Trabajo Práctico 2

1) Dados los siguientes operadores lineales

   $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_1(x, y) = (-x, -y)$

   $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_2(x, y) = (-x, y)$

   $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_3(x, y) = (x, -y)$

   Para cada uno de ellos determina la matriz asociada respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$

2) Dadas las transformaciones lineales:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y) = (2y, 2x, x + y)$ con $\alpha = \{(-1, 1), (1, -2)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y $\beta = \{(-1, 0, -1), (0, 2, 0), (0, -1, -1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Determina $[T]_\alpha^\beta$

   b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ tal que $T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x - y \\ 2t - z \end{pmatrix}$ y

   $\alpha = \{(1, 0, 0, 2), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 1, 1), (-1, 0, 0, -1)\}$, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

   bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^{2\times 1}$ respectivamente

   i) Determina $A = [T]_\alpha^\beta$.

   ii) Usando A, responde. ¿$(1, 1, -2, -1) \in \mathrm{Nu}(T)$?

   c) $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tal que $T(x, y) = (x + y, iy, x + 2y)$ siendo α' , β' las bases canónicas de $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}^3$ respectivamente.

   i) Determina $A = [T]_{\alpha'}^{\beta'}$

   ii) ¿Qué relación tiene la matriz A con la matriz obtenida en el ejercicio 2 de la guía 2 de T.L.?

   d) $T : \mathbb{C}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + y, y + z)$ y

   $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{C}^{3\times 1}$, $\beta = \{(i, 0), (2, -1)\}$ base de $\mathbb{C}^2$.

   Determina $[T]_\alpha^\beta$

3) Dado $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ operador lineal tal que $T(x, y, z) = (x - 2y, y + z, z)$ y $\alpha = \{(1, 0, 1), (0, -1, 1), (2, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(-1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Determina

   a) $A = [T]_\alpha^\beta$. Usando A calcula $T(1, -2, 0)$

   b) $B = [T]_\beta^\alpha$. Responde ¿ $B = A$? Usando la matriz B calcula $T(1, -2, 0)$ y compara con el resultado obtenido en el apartado anterior .

4) Determina explícitamente la transformación lineal

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que su matriz asociada respecto de las bases $\alpha=\{(1,-1),(2,0)\}\subset\mathbb{R}^2$ y $\beta=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^{3\times 1}$ es $A=\begin{pmatrix}-2&6\\2&0\\-1&2\end{pmatrix}$

b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que su matriz asociada respecto de las bases $\alpha=\{(0,-1,0),(1,0,0),(1,0,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$ y $\beta=\{(2,0,0),(0,-1,0),(0,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ es $A=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{3}{2}\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\4&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. Verifica que $T(2,1,1)=(3,0,-4)$

c) $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^3$ tal que su matriz asociada a la transformación lineal respecto de las bases $\alpha=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\beta=\{(-1,1,0),(1,0,1),(0,0,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$ es $A=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\-1&0&0&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 4}$. Usando A responde. ¿ $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in\mathrm{Nu}(T)$? Verifica usando la definición T

d) $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3$ tal que su matriz asociada a la transformación lineal respecto de las bases $\alpha=\{(1,i),(i,0)\}\subset\mathbb{C}^2$ y $\beta=\{(1,0,i),(0,-1,0),(-i,-i,0)\}\subset\mathbb{C}^3$ es $A=\begin{pmatrix}1&i\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}$. Verifica que $T(1,i)=(1+i,i,i)$

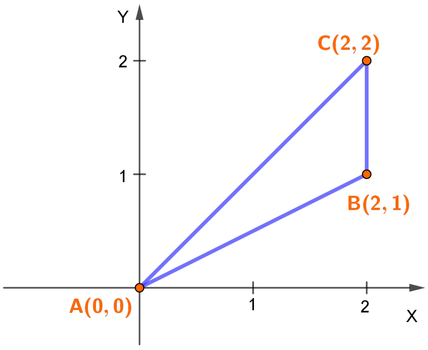
5) Dada $[T]_\alpha^\beta=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 3}$, matriz asociada a la transformación lineal $T:\mathbb{R}^{3\times 1}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ respecto de α base canónica de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ y $\beta=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$

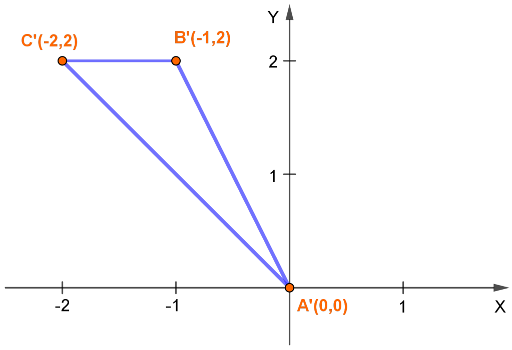
a) Sin determinar explícitamente T, encuentra el subespacio $\mathrm{Im}(T)$ y comprueba que $\dim\ \mathrm{Im}(T)=rg(A)$, siendo $A=[T]_\alpha^\beta$

b) Sin determinar $\mathrm{Nu}(T)$ responde ¿ $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\in\mathrm{Nu}(T)$?

6) Usando las matrices obtenidas en el ejercicio 1), determina la imagen del segmento de extremos $A\,(1,2)\,, B\,(3,4)$ (obteniendo el transformado de sus extremos)

7) Dado $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operador lineal tal que transforma el triángulo ABC en el triángulo $A'B'C'$ como se indica en la siguiente figura:





a) Determina explícitamente T sabiendo que $T\,(A) = A'$, $T\,(B) = B'$, $T\,(C) = C'$

b) Determina la matriz asociada a T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) Usando la matriz obtenida en el apartado anterior, determina en qué se transforma el trapecio rectángulo de vértices $M = (1,-1)\,, N = (2,-1)\,, P = (3,-2)\,, Q = (1,-2)$. Representa gráficamente.