Matrices - Parte 2

Producto de matrices

A continuación estudiaremos el producto de matrices, tal vez ésta operación sea una de las más importantes entre matrices por sus propiedades y la utilidad en difentes aplicaciones.

Definición (Producto de matrices)

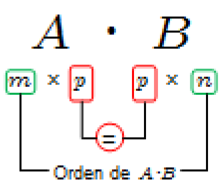
Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times p},\ B \in \mathbb{K}^{p\times n}$*. El* ***producto*** *de* A *por* B *(en ese orden) es la matriz* $A \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$\forall i : 1 \leq i \leq m,\ \forall j : 1 \leq j \leq n,\ \langle A \cdot B\rangle_{ij} = \sum_{h=1}^{p} \langle A\rangle_{ih} \langle B\rangle_{hj}$$

Observación

Según la definición:

- El producto de dos matrices está definido cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. Si esto ocurre, se dice que las matrices son **multiplicables** (en ese orden).



  En caso contrario, el producto no está definido.

- Los elementos de la matriz producto $A \cdot B$ se calculan de la siguiente manera:

  $\forall i : 1 \leq i \leq m,\ \forall j : 1 \leq j \leq n,$

$$\langle A \cdot B\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{i1} \langle B\rangle_{1j} + \langle A\rangle_{i2} \langle B\rangle_{2j} + \ldots + \langle A\rangle_{ip} \langle B\rangle_{pj}$$

  Es decir, el elemento $\langle A \cdot B\rangle_{ij}$ se obtiene como la suma de los productos de cada elemento de la fila i de A, por el correspondiente elemento de la columna j de B. En consecuencia, el elemento $\langle A \cdot B\rangle_{ij}$ se obtiene empleando sólo la fila i de A y la columna j de B.

Regla práctica (del producto de matrices)

Dadas las matrices $A \in \mathbb{K}^{m\times p}, B \in \mathbb{K}^{p\times n}$, multiplicables, para calcular la matriz producto $A\cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se colocan las matrices A y B según la disposición del Cuadro 1. Luego se calculan, $\forall i : 1 \leq i \leq m$, $\forall j : 1 \leq j \leq n$, los $m \cdot n$ elementos $\langle A\cdot B\rangle_{ij}$ como la suma de los productos de la fila i de A por los correspondientes elementos de la columna j de B. Finalmente se obtiene $A\cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y se ubica según el Cuadro 1.

Cuadro 1: Regla Práctica

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} \langle B\rangle_{11} & \cdots & \color{blue}{\langle B\rangle_{1j}} & \cdots & \langle B\rangle_{1n} \\ \langle B\rangle_{21} & \cdots & \color{blue}{\langle B\rangle_{2j}} & \cdots & \langle B\rangle_{2n} \\ \vdots & & \color{blue}{\vdots} & & \vdots \\ \langle B\rangle_{p1} & \cdots & \color{blue}{\langle B\rangle_{pj}} & \cdots & \langle B\rangle_{pn} \end{pmatrix} = B \\
\hline
A = \begin{pmatrix} \langle A\rangle_{11} & \langle A\rangle_{12} & \cdots & \langle A\rangle_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{\langle A\rangle_{i1}} & \color{red}{\langle A\rangle_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{\langle A\rangle_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle A\rangle_{m1} & \langle A\rangle_{m2} & \cdots & \langle A\rangle_{mp} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \langle A\cdot B\rangle_{11} & \cdots & \langle A\cdot B\rangle_{1j} & \cdots & \langle A\cdot B\rangle_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle A\cdot B\rangle_{i1} & \cdots & \color{magenta}{\langle A\cdot B\rangle_{ij}} & \cdots & \langle A\cdot B\rangle_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle A\cdot B\rangle_{m1} & \cdots & \langle A\cdot B\rangle_{mj} & \cdots & \langle A\cdot B\rangle_{mn} \end{pmatrix} = A\cdot B
\end{array}
$$

Ejemplo

Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Determina, en caso de ser posible, las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$

- Como $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ entonces el producto está definido (pues el número de columnas de A es 2 y coincide con el número de filas de B) y $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

  $A_{\color{green}{2}\times\color{red}{2}} \wedge B_{\color{red}{2}\times\color{green}{3}} \Longrightarrow (A\cdot B)_{\color{green}{2\times 3}}$

