

# 1- Introducción

---

Vamos a considerar algunas cuestiones. Suponga un aeroplano volando sobre nosotros. Las alas deben estar bajo tensión con el fin de soportar a los pasajeros y a la carga. Cuánta tensión pueden soportar las alas? Si estuviera volando un planeador, y una nube (con hielo?) apareciera, la corriente térmica podría elevarlo aún más. Se atreve a volar dentro de una nube? tienen las alas suficiente resistencia? Por delante se ve el puente Golden Gate. Los cables soportan una tremenda carga. Cómo diseñar este tipo de cables? La nube contiene agua y el campo necesita esa agua. Si hubiera sembrado, le gustaría hacer llover? y que llueva cuando fuera necesario? esa cantidad de lluvia caída es la necesaria sin causar inundaciones? A la distancia hay una estación de energía nuclear. Como se transporta el calor en el reactor? Qué tipo de térmica hay dentro del reactor? Cómo se puede evaluar la seguridad de un reactor durante un terremoto? qué pasa con la tierra en un terremoto? Pensando en el mundo, ud puede preguntarse cómo flotan los continentes, se mueven o se separan? y qué hay de nosotros mismos: cómo respiramos? qué cambios se llevarán a cabo en nuestros pulmones si hacemos un ejercicio de yoga y nos paramos sobre nuestras manos?

Curiosamente, todas estas preguntas están relacionadas con la fuerza, movimiento, flujo, deformación, energía, propiedades de la materia, interacción externa entre cuerpos, o la interacción interna entre una parte del cuerpo y otra, y cambios en las propiedades de la materia, temporalmente o permanentemente, reversible o irreversible. Estos cambios, junto con los axiomas de la mecánica del continuo, se pueden reducir a ciertas ecuaciones diferenciales y condiciones de borde. Resolviendo cada ecuación, obtenemos información cuantitativa precisa. En este libro, nos ocupamos de los principios fundamentales que subyacen a estas ecuaciones diferenciales y condiciones de borde. Aunque sería bueno resolver estas ecuaciones una vez que se formulan, no vamos a participar en la discusión de las soluciones en detalle. Nuestro objetivo es la formulación: la reducción formal de las ideas generales a una forma matemática.

## 1.2 Aplicaciones en la ciencia y la tecnología.

El enfoque matemático tomado en este libro está destinado a servir a la ciencia y la tecnología. Quiero que las aplicaciones sean evidentes para los estudiantes; por lo tanto, los ejemplos y los problemas a resolver se expresan a menudo en términos de investigación científica o diseño de ingeniería. La manera de pensar en relación al diseño y la invención de las cosas, dispositivos, métodos, teorías, y experimentos puede fortalecerse con práctica constante, formando un hábito.

## 1.3 Qué es la mecánica?

Mecánica es el estudio del movimiento (o equilibrio) de la materia y las fuerzas que causan el movimiento (o equilibrio). La mecánica está basada en los conceptos de tiempo, espacio, fuerza, energía, y materia. El conocimiento de la mecánica es necesario para el estudio de todas las ramas de la física, química, biología y la ingeniería.

#### 1.4 Un prototipo de un continuo: la definición clásica.

El concepto clásico de continuo es derivado de las matemáticas. Sabemos que el sistema de números reales es un continuo. Entre cualesquiera dos números reales distintos, hay otro real distinto, y por lo tanto, existen infinitos números reales distintos entre 2 reales. Intuitivamente sentimos que el tiempo puede ser representado por un sistema de números reales  $t$  y que el espacio de tres dimensiones puede ser representado por un sistema de números reales  $x, y, z$ . Así, identificamos juntos, el espacio y el tiempo en un sistema de 4 dimensiones continuo.

