



Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 2

9 de mayo de 2023

Zona A tarde | Zona B mañana | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

Un botánico realiza un experimento en el que estudia el crecimiento de las plantas.

La altura de las plantas la mide en siete días distintos.

En la siguiente tabla se muestra el número de días (d) que lleva en marcha el experimento y la altura promedio (h cm) que tienen las plantas cada uno de esos días.

Número de días (d)	2	5	13	24	33	37	42
Altura promedio (h)	10	16	30	59	76	79	82

Para estos datos, el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r) es 0,991, redondeando a tres cifras significativas.

- (a) La recta de regresión de h sobre d para estos datos se puede escribir en la forma $h = ad + b$.

Halle el valor de a y el valor de b .

[2]

- (b) Utilice su recta de regresión para estimar la altura promedio que tendrán las plantas cuando el experimento lleve en marcha 20 días.

[2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

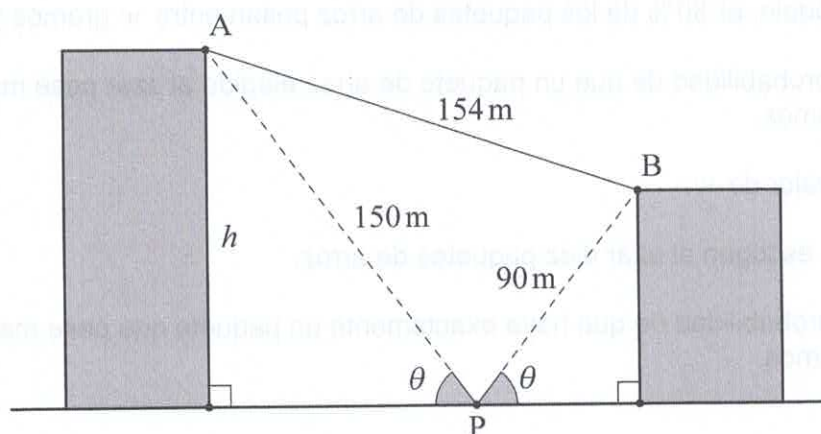


2. [Puntuación máxima: 6]

En la siguiente figura se muestran dos edificios construidos en un terreno llano.

Desde el punto P —situado en el suelo y entre los dos edificios— el ángulo de elevación hasta la parte superior de cada edificio es igual a θ .

la figura no está dibujada a escala



La distancia entre el punto P y el punto A (ubicado en la parte superior del edificio más alto) es igual a 150 metros.

La distancia entre el punto P y el punto B (ubicado en la parte superior del edificio más bajo) es igual a 90 metros.

La distancia entre A y B es igual a 154 metros.

Halle la altura (h) del edificio más alto.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP03

Véase al dorso

3. [Puntuación máxima: 8]

Los pesos (W gramos) de los paquetes de arroz que se envasan en una fábrica siguen una distribución normal de media 204 gramos y desviación típica igual a 5 gramos.

- (a) Se escoge un paquete de arroz al azar.

Halle la probabilidad de que pese más de 210 gramos.

[2]

Según este modelo, el 80 % de los paquetes de arroz pesan entre w gramos y 210 gramos.

- (b) Halle la probabilidad de que un paquete de arroz elegido al azar pese menos de w gramos.

[2]

- (c) Halle el valor de w .

[2]

- (d) Ahora se escogen al azar diez paquetes de arroz.

Halle la probabilidad de que haya exactamente un paquete que pese menos de w gramos.

[2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



El desarrollo de $(x+h)^8$, donde $h \in \mathbb{Q}^+$, se puede escribir así:
 $x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + \dots + h^8$, donde $a, b, c, d, \dots \in \mathbb{R}$.

los tres primeros términos de una progresión

[illegible]

6. [Puntuación máxima: 8]

Considere los dos planos

$$\Pi_1 : 2x - y + 2z = 6$$

$$\Pi_2 : 4x + 3y - z = 2$$

Sea L la recta de intersección de Π_1 y Π_2 .

(a) Verifique que una ecuación vectorial de L es $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. [3]

(b) Halle las coordenadas del punto P , que es el punto de L que más cerca está del origen. [5]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Puntuación máxima: 5]

La función f se define así: $f(x) = \arctan(x - 2)$, donde $2 \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$.

La región delimitada por la curva, el eje y , el eje x y la recta $y = \frac{\pi}{3}$ se rota 360° alrededor del eje y , generando así un sólido de revolución.

Halle el volumen de dicho sólido.

