Robótica Móvil - Trabajo Práctico 1 - Transformaciones

Francisco Raverta, Nicolás Romero

2do cuatrimestre - 2023

1. **Para el sistema de coordenadas canónico de un robot móvil (x: hacia adelante, y:hacia la izquierda, z: hacia arriba) dibujar y resolver matemáticamente el sistema de coordenadas resultante luego de aplicar las rotaciones dadas, considerando los casos $R_y(90)$, $R_x(-90)R_y(90)$ y $R_z(180)R_x(-90)R_y(90)$**

   Tomamos los vectores canónicos que representan al sistema de coordenadas canónico, y los ordenamos en un arreglo matricial R_0, que representa la orientación inicial de este sistema:

$$R_0 = [x|y|z] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Consideramos además las matrices de rotación en x, y y z dadas por:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, R_z(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Consideramos el caso $R_y(90)$. Para encontrar las nuevas coordenadas canónicas, hacemos:

$$R_1 = R_y(90)R_0 = R_y(90)I = R_y(90) = \begin{pmatrix} \cos 90 & 0 & \sin 90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90 & 0 & \cos 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     Luego, mirando las columnas de esta matriz, tenemos que ahora x apunta en la dirección de $-z$ del sistema de coordenadas anterior, y se mantiene en la misma dirección, y z apunta en la dirección de x del sistema de coordenadas anterior.

   - Consideramos el caso $R_x(-90)R_y(90)$. Hacemos:

$$R_2 = R_x(-90)R_y(90)R_0 = R_x(-90)R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -90 & -\sin -90 \\ 0 & \sin -90 & \cos -90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

     Luego, mirando las columnas de esta matriz, tenemos que ahora x apunta en la dirección de $-y$ del sistema de coordenadas original, y apunta en la dirección de $-z$ del sistema de coordenadas original, y z apunta en la dirección de x en el sistema de coordenadas original.

   - Consideramos el caso $R_z(180)R_x(-90)R_y(90)$. Hacemos:

$$R_3 = R_z(180)R_x(-90)R_y(90)R_0 = R_z(180)R_2 = \begin{pmatrix} \cos 180 & -\sin 180 & 0 \\ \sin 180 & \cos 180 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

     Luego, mirando las columnas de esta matriz, tenemos que ahora x apunta en la dirección de y del sistema de coordenadas original, y apunta en la dirección de $-z$ del sistema de coordenadas original, y z apunta en la dirección de $-x$ en el sistema de coordenadas original.

   En la figura 1 se pueden observar las distintas rotaciones de los ejes coordenados consideradas.

