset{\text{por R-F}}{\Rightarrow} \text{ el sistema es compatible determinado}$$

(tiene solución única)

$\therefore\ \forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \exists!\ \lambda_1 = x - 2y, \lambda_2 = y, \lambda_3 = x - 2y + z \in \mathbb{R} : v = \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \lambda_3\, v_3$

Luego por condición necesaria y suficiente para base, S es base de $\mathbb{R}^3$

Además

$$[(x, y, z)]_S = \begin{pmatrix} x-2y \\ y \\ x-2y+z \end{pmatrix}, \text{ entonces } [(1, -1, 0)]_S = \begin{pmatrix} 1-2\,(-1) \\ -1 \\ 1-2\,(-1)+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Respuesta: S es base de $\mathbb{R}^3$ y $[(1, -1, 0)]_S = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ejemplo

Sea $(W, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V, con $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x-y & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$. Determina si S es base de W, siendo $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. En caso negativo encuentra una base del mismo.

Resolución

Sea $(W, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V, con $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x-y & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$

- Analicemos si $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de W

  Nos preguntamos ¿$S \subset W$?

  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ pues $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0-2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $S \not\subset W$

  Luego, S **no** es base de W.

- Encontremos una base para W

  Sea $w = \begin{pmatrix} x & y \\ x-y & 0 \end{pmatrix} \in W$:

  $$w = \begin{pmatrix} x & y \\ x-y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  $\therefore\ \forall w = \begin{pmatrix} x & y \\ x-y & 0 \end{pmatrix} \in W$, $\exists!\ \lambda_1 = x, \lambda_2 = y \in \mathbb{R}$:

  $$\begin{pmatrix} x & y \\ x-y & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Luego, por la condición necesaria y suficiente para base, S_1 es base de W donde

  $$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset W$$

Respuesta: S **no** es base de W y S_1 es base de W

Definición (Cardinal de un conjunto)

*Sea S un conjunto finito. Se llama **cardinal** de S a la cantidad de elementos de S y se denota $\#S$.*

Por ejemplo, si $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ entonces $\#S = n \in \mathbb{N}$

El siguiente teorema, que se acepta **sin demostración**, nos asegura que en todo espacio vectorial de dimensión finita el cardinal de un conjunto l.i. no puede superar el cardinal de una base.

Teorema

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V de dimensión finita y S una base de V tal que $\#S = n$

Entonces todo subconjunto l.i. de V es finito y no tiene más de n elementos.

Equivalentemente

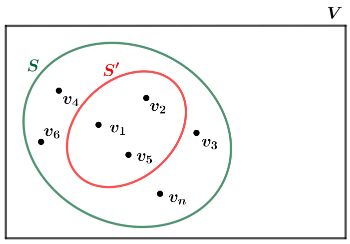
Todo subconjunto finito de V que tiene más de n elementos es l.d.

Observación

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V., $V \neq \{\theta\}$, $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ y $v \in V$

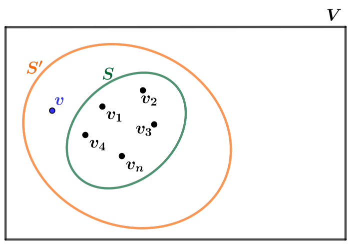
1. $\begin{cases} S \textbf{ generador} \text{ de } V \\ S \textbf{ l.d.} \end{cases} \Rightarrow \exists\, S' \subset S : \begin{cases} S' \textbf{ generador} \text{ de } V \\ S' \textbf{ l.i.} \end{cases}$

   $\Rightarrow \exists\, S' \subset S : S'$ es **base** de V



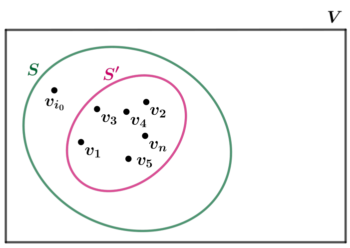
2. S es **base** de$V$ $\Rightarrow$ $S' = S \cup \{v\} \subset V : \begin{cases} S' \textbf{ generador} \text{ de } V \\ S' \textbf{ l.d.} \end{cases}$

   Una base es **maximal** respecto a la condición **l.i.**



3. S es **base** de V $\Rightarrow$ $S' = S - \{v_{i_0}\} \subset V : \begin{cases} S' \textbf{ no genera } V \\ S' \textbf{ l.i.} \end{cases}$ con $1 \leq i_0 \leq n$

   Una base es **mínimal** respecto a la condición de **generador**



Teorema

Todas las bases de un E.V. de dimensión finita tienen el mismo número de elementos.

Demostración

Sea $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$ E.V. de dimensión finita. Sean $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ y $S'=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ dos bases de V, queremos probar que tienen el mismo cardinal, es decir que $n=m$

Como S y S' son bases de V entonces S y S' son l.i.

$$\left\{\begin{array}{l} S \text{ base de } V \\ S' \text{ l.i.}\end{array}\right. \underset{\text{anterior}}{\overset{\text{por Teorema}}{\Rightarrow}} m\le n \quad (1)$$

pues el cardinal del conjunto S' l.i. no puede superar al cardinal de la base S

Análogamente

$$\left\{\begin{array}{l} S' \text{ base de } V \\ S \text{ l.i.}\end{array}\right. \underset{\text{anterior}}{\overset{\text{por Teorema}}{\Rightarrow}} n\le m \quad (2)$$

pues el cardinal del conjunto S l.i. no puede superar al cardinal de la base S'

Luego, de (1) y (2), se tiene que $n=m$.