Extendiendo el concepto de continuo a la materia, podemos hablar de una distribución continua de la materia en el espacio. Esto puede ser mejor ilustrado considerando el concepto de *densidad*. La medida de la cantidad de materia es la *masa*, y supongamos que cierta materia pertenece a cierto espacio  $V_0$  como en la Fig 1.1. Vamos a considerar un punto  $P$  en  $V_0$  y una secuencia de subespacios  $V_1, V_2, \dots$ , convergiendo a  $P$ .

$$V_n \subset V_{n-1} ; \quad P \in V_n \quad (n=1,2,\dots) \quad (1.4-1)$$

Decimos que el volumen de  $V_n$  es  $V_n$ , y la masa de la materia contenida en  $V_n$  es  $M_n$ . Formamos la relación  $M_n / V_n$ . Entonces, si el límite de  $M_n / V_n$  existe cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $V_n \rightarrow 0$ , el valor del límite es definido como la *densidad de la distribución de masa en el punto P* y es denotado por  $\rho(P)$ :

$$\rho(P) = \lim_{n \rightarrow \infty \text{ y } V_n \rightarrow 0} (M_n / V_n) \quad (1.4-2)$$

Si la densidad está definida siempre en  $V_0$ , la masa se dice que está *distribuida de forma continua*.

una consideración similar puede utilizarse para definir la densidad de momentum, la densidad de energía, y así. Un material continuo es un material para el cual las densidades de masa, momentum y energía existen en el sentido matemático. La mecánica de tales materiales continuos, es la mecánica del continuo.

Esta es la definición usual de un material continuo. Sin embargo, si nos adherimos rigurosamente a esto, no será de utilidad para la ciencia y la tecnología, porque el conjunto de mundo real que satisface esa definición está vacío. Por ejemplo, ningún gas satisface esta ecuación de densidad (1.4-2) cuando  $V_n$  se hace más pequeño que el camino libre en medio. Ningún fluido satisface la ecuación cuando  $V_n$  se vuelve de tamaño atómico. Ningún metal policristalino o estructura compuesta de fibra, ningún cerámico, y ningún polímero plástico puede cumplir este requerimiento; ningún organismo vivo, ningún tejido animal, no hay una célula y agregado celular que pueda.

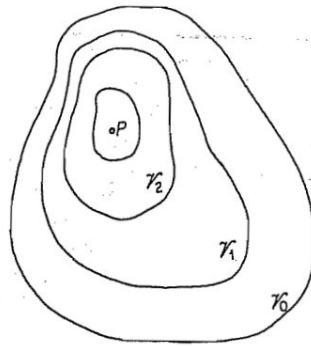


Figure 1.1 A sequence of spatial domains converging on  $P$ .

### 1.5 Nuestra definición de Continuo.

Definiremos un material como un continuo de una manera similar al enfoque clásico, excepto que el tamaño del volumen  $V_n$  será acotado por debajo y no será necesario que las partículas del material sea uno a uno con los números reales. Las partículas del material pueden ser discretas y tener huecos entre ellos. Para el concepto de densidad del material, consideramos un punto  $P$  en el espacio  $V_0$ . Consideramos también una secuencia de subespacios  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , con volúmenes  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , respectivamente, cada uno encerrando al siguiente y todos encerrando a  $P$ . Cuando  $n \rightarrow \infty$ , el límite de  $V_n$  (volumen) tiende a un número positivo finito  $\omega$ . La masa encerrada por el subespacio  $V_n$  es  $M_n$ . La secuencia de la proporción  $M_n / V_n$  se dice que tiene un límite  $\rho$  con una tolerancia  $\epsilon$  si:

$$| \rho - M_n / V_n | < \epsilon$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . La cantidad  $\rho$  es entonces, la densidad del material  $P$  con una variabilidad aceptable  $\epsilon$ , en la definición del límite de volumen  $\omega$ .

Definimos el *momentum* de la partícula de un material por unidad de volumen y la energía por unidad de volumen de manera similar, cada uno asociado con una variabilidad aceptable y una definición de volumen. Después (secc 1.6), nos ocuparemos de la acción de la fuerza sobre el cuerpo de un material, y sería necesario considerar si el clima ejerce una fuerza límite por unidad de área sobre algún punto sobre la superficie con una variabilidad aceptable en la definición del límite de la zona. Si existe, entonces el límite es llamado *tracción* o *stress* (*tensión*), y la entidad colectiva de tracciones en (todas las direcciones sobre la sup) cualquier dirección de la superficie es llamado *tensor de stress* (*tensor de tensión*, *stress tensor*). En el cap 5 consideraremos el cambio de separación entre las partículas, y definiremos el *tensor de deformación* (strain tensor). La existencia de componentes de deformación estará asociado con una variabilidad aceptable y una definición límite de longitud.