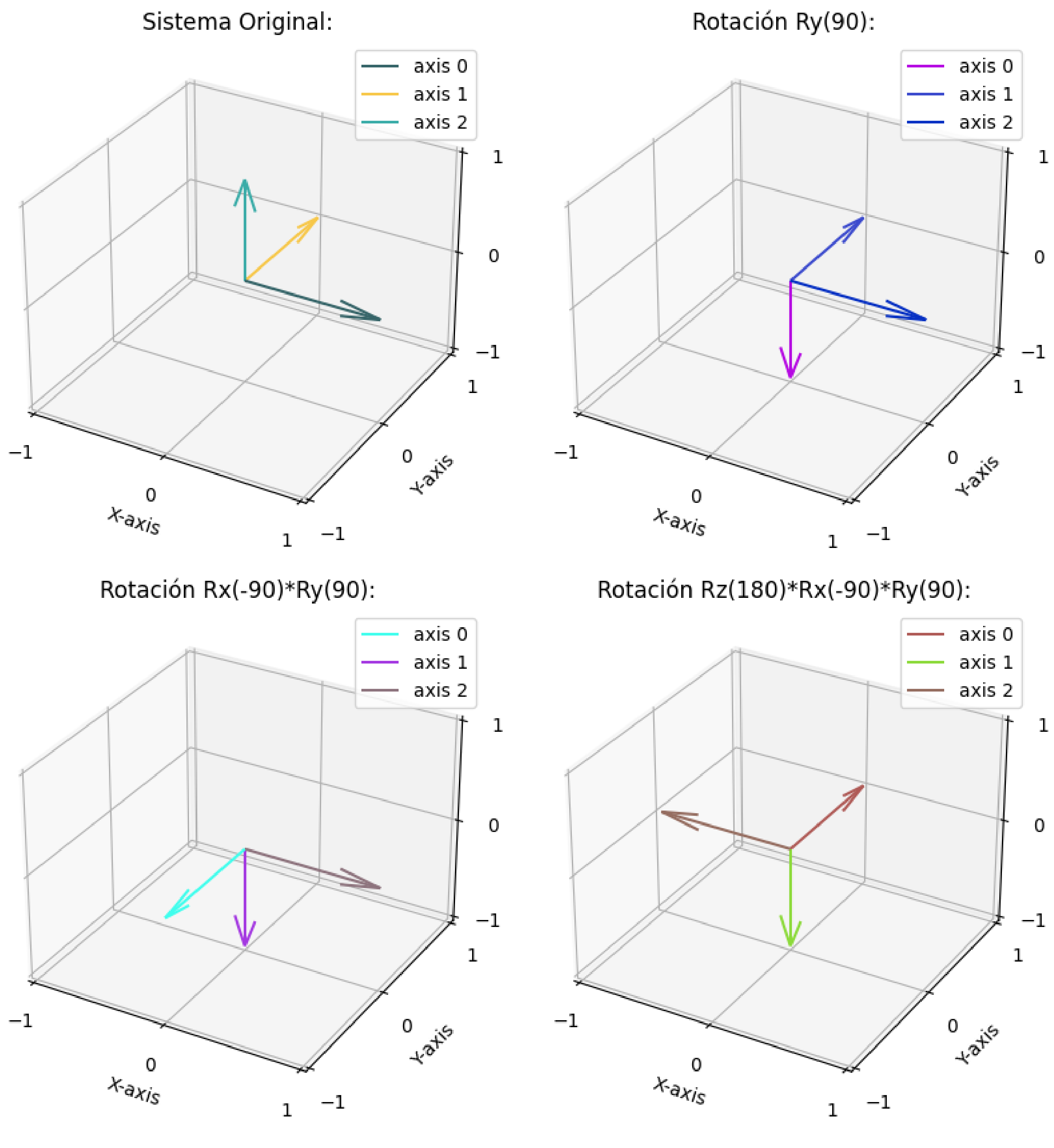

Figure 1: Orientación original y rotada del sistema de coordenadas para los distintos casos analizados.

2. **Dados los ángulos de Euler $\alpha = 4\pi/7$, $\beta = \pi/2$ y $\gamma = -\pi/3$, con orden xyz (primero rotación en x, luego en y, y finalmente en z, se pide:**

   (a) Calcular la matriz de rotación resultante $R = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$

   (b) Utilizando R, extraer matemáticamente los ángulos de Euler, explicar.

   Calculamos primero la matriz de rotación resultante R:

$$R = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

Para el caso particular de $\alpha = 4\pi/7$, $\beta = \pi/2$ y $\gamma = -\pi/3$, nos queda:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.68 & 0.733 & 0 \\ -0.733 & 0.68 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, dado R, queremos extraer matemáticamente los ángulos de Euler. Por un lado, si sabemos que se utilizó una configuración xyz, entonces podemos recuperar los ángulos de Tait-Bryan que se usaron para construir la matriz de rotación de la forma:

$$\alpha = arctan(-R_{23}/R_{33}), \beta = arcsin(R_{13}), \gamma = arctan(-R_{12}/R_{11})$$

Por otro lado, si se tuviese la matriz de rotación R y no se supiera cuál fue la configuración utilizada, entonces hay múltiples configuraciones posibles que pueden tenerse en cuenta para recuperar los ángulos. En el caso de querer recuperar los ángulos de Euler, en los que la primera rotación es en el mismo eje que en la última, las configuraciones posibles son xzx, xyx, yxy, yzy, zyz y zxz. En el caso de querer recuperar los ángulos de Tait-Bryan, en la que todas las rotaciones son en ejes distintos, las configuraciones posibles son xyz, xzy, yxz, yzx, zyx y zxy. Para cada una de estas configuraciones es posible encontrar los ángulos que, siguiendo dicha configuración, permitirán calcular la matriz de rotación R.

