Trabajo Práctico 3

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ obtiene las matrices indicadas:

   a) $A_2\left(\frac{1}{2}\right)$, $A_{31}(2)$, A_{23}
   b) B_{21} , $B_1\left(\frac{1}{5}\right)$, $B_{13}(-5)$
   c) $C_{21}(-2)$, C_{12} , $C_3(2)$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ realiza las operaciones elementales de filas indicadas:

   a) $f_2 + (2)\ f_3$
   b) $\left(\frac{1}{5}\right) f_1$
   c) $f_1 \leftrightarrow f_3$

3. Determina cuáles de las siguientes matrices son elementales. Para aquellas matrices que lo sean, emplea la notación correspondiente para justificar tu afirmación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{con } k\in\mathbb{K}}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & -7 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,
$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

   a) Determina, si es posible, las matrices elementales E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 tales que $E_1 \cdot A = B$, $E_2 \cdot B = A$, $E_3 \cdot C = D$, $E_4 \cdot D = C$, $E_5 \cdot D = F$, $E_6 \cdot C = F$

b) ¿Qué relación hay entre E_1 y E_2?

c) ¿Es posible determinar una matriz P tal que $P \cdot C = F$? Escríbela.

5. A partir de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$. Realiza en forma consecutiva las siguientes operaciones elementales de filas: $f_1 + (1)\ f_3$, $\left(\frac{1}{3}\right) f_2$, $f_1 \leftrightarrow f_3$.

   a) ¿Qué relación existe entre A y la matriz que obtienes?

   b) Compara la matriz obtenida con la matriz $E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$, siendo E_1, E_2, E_3 las matrices elementales que se obtienen de aplicar a la matriz identidad las respectivas operaciones elementales de filas indicadas. ¿Con qué teorema puedes relacionar este resultado?

6. Determina cuales de las siguientes matrices son matrices escalón reducida por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las siguientes matrices de elementos reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ ,$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ -7 & -3 & -8 \\ -10 & 0 & 10 \end{pmatrix} \ , \ F = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Determina para cada una de ellas:

   a) la matriz escalón reducida por filas, $E_{rf}(X)$.

   b) la matriz P (expresada como producto de matrices elementales) tal que $P \cdot X = E_{rf}(X)$.

   c) Determina su rango, $rg(X)$.

8. En los siguientes apartados, determina si A y B son equivalentes por filas. En caso afirmativo expresa la matriz P como producto de matrices elementales tal que $B = P \cdot A$

a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

d) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & 0 & \sqrt{3} & 7 \\ -5 & 3 & 9 & 14 & 2 \\ -1 & 17 & 21 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -5 & -1 \\ -1 & 3 & 17 \\ 0 & 9 & 21 \\ \sqrt{3} & 14 & -8 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

9. Determina $k \in \mathbb{R}$ tal que

a) $rg\,(C) = 2$ siendo $C = \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & k & -1 \end{pmatrix}$

b) $rg\,(D) = 2$ siendo $D = \begin{pmatrix} 2 & k+2 \\ -1 & -k \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $rg\,(F) > 2$ siendo $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & k \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & k+2 & k-7 & 0 \end{pmatrix}$

10. Dadas las siguientes matrices con elementos reales

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x \\ -x & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$J = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina si son inversibles (o no singulares). En caso afirmativo, halla su inversa.

b) A las matrices inversibles, escríbelas como producto de matrices elementales. ¿Qué teorema utilizas para justificar?

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \\ 3y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ y
$C = \begin{pmatrix} -8 & 1 & y+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$

 a) Utilizando operaciones elementales de filas determina, en caso de ser posible, la inversa de A.

 b) Determina $x, y \in \mathbb{R}$ para que $A^{-1} \cdot B = B + C^t$

12. Dadas las matrices de elementos reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 4 \end{pmatrix}$ y
$C = \begin{pmatrix} 0 & -2x & 3y \end{pmatrix}$

 a) Utilizando operaciones elementales de filas determina, en caso de ser posible, la inversa de A.

 b) Determina $x, y \in \mathbb{R}$ para que $C \cdot A^{-1} = C + B^t$

13. Determina $x \in \mathbb{R}$ tal que exista la inversa de las siguientes matrices:
$A = \begin{pmatrix} 6 & x \\ 4 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 4 - x^2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1+x \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & y & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

 a) Determina $y \in \mathbb{R}$ para que $A \cdot B$ sea no singular.

 b) Para $y = 0$ resuelve la ecuación $A \cdot B \cdot X = 3\mathbb{I}$ y determina la inversa de $A \cdot B$.

15. Un criptograma es un mensaje codificado en el que se asigna un número a cada letra del alfabeto ($A = 1, B = 2, ...Z = 27$) y el 0 representa un espacio. Si la matriz con la que se codificó el mensaje es $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ y el mensaje **ya codificado** es el criptograma $1, 14, 14, -8, 7, -7, -5, 16, 11, 10, 42, 33, 9, 28, 23$, ¿cuál es el mensaje transmitido? (Recuerda armar la matriz M_{cod} de modo que sea posible el producto, puedes guiarte con lo resuelto en la Guía 3).