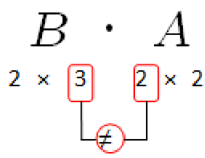
		-1	1	3
$A\cdot B$		2	1	0
2	-1	-4	1	6
0	1	2	1	0

  Entonces: $A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

  pues:

$$
\begin{aligned}
\langle A\cdot B\rangle_{11} &= \langle A\rangle_{11}\langle B\rangle_{11}+\langle A\rangle_{12}\langle B\rangle_{21}=2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=-4\\
\langle A\cdot B\rangle_{12} &= \langle A\rangle_{11}\langle B\rangle_{12}+\langle A\rangle_{12}\langle B\rangle_{22}=2\cdot 1+(-1)\cdot 1=1\\
\langle A\cdot B\rangle_{13} &= \langle A\rangle_{11}\langle B\rangle_{13}+\langle A\rangle_{12}\langle B\rangle_{23}=2\cdot 3+(-1)\cdot 0=6\\
\langle A\cdot B\rangle_{21} &= \langle A\rangle_{21}\langle B\rangle_{11}+\langle A\rangle_{22}\langle B\rangle_{21}=0\cdot(-1)+1\cdot 2=2\\
\langle A\cdot B\rangle_{22} &= \langle A\rangle_{21}\langle B\rangle_{12}+\langle A\rangle_{22}\langle B\rangle_{22}=0\cdot 1+1\cdot 1=1\\
\langle A\cdot B\rangle_{23} &= \langle A\rangle_{21}\langle B\rangle_{13}+\langle A\rangle_{22}\langle B\rangle_{23}=0\cdot 3+1\cdot 0=0
\end{aligned}
$$

- Como $B\in\mathbb{R}^{2\times 3}$ y $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces el producto **no** está definido (pues el número de columnas de B es 3 y es diferente al número de filas de A que es 2).



Notar que:

$\boxed{\text{el producto } A\cdot B \text{ está definido pero } B\cdot A \text{ no está definido.}}$

Notación

Sean $A\in\mathbb{K}^{m\times p},\ B\in\mathbb{K}^{p\times n}$

- La fila i de A se denota $A^{(i)}$, donde $1\le i\le m$,

$$A^{(i)}=\begin{pmatrix}\langle A\rangle_{i1} & \langle A\rangle_{i2} & \dots & \langle A\rangle_{ip}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^{1\times p}$$

- La columna j de B se denota B_j, donde $1\le j\le n$

$$B_j=\begin{pmatrix}\langle B\rangle_{1j}\\ \langle B\rangle_{2j}\\ \vdots\\ \langle B\rangle_{pj}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^{p\times 1}$$

Observación

Sean $A\in\mathbb{K}^{m\times p},\ B\in\mathbb{K}^{p\times n}$

$\forall i: 1\le i\le m, \forall j: 1\le j\le n,\ A^{(i)}\in\mathbb{K}^{1\times p}$ y $B_j\in\mathbb{K}^{p\times 1}$ entonces las matrices son multiplicables y $A^{(i)}\cdot B_j\in\mathbb{K}^{1\times 1}$. Es decir $A^{(i)}\cdot B_j\in\mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
A^{(i)} \cdot B_j &= \begin{pmatrix} \langle A \rangle_{i1} & \langle A \rangle_{i2} & \dots & \langle A \rangle_{ip} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle B \rangle_{1j} \\ \langle B \rangle_{2j} \\ \vdots \\ \langle B \rangle_{pj} \end{pmatrix} \\
&= \langle A \rangle_{i1} \langle B \rangle_{1j} + \langle A \rangle_{i2} \langle B \rangle_{2j} + \ldots + \langle A \rangle_{ip} \langle B \rangle_{pj} \\
&= \langle A \cdot B \rangle_{ij}
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\forall i : 1 \leq i \leq m, \forall j : 1 \leq j \leq n,\ \ \langle A \cdot B \rangle_{ij} = A^{(i)} \cdot B_j$$

Notar que el elemento $\langle A \cdot B \rangle_{ij}$ se obtiene de realizar el producto de la fila i de A por la columna j de B.