A modo de ejemplo, si queremos recuperar los ángulos de Euler para la configuración xyx, hacemos:

$$\alpha = arctan(-R_{21}/R_{31}) = 1.795, \beta = arccos(R_{11}) = 1.57, \gamma = arctan(R_{12}/R_{13}) = -1.047$$

Para recuperar R en este ejemplo, hacemos entonces: $R_x(1.795)R_y(1.57)R_x(-1.04)$

3. **Dado el siguiente escenario:**
   - **un robot A que se encuentra en la posición (2,3) con orientación 45° en coordenadas del mundo**
   - **un robot B que se encuentra en la posición (1,1) con orientación -45° en el sistema de coordenadas del robot A**
   - **un punto $^Wp_1 = (1, 5)$ en coordenadas del mundo**
   - **un punto $^Ap_2 = (1, 2)$ en coordenadas del robot A**

   Resuelva:

   (a) Dibuje los robots y las poses y todos los sistemas de coordenadas presentes

   (b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto p_1 en el sistema de coordenadas del robot A?

   (c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto p_2 en el sistema de coordenadas del robot B?

   (d) ¿Cuál es la pose (posición y orientación) del robot B en coordenadas del mundo?

   (a) En la Figura 2 pueden verse la localización de los robots A y B y los puntos p_1 y p_2 en coordenadas del mundo.

   (b) Queremos encontrar las coordenadas de p_1 en el sistema de coordenadas del robot A, es decir, $^Ap_1$. Sabemos que se cumple:

   $$^Wp_1 =^W R_A \, ^Ap_1 +^W t_A$$

   donde ^WR_A y ^Wt_A son la matriz de rotación y la traslación del robot A en coordenadas del mundo, respectivamente. Despejando $^Ap_1$, tenemos:

   $$^Ap_1 = (^WR_A)^{-1}(^Wp_1 -^W t_A) = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 2.121 \end{pmatrix}$$

   Luego, en coordenadas del robot A, el punto p_1 se encuentra en la posición $(0.707, 2.121)$

   (c) Queremos encontrar ahora $^Bp_2$, es decir, p_2 en coordenadas del robot B. De la misma forma, tenemos:

   $$^Ap_2 =^A R_B \, ^Bp_2 +^A t_B$$

   donde ^AR_B y ^At_B son la matriz de rotación y la traslación del robot B en coordenadas del robot A, respectivamente. Despejando $^Bp_2$, tenemos:

   $$^Bp_2 = (^AR_B)^{-1}(^Ap_2 -^A t_B) = \begin{pmatrix} \cos -45 & -\sin -45 \\ \sin -45 & \cos -45 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

   Luego, en coordenadas del robot B, el punto p_2 se encuentra en la posición $(-0.707, 0.707)$

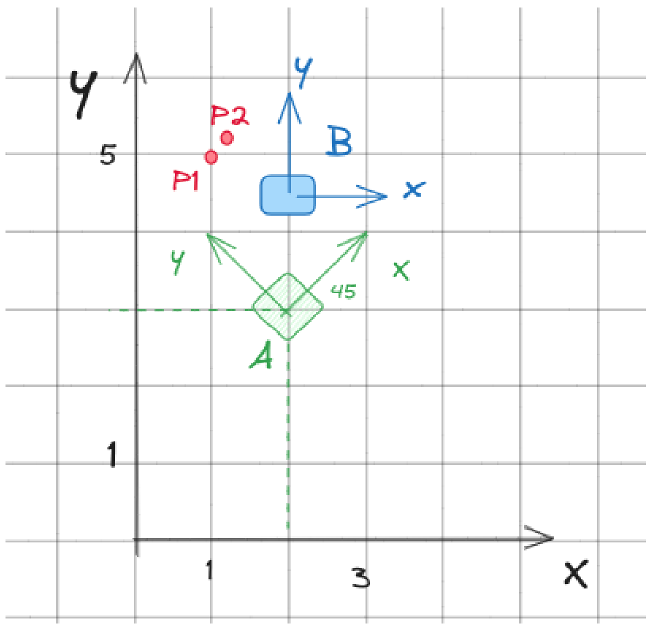

Figure 2: Poses de los robots A y B, y de los puntos p_1 p_2.

(d) Queremos encontrar la pose de B en coordenadas del mundo. Para esto concatenamos las rotaciones y traslaciones de B respecto de A, y de A respecto del mundo:

$$^W\xi_A\ ^A\xi_B = \begin{pmatrix} ^WR_A & ^Wt_A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ^AR_B & ^At_B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^WR_A\ ^AR_B & ^WR_A\ ^At_B + ^W t_A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^WR_B & ^Wt_B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos:

$$^WR_B =^W R_A\ ^AR_B = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos -45 & -\sin -45 \\ \sin -45 & \cos -45 \end{pmatrix} = I$$

$$^Wt_B =^W R_A\ ^At_B +^W t_A = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.414 \end{pmatrix}$$

Luego, en el marco de referencia del mundo, el robot B se encuentra en la posición $(2, 4.414)$.