Si, con una comprensión clara de variabilidad aceptable y definición límite de longitudes, áreas, volúmenes, la densidad, momentum, energía, tensión (stress), y deformación (strain) puede ser definido en cualquier punto en el espacio  $V_0$ , y si son todas funciones continuas del espacio de coordenadas  $V_0$ , entonces podemos decir que el material en  $V_0$  es uno continuo.

Si un material es un continuo en el sentido clásico, también es un continuo en nuestro sentido. Para un continuo clásico la variabilidad aceptable y la definición límite de longitud, área y volumen es cero.

En otros libros de mecánica del continuo, los autores dicen o implican que para decidir si la mecánica del continuo es aplicable a la ciencia y tecnología es una cuestión que los experimentadores de cada disciplina deben decidir. Yo opino que todos los experimentadores saben que la teoría clásica no es aplicable; por lo tanto, es responsabilidad de los teóricos redefinir la teoría para caber en el mundo real. Nuestro enfoque se ajusta a muchos campos de la ciencia y tecnología; la necesidad de especificar variables aceptables y definir dimensiones es el precio que hay que pagar.

#### 1.6 El concepto de STRESS en nuestra definición de continuo.

Considere un material B ocupando una región espacial V (Fig. 1.2). Imagine una superficie cerrada S contenido en B, y considere la interacción entre el material externo S y del interior. Dejemos que  $\Delta S$  sea una pequeña superficie sobre S. Dibujemos desde un punto sobre  $\Delta S$ , un vector normal a  $\Delta S$ , apuntando hacia afuera desde el interior de S. Entonces podemos distinguir los 2 lados de  $\Delta S$  de acuerdo a la dirección de  $\mathbf{v}$ . Dejamos que el lado hacia adonde apunta la normal sea el positivo. Considera la parte del material que se ha quedado del lado positivo. Esta parte ejerce una fuerza  $\Delta \mathbf{F}$  sobre la otra parte, que está situada del lado negativo de la normal. La fuerza  $\Delta \mathbf{F}$  depende del lugar y del tamaño del área y de la orientación de la normal. Introdujimos el supuesto que  $\Delta S$  tiende a una pequeña cota de tamaño  $\alpha$ , la razón  $\Delta \mathbf{F}/\Delta S$  tiende a un límite definido  $d\mathbf{F}/dS$  con una variabilidad aceptable de  $\epsilon$ , y en el momento que la fuerza actúa sobre la superficie  $\Delta S$  sobre cualquier punto dentro, el área se desvanece en el límite de la pequeña pero delimitada área  $\alpha$  con una variabilidad aceptable. El vector delimitador (?) lo escribiremos como

$$\overset{\mathbf{v}}{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{F}}{dS},$$

donde el supra  $\mathbf{v}$  es introducido para denotar la dirección de la normal  $\mathbf{v}$  de la superficie  $\Delta S$ . El vector "limitación" (delimitador?)  $\mathbf{T}$ , es llamado tracción, o el vector stress (stress vector), y representa la fuerza por unidad de área actuando sobre una superficie.