Luego

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B_1 & \dots & A^{(1)} \cdot B_j & \dots & A^{(1)} \cdot B_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^{(i)} \cdot B_1 & \dots & A^{(i)} \cdot B_j & \dots & A^{(i)} \cdot B_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^{(m)} \cdot B_1 & \dots & A^{(m)} \cdot B_j & \dots & A^{(m)} \cdot B_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

Se observa fácilmente que:

- Para hallar la fila i de la matriz $A \cdot B$ se necesita la fila i de A y las n columnas de la matriz B. Esto conduce al siguiente resultado:

$$\forall i : 1 \leq i \leq m,\ (A \cdot B)^{(i)} = A^{(i)} \cdot B$$

Análogamente

- Para hallar la columna j de la matriz $A \cdot B$ se necesitan las m filas de la matriz A y la columna j de la matriz B. Lo cual conduce a:

$$\forall j : 1 \leq j \leq n,\ (A \cdot B)_j = A \cdot B_j$$

Los 2 resultados previos se aceptan sin demostración.

Ejemplo

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Determina, si es posible, las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

- Como $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ entonces el producto $A \cdot B$ está definido (pues el número de columnas de A es igual al número de filas de B) y $A \cdot B \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

$A \cdot B$			3 -1 2
1	0	-2	-1

Por lo tanto, $A \cdot B = -1 \in \mathbb{R}$

- Como $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ y $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ entonces el producto $B \cdot A$ está definido (pues el número de columnas de B es igual al número de filas de A) y $B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$B \cdot A$	1	0	-2
3	3	0	-6
-1	-1	0	2
2	2	0	-4

Por lo tanto, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Notar que:

> Las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$ están definidas pero **no** tienen el mismo orden, por lo tanto **no** son iguales.

Observación

Dadas las matrices $A \in \mathbb{K}^{1\times n},\ B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Entonces

1. $A \cdot B \in \mathbb{K}^{1\times 1}$, es decir $A \cdot B \in \mathbb{K}$
2. $B \cdot A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Ejemplo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Determina, en caso de ser posible, las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$

Como A y B son matrices cuadradas de orden 2 entonces los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ están definidos y $A \cdot B$, $B \cdot A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{A \cdot B} & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{cc|cc} & & 1 & -2 \\ \multicolumn{2}{c|}{B \cdot A} & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Luego $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Notar que:

- La matriz $A \cdot B = \Theta_{2\times 2}$ y sin embargo ninguna de las matrices A y B es nula.
- Las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$ están definidas y tienen el mismo orden pero **no** son iguales.

Observación

De los ejemplos se concluye que:

- Dadas $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ y $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$

$$A \cdot B = \Theta_{m\times n} \not\Rightarrow A = \Theta_{m\times p} \vee B = \Theta_{p\times n}$$

- El producto de matrices **no es conmutativo**

Esto no significa que no puedan existir un par de matrices que conmuten con el producto. Como se observa en el siguiente ejemplo

Ejemplo

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Comprueba que A y B conmutan con el producto.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $A \cdot B = B \cdot A$

Propiedades (del producto de matrices)

1. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times p}, \forall B \in \mathbb{K}^{p\times q}, \forall C \in \mathbb{K}^{q\times n}$, $(A \cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)$ (Asociativa)

2. Leyes Distributivas

   a) $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times p},\ \forall B,\ C \in \mathbb{K}^{p\times n},\ A\cdot (B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

   b) $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times p},\ \forall C \in \mathbb{K}^{p\times n},\ (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

3. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathbb{K}^{m\times p}, \forall B \in \mathbb{K}^{p\times n},\ (\lambda A)\cdot B = \lambda\,(A\cdot B) = A\cdot(\lambda B)$ (Asociativa Mixta)

4. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} : A\cdot \mathbb{I}_{n\times n} = A\ \wedge\ \mathbb{I}_{m\times m}\cdot A = A$

   En particular:

   $\forall A \in \Bbbk^{n\times n},\ A\cdot \mathbb{I}_{n\times n} = \mathbb{I}_{n\times n}\cdot A = A$ (Existencia del neutro)

5. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times p},\ B \in \mathbb{K}^{p\times n}$.

   a) Si la fila i de A es nula entonces la fila i de $A\cdot B$ es nula.

   b) Si la columna j de B es nula entonces la columna j de $A\cdot B$ es nula.

6. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} : A\cdot \Theta_{n\times p} = \Theta_{m\times p}\ \wedge\ \Theta_{p\times m}\cdot A = \Theta_{p\times n}$

   En particular:

   $\forall A \in \Bbbk^{n\times n},\ A\cdot \Theta_{n\times n} = \Theta_{n\times n}\cdot A = \Theta_{n\times n}$

Demostración Veamos la prueba de:

1. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times p}, B \in \mathbb{K}^{p\times q}, C \in \mathbb{K}^{q\times n}$. Debemos probar que: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)$

   Veamos primero que la igualdad está definida. Como

   $$\left.\begin{array}{r} A \in \mathbb{K}^{m\times p} \wedge B \in \mathbb{K}^{p\times q} \Rightarrow A\cdot B \in \mathbb{K}^{m\times q} \\ C \in \mathbb{K}^{q\times n} \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cdot B)\cdot C \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

   Por otra parte

   $$\left.\begin{array}{r} A \in \mathbb{K}^{m\times p} \\ B \in \mathbb{K}^{p\times q} \wedge C \in \mathbb{K}^{q\times n} \Rightarrow B\cdot C \in \mathbb{K}^{p\times n} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot (B\cdot C) \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

   Observemos entonces que $(A\cdot B)\cdot C,\ A\cdot(B\cdot C) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ con lo cual la igualdad está definida.

   Probemos que son iguales, es decir, debemos probar que:

   $$\forall i : 1 \le i \le m,\ \forall j : 1 \le j \le n,\ \langle (A\cdot B)\cdot C\rangle_{ij} = \langle A\cdot (B\cdot C)\rangle_{ij}$$

Efectivamente:

$\forall i : 1 \leq i \leq m,\ \forall j : 1 \leq j \leq n,$

$$\begin{aligned}
\langle (A \cdot B) \cdot C \rangle_{ij} &= \sum_{h=1}^{q} \langle A \cdot B \rangle_{ih} \langle C \rangle_{hj} \quad \text{por def. de producto de matrices} \\
&= \sum_{h=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} \langle A \rangle_{ik} \langle B \rangle_{kh} \right) \langle C \rangle_{hj} \quad \text{por def. de producto de matrices} \\
&= \sum_{h=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \langle A \rangle_{ik} \langle B \rangle_{kh} \langle C \rangle_{hj} \quad \text{por prop. de sumas finitas} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{h=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \langle B \rangle_{kh} \langle C \rangle_{hj} \quad \text{por prop. de sumas finitas} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \langle A \rangle_{ik} \sum_{h=1}^{q} \langle B \rangle_{kh} \langle C \rangle_{hj} \quad \text{por prop. de sumas finitas} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \langle A \rangle_{ik} \langle B \cdot C \rangle_{kj} \quad \text{por def. de producto de matrices} \\
&= \langle A \cdot (B \cdot C) \rangle_{ij} \quad \text{por def. de producto de matrices}
\end{aligned}$$

Entonces, por definición de igualdad de matrices, se tiene que

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times p},\ \forall B \in \mathbb{K}^{p \times q},\ \forall C \in \mathbb{K}^{q \times n},\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

2. Probemos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma a derecha:

   a) Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ y $B,\ C \in \mathbb{K}^{p \times n}$. Debemos probar que: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

   Observemos primero que la igualdad está definida.

   Como

$$\left. \begin{array}{r} A \in \mathbb{K}^{m \times p} \\ B \wedge C \in \mathbb{K}^{p \times n} \Rightarrow B + C \in \mathbb{K}^{p \times n} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot (B + C) \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

   Por otra parte

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathbb{K}^{m \times p} \wedge B \in \mathbb{K}^{p \times n} \Rightarrow A \cdot B \in \mathbb{K}^{m \times n} \\ A \in \mathbb{K}^{m \times p} \wedge C \in \mathbb{K}^{p \times n} \Rightarrow A \cdot C \in \mathbb{K}^{m \times n} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot B + A \cdot C \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

   Entonces $A \cdot (B + C),\ A \cdot B + A \cdot C \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Con lo cual la igualdad de matrices está definida. Probemos que son iguales, es decir dedemos probar que:

$$\forall i : 1 \leq i \leq m,\ \forall j : 1 \leq j \leq n,\ \langle A \cdot (B + C) \rangle_{ij} = \langle A \cdot B + A \cdot C \rangle_{ij}$$

Efectivamente:

