Valores y vectores propios

En esta última unidad nos concentraremos en las matrices cuadradas, estudiando sus valores y vectores propios. Determinaremos que vectores no nulos son transformados por la multiplicación de una matriz cuadrada en múltiplos de sí mismos.

Definición (Valor y vector propio de una matriz)

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se dice que:

$$\lambda \textit{ es un } \textbf{\textit{valor propio}} \textit{ de } A \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathbb{K}^{n\times 1},\ X \neq \theta : A \cdot X = \lambda\, X$$

*Todo vector $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, $X \neq \theta : A \cdot X = \lambda\, X$ es **vector propio** de A asociado al valor propio λ*

Observación

1) En la definición se **excluye** al vector nulo $\theta \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ como vector propio de A pues $A \cdot \theta = \lambda\, \theta,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

2) Los valores y vectores propios también se conocen como valores y vectores característicos o autovalores y autovectores.

3) Todo autovalor de una matriz tiene asociado al menos un autovector.

Resulta sencillo determinar si un vector no nulo dado es o no un vector propio de una matriz como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Determina si $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ son vectores propios de A. En caso afirmativo, identifica cual es el valor propio asociado.

Resolución:

Para cada uno de los vectores dados debemos verificar, por la definición de vector propio, si $A \cdot X = \lambda\, X$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\, X_1$$

$$A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Respuesta:

X_1 es vector propio de A asociado al valor propio $2 \in \mathbb{R}$

X_2 **no** es vector propio de A porque $A \cdot X_2$ no es múltiplo escalar de X_2

Equivalencias (de la definición de valor propio de una matriz)

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

λ es valor propio de $A \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathbb{K}^{n\times 1},\, X \neq \theta : A \cdot X = \lambda\, X$ por def. de valor propio

$\Leftrightarrow \exists\, X \in \mathbb{K}^{n\times 1} - \{\theta\} : A \cdot X - \lambda\, X = \theta$ por exist. del opuesto en $\mathbb{K}^{n\times 1}$

$\Leftrightarrow \exists\, X \in \mathbb{K}^{n\times 1} - \{\theta\} : (A - \lambda\, \mathbb{I}) \cdot X = \theta$ pues el prod. es distributivo respecto de la suma en $\mathbb{K}^{n\times 1}$

$\Leftrightarrow (A - \lambda\, \mathbb{I}) \cdot X = \theta$ es compatible indeterminado (tiene otras soluc. además de la trivial)

$\Leftrightarrow rg\,(A - \lambda\, \mathbb{I}) < n$ por Teorema de Rouché-Fröbenius

$\Leftrightarrow A - \lambda\, \mathbb{I}$ es singular por equivalencias de matriz inversible

$\Leftrightarrow |A - \lambda\, \mathbb{I}| = 0$ por cond. nec y suf. de matriz inversible

Observación

Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

- Los valores propios de A son los escalares
$$\lambda \in \mathbb{K} : |A - \lambda\, \mathbb{I}| = 0$$

- Los vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ son los vectores
$$X \in \mathbb{K}^{n\times 1} - \{\theta\} : (A - \lambda\, \mathbb{I}) \cdot X = \theta$$

Definición (Espacio propio)

*Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A. Se llama **espacio propio** de A asociado al valor propio λ al conjunto*

$$V_\lambda = \left\{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X = \lambda\, X\right\}$$

Observación

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A :

- $V_\lambda = \underbrace{\{\text{vectores propios de } A \text{ asociados al valor propio } \lambda\}}_{\neq \emptyset} \cup \{\theta\} \Rightarrow V_\lambda \neq \{\theta\}$
- Que $\theta \in V_\lambda$ no quiere decir que θ sea vector propio de A.

Teorema

Sean $(\mathbb{K}^{n\times 1}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V.,* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$ *un valor propio de* A*.*

Entonces V_λ *es subespacio vectorial de* $\mathbb{K}^{n\times 1}$*.*

Demostración

Sean $(\mathbb{K}^{n\times 1}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V., $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A. Por definición de espacio propio:

$$V_\lambda = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X = \lambda X\}$$

Para probar que V_λ es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ empleamos la condición necesaria y suficiente para subespacio:

i) $V_\lambda \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ por la definición de espacio propio sus elementos son vectores de $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

ii) ¿$V_\lambda \neq \emptyset$?