La afirmación que asegura que sobre cualquier superficie imaginaria cerrada S en el interior de un continuo hay un campo vectorial stress, cuya acción sobre el material que ocupa el espacio interior a S es equivalente a la acción del material exterior sobre éste, es el principio de Stress de Euler y Cauchy. Aceptamos este principio como un axioma; sin embargo, no es más que una simplificación. Por ejemplo, no hay justificación a priori que la interacción del material sobre los 2 lados del elemento superficie  $\Delta S$  debe ser momentáneo. De hecho, algunas personas no les gusta la idea restrictiva que el momento de la fuerza actuando sobre la superficie  $\Delta S$  alrededor de cualquier punto dentro del área se desvanece en el límite, han propuesto una generalización del principio de stress de Euler y Cauchy, a saber, que a través de cualquier elemento pequeño de superficie en el material, la acción del material exterior sobre el interior es equivalente a *fuerza y a un par (couple)*. La teoría resultante requiere conceptos de couple stress y es mucho más complejo que la teoría

convencional. Hasta ahora, no se ha encontrado aplicación real a la teoría de coupla-stress; por lo tanto, no lo discutiremos en este libro.

### 1.7 Copia abstracta de un continuo real.

Una vez que se decide que un cuerpo material puede ser considerado como un continuo, uno puede construir una copia abstracta de un material real conforme a la definición clásica. La copia abstracta es isomórfica con el sistema de números reales: esta es una idealización de la materia real. Las reglas de idealización son las siguientes: la densidad de masa del sistema idealizado es el mismo que uno real en el rango de esta definición. Cuando un conjunto de fuerzas es aplicado a ambos, material real y copia abstracta, el stress (tensión) y strain (deformación) de los 2 sistemas son los mismos, excepto que el cálculo del sistema idealizado puede ser llevado a cabo rigurosamente, mientras que de el material real tendría una limitación en el límite inferior de tamaño y una variabilidad estadística que deben ser evaluados.

La ecuación constitutiva de una copia abstracta de un material real en un cierto rango de tamaños pueden diferir de la ecuación constitutiva de otra copia del mismo material en un rango diferente de tamaños. Si la ecuación constitutiva de un material real son los mismos para los rangos consecutivos, entonces la copia abstracta tiene una ecuación constitutiva en el total de rango. Sino tendrá diferentes ecuaciones en rangos sucesivos. Esto es de hecho, una característica útil de nuestro sistema, porque nos permite reconocer estructuras diferentes de un objeto a una dimensión de observación diferente, al hacer preguntas diferentes a diferentes niveles de tamaño, y para obtener un mejor entendimiento en su totalidad.

La jerarquía de las ecuaciones constitutivas en diferentes dimensiones de observación de un material se relaciona con la similitud o diferencia de la estructura de los materiales a diferentes dimensiones. La estructura de un material puede ser *fractal*, por ejemplo, si son similares en los sucesivos rangos de tamaños; o puede que no sea fractal. Por ejemplo, el patrón geométrico de las vías respiratorias de los pulmones, desde los grandes bronquios a los pequeños bronquiolos, tienen una estructura fractal, por lo que los bronquios en este rango de tamaños se puede esperar que obedezcan a la misma ecuación constitutiva. el patrón estructural de los ductos alveolares, desde los bronquiolos respiratorios a los sacos alveolares, es otro fractal; por lo tanto, una ecuación constitutiva diferente se espera que se mantenga en este nivel. Por lo tanto, sus propiedades mecánicas necesitan completamente descripciones diferentes.

### 1.8 Sobre qué trata la mecánica del continuo?

Llamaremos a un continuo encerrado en una superficie cerrada a un *cuerpo*. La superficie puede ser real, como la piel de un hombre o la cubierta de un avión. Pero puede ser también imaginario, visualizada para encerrar un poco de espacio.

Los objetos del mundo real están sometidos a fuerzas actuando sobre sus cuerpos (gravedad) y fuerzas actuando sobre sus superficies (presión atmosférica, viento, etc.). Si el cuerpo es un continuo en el sentido descrito en esta sección, entonces nos gustaría saber cómo el material en el cuerpo reacciona a las fuerzas externas. La determinación de las condiciones internas de un cuerpo en respuesta de fuerzas externas es de lo que trata la mecánica del continuo.

### 1.9 Axiomas de la mecánica del continuo.

Los axiomas de la física se toman como los axiomas de la mecánica del continuo. En particular, usamos las leyes de Newton del movimiento y la primera y segunda leyes de la termodinámica en este libro.

