Cálculo
Problemas resueltos

Nicolás Aguado
Haizea Bermejo
Xiomara Cáceres

5 de mayo de 2022

Índice general

Capítulo 1

Funciones de varias variables

1.1. Diferenciabilidad de las funciones de varias variables

1.1 Problema. *Estudiar la diferenciabilidad de la función $f(x, y)$ en el origen:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Respuesta.

- Continuidad:

  La función es continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en el $(0, 0)$, ya que está compuesta por funciones elementales. Estudiaremos ahora el punto $(0, 0)$:

  - Límites Direccionales - Rectas $(y = mx)$

    $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3m}{x^2(1+m^2)} = \frac{0}{1+m^2} = 0$$

  - Límites Direccionales - Parábolas $(y = \lambda x^2)$

    $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x^2}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\lambda x^2}{x^2+(\lambda x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\lambda}{x^2(1+\lambda^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{1+\lambda^2x^2} = 0$$

  Tanto por las rectas como por las parábolas, si LD existiera, valdría 0.

- Demostraremos por la definición que LD = 0.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \implies \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon.$$

$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\dfrac{x}{x^2+y^2}\right| \cdot |y| \leq 1 \cdot |y|$, ya que $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$.
$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\} < \delta$, y por hipótesis $|y| < \delta$.
Por tanto, es suficiente que $\delta < \varepsilon$
$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$, nos lo piden => $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Así, como $f(0,0) = 0$, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $f(0,0) = l$, podemos afirmar que la función es continua en $\mathbb{R}^2$

- Diferenciabilidad:

  - Derivadas Parciales:
    $D_1f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$
    $D_2f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$
    Por tanto, $Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - Diferencial Total:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(x,y)) - f(0,0) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0?$$

  - Simplificando la expresión:

$$\frac{x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)} = \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2}$$

  - Límites Direccionales - Rectas ($y = mx$)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx\sqrt{x^2+(mx)^2}}{(x^2+(mx)^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4m\sqrt{1+m^2}}{x^4(1+m^2)^2} = \frac{m\sqrt{1+m^2}}{(1+m^2)^2}$$

Luego LD no existe, y $f(x,y)$ no es diferenciable en el punto $(0,0)$

1.2. Extremos locales

Calcular los extremos relativos de la función $f(x, y, z)$ bajo la condición $x^2+y^2 = z+1$.

$$f(x, y, z) = x^2y + xz$$

Simplificando la condición, tenemos que $x^2 + y^2 = z + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - z - 1 = 0$

$$F(x) = x^2y + xz + \lambda(x^2 + y^2 - z - 1)$$

Mediante las derivadas parciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$D_1F = 2yx + z + 2\lambda x \quad || = 0$

$D_2F = x^2 + 2\lambda y \quad || = 0 \Rightarrow 2y\lambda + (\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda(2y + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ ó $\lambda_2 = -2y$

$D_3F = x - \lambda \quad || = 0 \Rightarrow \lambda = x$

$x^2 + y^2 - z - 1 \quad || = 0$

Así, como λ tiene que ser distinto de cero para poder calcular los puntos críticos de la función solo tendremos en cuenta la segunda opción. $\Rightarrow y = \frac{-x}{2}$ (sustituimos λ por x)

Ahora despejamos z de la primera ecuación:

$z = -2yx - 2x\lambda \Rightarrow z = x^2 - 2x^2 = -x^2 \Rightarrow z = -x^2$

Y sustituimos x e y en la última ecuación del sistema

$x^2 + \left(\frac{-x}{2}\right)^2 - (-x)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{4} + x^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + x^2 + 4x^2 = 4 \Rightarrow 9x^2 = 4$

Así, tenemos que $x = \pm\frac{2}{3}$, y despejando y y z, $y = \mp\frac{1}{3}, z = \frac{-4}{9}$

Luego hay dos puntos críticos: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-4}{9}\right)$ y $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-4}{9}\right)$

Estudio de los puntos críticos: Despejamos z

$$x^2 + y^2 = z + 1 \Rightarrow z = x^2 + y^2 - 1$$

Analizaremos la función $\varphi(x, y)$:

$$\varphi(x, y) = f(x, y, x^2 + y^2 - 1) = x^2y + x(x^2 + y^2 - 1)$$

Obtenemos las derivadas parciales, y sustituimos los puntos en ellas para comprobar:

$$\begin{cases} D_1\varphi = 2yx + 3x^2 + y^2 - 1 \\ D_2\varphi = 2xy + x^2 \end{cases}$$

$D_1\varphi\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \frac{-4}{9} + \frac{4}{3} + \frac{1}{9} - 1 = 0$ y $D_1\varphi\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{-4}{9} + \frac{4}{3} + \frac{1}{9} - 1 = 0$