$\forall i : 1 \leq i \leq m,\ \forall j : 1 \leq j \leq n,$

$$\begin{aligned}
\langle A \cdot (B+C) \rangle_{ij} &= \sum_{h=1}^{p} \langle A \rangle_{ih} \langle B+C \rangle_{hj} && \text{por def. de producto de matrices} \\
&= \sum_{h=1}^{p} \langle A \rangle_{ih} \Big(\langle B \rangle_{hj} + \langle C \rangle_{hj} \Big) && \text{por def. de suma de matrices} \\
&= \sum_{h=1}^{p} \Big(\langle A \rangle_{ih} \langle B \rangle_{hj} + \langle A \rangle_{ih} \langle C \rangle_{hj} \Big) && \left\{ \begin{array}{l} \text{por prop. dist. del producto} \\ \text{respecto de la suma en } \mathbb{K} \end{array} \right. \\
&= \sum_{h=1}^{p} \langle A \rangle_{ih} \langle B \rangle_{hj} + \sum_{h=1}^{p} \langle A \rangle_{ih} \langle C \rangle_{hj} && \text{por prop. de sumas finitas.} \\
&= \langle A \cdot B \rangle_{ij} + \langle A \cdot C \rangle_{ij} && \text{por def. de producto de matrices} \\
&= \langle A \cdot B + A \cdot C \rangle_{ij} && \text{por def. de suma de matrices}
\end{aligned}$$

Luego, por definición de igualdad de matrices, se tiene que:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times p},\ \forall B, C \in \mathbb{K}^{p \times n},\ A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

b) Se deja como ejercicio.

3. Se deja como ejercicio.

4. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Debemos probar $A \cdot \mathbb{I}_{n \times n} = A \ \wedge \ \mathbb{I}_{m \times m} \cdot A = A$

- La primera igualdad está definida pues $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $A \cdot \mathbb{I}_{n \times n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Probemos entonces que:

$$\forall i : 1 \leq i \leq m,\ \forall j : 1 \leq j \leq n,\ \langle A \cdot \mathbb{I}_{n \times n} \rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ij}$$

Efectivamente

$\forall i : 1 \leq i \leq m,\ \forall j : 1 \leq j \leq n,$

$$\begin{aligned}
\langle A \cdot \mathbb{I} \rangle_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} \langle A \rangle_{ih} \langle \mathbb{I} \rangle_{hj} && \text{por def. de producto de matrices, con } \mathbb{I} \in \mathbb{K}^{n \times n} \\
&= \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{n} \langle A \rangle_{ih} \underbrace{\delta_{hj}}_{=0} + \langle A \rangle_{ij} \underbrace{\delta_{jj}}_{=1} && \left\{ \begin{array}{l} \text{por prop. de sumas finitas} \\ \text{y por def. } \mathbb{I}_{n \times n} = (\delta_{hj}) \end{array} \right. \\
&= 0 + \langle A \rangle_{ij} && \text{por def. de Delta de Kronecker} \\
&= \langle A \rangle_{ij} && \text{por ser 0 el neutro de la suma en } \mathbb{K}
\end{aligned}$$

Luego, por definición de igualdad de matrices, se tiene que: $A \cdot \mathbb{I}_{n \times n} = A$

- La segunda igualdad se demuestra de manera análoga y queda como ejercicio para los alumnos.

Por lo tanto

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ A\cdot \mathbb{I}_{n\times n} = A \ \wedge\ \mathbb{I}_{m\times m}\cdot A = A$$

5. *a*) Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ tal que $(A)^{(i)} = \Theta_{1\times p}$ (con i fijo, $1 \leq i \leq m$) y sea $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Queremos probar que: $(A\cdot B)^{(i)} = \Theta_{1\times n}$

   Como $A \in \mathbb{K}^{m\times p},\ B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ entonces $A\cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. En consecuencia, $(A\cdot B)^{(i)} \in \mathbb{K}^{1\times n}$ y sólo resta probar que es nula.

   Efectivamente:

$$\begin{aligned}
(A\cdot B)^{(i)} &= \begin{pmatrix} \langle A\cdot B\rangle_{i1} & \langle A\cdot B\rangle_{i2} & \cdots & \langle A\cdot B\rangle_{in} \end{pmatrix} \quad \text{por def. de fila de una matriz}\\
&= \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{p} \underbrace{\langle A\rangle_{ih}}_{=0} \langle B\rangle_{h1} & \sum_{h=1}^{p} \underbrace{\langle A\rangle_{ih}}_{=0} \langle B\rangle_{h2} & \cdots & \sum_{h=1}^{p} \underbrace{\langle A\rangle_{ih}}_{=0} \langle B\rangle_{hn} \end{pmatrix}\\
&\quad \text{(por def. de prod. de matrices)}\\
&= \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{p} 0\,\langle B\rangle_{h1} & \sum_{h=1}^{p} 0\,\langle B\rangle_{h2} & \cdots & \sum_{h=1}^{p} 0\,\langle B\rangle_{hn} \end{pmatrix}\\
&\quad \text{(por hip. } (A)^{(i)} = \Theta_{1\times p} \Rightarrow \forall h = 1,\ldots,p\ ,\ \langle A\rangle_{ih} = 0)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{1\times n}\\
&= \Theta_{1\times n}
\end{aligned}$$