Existen tres axiomas adicionales de MC. 1°, Un material continuo permanece continuo bajo la acción de fuerzas. Por lo tanto, 2 partículas que son vecinas en un momento, permanecen vecinas siempre. Permitimos cuerpos que se puedan romper (fracturar); pero las superficies de fractura deben estar identificadas como nuevas superficies externas recién creadas. En los cuerpos vivos, permitimos el crecimiento y la reabsorción. Cada nueva célula agregada o reabsorbida crea una nueva superficie en el cuerpo.

El 2° axioma es que el STRESS (esfuerzo-tensión) y STRAIN (deformación-compresión) pueden ser definidos en cualquier parte del cuerpo.

El 3° axioma es que el stress (tensión) en un punto está relacionado al strain (deformación) y la tasa de cambio (velocidad) de strain con respecto al tiempo en el mismo punto.

Estos axiomas son una gran suposición simplificadora. Se afirma que el tensión en cualquier punto del cuerpo depende solamente de la deformación de sus vecinos inmediatos al punto. Esta relación stress-strain, puede ser influenciada por otros parámetros, como la temperatura, cargas eléctricas, impulsos nerviosos, contracción muscular, pero esas influencias pueden ser estudiadas por separado.

### 1.10 Un ejemplo biológico de la jerarquía de dependencia continua en el tamaño de los objetos involucrados en la investigación científica.

### 1.11 Temas elementales a través de los cuales se desarrollaron las ideas básicas.

Como una introducción al resto del libro, consideraremos algunos temas que son simples y útiles y que han sido fundamentales en la historia de la mecánica. Esto incluye a las leyes de Newton del movimiento, las ecuaciones de equilibrio, el uso del diagrama de cuerpo libre, el análisis de una armadura, un haz, un bloque, un plato y una cáscara, y la teoría clásica de la viga. Si te resultan familiares estos temas, puedes pasarlos rápidamente. Si algunos puntos son nuevos para tí, te aseguramos que su aprendizaje no será una pérdida de tiempo.

#### Las leyes de Newton del movimiento

Las leyes de Newton están expresadas con respecto a las partículas del material en un espacio tridimensional que obedece la geometría Euclídea. Una partícula tiene una medida única, positiva, la masa de la partícula. La ubicación de la partícula puede ser descrita con respecto a un marco rectangular cartesiano de referencia. Se asume que existe un marco de referencia inercial, con respecto al cual las ecuaciones de Newton de movimiento son válidas. Se puede demostrar que cualquier marco de referencia que se mueve con velocidad uniforme con respecto a un marco inercial es también inercial. Considere una partícula de masa  $m$ . Donde la posición, velocidad y aceleración están denotados por los vectores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$ , respectivamente, todos definidos en un marco de referencia inercial. Por definición,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.11-1)$$

Dejamos que  $\mathbf{F}$  sea la fuerza total actuando sobre la partícula. Si  $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ , entonces la primera ley de Newton establece que

$$\mathbf{v} = \text{constante.} \quad (1.11-2)$$

Si  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ , entonces la segunda ley de Newton establece que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{F}; \text{ o } \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad (1.11-3)$$

Cuando la ecuación anterior se escribe como

$$\mathbf{F} + (-m \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{0}; \quad (1.11-4)$$

decimos que es una ecuación de equilibrio de 2 fuerzas. El término  $-m \cdot \mathbf{a}$  es llamado *fuerza de inercia*. La ecuación (1.11-4) establece que la suma de la fuerza externa que actúa sobre la partícula y la fuerza inercial se anula; es decir, la fuerza de inercia equilibra la fuerza externa. La ecuación de Newton de movimiento indicada de esta manera es llamada *Principio de D'Alembert*.

