Recopilación de ejercicios de exámenes de años anteriores

Cálculo
Facultad de Informática
UPV/EHU

Nicolás Aguado
nico@nico.eus

1 de agosto de 2024

Índice

1. Temas 1,2,3 - Funciones de Varias Variables

1.1. Continuidad y Diferenciabilidad

Enunciado global: Estudia la continuidad y diferenciabilidad en el origen de la siguiente función.

- 2013 - Julio:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}, & x^2+y \neq 0 \\ 0, & x^2+y = 0 \end{cases}$$

- 2014 - Mayo:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)+x^6}, & y \neq x^2+x^6 \\ 0, & y = x^2+x^6 \end{cases}$$

- 2015 - Junio, 2020 - Mayo:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- 2016 - Junio:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{(y-x^3)^3+x^5}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- 2017 - Junio:
$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- 2018 - Mayo:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

- 2018 - Junio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

- 2019 - Mayo:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- 2021 - Mayo:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

- 2021 - Junio:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} + y\sin\dfrac{1}{y}, & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

- 2022 - Mayo:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} + y\sin\dfrac{1}{y}, & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

- 2022 - Junio:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- 2023 - Mayo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- 2024 - Mayo: (Respecto al parámetro A)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A}{xy} - \sqrt{x^2 - y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1.2. Extremos relativos y bajo condiciones

- 2014 - Mayo:
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2 - 2xy$
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ bajo la condición $x + y + z = 3$. Utiliza el meétodo de los multiplicadores de Lagrange.
- 2015 - Mayo: Dada la función $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, calcula sus extremos relativos. Además, calcula también sus extremos relativos bajo la condición $xy = 4$.
- 2015 - Junio:
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^2(y + 1)$ bajo la condición $x^2 + y^2 = 1$.
- 2016 - Mayo:
  - Calcula los extremos relativos de la función: $u = 2x^2 + y^2 + z^3 - yz + 2xz + 2xy$
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x(y + r)$ bajo la condición de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.
- 2016 - Junio: Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ bajo la condición de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$, siendo $r, x, y, z > 0$.
- 2017 - Junio:
  - Calcula los extremos de la función $f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = x^2yz$ bajo la condición $x + y + z = 12$.
- 2018 - Mayo:
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$ en el dominio de definición $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq \pi$

- Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ bajo la condición $x^2 + y = 1$, por el método de los multiplicadores de Lagrange.

- 2018 - Junio: Calcula los extremos, por el método de los multiplicadores de Lagrange, de la función $f(x,y,z) = x + y + z$ bajo la condición $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Obtén un punto crítico.

- 2019 - Mayo:
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$
  - Calcula los extremos de la función $f(x,y) = xy$ bajo la condición $x^2 + y^2 = 10$, por el método de los multiplicadores de Lagrange.

- 2020 - Mayo:
  - Calcula los extremos de la función $f(x,y,z) = xyz$ bajo la condición $x+y+z = 3$ por el método de los multiplicadores de Lagrange .

- 2021 - Mayo: Calcula los extremos, por el método de los multiplicadores de Lagrange, de la función $f(x,y,z) = x + y + z$ bajo la condición $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$

- 2018,2021 - Junio:
  - Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = xye^{x+2y}$
  - Calcula los extremos de la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+x+y+z$ bajo las condiciones $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $z = 1$, por el método de los multiplicadores de Lagrange .

- 2022 - Mayo: Calcula los extremos, por el método de los multiplicadores de Lagrange, de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ bajo la condición $x^2 + y^2 + 2z = 16$ y además bajo la condición $x + y = 4$

- 2022 - Junio: Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$

- 2023 - Mayo: Calcula, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos de la función $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$ bajo las condiciones $x - 3z - 2 = 0$ y $y - 2z - 1 = 0$

- 2024 - Mayo: Calcula, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ bajo la condición $xyz = 1$, siendo $z > 0$.