   Luego,

$$A^{(i)} = \Theta_{1\times p} \Rightarrow (A\cdot B)^{(i)} = \Theta_{1\times n}$$

   b) Queda para el alumno.

6. Se deja como ejercicio.

■

El siguiente teorema se acepta sin demostración:

Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Entonces

1. $A = B \Rightarrow \forall C \in \mathbb{K}^{n\times p},\ A\cdot C = B\cdot C$

2. $A = B \Rightarrow \forall D \in \mathbb{K}^{p\times m},\ D\cdot A = D\cdot B$

Matriz transpuesta

Definición (Matriz transpuesta)

*Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. La **transpuesta** de A es la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n\times m}$:*

$$\forall i : 1 \leq i \leq n,\ \forall j : 1 \leq j \leq m,\ \left\langle A^t \right\rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ji}$$

Observación

La matriz A^t se obtiene intercambiando ordenadamente las filas por las columnas en A. Es decir, la fila i de A^t es la columna i de A para todo i.

Ejemplo

Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Determina A^t, B^t y C^t

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},\ B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.\ \text{y } C^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Propiedades (de la matriz transpuesta)

1. $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n},\ (A + B)^t = A^t + B^t$

2. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times p}, \forall B \in \mathbb{K}^{p\times n},\ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

3. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ (A^t)^t = A$

4. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ (\lambda A)^t = \lambda A^t$

Demostración

1. Sean $A,\ B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Queremos probar que $(A + B)^t = A^t + B^t$

   Observemos que $A^t,\ B^t \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $A + B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y en consecuencia
   $A^t + B^t,\ (A + B)^t \in \mathbb{K}^{n\times m}$ por lo que la igualdad está definida.

   Probemos entonces que: $\forall i : 1 \leq i \leq n,\ \forall j : 1 \leq j \leq m,\ \left\langle (A + B)^t \right\rangle_{ij} = \langle A^t + B^t \rangle_{ij}$

   Efectivamente:

$\forall i : 1 \leq i \leq n,\ \forall j : 1 \leq j \leq m,$

$$\begin{aligned}
\left\langle (A+B)^t \right\rangle_{ij} &= \langle A+B \rangle_{ji} \quad \text{por def. de transpuesta de una matriz} \\
&= \langle A \rangle_{ji} + \langle B \rangle_{ji} \quad \text{por def. de suma de matrices} \\
&= \left\langle A^t \right\rangle_{ij} + \left\langle B^t \right\rangle_{ij} \quad \text{por def. de transpuesta de una matriz} \\
&= \left\langle A^t + B^t \right\rangle_{ij} \quad \text{por def. de suma de matrices}
\end{aligned}$$

Luego, por la definición de igualdad de matrices, se tiene que:

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n},\ (A+B)^t = A^t + B^t$$

2. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times p},\ B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ Queremos probar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

   Observemos primero que $A \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B^t \in \mathbb{K}^{n\times p},\ A^t \in \mathbb{K}^{p\times m}$ entonces $(A \cdot B)^t$, $B^t \cdot A^t \in \mathbb{K}^{n\times m}$, en consecuencia la igualdad está definida.

   Debemos probar que: $\forall i : 1 \leq i \leq n,\ \forall j : 1 \leq j \leq m,\ \left\langle (A \cdot B)^t \right\rangle_{ij} = \langle B^t \cdot A^t \rangle_{ij}$.