El vector $\theta \in \mathbb{K}^{n\times 1}$:

$$\begin{aligned} A \cdot \theta &= \theta && \text{por prop. del producto de matrices} \\ \lambda\, \theta &= \theta && \text{por consecuencias de la def. de espacio vectorial} \end{aligned}$$

$\therefore \theta \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot \theta = \lambda\, \theta \Rightarrow \theta \in V_\lambda$

Luego, $V_\lambda \neq \emptyset$

iii) ¿$+ : V_\lambda \times V_\lambda \to V_\lambda$? ¿$\forall X_1, X_2 \in V_\lambda, X_1 + X_2 \in V_\lambda$?

Sean $X_1, X_2 \in V_\lambda$:

$$\begin{aligned} X_1 \in V_\lambda &\Rightarrow X_1 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X_1 = \lambda X_1 && \text{por def. de espacio propio} \\ X_2 \in V_\lambda &\Rightarrow X_2 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X_2 = \lambda\, X_2 && \text{por def. de espacio propio} \end{aligned}$$

Como $X_1, X_2 \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, entonces $X_1 + X_2 \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ pues $\mathbb{K}^{n\times 1}$ es E.V. Además:

$$\begin{aligned} A \cdot (X_1 + X_2) &= A \cdot X_1 + A \cdot X_2 && \text{por prop. distrib. del producto resp. de la suma de matrices} \\ &= \lambda\, X_1 + \lambda X_2 && \text{pues } X_1, X_2 \in V_\lambda \\ &= \lambda (X_1 + X_2) && \text{pues } \mathbb{K}^{n\times 1} \text{ es E.V.} \end{aligned}$$

$\therefore X_1 + X_2 \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot (X_1 + X_2) = \lambda\, (X_1 + X_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \in V_\lambda$

Luego, $\forall X_1, X_2 \in V_\lambda, X_1 + X_2 \in V_\lambda$

iv) ¿$\cdot : \mathbb{K} \times V_\lambda \to V_\lambda$? ¿$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall X \in V_\lambda, \alpha X \in V_\lambda$?

Sean $\alpha \in \mathbb{K},\ X \in V_\lambda$:

$$X \in V_\lambda \Rightarrow X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot X = \lambda\, X \quad \text{por def. de espacio propio}$$

Como $\alpha \in \mathbb{K}, X \in \mathbb{K}^{n\times 1} \Rightarrow \alpha\, X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ pues $\mathbb{K}^{n\times 1}$ es E.V. Además:

$$\begin{aligned} A \cdot (\alpha\, X) &= \alpha\, (A \cdot X) && \begin{array}{l}\text{por prop. asociativa mixta}\\ \text{del producto de matrices}\end{array} \\ &= \alpha\, (\lambda X) && \text{pues } X \in V_\lambda \\ &= \lambda\, (\alpha\, X) && \text{pues } \mathbb{K}^{n\times 1} \text{ es E.V.} \end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A \cdot (\alpha\, X) = \lambda\, (\alpha\, X) \Rightarrow \alpha X \in V_\lambda$

Luego, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall X \in V_\lambda, \alpha X \in V_\lambda$

De i), ii), iii) y iv) , por la condición necesaria y suficiente para subespacio, se tiene que V_λ es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. ■

Observación

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

1) El espacio propio de A asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ es el conjunto solución del sistema homogéneo compatible indeterminado $(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot X = \theta$, pues

$$V_\lambda = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : (A - \lambda \mathbb{I}) \cdot X = \theta\}$$

2) Espacios propios de A asociados a valores propios diferentes no tienen vectores propios en común. Es decir:

   Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ son valores propios distintos de A entonces $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\theta\}$.
   (Este resultado se acepta **sin demostración**)

Los siguientes resultados (teorema y corolario) se aceptan **sin demostración**.

Teorema

Sean $(\mathbb{K}^{n\times 1}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ *son valores propios distintos de* A*, entonces los vectores propios* X_1, X_2 *(asociados respectivamente a* λ_1, λ_2*) son l.i. en* $\mathbb{K}^{n\times 1}$

Corolario (Generalización)

Sean $(\mathbb{K}^{n\times 1}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V. y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ son valores propios distintos de A, entonces los vectores propios $X_1, \cdots, X_m$ (asociados respectivamente a $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$) son l.i. en $\mathbb{K}^{n\times 1}$

Observación

El corolario asegura que:

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene **a lo sumo n valores propios diferentes**

Por el contrario: si $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ son valores propios distintos de A, con $m > n$, entonces el conjunto de los vectores propios asociados $\{X_1, \cdots, X_m\}$ sería l.i, lo cual es un **absurdo** ya que $\dim \mathbb{K}^{n\times 1} = n$ y a lo sumo hay n vectores l.i. en dicho espacio.