1.3. Regla de la Cadena

- 2016 - Junio: Calcula, usando la regla de la cadena, las derivadas parciales respecto de u y v de la función $f(x,y,z)$. Tómese $x = uv$, $y = u^2$ y $z = v^2$.

$$f(x,y,z) = x(z-1)^2 + (x-1)y^2 + (y+2)^2 z^2$$

- 2016 - Mayo: Sean las funciones $g(x,y) = (1+x^2, y^2)$ y $f(u,v) = (u+v, e^u, v^2)$. Si $h = f \circ g$ es la función compuesta, calcula $Dh(1,1)$.
- 2017 - Junio: Escribe la ecuación diferencial $x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$, siendo $z = z(x,y)$ y tomando como variables u y v, siendo $u = x$ y $v = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$
- 2018 - Mayo: Sean las funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2)$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, g(u,v,w) = (u^w, \sin(v+w))$. Si $h = g \circ f$ es la función compuesta, calcula $Dh(0,0)$.
- 2019 - Mayo: Sean las funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x,y) = (x, x-1, xy)$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, g(u,v,w) = uv^2 + we^{u^2}$. Si $h = g \circ f$ es la función compuesta, calcula por medio de la regla de la cadena $Dh(1,3)$.
- 2020 - Mayo: Calcula las derivadas parciales u, v, w de la función $f(x,y,z) = xyz$, siendo las variables $x = uvw$, $y = \dfrac{uw}{v}$ y $z = u + v + w$
- 2021 - Mayo: Tomemos las funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (\sin x, \cos y, \sin x \cos y)$, y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(u,v,w) = uvw$. Si $h = g \circ f$ es la función compuesta, calcula por medio de la regla de la cadena $Dh\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$
- 2022 - Junio: Tomando las funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2,\ 2xy + 3xz + yz)$, y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(u,v) = (1+u^2)(1+v) - uv$. Si $h = g \circ f$ es la función compuesta, calcula por medio de la regla de la cadena $Dh\,(1,0,1)$
- 2023 - Mayo: Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(u,v) = (u \sin v,\ u \cos v)$, y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$. Si $h = g \circ f$ es la función compuesta, calcula por medio de la regla de la cadena $Dh\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

- 2024 - Mayo: Dadas las funciones $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(u,v,w) = \dfrac{u+v}{w}$, y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (\ln(x), \ln(x+y), \cos(\pi xy))$. Si $h = g \circ f$ es la función compuesta, calcula por medio de la regla de la cadena las derivadas parciales. Además, calcula la dirección del vector para el cual la derivada direccional de la función h en el punto $(1,1)$ es máxima y calcula ese valor máximo.

2. Temas 4,5 - Integrales

2.1. Integrales Indefinidas

- 2013, 2021 - Mayo:
  - $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$
  - $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$
- 2013 - Julio:
  - $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$
  - $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}\,dx$
- 2014,2016 - Mayo:
  - $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}\,dx$
  - $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}\,dx$
- 2015 - Mayo
  - $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x+5}$
  - $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$
- 2015 - Junio:
  - $\displaystyle\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx$

- $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$

- 2016 - Mayo:
  - $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$
- 2016 - Junio:
  - $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}\,dx$
  - $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$
- 2017 - Junio:
  - $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$
  - $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$
- 2020 - Mayo:
  - $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
- 2021 - Junio:
  - $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$
- 2022 - Mayo:
  - $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\,dx$

2.2. Integrales Definidas e Integrales Dobles

- 2013 - Junio:

  Calcula el volumen finito que definen el paraboloide $x^2+y^2=8z$ y el plano $z=1$

- 2015 - Mayo: Calcula el área entre las circunferencias $(x+1)^2+y^2=4$ y $(x-1)^2+y^2=4$