4. **Dada la pose del robot (Body) en el mundo: $^W\xi_B$. Si se tiene el camino (conjunto de poses $^{C_0}\xi_{C_i}$, con $i = 1...n$) realizado por la cámara C (montada sobre el robot) en el marco de coordenadas de la cámara inicial C_0. Sabiendo la transformación $^B\xi_C$,**

 (a) ¿Qué procedimiento hay que realizar para obtener el camino realizado por la cámara en el sistema de coordenadas del mundo?

 (b) ¿Qué procedimiento hay que realizar para obtener el camino realizado por el robot (Body) en el sistema de coordenadas del mundo?

 (c) Realizar un gráfico ilustrativo donde se visualicen los sistemas de coordenaas, las transformaciones y los caminos realizados por el robot y la cámara.

(a) Para obtener el camino realizado por la cámara en el sistema de coordenadas calculamos las posiciones de la cámara en cada pose respecto del mundo, concatenando la pose inicial del robot respecto del mundo $^W\xi_B$ (para más claridad, notamos $^W\xi_{B_0}$ para indicar que es la posición inicial del robot), con la pose original de la cámara en coordenadas del robot $^B\xi_C$, con la pose de cada pose de la cámara respecto de la pose original de la cámara $^{C_0}\xi_{C_i}$:

$$^W\xi_{C_i} =^W \xi_{B_0}\ ^B\xi_C\ ^{C_0}\xi_{C_i}$$

Dado que la pose relativa entre la cámara y el robot no varía en función del tiempo, entonces para toda posición del robot y de la cámara se mantiene la relación $^B\xi_C$, y por lo tanto es independiente del índice i.

(b) Para obtener la pose del robot en el sistema de coordenadas del mundo seguimos el mismo concepto:

$$^W\xi_{B_i} =^W \xi_{B_0}\ ^{B_0}\xi_{B_i} =^W \xi_{B_0}\ ^B\xi_C\ ^{C_0}\xi_{C_i}\ ^{C_i}\xi_{B_i} = W\xi_{C_i}\ ^{C_i}\xi_{B_i} =^W \xi_{C_i}\ ^C\xi_B$$

donde $^C\xi_B$ representa la pose del robot respecto de la cámara. Como originalmente se tiene la relación inversa, $^B\xi_C$, la cual es fija para toda posición del robot, entonces es posible encontrar también a partir de ésta la relación también fija $^B\xi_C$, y por lo tanto es conocida.

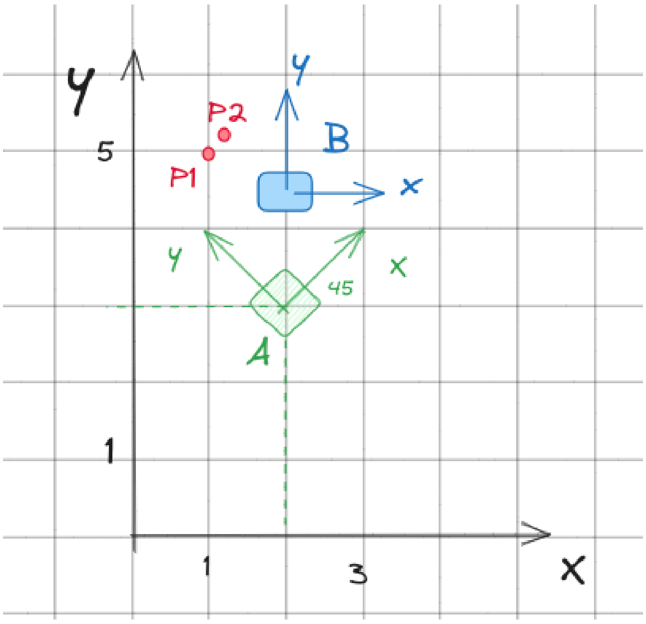

Figure 3: Poses de los robots A y B, y de los puntos p_1 p_2.

(c) En la Figura 3 se puede observar el gráfico ilustrativo donde se visualizan los sistemas de coordenadas, transformaciones y caminos realizados por el robot y la cámara.