Es decir todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de elementos. ∎

El teorema anterior nos permite dar la siguiente definición.

Definición (Dimensión de un E.V.)

Sea $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$ *E.V.*

- *Si* $V\neq\{\theta\}$ *y* V *tiene dimensión finita, se define la* ***dimensión*** *de* V *al cardinal (nº de elementos) de cualquier base de* V *y se denota como* $\dim_{\mathbb{K}} V$.
- *Si* $V=\{\theta\}$, *se define* $\dim_{\mathbb{K}} V=0$

Observación

Sean $(V,+,\mathbb{K},\cdot)$ E.V. y $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ base de V, entonces

$$\dim_{\mathbb{K}} V=n\in\mathbb{N}$$

y se dice que V es un E.V. de dimensión n sobre $\mathbb{K}$.

Cuando este claro el campo $\mathbb{K}$ simplemente se escribe $\dim V=n$.

Ejemplo

Sea $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. Determina una base y la dimensión de $\mathbb{R}^2$.

Resolución:

Determinemos una base de $\mathbb{R}^2$:

Sea $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} v &= (x, y) = (x, 0) + (0, y) \\ &= x\,(1, 0) + y\,(0, 1) \end{aligned}$$

$\therefore\ \forall v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\,!\,\lambda_1 = x, \lambda_2 = y \in \mathbb{R} : v = (x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1)$

Luego, por la condición necesaria y suficiente para base, $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ que se conoce como **base canónica** de $\mathbb{R}^2$ y $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Respuesta

$$\begin{aligned} S &= \{(1, 0), (0, 1)\} \ \textbf{base canónica} \text{ de } \mathbb{R}^2 \\ &\dim \mathbb{R}^2 = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. Determina una base y la dimensión de $\mathbb{R}^3$.

Resolución:

Determinemos una base de $\mathbb{R}^3$:

Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} v &= (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1) \end{aligned}$$

$\therefore\ \forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists\,!\,\lambda_1 = x, \lambda_2 = y, \lambda_3 = z \in \mathbb{R}$:

$$v = (x, y, z) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1)$$

Luego, por la condición necesaria y suficiente para base, $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ que se conoce como **base canónica** de $\mathbb{R}^3$ y $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Respuesta

$$\begin{aligned} S &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \ \textbf{base canónica} \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ &\dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{aligned}$$

El siguiente teorema se acepta **sin demostración.**

Teorema

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V.* , $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ *y* $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *S es una base de V*
2. *S es l.i.*
3. *S es generador de V*

Observación

Si queremos probar que un conjunto S de cardinal n es base de un E.V. de **dimensión conocida** n, alcanza con probar una de las dos condiciones que definen una base: S es l.i. o S es generador de V

Ejemplo

Sea $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V. Determina si los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}^3$

1. $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$
2. $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (0, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$
3. $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$

Resolución:

Sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ pues $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$

1. Veamos si $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

   Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \#S = 4$ entonces S no es base de $\mathbb{R}^3$ pues todas las bases de $\mathbb{R}^3$ deben tener el mismo número de elementos, o sea 3.

   Respuesta: S **no** es base de $\mathbb{R}^3$

2. ¿$S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (0, -1, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$?

   Como $\dim \mathbb{R}^3 = \#S = 3$, para probar que S es base de $\mathbb{R}^3$ alcanza con probar que S es l.i. (por el teorema anterior)

   ¿S es l.i.?

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz cuyas filas están formadas por las componentes de los vectores de S

Por teorema sabemos que:

$$S \text{ es l.i.} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Calculemos entonces el determinante de A

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{desarrollo del det. por la columna 1} \\ &= 1 + 1 = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

$\therefore S$ es l.i.

Luego, como S es l.i. y $\dim \mathbb{R}^3 = \#S = 3$, por el teorema anterior, concluimos que S es base de $\mathbb{R}^3$

Respuesta: S es base de $\mathbb{R}^3$

3. ¿$S = \{(1, 0, -1)\,, (0, 1, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$?
   Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \#S = 2$ entonces S no es base de $\mathbb{R}^3$ pues todas las bases de $\mathbb{R}^3$ deben tener el mismo número de elementos.

   Respuesta: S **no** es base de $\mathbb{R}^3$

El siguiente teorema se acepta sin demostración.

Teorema

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V de dimensión finita y W subespacio de V. Entonces

1. *W tiene dimensión finita y* $\dim W \leq \dim V$

2. $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$

3. $W = \{\theta_V\} \Leftrightarrow \dim W = 0$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. *A es inversible*
2. $A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n}$
3. *A es producto de un número finito de matrices elementales*
4. $rg\,(A) = n$
5. *$A \cdot X = \Theta_{n\times 1}$ es compatible determinado*
6. *$A \cdot X = B$ es compatible determinado $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$*
7. $D\,(A) \neq 0$
8. *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
9. *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es generador de $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
10. *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es l.i. en $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
11. *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es una base de $\mathbb{K}^{1\times n}$*
12. *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es generador de $\mathbb{K}^{1\times n}$*
13. *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es l.i. en $\mathbb{K}^{1\times n}$*

NOTAR QUE: estos resultados fueron justificados a lo largo de las 4 primeras unidades.