Matrices - Parte 3

A continuación definiremos ciertas operaciones que se realizan sobre las filas de una matriz, llamadas operaciones elementales de filas. Estas operaciones se corresponden a tres operaciones algebraicas que se pueden realizar sobre las ecuaciones de un sistema lineal, que lo transforman en uno más simple y que no modifica la solución del mismo (en la siguiente unidad estudiaremos los sistemas lineales). En ésta unidad las operaciones elementales de filas serán de gran utilidad para hallar la inversa de una matriz, cuando ésta exista.

Operaciones elementales de filas y matrices elementales

Definición (Operaciones elementales de filas de matrices)

*Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Llamamos **operación elemental de filas** de A a cada una de las siguientes:*

Tipo I. *Multiplicar la fila i de A por un escalar $c \in \mathbb{K} - \{0\}$*

Notación: $A_i(c),\ c \neq 0$

Tipo II. *Intercambiar (o permutar) fila i con fila j de A*

Notación: $A_{ij},\ i \neq j$

Tipo III. *Sumar a la fila i de A la fila j multiplicada por un escalar $c \in \mathbb{K}$*

Notación: $A_{ij}(c),\ i \neq j$

Observación

Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

- las matrices $A_i(c),\ A_{ij},\ A_{ij}(c) \in \mathbb{K}^{m\times n}$, es decir tienen el mismo orden que la matriz A.
- salvo casos particulares: $A_i(c),\ A_{ij}(c)$ difieren de A en la fila i. En cambio, A_{ij} difiere de A en las filas i y j.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, determina $A_1(2)$, A_{13}, $A_{23}(-4)$.

- $A_1(2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (se multiplica la fila 1 de A por $c = 2$)

- $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (se intercambian fila 1 y fila 3 de A)

- $A_{23}(-4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (a la fila 2 de A se le suma la fila 3 multiplicada por $c = -4$)

Observación

Una operación elemental de filas de matrices es una **función** $e : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{m\times n}$ que asocia a cada matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ la matriz $e(A) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tal que

$$e(A) = \begin{cases} A_i(c),\ c \in \mathbb{K} - \{0\} \\ A_{ij},\ i \neq j \\ A_{ij}(c),\ c \in \mathbb{K},\ i \neq j \end{cases}$$

según sea el tipo de operación elemental de filas realizada en A.

Definición (Matriz elemental)

Una matriz $E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice ***matriz elemental*** *si se obtiene de aplicarle a la matriz $\mathbb{I} \in \mathbb{K}^{n\times n}$* ***una sola*** *operación elemental de filas.*

Observación

Según sea el tipo de operación elemental de filas aplicada a la matriz $\mathbb{I}_{n\times n}$, se tienen las siguientes matrices elementales:

- $\mathbb{I}_i(c),\ c \in \mathbb{K} - \{0\}$ (Tipo I)
- $\mathbb{I}_{ij},\ i \neq j$ (Tipo II)
- $\mathbb{I}_{ij}(c),\ c \in \mathbb{K},\ i \neq j$ (Tipo III)

Ejemplo

Las siguientes matrices son elementales:

$$\mathbb{I}_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbb{I}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbb{I}_{23}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pues se obtienen de $\mathbb{I}_{3\times 3}$ al aplicarle una sola operación elemental de filas y las matrices

$$\mathbb{I}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{I}_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se obtienen de $\mathbb{I}_{2\times 2}$ al aplicarle una sola operación elemental de filas.

Ejemplo

Las siguientes matrices **no** son elementales:

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pues se obtiene de $\mathbb{I}_{3\times 3}$ aplicando 2 operaciones elementales de filas.
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ pues se obtiene de $\mathbb{I}_{3\times 3}$ aplicando 3 operaciones elementales de filas.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pues multiplicar una fila por 0 no es una operación elemental de filas.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pues no es una matriz cuadrada.

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

Teorema

Una operación elemental de filas de $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ de Tipo I, Tipo II o Tipo III, se puede realizar premultiplicando A por una matriz elemental $E \in \mathbb{K}^{m\times m}$, donde E se obtiene aplicando a la matriz $\mathbb{I}_{m\times m}$ la misma operación elemental de filas. Es decir,

- $A_i(c) = \mathbb{I}_i(c) \cdot A, \ c \in \mathbb{K} - \{0\} \quad$ (*Tipo I*)
- $A_{ij} = \mathbb{I}_{ij} \cdot A \quad$ (*Tipo II*)
- $A_{ij}(c) = \mathbb{I}_{ij}(c) \cdot A, \ c \in \mathbb{K} \quad$ (*Tipo III*)

Observación

Premultiplicar A por una matriz elemental E significa que la matriz A está multiplicada a izquierda por la matriz E, es decir se tiene $E \cdot A$.

Comprobemos númericamente el teorema anterior por medio del siguiente ejemplo (esto no significa hacer una demostración del mismo).