Definición (Polinomio característico)

*Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se llama **polinomio característico** de A, al polinomio mónico de grado n dado por*

$$\chi_A(x) = |x\,\mathbb{I} - A|$$

Teorema

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \text{ es valor propio de } A \Leftrightarrow \lambda \text{ es cero del polinomio característico de } A$$

Demostración

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ es valor propio de } A &\Leftrightarrow |A - \lambda\mathbb{I}| = 0 \quad \text{por equiv. de la def. valor propio de matriz} \\ &\Leftrightarrow (-1)^n\,|\lambda\mathbb{I} - A| = 0 \quad \text{por def. de determinante} \\ &\Leftrightarrow |\lambda\mathbb{I} - A| = 0 \quad \text{pues } (-1)^n \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \quad \text{por def. de pol. característico} \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ es cero de } \chi_A \quad \text{pues } \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

■

Observación

Como $gr(\chi_A) = n$, entonces se concluye nuevamente que la matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene a lo sumo n valores propios distintos.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, determina el polinomio característico y los valores propios de A. ¿Cambia la respuesta si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Resolución

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{C} : A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

  Por definición, el polinomio característico de A es: $\chi_A(\lambda) = |\lambda\,\mathbb{I} - A|$

  $\lambda\,\mathbb{I} - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

  $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

  Luego $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$

  Determinemos ahora $\lambda \in \mathbb{C}$ valor propio de $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, por teorema tenemos que:

  $$\begin{aligned} \lambda \text{ es valor propio de } A &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm i \end{aligned}$$

  Luego los valores propios de $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i \in \mathbb{C}$

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el polinomio característico de $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es el mismo polinomio que para el caso anterior, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, pero la ecuación $\chi_A(\lambda) = 0$ no tiene soluciones reales, por lo que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no tiene valores propios.

Respuesta:

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ y $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i \in \mathbb{C}$ son los valores propios de $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ y $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ **no** tiene valores propios.

Observación

Los valores propios de una matriz dependen del campo en el que se está trabajando.

Teorema

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. *Entonces:*

1) $\lambda = 0$ *es valor propio de* $A \Leftrightarrow A$ *es singular*

EQUIVALENTEMENTE:

A *es inversible* $\Leftrightarrow$ 0 *no es valor propio de* A.

2) Sea A *inversible:*

λ *es valor propio de* $A \Rightarrow \lambda^{-1}$ *es valor propio de* A^{-1}

Más aún:

X *es vector propio de* A *asociado al valor propio* $\lambda \Rightarrow X$ *es vector propio de* A^{-1} *asociado al valor propio* λ^{-1}

3) λ *es valor propio de* $A \Rightarrow \lambda^2$ *es valor propio de* A^2

Más aún:

X *es vector propio de* A *asociado al valor propio* $\lambda \Rightarrow X$ *es vector propio de* A^2 *asociado al valor propio* λ^2

GENERALIZACION *(Se acepta* ***sin demostración****):*

λ *es valor propio de* $A \Rightarrow \lambda^m$ *es valor propio de* A^m, *con* $m \in \mathbb{N}$

Más aún:

X *es vector propio de* A *asociado al valor propio* $\lambda \Rightarrow X$ *es vector propio de* A^m *asociado al valor propio* λ^m

4) λ *es valor propio de* $A \Leftrightarrow \lambda$ *es valor propio de* A^t

5) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *son valores propios de* $A \Rightarrow tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \wedge \quad D(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Demostración

1) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 \text{ es valor propio de } A \;&\Leftrightarrow\; \chi_A(0) = 0 \quad \text{por Teorema}\\
&\Leftrightarrow\; |0\,\mathbb{I} - A| = 0 \quad \text{por def. de polinomio característico}\\
&\Leftrightarrow\; |-A| = 0\\
&\Leftrightarrow\; (-1)^n\,|A| = 0 \quad \text{por def. de determinante}\\
&\Leftrightarrow\; |A| = 0 \quad \text{pues } (-1)^n \neq 0\\
&\Leftrightarrow\; A \text{ es singular} \quad \text{por cond. nec. y suf. de matriz inversible}
\end{aligned}$$

2) Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $\lambda \in \mathbb{K}$:

Queremos probar que: λ es valor propio de $A \Rightarrow \lambda^{-1}$ es valor propio de A^{-1}

Por hipótesis $\left.\begin{array}{l} A \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ inversible} \\ \lambda \in \mathbb{K} \text{ es valor propio de } A \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \neq 0$ por apartado 1)

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists\ \lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} : \lambda\ \lambda^{-1} = \lambda^{-1}\lambda = 1$

Por definición de matriz inversible:

$$A \text{ inversible} \Rightarrow \exists\ A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I} \quad (1)$$

Por definición de valor propio de matriz:

$$\lambda \text{ valor propio de } A \Rightarrow \exists\ X \in \mathbb{K}^{n\times 1}, X \neq \theta : A \cdot X = \lambda\ X \quad (2)$$

Trabajemos con la igualdad:

$$\begin{array}{rcll}
A \cdot X & = & \lambda\ X & \text{por (2)} \\
A^{-1} \cdot (A \cdot X) & = & A^{-1} \cdot (\lambda\ X) & \text{pre-multiplicando ambos miembros por } A^{-1} \\
\underbrace{\left(A^{-1} \cdot A\right)}_{\mathbb{I}} \cdot X & = & \lambda \left(A^{-1} \cdot X\right) & \text{por prop. del producto de matrices} \\
X & = & \lambda \left(A^{-1} \cdot X\right) & \text{por (1)} \\
\lambda^{-1} X & = & \lambda^{-1} \left(\lambda \left(A^{-1} \cdot X\right)\right) & \text{multiplicando ambos miembros por } \lambda^{-1} \text{ pues } \lambda \neq 0 \\
\lambda^{-1} X & = & \underbrace{\left(\lambda^{-1}\lambda\right)}_{=1} \left(A^{-1} \cdot X\right) & \text{por prop. del producto de matrices} \\
\lambda^{-1} X & = & A^{-1} \cdot X & (3)
\end{array}$$

Entonces, reemplazando (3) en (2):

$$\begin{array}{rcl}
\lambda \text{ valor propio de } A & \Rightarrow & \exists X \in \mathbb{K}^{n\times 1}, X \neq \theta : A^{-1} \cdot X = \lambda^{-1} X \quad (4) \\
& \Rightarrow & \lambda^{-1} \text{ es valor propio de } A^{-1} \quad \text{por def. de valor propio de matriz}
\end{array}$$

Más aún, de (2) y (4):

X es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda \Rightarrow X$ es vector propio de A^{-1} asociado al valor propio λ^{-1}

3) Queda para los alumnos.

4) Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ es valor propio de } A &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \quad \text{por Teorema}\\
&\Leftrightarrow |\lambda\mathbb{I} - A| = 0 \quad \text{por def. de polinomio característico}\\
&\Leftrightarrow \left|(\lambda\mathbb{I} - A)^t\right| = 0 \quad \text{por prop. del determinante}\\
&\Leftrightarrow \left|(\lambda\mathbb{I})^t - A^t\right| = 0 \quad \text{por prop. de matriz transpuesta}\\
&\Leftrightarrow \left|\lambda\mathbb{I}^t - A^t\right| = 0 \quad \text{por prop. de matriz transpuesta}\\
&\Leftrightarrow \left|\lambda\mathbb{I} - A^t\right| = 0 \quad \text{por def. de matriz transpuesta}\\
&\Leftrightarrow \chi_{A^t}(\lambda) = 0 \quad \text{por def. de polinomio característico}\\
&\Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A^t \quad \text{por Teorema}
\end{aligned}$$

5) Se acepta **sin demostración**.

■

Los siguientes resultados (Teorema y Corolario) se aceptan **sin demostración**.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de A con multiplicidad m. Entonces

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq m$$

siendo la multiplicidad del valor propio λ la cantidad de veces que λ anula al polinomio característico de A.

Corolario

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con multiplicidad 1 entonces $\dim V_\lambda = 1$

Observación

Los valores propios con multiplicidad 1, 2 o 3 se dicen respectivamente, simples, dobles o triples.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Determina los valores propios de A.

b) En caso de ser posible, determina una base de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ formada por vectores propios de A.

