Análisis Matemático
Problemas resueltos

Nicolás Aguado González

9 de noviembre de 2021

Índice general

Capítulo 1

Problemas resueltos

1.1. Números naturales y enteros

1. Ejercicio Especial 1. Tomando $a \neq 0, 1$, demostrar por inducción:

$$a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

Demostración.

a) Hipótesis tomando $n = 1$:

1) Lado Izquierdo: a
2) Lado Derecho: $\frac{a-a^2}{1-a} = \frac{a(1-a)}{(1-a)} = a$

Como se cumple $a = a$, la igualdad se cumple para $n = 1$

b) Hipótesis de Inducción:
Suponemos que $\forall n \geqslant 1, a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a-a^{n+1}}{1-a}$ se cumple. Por lo tanto, habrá que demostrar $a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1} = \frac{a-a^{n+2}}{1-a}$. Desarrollando:
$a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1} = \text{(H.I)}\ \frac{a-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{a-a^{n+1}+a^{n+1}-a \cdot a^{n+1}}{1-a} = \frac{a-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} = \frac{a-a^{n+2}}{1-a}$
Como hemos llegado a lo que queríamos demostrar, se cumple la hipótesis de inducción $\forall n \geqslant 1$

Luego, como se cumplen las dos hipótesis, la propiedad es cierta $\forall n \geqslant 1, a \neq 0, 1$.

2. Tema 1. Apartado 2. Ejercicio 6. Pregunta 6. Determina el $\text{ínf}(A)$, $sup(A)$, $\text{mín}(A)$, $\text{máx}(A)$ del siguiente conjunto:

$$A = (a, b]$$

Solución.

a) Cotas

1) Cota Inferior: $a-2$, $a-1$, a,...
Suponemos a cota inferior. ¿$\forall x \in A$, $a \leqslant x$? Sí que se cumple por la definición del conjunto. Entonces a es cota inferior.

2) Cota Superior: $b+2$, $b+1$, b,...
Suponemos b cota superior. ¿$\forall x \in A$, $b \geqslant x$? Sí que se cumple por la definición del conjunto. Entonces b es cota superior.

b) Ínfimo y Supremo:

1) Ínfimo. Suponemos $\text{ínf}(A) = a$. Para ello se tienen que dar las dos condiciones:

a' a es cota inferior. (Demostrado anteriormente)

b' $\forall \epsilon > 0$ ¿$\exists x_0$ / $a \leqslant x_0 < a + \epsilon$? Entre a y $a+\epsilon$ existen infinitos números reales, y éstos pertenecen a A. Por lo tanto, x_0 es cualquiera de ellos

Como se cumplen las dos condiciones, podemos afirmar que $\text{ínf}(A) = a$

2) Supremo. Suponemos $sup(A) = b$. Para ello se tienen que dar las dos condiciones:

a' b es cota superior. (Demostrado anteriormente)

b' $\forall \epsilon > 0$ ¿$\exists x_0$ / $b - \epsilon < x_0 \leqslant b$? Entre $b-\epsilon$ y b existen infinitos números reales, y éstos pertenecen a A. Por lo tanto, x_0 es cualquiera de ellos.

Como se cumplen las dos condiciones, podemos afirmar que $sup(A) = b$

c) Máximo y Mínimo:

1) Mínimo: $\text{ínf}(A) = a \notin A \Rightarrow$ No hay mínimo ($\nexists \text{mín}(A)$)

2) Máximo: $sup(A) = b \in A \Rightarrow$ Máximo de A es b ($\exists \text{máx}(A) = b$)

3. Tema 1. Apartado 2. Ejercicio 6. Pregunta 5. Determina el ínf(A), $sup(A)$, mín(A), máx(A) del siguiente conjunto:

$$A = (-1, 1] \cap \mathbb{Q}$$

Solución.

a) Cotas

1) Cota Inferior: -3, -2, -1,...
Suponemos -1 cota inferior. ¿$\forall x \in A$, $-1 \leqslant x$? Sí que se cumple por la definición del conjunto.
Entonces -1 es cota inferior.