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Verifica las siguientes igualdades:

$$\mathbb{I}_1\,(2)\cdot A = A_1\,(2)\ \ ,\ \ \mathbb{I}_{13}\cdot A = A_{13}\ ,\ \ \mathbb{I}_{23}\,(-4)\cdot A = A_{23}(-4)\ ,\ \text{donde } \mathbb{I}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

- $\mathbb{I}_1\,(2)\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_1(2)$
- $\mathbb{I}_{13}\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A_{13}$
- $\mathbb{I}_{23}\,(-4)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_{23}(-4)$

Matrices equivalentes por filas

En lo que sigue se requiere aplicar, de manera secuencial, un número finito de operaciones elementales de filas de matrices.

Definición (Matrices equivalentes por filas)

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se dice que B es ***equivalente por filas*** *a A, y lo denotamos $B \sim_f A$, si B se obtiene de A mediante un número finito de operaciones elementales de filas.*

Observación

- $B \sim_f A$ significa que partiendo de A, y efectuando de manera consecutiva un número finito s de operaciones elementales de filas, se obtiene B. Es decir:

$$A \underbrace{\sim_f\ \ X_1\ \ \sim_f\ \ X_2\ \ \sim_f\ \ X_3\ \ \sim_f\ \cdots\ \sim_f}_{\text{un n}^o\text{ finito } s \text{ de operaciones elementales de filas}} X_s = B$$

- Al efectuar **una** operación elemental de filas en una matriz se obtiene una matriz equivalente por filas a la dada y entre ellas colocamos el símbolo $\sim_f$, indicando debajo del mismo la operación elemental de filas realizada, según las siguientes notaciones:
  - $c\,f_i$ (Tipo I)
  - $f_i \leftrightarrow f_j$ (Tipo II)
  - $f_i + c\,f_j$ (Tipo III)

Ejemplo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Probar que $B \sim_f A$

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{f_3+(-2)\,f_2}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{\left(-\frac{1}{4}\right)f_3}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Teorema (Condición necesaria y suficiente para matrices equivalentes por filas)

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

$$B \sim_f A \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{m\times m} \text{ producto de un n}^o \text{ finito de matrices elementales} : B = P \cdot A$$

Demostración

($\Rightarrow$) Por hipótesis $B \sim_f A$ entonces, por la definición de matrices equivalentes por filas, B se obtiene de A mediante un número finito de operaciones elementales de filas.

Sean $e_1, e_2, \cdots, e_s$ las operaciones elementales de filas aplicadas tales que

$$B = e_s\left(\ldots\left(e_2\left(e_1\left(A\right)\right)\right)\right) \tag{1}$$

Por el teorema anterior, sabemos que efectuar una operación elemental de filas es equivalente a premultiplicar por una matriz elemental de orden m, que proviene de aplicarle a la matriz $\mathbb{I}_{m\times m}$ la misma operación elemental de filas.

Sean $E_1, E_2, \cdots, E_s \in \mathbb{K}^{m\times m}$ las correspondientes matrices elementales.

Aplicando consecutivamente el teorema antes mencionado:

$$\begin{aligned}
e_1(A) &= E_1 \cdot A \\
e_2(e_1(A)) &= E_2 \cdot (E_1 \cdot A) \\
&\vdots \\
\underbrace{e_s(\ldots(e_2(e_1(A))))}_{B} &= E_s \cdot (\ldots \cdot (E_2 \cdot (E_1 \cdot A))) \quad \text{por } (1) \\
B &= \underbrace{(E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1)}_{P} \cdot A \quad \text{pues el producto de matrices es asociativo}
\end{aligned}$$

Luego,

$\exists P = E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \in \mathbb{K}^{m\times m}$ producto de un n^o finito de matrices elementales : $B = P \cdot A$

($\Leftarrow$) Por hipotesis $\exists P \in \mathbb{K}^{m\times n}$ producto de un n^o finito de matrices elementales : $B = P \cdot A$

Supongamos que $P = E_s \cdot E_{s-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \in \mathbb{K}^{m\times m}$: $B = P \cdot A$, con $E_i \in \mathbb{K}^{m\times m}$ matriz elemental para $i = 1, 2, \cdots, s$.

Así,

$$B = E_s \cdot E_{s-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

Por el Teorema antes mencionado, premultiplicar por una matriz elemental equivale a efectuar una operación elemental de filas.

Sean $e_1, e_2, \cdots, e_s$ las correspondientes operaciones elementales.