(d) En la Figura 4 se encuentran esquematizadas transformaciones y los caminos realizados por el robot y la cámara:

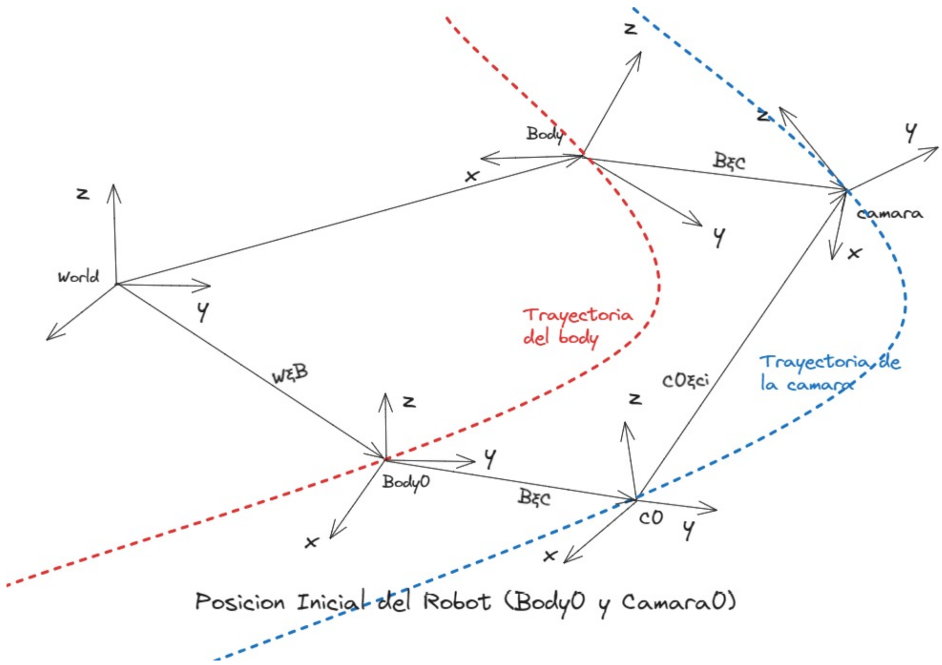

Figure 4: Esquema de las transformaciones entre sistemas de coordenadas y trayectorias del robot y cámara.

5. **Utilizando el dataset EuRoc:**

   (a) **El *ground-truth* se encentra en coordenadas de la IMU (Body). Se pide crear un script en python que dada la trayectoria *ground-truth* genere el *ground-truth* pero en coordenadas de la cámara inicial, usando las transformaciones provistas por el dataset.**

   (b) **Modifique el script para que el timestamp del nuevo *ground-truth* esté en segundos con precisión de nanosegundos. Agregar las primeras 5 filas del ground-truth resultante y las del original del dataset al informe.**

   (c) **Modifique el script para que genere una imagen con ambos *ground-truth* (el camino de la IMU y el camino de la cámara). Aplique las transformaciones necesarias para que**

Timestamp	x	y	z	q_w	q_x	q_y	q_z
0	4.688319	-1.786938	0.783338	0.534108	-0.153029	-0.827383	-0.082152
0.00499968	4.688177	-1.78677	0.78735	0.53464	-0.15299	-0.826976	-0.082863
0.00999987	4.688028	-1.786598	0.791382	0.535178	-0.152945	-0.826562	-0.083605
0.01499981	4.687878	-1.786421	0.795429	0.535715	-0.152884	-0.826146	-0.084391
0.02	4.687727	-1.78624	0.799484	0.536244	-0.152821	-0.825731	-0.085213
0.02499968	4.687579	-1.786059	0.80354	0.536768	-0.152768	-0.825314	-0.086049

Table 1: Primeras 6 poses en coordenadas de la IMU.

Timestamp	x	y	z	q_w	q_x	q_y	q_z
0.	1.8380227	4.6149647	0.6653321	-0.479780	-0.258569	0.6514246	0.651424
0.00499968	1.8378692	4.6149284	0.6693470	-0.480141	-0.258966	0.6516393	0.6516393
0.00999987	1.8377117	4.614885	0.6733821	-0.480503	-0.259371	0.6518708	0.6518708
0.01499981	1.8375493	4.6148425	0.6774323	-0.480853	-0.259786	0.6521319	0.6521319
0.02	1.8373828	4.6147986	0.6814905	-0.481195	-0.260196	0.6524186	0.6524186
0.02499968	1.8372164	4.6147577	0.6855496	-0.481542	-0.260596	0.6527139	0.6527139

Table 2: Primeras 6 poses en coordenadas de la cámara inicial.

ambos caminos estén en el sistema de coordenadas del *ground-truth* original. Agregar la imagen al informe.