This image shows a full page of handwriting practice paper. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dashed lines. The lines are evenly spaced and extend across the entire width of the page, providing a guide for letter height and placement. There is no text or other markings on the paper.

8. [Puntuación máxima: 7]

La función g viene dada por $g(x) = \frac{2x-5}{x^2-3}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm\sqrt{3}$.

(a) Determine el recorrido de g .

[4]

La función h viene dada por $h(x) = g(|x|) \cos t$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm\sqrt{3}$ y t es una constante tal que $\frac{\pi}{2} < t \leq \pi$.

(b) Halle el conjunto de valores de x para los cuales $h(x) \leq 0$.

[3]

1. **Introduction**
 2. **Methodology**
 3. **Results**
 4. **Discussion**
 5. **Conclusion**
 6. **References**
 7. **Appendix**
 8. **Index**
 9. **Table of Contents**
 10. **Abstract**
 11. **Summary**
 12. **Key Words**
 13. **Keywords**
 14. **Keywords**
 15. **Keywords**
 16. **Keywords**
 17. **Keywords**
 18. **Keywords**
 19. **Keywords**
 20. **Keywords**
 21. **Keywords**
 22. **Keywords**
 23. **Keywords**
 24. **Keywords**
 25. **Keywords**
 26. **Keywords**
 27. **Keywords**
 28. **Keywords**
 29. **Keywords**
 30. **Keywords**
 31. **Keywords**
 32. **Keywords**
 33. **Keywords**
 34. **Keywords**
 35. **Keywords**
 36. **Keywords**
 37. **Keywords**
 38. **Keywords**
 39. **Keywords**
 40. **Keywords**
 41. **Keywords**
 42. **Keywords**
 43. **Keywords**
 44. **Keywords**
 45. **Keywords**
 46. **Keywords**
 47. **Keywords**
 48. **Keywords**
 49. **Keywords**
 50. **Keywords**
 51. **Keywords**
 52. **Keywords**
 53. **Keywords**
 54. **Keywords**
 55. **Keywords**
 56. **Keywords**
 57. **Keywords**
 58. **Keywords**
 59. **Keywords**
 60. **Keywords**
 61. **Keywords**
 62. **Keywords**
 63. **Keywords**
 64. **Keywords**
 65. **Keywords**
 66. **Keywords**
 67. **Keywords**
 68. **Keywords**
 69. **Keywords**
 70. **Keywords**
 71. **Keywords**
 72. **Keywords**
 73. **Keywords**
 74. **Keywords**
 75. **Keywords**
 76. **Keywords**
 77. **Keywords**
 78. **Keywords**
 79. **Keywords**
 80. **Keywords**
 81. **Keywords**
 82. **Keywords**
 83. **Keywords**
 84. **Keywords**
 85. **Keywords**
 86. **Keywords**
 87. **Keywords**
 88. **Keywords**
 89. **Keywords**
 90. **Keywords**
 91. **Keywords**
 92. **Keywords**
 93. **Keywords**
 94. **Keywords**
 95. **Keywords**
 96. **Keywords**
 97. **Keywords**
 98. **Keywords**
 99. **Keywords**
 100. **Keywords**
 101. **Keywords**
 102. **Keywords**
 103. **Keywords**
 104. **Keywords**
 105. **Keywords**
 106. **Keywords**
 107. **Keywords**
 108. **Keywords**
 109. **Keywords**
 110. **Keywords**
 111. **Keywords**
 112. **Keywords**
 113. **Keywords**
 114. **Keywords**
 115. **Keywords**
 116. **Keywords**
 117. **Keywords**
 118. **Keywords**
 119. **Keywords**
 120. **Keywords**
 121. **Keywords**
 122. **Keywords**
 123. **Keywords**
 124. **Keywords**
 125. **Keywords**
 126. **Keywords**
 127. **Keywords**
 128. **Keywords**
 129. **Keywords**
 130. **Keywords**
 131. **Keywords**
 132. **Keywords**
 133. **Keywords**
 134. **Keywords**
 135. **Keywords**
 136. **Keywords**
 137. **Keywords**
 138. **Keywords**
 139. **Keywords**
 140. **Keywords**
 141. **Keywords**
 142. **Keywords**
 143. **Keywords**
 144. **Keywords**
 145. **Keywords**
 146. **Keywords**
 147. **Keywords**
 148. **Keywords**
 149. **Keywords**
 150. **Keywords**
 151. **Keywords**
 152. **Keywords**
 153. **Keywords**
 154. **Keywords**
 155. **Keywords**
 156. **Keywords**
 157. **Keywords**
 158. **Keywords**
 159. **Keywords**
 160. **Keywords**
 161. **Keywords**
 162. **Keywords**
 163. **Keywords**
 164. **Keywords**
 165. **Keywords**
 166. **Keywords**
 167. **Keywords**
 168. **Keywords**
 169. **Keywords**
 170. **Keywords**
 171. **Keywords**
 172. **Keywords**
 173. **Keywords**
 174. **Keywords**
 175. **Keywords**
 176. **Keywords**
 177. **Keywords**
 178. **Keywords**
 179. **Keywords**
 180. **Keywords**
 181. **Keywords**
 182. **Keywords**
 183. **Keywords**
 184. **Keywords**
 185. **Keywords**
 186. **Keywords**
 187. **Keywords**
 188. **Keywords**
 189. **Keywords**
 190. **Keywords**
 191. **Keywords**
 192. **Keywords**
 193. **Keywords**
 194. **Keywords**
 195. **Keywords**
 196. **Keywords**
 197. **Keywords**
 198. **Keywords**
 199. **Keywords**
 200. **Keywords**
 201. **Keywords**
 202. **Keywords**
 203. **Keywords**
 204. **Keywords**
 205. **Keywords**
 206. **Keywords**
 207. **Keywords**
 208. **Keywords**
 209. **Keywords**
 210. **Keywords**
 211. **Keywords**
 212. **Keywords**
 213. **Keywords**
 214. **Keywords**
 215. **Keywords**
 216. **Keywords**
 217. **Keywords**
 218. **Keywords**
 219. **Keywords**
 220. **Keywords**
 221. **Keywords**
 222. **Keywords**
 223. **Keywords**
 224. **Keywords**
 225. **Keywords**
 226. **Keywords**
 227. **Keywords**
 228. **Keywords**
 229. **Keywords**
 230. **Keywords**
 231. **Keywords**
 232. **Keywords**
 233. **Keywords**
 234. **Keywords**
 235. **Keywords**
 236. **Keywords**
 237. **Keywords**
 238. **Keywords**
 239. **Keywords**
 240. **Keywords**
 241. **Keywords**
 242. **Keywords**
 243. **Keywords**
 244. **Keywords**
 245. **Keywords**
 246. **Keywords**
 247. **Keywords**
 248. **Keywords**
 249. **Keywords**
 250. **Keywords**
 251. **Keywords**
 252. **Keywords**
 253. **Keywords**
 254. **Keywords**
 255. **Keywords**
 256. **Keywords**
 257. **Keywords**
 258. **Keywords**
 259. **Keywords**
 260. **Keywords**
 261. **Keywords**
 262. **Keywords**
 26