Resolución

a) Determinemos $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio de A:

$$\lambda \text{ es valor propio de } A \Leftrightarrow |A - \lambda \mathbb{I}| = 0$$

Es decir, los autovalores de A son las soluciones reales de la ecuación $|A - \lambda \mathbb{I}| = 0$

Para ello:

$$A - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de $A - \lambda \mathbb{I}$:

$$|A - \lambda \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{desarrollo del det.} \\ \text{por la fila 2} \end{array}$$

$$= (2-\lambda)\ [(3-\lambda)(-1-\lambda)+3] = (2-\lambda)\ \left(\lambda^2 - 2\lambda\right) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

Luego $|A - \lambda \mathbb{I}| = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Notar que 0 es raíz simple y 2 es raíz doble de la ecuación $|A - \lambda \mathbb{I}| = 0$

Respuesta:

Los valores propios de A son: $\lambda = 0$ (multiplicidad 1) y $\lambda = 2$ (multiplicidad 2)

b) Para saber si es posible determinar una base de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ formada por vectores propios de A, es suficiente averiguar si el espacio propio asociado al valor propio doble tiene dimensión 2, dado que el espacio propio asociado al valor propio simple siempre tiene dimensión 1. De ser así, se puede formar un conjunto de 3 vectores propios que sea l.i. en $\mathbb{R}^{3\times 1}$ pues, en este caso:

- El valor propio doble aporta 2 vectores l.i.
- El valor propio simple aporta 1 vector l.i.
- Vectores propios asociados a valores propios diferentes forman un conjunto l.i.

Determinemos ahora los espacios propios asociados a los valores propios λ :

$$V_\lambda = \left\{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (A - \lambda \mathbb{I}) \cdot X = \theta\right\}$$

- Para $\lambda = 2$: $V_2 = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (A - 2\mathbb{I}) \cdot X = \theta\}$

  El espacio propio de A asociado a $\lambda = 2$ es el conjunto solución del sistema homogéneo $(A - 2\,\mathbb{I}) \cdot X = \theta$ cuya matriz asociada es:

$$A - 2\,\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 3-2 & 3 & -3 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 3 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{f_3+(-1)f_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\,(A - 2\,\mathbb{I}) = rg\,(A - 2\,\mathbb{I} \mid \theta) = 1 < 3 = \text{n}^o$ de incógnitas $\overset{R-F}{\Rightarrow}$ el sistema compatible indeterminado

donde el sistema equivalente es $\{x + 3y - 3z = 0$

Luego

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} : x + 3y - 3z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3z - 3y \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \right\}$$

Determinemos una base para V_2 :

Sea $\begin{pmatrix} 3z - 3y \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_2$

$$\begin{pmatrix} 3z - 3y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ \forall \begin{pmatrix} 3z - 3y \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_2, \exists!\, \mu_1 = y, \mu_2 = z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 3z - 3y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego por condición necesaria y suficiente para base, $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V_2 y $\dim V_2 = 2$

Motivo por el cual tenemos garantizada la existencia de una base de vectores propios de $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

- Para $\lambda = 0$: $V_0 = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (A - 0\mathbb{I}) \cdot X = \theta\}$

  El espacio propio de A asociado a $\lambda = 0$ es el conjunto solución del sistema homogéneo $(A - 0\,\mathbb{I}) \cdot X = \theta$ cuya matriz asociada es:

  $$A - 0\,\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_1+(-3)f_3 \\ \frac{1}{2}f_2}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_1+6f_2 \\ f_3+(-3)f_2}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  $rg\,(A - 0\mathbb{I}) = rg\,(A - 0\;\mathbb{I}\;\mid\;\theta\,) = 2 < 3 =$ n^o de incógnitas $\overset{R-F}{\Rightarrow}$ el sistema compatible indeterminado

  donde el sistema equivalente es $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

  Luego

  $$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} : y = 0 \wedge x - z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \right\}$$

  Sabemos que la dimensión de V_0 es 1 por ser espacio propio asociado al valor propio de multiplicidad 1.

  Determinemos una base para V_0 :

  Sea $\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in V_0 : \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $\therefore\ \forall \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in V_0, \exists !\,\delta = z \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Luego, por condición necesaria y suficiente para base, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V_0 y $\dim V_0 = 1$

Como los vectores propios asociados a diferentes valores propios son l.i., podemos afirmar que el conjunto $S = \alpha \cup \beta = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i. y como $\#S = 3$, se tiene que S es base de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ formada por vectores propios de A.