Aplicando consecutivamente el teorema antes mencionado:

$$\begin{aligned}
E_1 \cdot A &= e_1(A) \\
E_2 \cdot (E_1 \cdot A) &= e_2(e_1(A)) \\
&\vdots \\
\underbrace{(E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1)}_{P} \cdot A &= e_s(\ldots(e_2(e_1(A)))) \quad \text{pues el producto de matrices es asociativo} \\
\underbrace{P \cdot A}_{B} &= e_s(\ldots(e_2(e_1(A)))) \\
B &= e_s(\ldots(e_2(e_1(A)))) \quad \text{por hipótesis } B = P \cdot A
\end{aligned}$$

Por lo tanto, B se obtiene de A mediante un n^o finito de operaciones elementales de filas. Luego, por definición de matrices equivalentes por filas:

$$B \sim_f A$$

■

Ejemplo

Para las matrices A y B del ejemplo anterior, expresa P como producto de un n^o finito de matrices elementales tal que $B = P \cdot A$

Resolución

Vimos que $B \sim_f A$ pues:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{f_3 + (-2)\, f_2}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{\left(-\frac{1}{4}\right) f_3}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

La siguiente tabla relaciona las operaciones elementales efectuadas con las correspondientes matrices elementales:

Operación elemental	Matriz elemental de orden 3
$f_1 \leftrightarrow f_3$	$\mathbb{I}_{13}$
$f_3 + (-2)\ f_2$	$\mathbb{I}_{32}\,(-2)$
$\left(-\frac{1}{4}\right) f_3$	$\mathbb{I}_3\left(-\frac{1}{4}\right)$

Así

$$B = \left(\mathbb{I}_3 \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \mathbb{I}_{32}\,(-2) \cdot \mathbb{I}_{13}\right) \cdot A$$

Respuesta:

$$P = \mathbb{I}_3 \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \mathbb{I}_{32}\,(-2) \cdot \mathbb{I}_{13}$$

Observemos que:

$$\mathbb{I}_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{32}\,(-2) \cdot (\mathbb{I}_{13} \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_3\left(-\tfrac{1}{4}\right) \cdot (\mathbb{I}_{32}\,(-2) \cdot (\mathbb{I}_{13} \cdot A)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

Teorema

*La equivalencia por filas de matrices es una **relación de equivalencia**.*

Es decir, la relación $\sim_f$ tiene las siguientes propiedades, para $A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

1. Reflexiva: $A \sim_f A$
2. Simetrica: $A \sim_f B \implies B \sim_f A$
3. Transitiva: $A \sim_f B \ \wedge \ B \sim_f C \implies A \sim_f C$.

Matriz escalón reducida por filas

Definición (Matriz escalón reducida por filas)

*$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es una **matriz escalón reducida por filas** si satisface lo siguiente:*

- El primer elemento no nulo de cada fila no nula es 1 (llamado pivote).
- Cada columna de A que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila, tiene el resto de los elementos nulos. Es decir, es una columna canónica de $\mathbb{K}^{m\times 1}$
- Toda fila nula de A esta por debajo de las filas no nulas.
- Las columnas canónicas de A están ordenadas.

  Es decir, si $A_{j_k} \in \mathbb{K}^{m\times 1}$,

$$A_{j_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_{j_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ A_{j_s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{fila } s$$

  entonces $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leq n$.

Observación

De la definición se deduce que:

Si hay una columna a la izquierda de la primera columna canónica es **nula**

Ejemplo

Las siguientes son matrices escalón reducidas por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pues satisfacen las cuatro condiciones de la definición.

Ejemplo

Las siguientes **no** son matrices escalón reducidas por filas:

- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pues no satisface la 1ra. condición de la definición.
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ pues no satisface la 4ta. condición de la definición.
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pues no satisface la 3ra. condición de la definición.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ pues no satisface la 2da. condición de la definición.

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

Teorema (Existencia y unicidad de la escalón reducida por filas)

Toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una única matriz escalón reducida por filas que denotamos $E_{rf}(A)$.

En símbolos

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} \ , \ \exists! \ E_{rf}(A) \in \mathbb{K}^{m\times n} : A \sim_f E_{rf}(A)$$

Ejemplo

Obtener la matriz escalón reducida por filas de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

Resolución:

Partiendo de A y aplicando de manera consecutiva operaciones elementales de filas obtendremos la matriz $E_{rf}(A)$. Para ello elegimos el primer elemento no nulo de alguna fila no nula (en lo posible un 1), el cuál permitirá obtener una columna canónica por medio de adecuadas operaciones elementales de filas. Este procedimiento se reitera y, si fuera necesario, se ordenan los vectores canónicos a través del intercambio de filas.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_1+(-2)f_2}{\sim_f} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(-1)f_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_2\leftrightarrow f_3}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = E_{rf}(A)$$

Rango de una matriz

El teorema anterior nos permite dar la definición de rango de una matriz que será de gran utilidad para hallar la inversa de una matriz y para decidir si un sistema lineal tiene o no solucion.

Definición (Rango fila de una matriz)

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se llama ***rango fila*** *de A, que denotamos $rg_f(A)$, al número de filas no nulas de la matriz $E_{rf}(A)$.*

Equivalentemente:

El $rg_f(A)$ es el máximo número de vectores columnas canónicos diferentes que se obtiene de A aplicando un número finito de operaciones elementales de filas.

Observación

La definición equivalente permite hallar el rango de una matriz determinando el máximo número de vectores columnas canónicos diferentes, sin necesidad de obtener la matriz escalón reducida por filas.

Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

$$A \sim_f B \Leftrightarrow E_{rf}(A) = E_{rf}(B)$$

Equivalentemente

$$E_{rf}(A) \neq E_{rf}(B) \Leftrightarrow A \nsim_f B$$

Demostración

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Por teorema de existencia y unicidad de la matriz escalón reducida por filas, sabemos que:

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{K}^{m\times n} \Rightarrow \exists!\ E_{rf}(A) \in \mathbb{K}^{m\times n} : A \sim_f E_{rf}(A) \quad (1) \\ B &\in \mathbb{K}^{m\times n} \Rightarrow \exists!\ E_{rf}(B) \in \mathbb{K}^{m\times n} : B \sim_f E_{rf}(B) \quad (2) \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Por hipótesis $A \sim_f B$. Queremos probar que $E_{rf}(A) = E_{rf}(B)$

$$\left.\begin{array}{ll} A \sim_f B & \text{por hipótesis} \\ B \sim_f E_{rf}(B) & \text{por } (2) \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{por transitividad} \\ \text{de } \sim_f}}{\Rightarrow} A \sim_f E_{rf}(B) \quad (3)$$

Luego

$$\left.\begin{array}{ll} A \sim_f E_{rf}(A) & \text{por } (1) \\ A \sim_f E_{rf}(B) & \text{por } (3) \end{array}\right\} \Rightarrow E_{rf}(A) = E_{rf}(B) \quad \text{por unicidad de la escalón reducida por filas}$$

($\Leftarrow$) Por hipótesis $E_{rf}(A) = E_{rf}(B)$. Queremos probar que: $A \sim_f B$

$$\left.\begin{array}{ll} A \sim_f E_{rf}(A) & \text{por } (1) \\ E_{rf}(A) = E_{rf}(B) & \text{por hip.} \end{array}\right\} \Rightarrow A \sim_f E_{rf}(B) \quad (4)$$

Luego

$$\left.\begin{array}{ll} A \sim_f E_{rf}(B) & \text{por } (4) \\ E_{rf}(B) \sim_f B & \text{por } (2) \text{ y simetría de } \sim_f \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{por transitividad} \\ \text{de } \sim_f}}{\Rightarrow} A \sim_f B$$

■

Corolario

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

$$A \sim_f B \Rightarrow rg_f(A) = rg_f(B)$$

Demostración

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n} : A \sim_f B$. Queremos probar que $rg_f(A) = rg_f(B)$.

$$\begin{aligned} A \sim_f B \quad &\Rightarrow \quad E_{rf}(A) = E_{rf}(B) \quad \text{por teorema anterior} \\ &\Rightarrow \quad rg_f(A) = rg_f(B) \quad \text{por definición de rgo fila de una matriz} \end{aligned}$$

ya que $E_{rf}(A)$ y $E_{rf}(B)$ son matrices iguales y por lo tanto tienen el mismo número de filas no nulas. ■

Ejemplo

Determina si las siguientes matrices son equivalentes por filas

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$

Resolución

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(-1)f_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{rf}(A)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_2+(1)f_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{rf}(B)$$

Como $E_{rf}(A) \neq E_{rf}(B)$ entonces $A \nsim_f B$

Todo lo estudiado para filas de una matriz vale para **columnas**, definiendo de manera análoga las operaciones elementales de columnas, la matriz escalón reducida por columnas y enunciando los teoremas correspondientes. Aunque ésto no será tema de estudio en la asignatura es necesario dar la siguiente definición con el sólo fin de definir rango de una matriz.

Definición (Rango columna de una matriz)

*Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se llama **rango columna** de A, que denotamos $rg_c(A)$, al número de columnas no nulas de su forma escalón reducida por columnas.*

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

Teorema

$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ rg_f(A) = rg_c(A)$.

El teorema anterior permite dar la siguiente definición.

Definición (Rango de una matriz)

*Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se llama **rango** de A, que denotamos $rg(A)$, al rango fila de A ó al rango columna de A.*

En símbolos:

$$rg(A) = rg_f(A) = rg_c(A)$$

Observación

Para hallar el rango de una matriz, por la definición anterior, basta con hallar el rango fila de A.

Ejemplo

Determina el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, del ejemplo anterior.

Respuesta: Anteriormente encontramos que $E_{rf}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Luego $rg\,(A) = 3$ pues la matriz $E_{rf}(A)$ tiene 3 filas no nulas (ó equivalentemente 3 vectores canónicos columnas diferentes).

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

Teorema

$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ rg\,(A) = rg\,(A^t)\,.$

Observación

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Por las definiciones de rango fila y de rango columna, se puede asegurar que:

$$rg_f\,(A) \leq m,\ rg_c\,(A) \leq n$$

Luego, por la definición de rango de una matriz, se tiene que:

$$rg\,(A) \leq \text{mín}\,\{m, n\}$$

Si $rg\,(A) = \text{mín}\,\{m, n\}$ se dice que A tiene **rango máximo**

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, del ejemplo anterior, tiene rango máximo pues $rg\,(A) = 3 = \text{mín}\,\{3, 4\}$

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & -x & y \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina $x, y \in \mathbb{R}$ para que $rg(A) = 2$.