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



Raghu escoge al azar tres enteros positivos de S , sin reposición. A continuación los suma y determina si la suma es (o no) divisible entre 3.

[5]

[illegible]

No escriba soluciones en esta página.

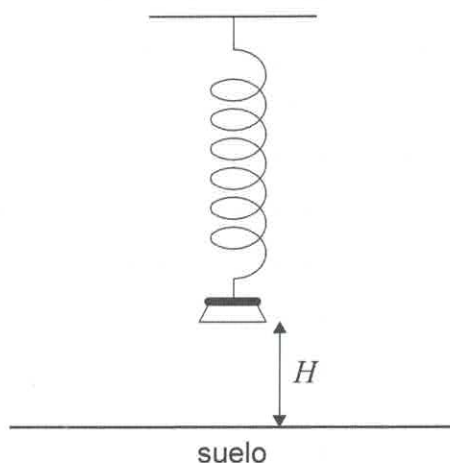
Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 13]

Hay un peso suspendido de un muelle. Se tira del peso y luego se suelta, de modo que se mueva hacia arriba y hacia abajo en vertical.

La altura (H metros) a la que se encuentra la base del peso respecto al suelo se puede modelizar mediante la función $H(t) = a \cos(7,8t) + b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq 10$, donde t es el tiempo (en segundos) que ha transcurrido desde que se soltó el peso.



(a) Halle el período de la función.