Respuesta: $S = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ formada por vectores propios de A

El siguiente teorema se acepta **sin demostración.**

Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Si A *y* B *son semejantes entonces* $\chi_A = \chi_B$

En lo que sigue trataremos brevemente con valores y vectores propios de operadores lineales, los cuales están relacionados con las matrices asociadas al operador lineal.

Definición (Valor y vector propio de operador lineal)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $T : V \to V$ *una T.L. y* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Se dice que*

$$\lambda \text{ es } \textbf{valor propio} \text{ de } T \Leftrightarrow \exists\, v \in V,\ v \neq \theta : T(v) = \lambda v$$

Todo $v \in V$, $v \neq \theta : T(v) = \lambda v$ *es* ***vector propio*** *de* T *asociado al valor propio* λ.

Definición

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V y* $T : V \to V$ *una T.L. y* $\lambda \in \mathbb{K}$ *valor propio de* T.

El conjunto $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ *es el* ***espacio propio*** *de* T *asociado al valor propio* λ

Observación

Se puede probar que V_λ es subespacio vectorial de V

Equivalencias (de la definición de valor propio de un operador lineal)

Sean $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ E.V, $\dim V = n$, β base de V, $T : V \to V$ una T.L. y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ es valor propio de } T \quad & \Leftrightarrow \quad \exists\, v \in V,\ v \neq \theta : T(v) = \lambda\, v \quad \text{por def. de valor propio de operador lineal} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, v \in V,\ v \neq \theta : [T(v)]_\beta = [\lambda\, v]_\beta \quad \text{por unicidad de coord. en un E.V.} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, v \in V,\ v \neq \theta : [T]_\beta \cdot [v]_\beta = \lambda\, [v]_\beta \quad \text{por prop. de matriz asoc. a una TL} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, X = [v]_\beta \in \mathbb{K}^{n\times 1},\ X \neq \theta : [T]_\beta \cdot X = \lambda\, X \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ es valor propio de } [T]_\beta \in \mathbb{K}^{n\times n} \quad \text{por def. de valor propio de matriz}
\end{aligned}$$

Observación

1) La última equivalencia es independiente de la base considerada en el espacio vectorial.

   Recordemos que las matrices asociadas a un operador lineal en bases diferentes son semejantes. En consecuencia, tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto, los mismos valores propios. Así, cualquiera sea β base de V:

$$\lambda \text{ es valor propio de } T \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } [T]_\beta \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

2) De las equivalencias se tiene que:

   $v \in V - \{\theta\}$ es vector propio de T asociado al valor propio $\lambda \Leftrightarrow [v]_\beta \in \mathbb{K}^{n\times 1} - \{\theta\}$ es vector propio de $[T]_\beta$ asociado al valor propio λ.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) *A es inversible*
2) *$A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n}$*
3) *A es producto de un número finito de matrices elementales*
4) *$rg\,(A) = n$*
5) *$A \cdot X = \Theta_{n\times 1}$ es compatible determinado*
6) *$A \cdot X = B$ es compatible determinado $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$*
7) *$D\,(A) \neq 0$*
8) *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
9) *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es generador de $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
10) *$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es l.i. en $\mathbb{K}^{n\times 1}$*
11) *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es una base de $\mathbb{K}^{1\times n}$*
12) *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es generador de $\mathbb{K}^{1\times n}$*
13) *$\left\{A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}\right\}$ es l.i. en $\mathbb{K}^{1\times n}$*

14) $\mathrm{Nu}\,(T) = \{\theta_{\mathbb{K}^{n\times 1}}\}$ *siendo* $T : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ *T.L. definida por* $T\,(X) = A \cdot X$

15) $\mathrm{Im}\,(T) = \mathbb{K}^{n\times 1}$ *siendo* $T : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ *T.L. definida por* $T\,(X) = A \cdot X$

16) $\mathrm{Nu}\,(T) = \{\theta_V\}$ *siendo* $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V.,* $\dim V = n$*,* $T : V \to V$ *T.L. tal que* $[T]_\alpha^\beta = A$*, siendo* α, β *bases de* V

17) $\mathrm{Im}\,(T) = V$ *siendo* $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *E.V.,* $\dim V = n$*,* $T : V \to V$ *T.L. tal que* $[T]_\alpha^\beta = A$*, siendo* α, β *bases de* V

18) 0 *no es valor propio de* A

NOTAR QUE: estos resultados fueron justificados a lo largo de toda la materia.