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -x & y \\ \boxed{1} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_1+3f_2 \\ f_3+(-1)f_2}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & -x & y-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \underset{f_1+xf_3}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & y-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $rg(A) = 2$, el máximo número de vectores columnas canónicos diferentes que se obtiene de A aplicando un número finito de operaciones elementales de filas debe ser 2. Entonces

$$\begin{aligned} rg(A) = 2 &\Leftrightarrow y - 3 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y = 3,\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Matriz Inversible

En lo que sigue, encontraremos las inversas de ciertas matrices efectuando operaciones elementales de filas.

Definición (Matriz inversible)

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$A \textit{ es } \textbf{\textit{inversible}} \textit{ (ó no singular)} \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n}$$

Si existe una tal matriz B se dice que B es una ***inversa*** *de A. En caso contrario se dice que A es* ***no inversible*** *ó* ***singular.***

Observación

De la definición de matriz inversible surge que:

- Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

  $$A \text{ es } \textbf{no inversible} \text{ (ó singular)} \Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n} : A\cdot B \neq B\cdot A \vee A\cdot B \neq \mathbb{I}_{n\times n} \vee B\cdot A \neq \mathbb{I}_{n\times n}$$

- Las matrices no cuadradas no tienen inversas, es decir, son singulares.

  Analicemos porque afirmamos esto:

  Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, con $m \neq n$, entonces $A \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times m}, B \cdot A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con lo cual las matrices producto tienen órdenes diferentes y no pueden ser iguales.

  Por otro lado:

- No todas las matrices cuadradas poseen inversas, como por ejemplo la matriz nula cuadrada ya que $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times n},\ \Theta_{n\times n} \cdot B = \Theta_{n\times n} \neq \mathbb{I}_{n\times n}$

Ejemplo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Comprueba que A es inversible y que B es inversa de A.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\exists B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{I}_{2\times 2}$

Por lo tanto, A es inversible y B es inversa de A.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no es inversible pues

$A^{(3)} = \Theta_{1\times 3} \Rightarrow \forall B \in \mathbb{R}^{3\times 3} : (A \cdot B)^{(3)} = \Theta_{1\times 3}$

Por lo tanto $\forall B \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A \cdot B \neq \mathbb{I}_{3\times 3}$

Ejemplo

Determinar si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es inversible.

Por definición,

A es inversible $\Leftrightarrow \exists B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{I}_{2\times 2}$

$$\begin{aligned} A \cdot B = \mathbb{I}_{2\times 2} \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ -2x-2z & -2y-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x+z=1} & (1) \\ y+t=0 & \\ -2x-2z=0 \Rightarrow \boxed{x+z=0} & (2) \\ -2y-2t=1 & \end{cases} \end{aligned}$$

De (1) y (2) se concluye que el sistema no tiene solución.

Luego, $\forall B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot B \neq \mathbb{I}_{2\times 2}$

Por lo tanto, A no es inversible

Según la definición, una matriz inversible tiene al menos una inversa, el siguiente teorema nos asegura que la inversa es única.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si A es inversible, entonces la inversa de A es única.

Demostración Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible. Entonces, por definición de matriz inversible:

$$\exists B \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \qquad (1)$$

Supongamos que A tiene otra inversa C. Es decir:

$$\exists C \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot C = C \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \qquad (2)$$

Queremos probar que B y C son iguales.

En efecto:

$$\begin{aligned} B &= B \cdot \mathbb{I}_{n\times n} \quad \text{por ser } \mathbb{I}_{n\times n} \text{ neutro del producto de matrices en } \mathbb{K}^{n\times n} \\ &= B \cdot (A \cdot C) \quad \text{por (2)} \\ &= (B \cdot A) \cdot C \quad \text{por prop. asociativa del producto de matrices} \\ &= \mathbb{I}_{n\times n} \cdot C \quad \text{por (1)} \\ &= C \quad \text{por ser } \mathbb{I}_{n\times n} \text{ neutro del producto de matrices en } \mathbb{K}^{n\times n} \end{aligned}$$

Luego, la inversa de A es única. ■

Notación

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible, como la inversa de A es única, ésta se denota A^{-1}. Entonces podemos escribir:

$$A \text{ es } \textbf{inversible} \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n}$$

El siguiente teorema, se acepta **sin demostración**.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\exists B \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot B = \mathbb{I} \ \vee \ B \cdot A = \mathbb{I} \Rightarrow A \ \textit{es inversible} \wedge A^{-1} = B$$

Observación

El teorema anterior permite "relajar" en algún sentido la definición de matriz inversible, pues con dicho resultado el trabajo se reduce a la mitad dado que no será necesario comprobar la conmutatividad de las matrices.