2) Cota Superior: 1, 2, 3,...
Suponemos 1 cota superior. ¿$\forall x \in A$, $1 \geqslant x$? Sí que se cumple por la definición del conjunto.
Entonces 1 es cota superior.

b) Ínfimo y Supremo:

1) Ínfimo. Suponemos $\text{ínf}(A) = -1$. Para ello se tienen que dar las dos condiciones:

a′ -1 es cota inferior. (Demostrado anteriormente)

b′ $\forall \epsilon > 0$ ¿$\exists x_0 \ / \ -1 \leqslant x_0 < -1 + \epsilon$? Entre -1 y $-1 + \epsilon$ existen infinitos números racionales, y éstos pertenecen a A. Por lo tanto, x_0 es cualquiera de ellos.

Como se cumplen las dos condiciones, podemos afirmar que $\text{ínf}(A) = a$

2) Supremo. Suponemos $sup(A) = 1$. Para ello se tienen que dar las dos condiciones:

a′ 1 es cota superior. (Demostrado anteriormente)

b′ $\forall \epsilon > 0$ ¿$\exists x_0 \ / \ 1 - \epsilon < x_0 \leqslant 1$? Entre $1 - \epsilon$ y 1 existen infinitos números racionales, y éstos pertenecen a A. Por lo tanto, x_0 es cualquiera de ellos

c) Máximo y Mínimo:

1) Mínimo: $\text{ínf}(A) = -1 \notin A \Rightarrow$ No hay mínimo ($\nexists \text{mín}(A)$)

2) Máximo: $sup(A) = 1 \in A \Rightarrow$ Máximo de A es 1 ($\exists \text{máx}(A) = 1$)

1.2. Series de números reales

a) Ejercicio Especial 2. Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_n \frac{2n+1}{n} \cdot a^n, a > 0$$

Solución.
Como es una serie de números positivos, aplicamos D'Alambert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2(n+1)+1)\cdot a^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2n+1)\cdot a^n}{n}} = \frac{(2n+3)\cdot a^{n+1}\cdot n}{(2n+1)\cdot a^n \cdot (n+1)} = \frac{(2n+3)\cdot a \cdot n}{(2n+1)\cdot (n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)\cdot a \cdot n}{(2n+1)\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 \cdot a}{2n^2} = a$$

Por los criterios de D'Alambert:

Cuando $a > 1$, la serie es divergente.
Cuando $a < 1$, la serie es convergente.

Ahora estudiaremos el caso $a = 1$, aplicando Raabe:

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{(2n+3)\cdot n}{(2n+1)(n+1)}\right) = n\left(\frac{-2n^2 - 3n + 2n^2 + 2n + n + 1}{2n^2 + 2n + n + 1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2 + 2n + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2} = 0$$

Como $l = 0$, por los criterios de Raabe $(0 < 1)$:

Cuando $a = 1$, la serie es divergente

b) Tema 3. Ejercicio 4. Pregunta 2. Determina el carácter de la series con el siguiente término general:

$$\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot a^n, a > 0$$

Solución.

Como es una serie de números positivos, aplicamos D'Alambert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2 \cdot a^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2 \cdot a^n}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2 \cdot a^{n+1} \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot a^n \cdot (n!)^2} = \frac{(n!)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot a \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n!)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot a}{(2n+1) \cdot 2(n+1)} = \frac{a(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{an+a}{4n+2} = \frac{a}{4}$$

Entonces, por los criterios de D'Alambert:

Si $\frac{1}{4} < 1$ ó $a < 4$, la serie es convergente.

Si $\frac{1}{4} > 1$ ó $a > 4$, la serie es divergente.

Si $\frac{1}{4} = 1$ ó $a = 4$, es un caso dudoso.

Cuando $a = 4$, tenemos la serie $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 4^n$. Entonces, aplicaremos Raabe:

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{4n+4}{4n+2}\right) = n\left(\frac{4n+2-4n+4}{4n+2}\right) = \frac{-2n}{4n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{4n+2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

Por el criterio de Raabe, como $-0,5 < 1$, podemos decir que la serie es divergente cuando $a = 4$.