Para el dataset dado, el *ground-truth* de las poses está dado en coordenadas de la posición inicial de la IMU. Para encontrar la trayectoria del *ground-truth* en coordenadas de la cámara izquierda utilizamos la transformación que indica la pose de la cámara respecto de la posición inicial de la IMU:

$$^{CAM}P_{IMU} = \begin{pmatrix} 0.0148655429818 & -0.999880929698 & 0.00414029679422 & -0.0216401454975 \\ 0.999557249008 & 0.0149672133247 & 0.025715529948 & -0.064676986768 \\ -0.0257744366974 & 0.00375618835797 & 0.999660727178 & 0.00981073058949 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Luego, para encontrar Las posiciones de la trayectoria *ground-truth* en coordenadas de la cámara hacemos:

$$P_{CAM} =^{CAM} P_{IMU}\ P_{IMU}$$

donde P_{CAM} y P_{IMU} son las poses del robot en la trayectoria vistas desde la posición inicial de la cámara y de la IMU respectivamente. El *ground-truth* de las primeras 5 poses en coordenadas de la IMU inicial y en coordenadas de la cámara inicial pueden observarse en las tablas 1 y 2 respectivamente.

Además, se calculó la trayectoria *ground-truth* de la cámara a partir de la de la IMU y de la relación entre ambas, la cual es fija para toda pose del robot, mediante:

$$x_{CAM} = x_{IMU} + Rt$$

donde x_{CAM} y x_{IMU} representan la trayectoria *ground truth* de la cámara y de la IMU respectivamente, y R y t representan la relación de orientación y traslación entre ambas. Una parte del *ground-truth* tanto de la cámara como de la IMU pueden observarse en la Figura 5.

Anexamos a la entrega de este informe el script realizado para este ejercicio.

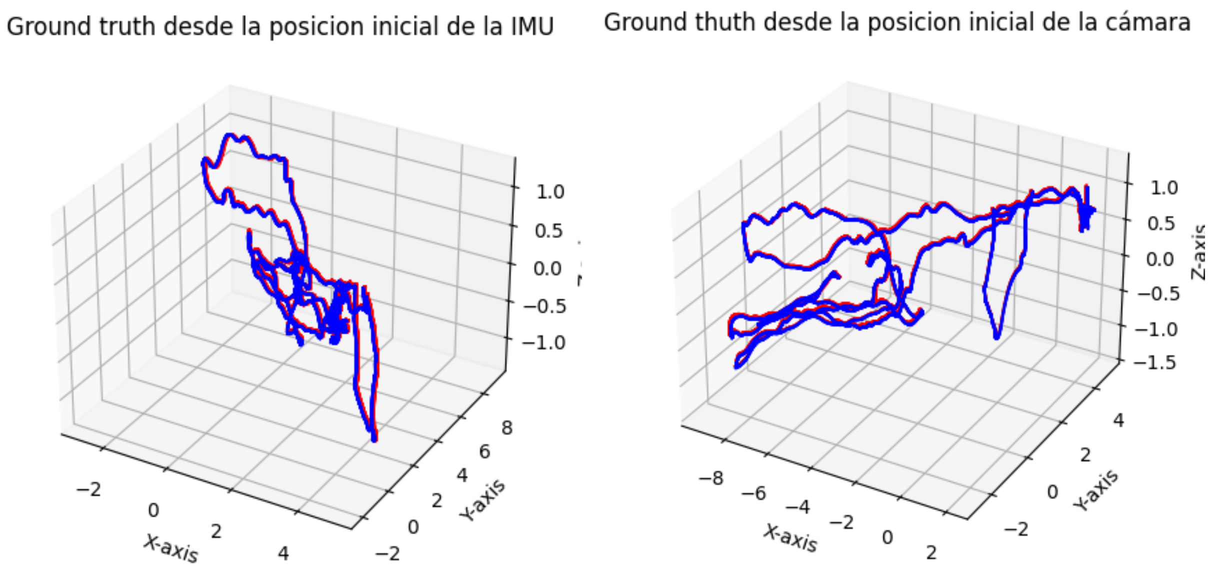

Figure 5: *Ground-truth* de una porción de la trayectoria de la cámara (rojo) y de la IMU (azul) vistas desde la posición inicial de la IMU (izquierda) y de la cámara (derecha).