Propiedades (de las matrices inversibles)

1. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible $\Rightarrow A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversibles $\Rightarrow A \cdot B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

   GENERALIZACIÓN:

$$\begin{aligned} A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ inversibles } &\Rightarrow A_1 \cdot A_2 \cdot\ \ldots\ \cdot A_s \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ inversible y} \\ (A_1 \cdot A_2 \cdot\ \ldots\ \cdot A_s)^{-1} &= (A_s)^{-1} \cdot\ \ldots\ \cdot (A_2)^{-1} \cdot (A_1)^{-1} \end{aligned}$$

3. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible $\Rightarrow A^t \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

4. $c \in \mathbb{K} - \{0\}$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible $\Rightarrow cA \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1}$

Demostración

1. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible. Por definición de matriz inversible:

$$A \text{ inversible} \Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \quad (1)$$

   Entonces

$$A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \Rightarrow A^{-1} \text{ es inversible y } \left(A^{-1}\right)^{-1} = A \quad \text{por teorema anterior}$$

2. Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversibles. Por definición de matriz inversible:

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \quad (1) \\ B \text{ inversible} &\Leftrightarrow \exists B^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n} : B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = \mathbb{I}_{n\times n} \quad (2) \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $B^{-1} \cdot A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) &= A \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) \cdot A^{-1} \quad \text{por prop. asociativa del producto de matrices} \\ &= A \cdot \mathbb{I}_{n\times n} \cdot A^{-1} \quad \text{por (2)} \\ &= A \cdot A^{-1} \quad \text{por ser } \mathbb{I}_{n\times n} \text{ neutro multiplicativo en } \mathbb{K}^{n\times n} \\ &= \mathbb{I}_{n\times n} \quad \text{por (1)} \end{aligned}$$

   Como

$$(A \cdot B)\cdot\left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) = \mathbb{I}_{n\times n} \Rightarrow A\cdot B \text{ es inversible y } (A \cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} \quad \text{por teorema anterior}$$

   La GENERALIZACIÓN se acepta **sin demostración.**

3. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible. Por definición de matriz inversible:

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \qquad (1)$$

Como las matrices son iguales, sus transpuestas también lo son:

$$A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \Rightarrow \left(A^{-1} \cdot A\right)^t = \left(\mathbb{I}_{n\times n}\right)^t$$

Por propiedad de la transpuesta del producto y por ser $\mathbb{I}_{n\times n}$ matriz simétrica, se tiene que:

$$A^t \cdot \left(A^{-1}\right)^t = \mathbb{I}_{n\times n} \Rightarrow A^t \text{ es inversible } \wedge \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t \quad \text{por teorema anterior}$$

4. Queda para el alumno.

■

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$A \textit{ tiene una fila o columna nula} \Rightarrow A \textit{ es singular (o no inversible)}$$

Demostración

- Supongamos que

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ tiene una fila nula} \quad &\Rightarrow \quad \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n},\ A \cdot B \text{ tiene una fila nula} \\ &\qquad \text{por propiedad del producto de matrices} \\ &\Rightarrow \quad \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n},\ A \cdot B \neq \mathbb{I}_{n\times n} \\ &\Rightarrow \quad A \text{ no es inversible} \end{aligned}$$

- Supongamos que

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ tiene una columna nula} \quad &\Rightarrow \quad \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n},\ B \cdot A \text{ tiene una columna nula} \\ &\qquad \text{por propiedad del producto de matrices} \\ &\Rightarrow \quad \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n},\ B \cdot A \neq \mathbb{I}_{n\times n} \\ &\Rightarrow \quad A \text{ no es inversible} \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema se acepta **sin demostración**.

Teorema

Toda matriz elemental es inversible y su inversa es una matriz elemental del mismo tipo.

Más precisamente:

- $(\mathbb{I}_i(c))^{-1} = \mathbb{I}_i(\frac{1}{c}),\ c \in \mathbb{K} - \{0\}$
- $(\mathbb{I}_{ij})^{-1} = \mathbb{I}_{ij}$
- $(\mathbb{I}_{ij}(c))^{-1} = \mathbb{I}_{ij}(-c),\ \ c \in \mathbb{K}$

donde $\mathbb{I} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Observación

- Si se multiplica por c la fila i de la identidad, para volver a la identidad, se debe multiplicar la fila i por $\dfrac{1}{c}$.
- Si se intercambian las filas i y j de la identidad, para volver a la identidad se deben intercambiar nuevamente las filas i y j.
- Si a la fila i de la identidad se le suma la fila j multiplicada por c, para volver a la identidad, a la fila i se le suma la fila j multiplicada por $(-c)$.

