Trabajo Práctico 2

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Determina, cuando sea posible, las siguientes matrices:

$A \cdot B$, $B \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot A$, $A \cdot C$, $B \cdot (A \cdot 3\,C^2)$, $A \cdot \mathbb{I}_{2\times 2}$, $\mathbb{I}_{3\times 3} \cdot A$

2) Dadas las matrices

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$

Determina, en caso de ser posible, en cada apartado:

i) las matrices $A^{(i)}$ (filas de A) y B_j (columnas de B).

ii) $\langle A \cdot B \rangle_{32}$ y $\langle A \cdot B \rangle_{23}$

iii) $(A \cdot B)_3$ y $(A \cdot B)_4$

iv) $(A \cdot B)^{(2)}$ y $(A \cdot B)^{(3)}$

3) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina x , $y \in \mathbb{R}$ tales que

$A^2 + x\ A + y\ \mathbb{I}_{3\times 3} = \theta$

4) Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A \cdot X = \Theta_{2\times 2}$ siendo $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

b) $X \cdot A = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

c) $A \cdot X = B$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ y X matriz diagonal

d) $A \cdot X = B + 2C$ siendo $A = \left(\langle A \rangle_{ij} \right)$,con $\langle A \rangle_{ij} = i^2 - j : 1 \leq i, j \leq 2$;
$B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y X matriz triangular superior

Sugerencia para los ejercicios 5, 6 y 7: Todos los apartados de los problemas de aplicación tienen solución. Por lo tanto debes prestar especial atención al orden de las matrices que planteas de modo que se puedan realizar las operaciones que se solicitan en cada caso.

5) Tres personas (A, B y C) trabajan para una empresa que produce 3 tipos de productos electrónicos (P_1, P_2 y P_3). La empresa paga el trabajo por cada unidad realizada y, teniendo en cuenta el tipo de producto, los valores serán: \$100, \$200 y \$300 por cada unidad de P_1, P_2 y P_3, respectivamente.

Las matrices J, V y S representan las unidades producidas de cada producto por cada persona, durante los días jueves, viernes y sábado, respectivamente:

$$J = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \quad V = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \quad S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}$$

La matriz X representa el pago por cada unidad producida los días jueves y viernes: $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$.

La empresa paga un 10 % más por cada artículo producido en la jornada del día sábado.

a) Escriba la matriz Y de orden 3×1 que representa el pago por cada unidad producida en la jornada del sábado y calcula $S \cdot Y$.

b) ¿Cuánto cobra cada empleado el día sábado?

c) Calcula las siguientes matrices y explica su significado: $J \cdot X$, $V \cdot X$, $J + V$, $(J + V) \cdot X$, $S \cdot (Y - X)$

d) ¿Qué información adicional podemos obtener de la matriz S? ¿Qué representan $\operatorname{tr}(S)$ y $\operatorname{tr}\left(\frac{1}{3}S\right)$?

e) ¿Cuánto dinero paga la empresa por todos los artículos realizados en los tres días por las tres personas?

6) En una acería se producen 4 tipos de productos: perfiles, barras de acero, clavos y rollos de alambre. Para fabricar estos elementos se utilizan 3 tipos de materiales: hierro, carbón y

chatarra en diferentes proporciones. La siguiente tabla o matriz de insumos indica la cantidad de materia prima necesaria para producir cada unidad de producto.

	Perfiles	Barras	Clavos	Rollos de alambre
Hierro	3	4	1	3
Carbón	4	3	2	0
Chatarra	6	8	4	5

Si por mes se fabrican 12 unidades de perfiles, 8 unidades de barras, 10 unidades de clavos y 5 de rollos de alambre.

a) Determina explícitamente la matriz de insumos (I_m) para la producción de la acería.

b) Determina la matriz que describe la producción mensual de la fábrica (P_m).

c) Calcula la cantidad de cada materia prima necesaria para realizar la producción mensual. ¿Qué operación entre matrices usas?

d) Calcula la cantidad de materia prima que se necesita para realizar la producción anual.

7) Una empresa construye tres tipos de casas: A, B y C, en dos barrios privados "Los Troncos" y "Las Lilas ". Los materiales necesarios para construir las casas son: madera, ladrillos, hierro y chapas. Para realizar una casa del tipo A se necesitan 15 u de madera, 20 u de ladrillos, 10 u de hierro y 8 u de chapa; para una casa del tipo B se necesitan 20 u de madera, 25 u de ladrillos, 8 u de hierro y 12 u de chapas y para una casa del tipo C, 18 u de madera, 30 u de ladrillos, 12 u de hierro y 10 u de chapa.

a) Escribe dos matrices M que representen los materiales necesarios para construir cada tipo de casa. ¿De cuántas maneras diferentes se puede armar la matriz M?
De las matrices planteadas elige aquella donde las siguientes preguntas tengan solución

   i) ¿Qué representa el elemento $\langle M \rangle_{24}$?

   ii) ¿Qué representa la 3ra fila de la matriz M? ¿y la 4ta columna?

b) El barrio Los Troncos está compuesto por 8 casas del tipo A, 10 casas del tipo B y 5 casas del tipo C.

   i) Escribe una matriz T que represente los tipos de casas del barrio.

   ii) Determina la cantidad de materiales necesarios para construirlo.

c) El barrio Las Lilas consta de 10 casas del tipo A, 6 casas del tipo B y 4 casas del tipo C.

   i) Escribe una matriz S que represente los tipos de casas del barrio.

   ii) Determina la cantidad de materiales necesarios para construir el barrio.

d) ¿Cúantas casas de cada tipo construye la empresa en ambos barrios?

e) ¿Qué cantidad de materiales necesita la empresa para construir ambos barrios?

8) Dadas las matrices del ejercicio 1 determina, cuando sea posible: A^t , B^t , $(2A)^t$, $A \cdot A^t$, $B^t \cdot (-3A)^t$, $(A \cdot B)^t$, $C \cdot C^t$, $C^t \cdot C$, $B^t \cdot A$

9) Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A \cdot X - B = A^t$ siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

b) $A \cdot X - B^t = C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$,

$B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2\,i & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2\,i & -2\,i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

10) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina la matriz X tal que $X \cdot (A_3)^t = B$

11) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina la matriz diagonal X tal que $A \cdot X = (3B)^t$

12) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina x , $y \in \mathbb{R}$ para que la matriz $A^t \cdot B + C$ sea simétrica.

13) Dadas las matrices de elementos reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 50 - 5x^2 - 5x \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & x+1 \\ x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Determina $x \in \mathbb{R}$ para que la matriz $C \cdot A - B^t$ sea antisimétrica.

14) Dadas las matrices de elementos reales $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determina la matriz X antisimétrica tal que $X \cdot A - C^t = 3B$.