Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 1

Lunes 31 de octubre de 2022 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

8822–7121

12 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

La función g se define así: $g(x) = e^{x^2+1}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Halle $g'(-1)$.

2. [Puntuación máxima: 7]

Considere un círculo de diámetro AB, donde A tiene por coordenadas $(1, 4, 0)$ y B tiene por coordenadas $(-3, 2, -4)$.

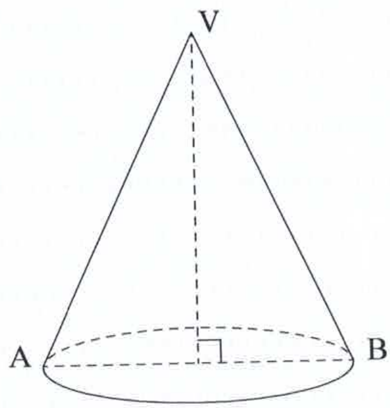
(a) Halle:

(i) Las coordenadas del centro del círculo

(ii) El radio del círculo [4]

El círculo es la base de un cono recto cuyo vértice V tiene por coordenadas $(-1, -1, 0)$.

la figura no está dibujada a escala



(b) Halle el volumen exacto del cono. [3]

3. [Puntuación máxima: 5]

Sea a una constante, donde $a > 1$.

(a) Muestre que $a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$. [3]

Considere un triángulo rectángulo cuyos lados miden a, $\left(\frac{a^2-1}{2}\right)$ y $\left(\frac{a^2+1}{2}\right)$.

(b) Halle una expresión para el área del triángulo en función de a. [2]

4. [Puntuación máxima: 5]

La derivada de la función f viene dada por $f'(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$.

El gráfico de $y = f(x)$ pasa por el punto $(1\,,\,5)$. Halle una expresión para $f(x)$.

5. [Puntuación máxima: 7]

Considere la ecuación $z^4 + pz^3 + 54z^2 - 108z + 80 = 0$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{R}$.

Tres de las raíces de esta ecuación son $3 + \mathrm{i}$, α y α^2, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Considerando el producto de todas las raíces de la ecuación, halle el valor de α. [4]

(b) Halle el valor de p. [3]

6. [Puntuación máxima: 6]

Para los sucesos A y B, se cumple que $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$ y $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$.

(a) Determine el valor de $\mathrm{P}(A \cap B)$ en el caso en el que los sucesos A y B son independientes. [1]

(b) Determine el mínimo valor posible de $\mathrm{P}(A \cap B)$. [3]

(c) Determine el máximo valor posible de $\mathrm{P}(A \cap B)$. Justifique su respuesta. [2]

7. [Puntuación máxima: 7]

Considere la curva definida por la ecuación $(x^2 + y^2)y^2 = 4x^2$, donde $x \geq 0$ y $-2 < y < 2$.

Muestre que la curva no tiene ningún punto máximo local ni mínimo local para $x > 0$.

8. [Puntuación máxima: 5]

Sea $f(x) = \cos(x - k)$, donde $0 \le x \le a$ y $a, k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Considere el caso en el que $k = \frac{\pi}{2}$.

Dibujando aproximadamente un gráfico apropiado o de cualquier otro modo, halle el mayor valor de a para el cual existe la función inversa f^{-1}. [2]

(b) Halle el mayor valor de a para el cual existe la función inversa f^{-1} en el caso en el que $k = \pi$. [1]

(c) Halle el mayor valor de a para el cual existe la función inversa f^{-1} en el caso en el que $\pi < k < 2\pi$. Dé la respuesta en función de k. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Puntuación máxima: 10]

Considere la ecuación diferencial homogénea $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 2x^2}{xy}$, donde $x, y \neq 0$.

Se sabe que $y = 2$ cuando $x = 1$.

(a) Utilizando la sustitución $y = vx$, resuelva la ecuación diferencial. Dé la respuesta en la forma $y^2 = f(x)$. [8]

Los puntos de pendiente cero de la curva $y^2 = f(x)$ pertenecen a dos rectas que son de la forma $y = mx$, donde $m \in \mathbb{R}$.

(b) Halle los valores de m. [2]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 20]

La función f se define así: $f(x) = \cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x$, $0 \le x \le \pi$.

(a) Halle las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. [5]

(b) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) A partir de lo anterior, halle las coordenadas de los puntos del gráfico de $y = f(x)$ en los que $f'(x) = 0$. [7]

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = |f(x)|$, mostrando claramente las coordenadas de todos los puntos en los que $f'(x) = 0$ y de todos los puntos donde el gráfico toque los ejes de coordenadas. [4]

(d) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la inecuación $|f(x)| > 1$. [4]

11. [Puntuación máxima: 16]

Considere un código de tres cifras abc, donde a cada letra a, b y c se le asigna uno de los siguientes valores: 1, 2, 3, 4 o 5.

(a) Halle el número total de códigos posibles:

(i) Suponiendo que los valores se pueden repetir (por ejemplo, 121 o 444).

(ii) Suponiendo que no se repite ningún valor. [4]

Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a cada letra a, b y c se le asigna uno de los siguientes valores: 1, 2, 3, 4 o 5. Suponga que no se repite ningún valor.

Considere el caso en el que uno de los factores de $P(x)$ es $(x^2 + 3x + 2)$.

(b) (i) Halle una expresión que dé b en función de a.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que la única manera en la que se pueden asignar los valores es $a = 4$, $b = 5$ y $c = 2$.

(iii) Exprese $P(x)$ como un producto de factores lineales.

(iv) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, dibuje aproximadamente el gráfico de $y = P(x)$, mostrando claramente las coordenadas de todas las intersecciones con los ejes que haya. [12]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 18]

Sea z_n el número complejo que se define así: $z_n = (n^2 + n + 1) + \mathrm{i}$, para $n \in \mathbb{N}$.

(a) (i) Halle $\arg(z_0)$.

(ii) Escriba una expresión que dé $\arg(z_n)$ en función de n. [3]

Sea $w_n = z_0 z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1} z_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

(b) (i) Muestre que $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$, para $a,\, b \in \mathbb{R}^+$, $ab < 1$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que $\arg(w_1) = \arctan(2)$. [5]

(c) Pruebe mediante inducción matemática que $\arg(w_n) = \arctan(n+1)$, para $n \in \mathbb{N}$. [10]