   Efectivamente:

   $\forall i : 1 \leq i \leq n,\ \forall j : 1 \leq j \leq m,$

$$\begin{aligned}
\left\langle (A \cdot B)^t \right\rangle_{ij} &= \langle A \cdot B \rangle_{ji} \quad \text{por def. de transpuesta de una matriz} \\
&= \sum_{h=1}^{p} \langle A \rangle_{jh} \langle B \rangle_{hi} \quad \text{por def. de producto de matrices} \\
&= \sum_{h=1}^{p} \left\langle A^t \right\rangle_{hj} \left\langle B^t \right\rangle_{ih} \quad \text{por def. de transpuesta de una matriz} \\
&= \sum_{h=1}^{p} \left\langle B^t \right\rangle_{ih} \left\langle A^t \right\rangle_{hj} \quad \text{por prop. conmutativa del producto en } \mathbb{K} \\
&= \left\langle B^t \cdot A^t \right\rangle_{ij} \quad \text{por def. de producto de matrices}
\end{aligned}$$

   Luego, por la definición de igualdad de matrices,

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times p}, \forall B \in \mathbb{K}^{p\times n},\ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

■

Observación

En general, la transpuesta de un producto de matrices **NO** es el producto de sus transpuestas. La transpuesta de un producto de matrices es el producto de las transpuestas pero en orden invertido.

El siguiente teorema se acepta sin demostración.

Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. *Entonces*

$$A = B \Leftrightarrow A^t = B^t$$

La transposición de matrices se usa para definir dos tipos particulares de matrices cuadradas, como veremos a continuación.

Matrices simétricas y antisimétricas

Definición (Matriz simétrica)

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$A \text{ es } \textbf{\textit{simétrica}} \Leftrightarrow A^t = A$$

Consecuencias de la definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$\begin{aligned} A \text{ es } \textbf{simétrica} &\Leftrightarrow \forall i,j : 1 \leq i,j \leq n,\ \left\langle A^t \right\rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ij} && \text{por def. de igualdad de matrices} \\ &\Leftrightarrow \forall i,j : 1 \leq i,j \leq n,\ \langle A \rangle_{ji} = \langle A \rangle_{ij} && \text{por def. de matriz transpuesta} \end{aligned}$$

Es decir:

Una matriz cuadrada es **simétrica** si los elementos simétricamente ubicados respecto de la diagonal son iguales.

Observación

En la práctica basta comprobar que los elementos simétricamente ubicados fuera de la diagonal son iguales; pues los elementos de la diagonal son simétricos a si mismo.

Ejemplo

Las siguientes matrices son simétricas

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbb{I}_{5\times 5},\ \Theta_{4\times 4}$$

pues los elementos ubicados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo

Las siguientes matrices no son simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \Theta_{2\times 3}$$

- A no es simétrica, pues $\langle A\rangle_{12} = -1 \neq 1 = \langle A\rangle_{21}$
- $\Theta_{2\times 3}$ no es simétrica pues no es una matriz cuadrada.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x^2-1 \\ x+3 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina $x \in \mathbb{R}$ tal que A sea simétrica.

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x^2-1 \\ x+3 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ es simétrica} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x+3 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 - 1 = 3 \rightarrow \text{se verifica para } x = -2 \\ -2 = -2 \quad \text{se verifica } \forall x \end{cases}$$

Respuesta:

$$A \text{ es simétrica} \Leftrightarrow x = -2$$

Definición (Matriz antisimétrica)

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$A \textit{ es } \boldsymbol{antisimétrica} \Leftrightarrow A^t = -A$$

Consecuencias de la definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$\begin{aligned} A \text{ es } \textbf{antisimétrica} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i,j : 1 \leq i,j \leq n,\ \left\langle A^t\right\rangle_{ij} = \langle -A\rangle_{ij} \quad \text{por def. de igualdad de matrices} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i,j : 1 \leq i,j \leq n,\ \langle A\rangle_{ji} = -\langle A\rangle_{ij} \quad \text{por def. de transpuesta y opuesta} \end{aligned}$$

En particular, los elementos de la diagonal son nulos pues, si $i = j$ se tiene que:

$\forall i : 1 \leq i \leq n$,

$$\langle A\rangle_{ii} = -\langle A\rangle_{ii} \Rightarrow \langle A\rangle_{ii} = 0$$

Es decir:

Una matriz cuadrada es **antisimétrica** si los elementos simétricamente ubicados respecto de la diagonal son opuestos y los elementos de la diagonal son nulos.

Ejemplo

Las siguientes matrices son antisimétricas

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_{4\times 4}$$

pues los elementos ubicados simétricamente respecto de la diagonal principal son opuestos y los elementos de la diagonal son nulos.