Ejemplo

Determina las inversas de las siguientes matrices elementales: $\mathbb{I}_{13}$, $\mathbb{I}_2\,(3)$, $\mathbb{I}_{23}\,(-2) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Resolución

- $\mathbb{I}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\sim_f} \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{I}_{13} \cdot \mathbb{I}_{13} = \mathbb{I} \Rightarrow (\mathbb{I}_{13})^{-1} = \mathbb{I}_{13}$
- $\mathbb{I}_2\,(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}f_2}{\sim_f} \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{I}_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \mathbb{I}_2\,(3) = \mathbb{I} \Rightarrow (\mathbb{I}_2\,(3))^{-1} = \mathbb{I}_2\left(\frac{1}{3}\right)$
- $\mathbb{I}_{23}\,(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_2 + 2f_3}{\sim_f} \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{I}_{23}\,(2) \cdot \mathbb{I}_{23}\,(-2) = \mathbb{I} \Rightarrow (\mathbb{I}_{23}\,(-2))^{-1} = \mathbb{I}_{23}\,(2)$

Recuerda que, por teorema, efectuar una operación elemental de fila equivale a premultiplicar por la correspondiente matriz elemental.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *A es inversible.*

2. *$A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n}$*

3. *A es producto de un número finito de matrices elementales.*

Demostración

Las afirmaciones son equivalentes si se cumplen las implicaciones indicadas en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & 1. \arrow[dr, Rightarrow] & \\ 3. \arrow[ur, Rightarrow] & & 2. \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

1. $\Rightarrow$ 2. Debemos probar entonces la siguiente implicación:

$$A \text{ es inversible } \Rightarrow A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n}$$

Por hipótesis $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inversible. Queremos probar que $A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n}$

$$A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\Rightarrow\; \exists!\, E_{rf}(A) \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \sim_f E_{rf}(A) \quad \text{por teorema}$$

Por condición necesaria y suficiente de equivalencia por filas:

$$A \sim_f E_{rf}(A) \Rightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ producto de un n}^o \text{ finito de matrices elementales} : E_{rf}(A) = P{\cdot}A$$

Sabemos que las matrices elementales son inversibles (por teorema) y el producto de matrices inversibles es inversible (por propiedad). Así:

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ es inversible} \quad \text{(por ser prod. de matrices inversibles)} \\ A \text{ es inversible (por hipótesis)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P\cdot A \text{ es inversible} \quad \text{(por ser} \\ \text{prod. de matrices inversibles)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\; E_{rf}(A) \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ es inversible} \quad E_{rf}(A) \text{ no puede tener ni filas ni columnas nulas} \\ &\Rightarrow\; E_{rf}(A) = \mathbb{I}_{n\times n} \quad \text{las columnas de } E_{rf}(A) \text{ son vectores canónicos} \\ &\Rightarrow\; A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n} \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 3. Debemos probar que

$$A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n} \Rightarrow A \text{ es producto de un n}^o \text{ finito de matrices elementales.}$$

Por hipótesis $A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n}$. Queremos probar que A es producto de un n^o finito de matrices elementales.

Por condición necesaria y suficiente de equivalencia de filas:

$$\begin{aligned} A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n} &\Rightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ producto de un n}^o \text{ finito de matrices elementales} : A = P \cdot \mathbb{I} \\ &\Rightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ producto de un n}^o \text{ finito de matrices elementales} : A = P \\ &\Rightarrow A \text{ es producto de un n}^o \text{ finito de matrices elementales} \end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$ 1. Se debe probar que:

$$A \text{ es producto de un n}^o \text{ finito de matrices elementales } \Rightarrow A \text{ es inversible.}$$

Por hipótesis A es producto de un n^o finito de matrices elementales, como las matrices elementales son inversibles y el producto de matrices inversibles es inversible, se tiene que A es inversible.

$\blacksquare$

Observación

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces

$$A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n} \Leftrightarrow rg\,(A) = n$$

Es decir, tenemos otra equivalencia que podemos agregar a las anteriores.

El siguiente teorema permitirá decidir cuando una matriz es inversible y nos dará un método para hallar la inversa, cuando ésta exista.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

A es inversible $\Rightarrow$ A^{-1} se obtiene de la matriz $\mathbb{I}_{n\times n}$ mediante las mismas operaciones elementales de filas que transforman la matriz A en la matriz $\mathbb{I}_{n\times n}$

Demostración

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces por hipótesis

$$\begin{aligned}
A \text{ inversible} \quad &\Rightarrow \quad A \sim_f \mathbb{I}_{n\times n} \quad \text{por teorema de equivalencias para matriz inversible}\\
&\Rightarrow \quad \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ producto de un n}^o \text{ finito de matrices elementales } : P\cdot A = \mathbb{I}_{n\times n}\\
&\qquad\quad \text{por condición necesaria y suficiente para } \sim_f\\
&\Rightarrow \quad \exists P = E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \in \mathbb{K}^{n\times n} : P\cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \qquad (1)\\
&\qquad \text{donde } E_i \text{ matriz elemental } (\therefore \text{inversible}) \ \forall i = 1,\ldots,s\\
&\Rightarrow \quad A^{-1} = P \quad \text{por teorema}\\
&\Rightarrow \quad A^{-1} = P\cdot \mathbb{I}_{n\times n} \quad \text{por ser } \mathbb{I} \text{ neutro del producto}\\
&\Rightarrow \quad A^{-1} = E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I}_{n\times n} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Recordar que, por teorema, premultiplicar por una matriz elemental es equivalente a realizar la correspondiente operación elemental de filas en la matriz.