[2]

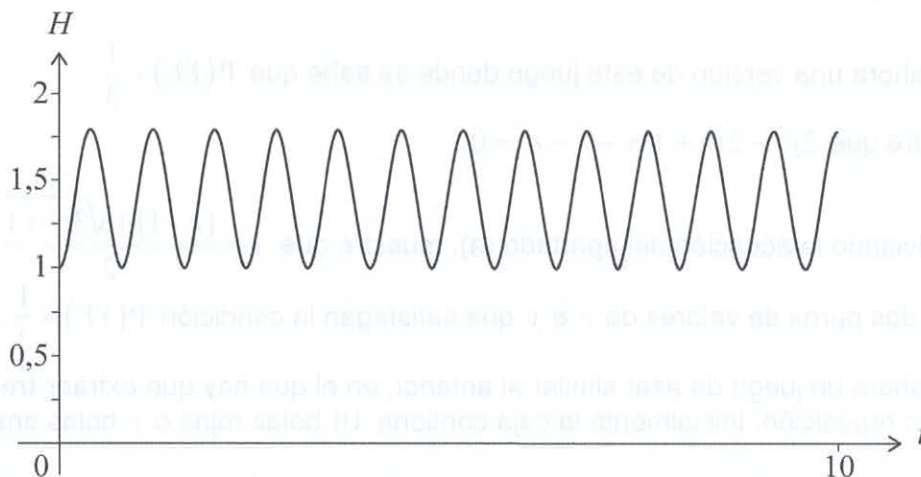
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 10: continuación)

El peso se suelta cuando su base está a una altura mínima de 1 metro respecto al suelo y alcanza una altura máxima de 1,8 metros respecto al suelo. En la siguiente figura se muestra el gráfico de H .



- (b) Halle el valor de:
- (i) a [3]
 - (ii) b [3]
- (c) Halle el número de veces que el peso alcanza su altura máxima durante los cinco primeros segundos que está moviéndose. [2]
- (d) Halle el primer instante en el que la base del peso alcanza una altura de 1,5 metros. [2]
- Se configura una cámara para que haga una foto del peso en un instante elegido al azar, dentro de esos cinco primeros segundos que el peso está moviéndose.
- (e) Halle la probabilidad de que la altura de la base del peso sea mayor que 1,5 metros en el instante en el que se hace la foto. [4]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 20]

Hay un juego en el que hay que extraer al azar **dos** bolas de una caja, sin reposición. Inicialmente la caja contiene r bolas rojas e y bolas amarillas.

Sea $P(YY)$ la probabilidad de extraer de la caja (sin reposición) dos bolas amarillas.

Considere ahora una versión de este juego donde se sabe que $P(YY) = \frac{1}{3}$.

(a) Muestre que $2y^2 - 2(r+1)y + r - r^2 = 0$. [4]

(b) Resolviendo la ecuación del apartado (a), muestre que $y = \frac{(r+1) + \sqrt{3r^2+1}}{2}$. [4]

(c) Halle dos pares de valores de r e y que satisfagan la condición $P(YY) = \frac{1}{3}$. [4]

Considere ahora un juego de azar similar al anterior, en el que hay que extraer **tres** bolas de una caja, sin reposición. Inicialmente la caja contiene 10 bolas rojas e y bolas amarillas.

Sea $P(YYY)$ la probabilidad de extraer de la caja (sin reposición) tres bolas amarillas.

(d) Halle una expresión que dé $P(YYY)$ en función de y . [3]

Ahora se añade a la caja una bola amarilla, de modo que contenga 10 bolas rojas e $(y+1)$ bolas amarillas.

La probabilidad de extraer de la caja (sin reposición) tres bolas amarillas es ahora el doble que la probabilidad dada en el apartado (d).

(e) Halle el número de bolas amarillas que había inicialmente en la caja. [5]



No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 21]

Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{xy}$, donde $x > 0, y > 0$.

Se sabe que $y = 2$ para $x = 1$.

(a) Utilice el método de Euler con un paso de 0,1 para hallar un valor aproximado de y para $x = 1,1$. [2]

(b) Resolviendo la ecuación diferencial, muestre que $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$. [8]

(c) Halle el valor de y para $x = 1,1$. [1]

(d) Haciendo referencia a la concavidad del gráfico de $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$ para $1 \leq x \leq 1,1$, explique por qué el valor de y que ha hallado en el apartado (c) es mayor que el valor aproximado de y que halló en el apartado (a). [2]

El gráfico de $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$ para $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$ tiene un punto de inflexión en el punto P.

(e) Dibujando aproximadamente el gráfico de una derivada apropiada de y , determine la coordenada x de P. [2]

Se puede mostrar que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^4 + x^2y^2 + 6y^4}{x^2y^3}$, donde $x > 0, y > 0$.

(f) Utilice esta expresión de $\frac{d^2y}{dx^2}$ para mostrar que el punto P pertenece a la recta $y = mx$, y determine además el valor exacto de m . [6]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



16EP16