Ejemplo

Las siguientes matrices no son antisimétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \; \Theta_{2\times 3}, \; \mathbb{I}_{5\times 5}$$

- A no es antisimétrica, pues $\langle A\rangle_{23} \neq -\langle A\rangle_{32}$ $(4 \neq -4)$
- B no es antisimétrica pues $\langle B\rangle_{33} \neq 0$
- $\Theta_{2\times 3}$ no es antisimétrica pues no es una matriz cuadrada.
- $\mathbb{I}_{5\times 5}$ no es antisimétrica ya que los elementos de la diagonal no son nulos.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x-1 & 3 & -2 \\ x-4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & x^2-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determina $x \in \mathbb{R}$ tal que A sea antisimétrica.

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & 3 & -2 \\ x-4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & x^2-1 \end{pmatrix} \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = -3 \Rightarrow x = 1 \\ 2 = -(-2) \quad \text{se verifica } \forall x \\ 1 = -(-1) \quad \text{se verifica } \forall x \\ x-1 = 0 \rightarrow \text{se verifica para } x = 1 \\ 0 = 0 \quad \text{se verifica } \forall x \\ x^2-1 = 0 \rightarrow \text{se verifica para } x = 1 \end{cases}$$

Respuesta:

$$A \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow x = 1$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica.

Demostración Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

- Probemos que $A + A^t$ es simétrica.

$$\begin{aligned} \left(A + A^t\right)^t &= A^t + \left(A^t\right)^t \quad \text{por prop. de transpuesta de la suma de matrices} \\ &= A^t + A \quad \text{por prop. de transpuesta} \\ &= A + A^t \quad \text{por prop. conmutativa de la suma de matrices} \end{aligned}$$

  Luego, por la definición de matriz simétrica, $A + A^t$ es simétrica.

- De manera análoga se demuestra que $A - A^t$ es antisimétrica. (Se deja como ejercicio).

■

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricas

Demostración Se deja como ejercicio. ■

Partición de matrices

Definición (Submatriz)

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $h = 0, 1, \ldots, m-1$ y $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Se llama **submatriz** de A de orden $(m-h) \times (n-k)$ a la matriz que se obtiene eliminando h filas y k columnas de A.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Las siguientes matrices son submatrices de A :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{bloques de } A}$$

Definición (Matriz particionada)

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

Una **partición** de A, en término de submatrices llamadas **bloques,** se obtiene trazando líneas horizontales entre las filas y/o lineas verticales entre las columnas de A.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Algunas particiones de A son:

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ \hline 3 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ \hline 3 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Observación

Una partición de una matriz sirve para simplificar la escritura, reducir los cálculos, mostrar detalles particulares de la estructura de la matriz.

Particiones particulares

1. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

   a) Particion por columnas de A :

   $$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

   donde $\forall j : 1 \leq j \leq n,\ A_j = \begin{pmatrix} \langle A\rangle_{1j} \\ \langle A\rangle_{2j} \\ \vdots \\ \langle A\rangle_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times 1}$.

   b) Particion por filas de A :

   $$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(m)} \end{pmatrix}$$

   donde $\forall i : 1 \leq i \leq m,\ A^{(i)} = \begin{pmatrix} \langle A\rangle_{i1} & \langle A\rangle_{i2} & \cdots & \langle A\rangle_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times n}$

Las siguientes particiones de matrices se aceptan sin demostración

2. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times p},\ B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ $(\therefore A \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n})$:

   a) Particion por columnas de $A \cdot B$:

   $$A \cdot B = \begin{pmatrix} A \cdot B_1 & A \cdot B_2 & \cdots & A \cdot B_n \end{pmatrix}$$

   donde $\forall j : 1 \leq j \leq n,\ (A \cdot B)_j = A \cdot B_j$

   b) Particion por filas de $A \cdot B$:

   $$A \cdot B = \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B \\ A^{(2)} \cdot B \\ \vdots \\ A^{(m)} \cdot B \end{pmatrix}$$

   donde $\forall i : 1 \leq i \leq m,\ (A \cdot B)^{(i)} = A^{(i)} \cdot B$

3. Otra particion muy utilizada:

   Sean $P \in \mathbb{K}^{m\times n},\ A \in \mathbb{K}^{n\times p},\ B \in \mathbb{K}^{n\times q}$:

   $$P \cdot (\ A \mid B\ ) = (\ P \cdot A \mid P \cdot B\ )$$

   donde $(\ A \mid B\ ) \in \mathbb{K}^{n\times(p+q)},\ P \cdot A \in \mathbb{K}^{m\times p},\ P \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times q}$