- 2015 - Junio: Calcula el área finita que definen las ecuaciones: $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = 2x$
- 2016 - Junio: Calcula el volumen finito que definen el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
- 2017 - Junio: Calcula el volumen del cuerpo generado por la superficie $x^2 + y^2 = z$ y la superficie $z = 3$
- 2018 - Junio: Calcula el volumen que genera el dominio de definición: $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x^2 + y^2 \leq ax \quad \text{y} \quad 0 \leq z\}$
- 2019 - Mayo: Calcula el área de la región delimitada por las siguientes funciones: $f(x) = -2x^2 + 2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = -x^2 + 4$
- 2020 - Mayo: Calcula el área finita que definen las ecuaciones: $x = 0$, $y^2 = x$ e $y = 1$
- 2021 - Mayo: Calcula el volumen de revolución generado por la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$ al girar alrededor del eje OX. Haz el gráfico
- 2021 - Junio: Calcula el área de revolución generada por la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ al girar alrededor del eje OX. Haz el gráfico.
- 2022 - Mayo: Calcula el volumen generado por la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el círculo $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ del plano OXY.
- 2022 - Junio:
  - $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$
  - Usando una integral doble, calcula el área finita que definen las curvas: $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9,\ y \leq x$ e $\ y \geq 0$
- 2023 - Mayo: Calcula el volumen generado por la función $f(x, y) = x + y + 2$ en el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ del plano OXY.
- 2024 - Mayo: Sea el dominio D definido por las siguientes condiciones:

$$x^2 + y^2 \leq 2\,,\ x^2 \leq y\,,\ x \geq 0$$

  - Calcula el área del dominio D.
  - Calcula el volumen delimitado por la superficie $z = xy$ en el dominio D.

3. Tema 6. Ecuaciones Diferenciales

3.1. De primer orden y de orden n

Enunciado global: Integra las siguientes ecuaciones diferenciales.

- 2013 - Mayo:
  - $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0$
  - $y''' + y'' + y' + y = xe^x$
- 2013 - Junio:
  - $(x - y + 1)dx + (2x + y - 2)dy = 0$
  - $y^{IV} + y''' = \cos 4x$
- 2014 - Mayo:
  - $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$
  - $y'' + 4y = 7\cos 2x$
- 2015 - Mayo:
  - $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y\, dy = 0$
  - $(y \cot x - 5e^{\cos x})dx + dy = 0$
  - $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x$
- 2015 - Junio:
  - $(xy - y)dx + (x^2 - 2x + y)dy = 0$
  - $y^{IV} + y'' = x^2 + x$
- 2016 - Mayo:
  - $(y^2 - 1)\, dx + (3x^2 - 2xy)\, dy = 0$
  - $y''' + y' = 1 + e^{2x} + cosx$
- 2016 - Junio:
  - $y' - x^2y = x^5$
  - $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} + x^2$
- 2017 - Junio:

- $xy' + y = y^2 \ln x$
- $y''' - y = \sin x$

- 2018 - Mayo:
  - $(y \ln x - 2)y\, dx = x\, dy$
  - $x\, dx + y\, dy = \dfrac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$

- 2018 - Junio:
  - $x \cos \dfrac{y}{x}(y\, dx + x\, dy) = y \sin \dfrac{y}{x}(x\, dy - y\ dx)$
  - $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{2x}$

- 2019 - Mayo:
  - $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$
  - $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$

- 2020 - Mayo:
  - $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$
  - $y'' + y' - 2y = (x^2 + 1)e^x$
  - $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x \sin(2x) \cos(x)$

- 2021 - Mayo:
  - $(x - y)y\, dx - x^2 dy = 0$
  - $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3$

- 2021 - Junio:
  - $y' = -\dfrac{x + y}{x}$
  - $y^{IV} + y''' = \cos 4x$

- 2022 - Mayo:
  - $y\, dx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy = 0$
  - $y''' - y = x^3 - 1$

- 2022 - Junio:

- $y' = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$
- $y'' + y = x \sin x$

- 2023 - Mayo:
  - $(x-2y)\,dy = (2x+y)\,dx$
  - $y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x$

- 2024 - Mayo:
  - $y' = \left(\dfrac{x+y+1}{x+y-1}\right)^2$
  - $y' = \cos^2(x+y+2) - 1$
  - $y'' + 2y' + y = e^{-x} + \cos 2x$

Mucho ánimo, y que la suerte esté siempre de tu parte.