$D_2\varphi\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$ y $D_2\varphi\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$

Como ambas soluciones son 0, podemos afirmar que están bien y seguir con el ejercicio. Ahora calcularemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{cases} D_{11}\varphi = 6x+2y \\ D_{12}\varphi = 2x+2y \\ D_{22}\varphi = 2x \end{cases}$$

Sustituyendo los puntos en las derivadas:
$D_{11}\varphi\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right) = 6\frac{2}{3}+2\frac{-1}{3} = 4-\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$
$D_{11}\varphi\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right) = 6\frac{-2}{3}+2\frac{1}{3} = -4+\frac{2}{3} = \frac{-10}{3}$
$D_{12}\varphi\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right) = 2\frac{2}{3}+2\frac{-1}{3} = \frac{4}{3}-\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
$D_{12}\varphi\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right) = 2\frac{-2}{3}+2\frac{1}{3} = \frac{-4}{3}+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
$D_{22}\varphi\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right) = 2\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
$D_{22}\varphi\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right) = 2\frac{-2}{3} = \frac{-4}{3}$
Ahora, analizamos la sucesión para el punto $(\frac{2}{3},\frac{-1}{3})$:
$H_1 = D_{11}\varphi = \frac{10}{3}$
$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 4$
$\left\{1,\frac{10}{3},4\right\}$ entonces en el punto $(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{-4}{9})$ hay un mínimo.
Por último, analizamos la sucesión para el punto $(\frac{-2}{3},\frac{1}{3})$:
$H_1 = D_{11}\varphi = \frac{-10}{3}$
$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{-10}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \end{vmatrix} = 4$
$\left\{1,\frac{-10}{3},4\right\}$ entonces en el punto $(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{-4}{9})$ hay un máximo.
Luego, sale $f\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{-4}{9}\right) = \frac{4}{9}$, máximo, y $f\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{-4}{9}\right) = \frac{-4}{9}$, mínimo.

1.3. Dominio delimitado por las curvas

Calcular el área del dominio delimitado por las curvas $y = \sqrt{1+x^2}$, $x^2+y^2=1$ e $y = \sqrt{5}(x-1)$ en el primer cuadrante.

Solución.

$x^2+y^2=1 \Rightarrow$ Circunferencia
$C(0,0) \quad r=1$

$y = \sqrt{5}(x-1)$

Cuando $X = 1 Y = 0$
Cuando $X = 0 Y = -\sqrt{5}$

$y = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow y^2 = 1+x^2$

Cuando $X = 0 Y = 1$
Cuando $X = 1 Y = \pm\sqrt{2}$

- Puntos de corte:
  $\begin{cases} y = \sqrt{1+x^2} \\ y = \sqrt{5}(x-1) \end{cases}$

  $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{5}(x-1) \Rightarrow 1+x^2 = 5(x-1)^2 \Rightarrow 1+x^2 = 5x^2-10x+5 \Rightarrow 0 = 4x^2-10x+4 = 2x^2-5x+2$

  $$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 2 \; ; \; x_2 = \frac{1}{2}$$

  $P(2,\sqrt{5})$ Escogemos este porque es en el primer cuadrante

  Entonces, el área encerrada entre las tres funciones es:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})\,dx + \int_1^2 (\sqrt{1+x^2} - \sqrt{5}(x-1))\,dx$$

Ahora calcularemos las integrales indefinidas:

- $$\int_1^2 \sqrt{5}(x-1)dx = \sqrt{5}\int_1^2 (x-1)dx = \sqrt{5}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg]_1^2$$

Hemos calculado la integral, así que sustituimos los valores

$$\sqrt{5}\cdot\left[(\frac{2^2}{2}-2) - (\frac{1^2}{2}-1)\right] = \sqrt{5}\cdot(0+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $\int \sqrt{1-x^2}dx = \int(\sqrt{1-sin^2(t)} + cos(t))dt = \int(\sqrt{cos^2(t)} + cos(t))dt = \int \frac{1+cos2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int 1 + cos2tdt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{sin2t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(arcsin(x) + \frac{sin(2arcsin(x)))}{2}\right) = \frac{arcsin(x)}{2} + \frac{sin(2arcsin(x))}{4}$

  Una vez calculada, sustituimos los valores:

$$\frac{arcsin(x)}{2} + \frac{sin(2arcsin(x))}{4}\Big]_0^1 = (\frac{\pi}{4} + 0) - (0+0) = \frac{\pi}{4}$$