Entonces, de (1) y (2), se tiene que A^{-1} se obtiene de $\mathbb{I}_{n\times n}$ luego de aplicar las mismas operaciones elementales de filas aplicadas a la matriz A para obtener la matriz $\mathbb{I}_{n\times n}$. ■

El teorema anterior proporciona la siguiente forma práctica para calcular la inversa de una matriz inversible.

Regla Practica: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible.

Para determinar la inversa de A en una tabla de dos columnas, se ubica A en la columna izquierda y la identidad a su derecha, luego se realizan operaciones elementales a ambas matrices hasta llegar la identidad en la columna de la izquierda, obteniendose a la derecha la inversa de A

A	$\mathbb{I}_{n\times n}$	
$E_1 \cdot A$	$E_1 \cdot \mathbb{I}_{n\times n}$	e_1
$E_2 \cdot E_1 \cdot A$	$E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I}_{n\times n}$	e_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$	$E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I}_{n\times n}$	e_s
$\mathbb{I}_{n\times n}$	$\boxed{A^{-1}}$	

Observación

- Si se pide determinar la inversa de A debemos utilizar la regla práctica anterior. En cambio si se pide comprobar que una matriz A es inversible, basta con realizar operaciones elementales de filas que transformen A en la matriz $\mathbb{I}$

- Para aplicar la regla práctica no es necesario saber de antemano si la matriz A es inversible. Ya que si A es singular, $E_{rf}(A)$ tiene al menos una fila nula lo cúal es evidente en el diagrama.

- De la regla práctica anterior:

$$
\begin{aligned}
E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \mathbb{I}_{n\times n} \quad &\Rightarrow \quad \boxed{A^{-1} = E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1} \\
&\Rightarrow \quad \left(A^{-1}\right)^{-1} = (E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1} \\
&\Rightarrow \quad \boxed{A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_s^{-1}}
\end{aligned}
$$

por generalización de la propiedad de matriz inversible

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. En caso de ser posible determina la inversa de A y expresa A y A^{-1} como producto de matrices elemetales.

Resolución

$$
\begin{array}{ccc|ccc|l}
 & A & & & \mathbb{I} & & \\
\hline
-1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & (-1)\, f_1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_2 \leftrightarrow f_3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & f_1 + 2f_3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
\hline
 & \mathbb{I} & & & A^{-1} & &
\end{array}
$$

Como $A \sim_f \mathbb{I}_{3\times 3}$ entonces A es inversible y se tiene que

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

pues A^{-1} se obtiene de la matriz $\mathbb{I}_{3\times 3}$ mediante las mismas operaciones elementales de filas que transforman la matriz A en la matriz $\mathbb{I}_{3\times 3}$

Como efectuar operaciones elementales de filas equivale a premultiplicar por matrices elementales, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}_{13}(2) \cdot \mathbb{I}_{23} \cdot \mathbb{I}_1(-1) \cdot A = \mathbb{I}_{3\times 3} \quad & \Rightarrow \quad A^{-1} = \mathbb{I}_{13}(2) \cdot \mathbb{I}_{23} \cdot \mathbb{I}_1(-1) \\
& \Rightarrow \quad \left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathbb{I}_{13}(2) \cdot \mathbb{I}_{23} \cdot \mathbb{I}_1(-1)\right)^{-1} \\
& \Rightarrow \quad A = \left(\mathbb{I}_1(-1)\right)^{-1} \cdot \left(\mathbb{I}_{23}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbb{I}_{13}(2)\right)^{-1} \\
& \Rightarrow \quad A = \mathbb{I}_1(-1) \cdot \mathbb{I}_{23} \cdot \mathbb{I}_{13}(-2)
\end{aligned}
$$

Luego $A^{-1} = \mathbb{I}_{13}(2) \cdot \mathbb{I}_{23} \cdot \mathbb{I}_1(-1)$ y $A = \mathbb{I}_1(-1) \cdot \mathbb{I}_{23} \cdot \mathbb{I}_{13}(-2)$

Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Entonces

1. $A = B \Rightarrow \forall C \in \mathbb{K}^{n\times p},\ A \cdot C = B \cdot C$

2. $A = B \Rightarrow \forall D \in \mathbb{K}^{p\times m},\ D \cdot A = D \cdot B$

Demostración Trivial, se deja como ejercicio.

■

Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y sean $C \in \mathbb{K}^{n\times n}, D \in \mathbb{K}^{m\times m}$ inversibles. Entonces

1. $A \cdot C = B \cdot C \Rightarrow A = B$

2. $D \cdot A = D \cdot B \Rightarrow A = B$

Demostración Trivial. se deja como ejercicio.

■