- $\int \sqrt{1+x^2}dx = \int(\sqrt{1+tan(t)} + sec^2(t))dt = \int(\sqrt{sec^2(t)} + sec^2(t))dt = \int sec^3 dt = \int \frac{1}{cos^3(t)}dt = \int \frac{1}{cos^4(t)}du = \int \frac{1}{(1-sin^2()t)^2}du = \int \frac{1}{(1-u^2)^2}du = \int \frac{1}{u^4-2u^2+1}du = \int \frac{1}{(u-1)^2(u+1)^2}du \Rightarrow$

  $\frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{u+1} + \frac{D}{(u+1)^2} \Rightarrow A(u-1)(u+1)^2 + B(u+1)^2 + C(u-1)^2(u+1) + D(u-1)^2 = 1$

$$\begin{cases} u = 1 \Longrightarrow 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \\ u = -1 \Longrightarrow 4D = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{4} \\ u = 0 \Longrightarrow -A + B + C + D = 1 \Rightarrow -A + C = \frac{1}{2} \\ u = 2 \Longrightarrow 9A + 9B + 3C + D = 1 \Rightarrow 9A + 3C = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

  $A = \frac{-1}{4} \quad C = \frac{1}{4}$

  $\Rightarrow \frac{-1}{4}\int \frac{1}{u-1}du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(u-1)^2}du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(u+1)}du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(u+1)^2}du \Rightarrow \frac{-1}{4}ln|u-1| + \frac{1}{4}\frac{-1}{u-1} + \frac{1}{4}ln|u+1| + \frac{1}{4}\frac{-1}{u+1} \Rightarrow \frac{-1}{4}ln|(sin(arcsin(x))) - 1| + \frac{1}{4}\frac{-1}{(sin(arcsin(x))) - 1} + \frac{1}{4}ln|(sin(arcsin(x))) + 1| + \frac{1}{4}\frac{-1}{(sin(arcsin(x))) + 1}$

  Entonces, sustituimos los valores. Para el tramo de 0 a 1 da 1,147793575 y para el tramo de 1 a 2 da 1,81009214

  Entonces el área total sería:

$$A = 1{,}147793575 - \frac{\pi}{4} + 1{,}81009214 - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0{,}3623954107 + 0{,}692058156 = 1{,}054453562u^2$$

1.4. Ecuaciones diferenciales

Ejercicio. Integrar la ecuación diferencial $(x+y)dx + (x+2y)dy = 2dx + 3dy$

Solución.

Primero, simplificamos la expresión:

$$(x+y)dx - 2dx = 3dy - (x+2y)dy \Rightarrow (x+y-2)dx = (3-x-2y)dy \Rightarrow \frac{x+y-2}{3-x-2y} = \frac{dy}{dx}$$

Es una EDO reducible a homogénea. Ahora vamos a encontrar el punto de corte entre ambas rectas.

$$\begin{cases} x+y-2=0 \Longrightarrow x = 2-y & \Rightarrow x = 2-1 \\ -x-2y+3=0 \Longrightarrow 3-2+y-2y=0 & \Rightarrow y=1 \end{cases} \quad \text{Punto } (1,1)$$

Realizamos el cambio:

$$\begin{cases} x = X+1 \Rightarrow dx = DX \\ y = Y+1 \Rightarrow dy = dY \end{cases} \quad y' = Y'$$

Y sustituimos:

$$y' = \frac{x+1+y+1-2}{3-x-1-2y-2} = \frac{x+y}{-x-2y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{-1-\frac{2y}{x}} \quad \text{(EDO Homogénea)}$$

$t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = t + xt'$ (cambio de variables)

$t + xt' = \dfrac{1+t}{-1-2t} \Rightarrow X\dfrac{dt}{dX} = \dfrac{1+t}{-1-2t} - t = \dfrac{1+2t+2t^2}{-1-2t} \Rightarrow$

$\dfrac{-1-2t}{1+2t+2t^2}\,dt = \dfrac{1}{x}\,dX$ (EDO de v.s.)

Hacemos la integral de ambos lados

$$\int \frac{-1-2t}{1+2t+2t^2}\,dt = \int \frac{dX}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1+2t+2t^2| = \ln|X| + k$$

Vamos a simplificar la expresión:

$$\ln\left|\sqrt{\frac{1}{1+2t+2t^2}}\right| = \ln|x| + \ln|k| = \ln|xk|$$

$$\sqrt{\frac{1}{1+2t+2t^2}} = xk \Rightarrow \frac{1}{1+2t+2t^2} = (xk)^2 \Rightarrow 1+2t+2t^2 = \frac{1}{(xk)^2}$$

Y, finalmente, cambiando las variables:

$$1 + 2\frac{Y}{X} + 2\left(\frac{Y}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2k} \Rightarrow X^2 + 2YX + 2Y^2 = \frac{1}{k} = k$$

$(x+1)^2 + 2(y+1)(x+1) + 2(y+1)^2 = k$ Integral general