Ahora consideremos un sistema de partículas que interactúan juntas. Todas las partículas están influenciadas por todas las demás partículas en el sistema. Denotamos con el índice  $I$  a la partícula  $I$ -ésima. Y denotamos  $\mathbf{F}_{IJ}$  a la fuerza de interacción ejercida por la partícula  $J$  sobre la partícula  $I$ , y la fuerza  $\mathbf{F}_{JI}$ , la de la partícula  $I$  sobre la partícula  $J$ . Entonces La tercera ley de Newton establece que

$$\mathbf{F}_{IJ} = -\mathbf{F}_{JI} \text{ o } \mathbf{F}_{IJ} + \mathbf{F}_{JI} = \mathbf{0} \quad (1.11-5)$$

Si  $I=J$ , a continuación  $\mathbf{F}_{II} = \mathbf{0}$ , de acuerdo con la ecuación (1.11-5).

Fijamos en  $K$  el número total de partículas del sistema. La fuerza  $\mathbf{F}_I$  que actúa sobre la  $I$ -ésima partícula consiste en una fuerza externa  $\mathbf{F}_I^{(e)}$ , tal como la gravedad, y una fuerza interna que es el resultado de la mutua interacción entre las partículas. Así,

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_I^{(e)} + \sum_{J=1}^K \mathbf{F}_{IJ} \quad (1.11-6).$$

La ecuación de movimiento de la partícula  $I$ -ésima es, por lo tanto

$$\frac{d}{dt} m_I \cdot \mathbf{v}_I = \mathbf{F}_I^{(e)} + \sum_{J=1}^K \mathbf{F}_{IJ} \quad (I = 1, 2, \dots, K) \quad (1.11-7)$$

Cada partícula se describe por esa ecuación. La totalidad de  $K$  ecuaciones describe el movimiento del sistema.

Para seguir avanzando, debemos especificar cómo las fuerzas de interacción  $\mathbf{F}_{IJ}$  pueden ser calculadas. Tal especificación es declarada por las propiedades del material del sistema de partículas y es referido como *la ecuación constitutiva del material del sistema*.

## Equilibrio

Un movimiento especial es el *equilibrio*, es decir, una en la que no hay aceleración para ninguna partícula del sistema.

En equilibrio, la ecuación (1.11-7) se convierte en

$$\mathbf{F}_I^{(e)} + \sum_{J=1}^K \mathbf{F}_{IJ} = \mathbf{0}, \quad (I = 1, 2, \dots, K) \quad (1.11-8)$$

sumando  $I$  desde 1 a  $K$ , obtenemos

$$\sum_{I=1}^K \mathbf{F}_I^{(e)} + \sum_{I=1}^K \sum_{J=1}^K \mathbf{F}_{IJ} = \mathbf{0}, \quad (I = 1, 2, \dots, K) \quad (1.11-9)$$

En la última suma, cuando  $\mathbf{F}_{IJ}$  aparece,  $\mathbf{F}_{JI}$  aparece también; que se suman a cero, conforme a la ecuación (1.11-5) se reduce a

$$\sum_{I=1}^K \mathbf{F}_I^{(e)} = \mathbf{0}. \quad (1.11-10)$$

Esto es, *para un cuerpo en equilibrio, la sumatoria de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo es cero.*

A continuación, vamos a considerar la tendencia de un cuerpo en rotación. Si un cuerpo rota sobre un punto  $O$  y actúa sobre él una fuerza  $\mathbf{F}_I$ , entonces el *momento* de la fuerza sobre  $O$  que tiende a causar que el cuerpo gire alrededor de  $O$  es dado por el producto vectorial  $\mathbf{r}_I \times \mathbf{F}_I$ , donde  $\mathbf{r}_I$  es el vector distancia desde  $O$  hasta cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza  $\mathbf{F}_I$ . Formando un producto vectorial de  $\mathbf{r}_I$  con ecuación (1.11-8), es decir, con todos los términos de la ecuación, con  $I = 1, 2, \dots, K$ , juntando los resultados, es decir, sumando  $I$  desde 1 hasta  $K$ , y usando la ecuación (1.11-5) para simplificar, obtenemos

$$\sum_{I=1}^K \mathbf{r}_I \times \mathbf{F}_I^{(e)} = \mathbf{0}. \quad (1.11-11)$$

La elección del punto  $O$  es arbitraria. Por lo tanto, obtenemos una segunda condición de equilibrio de un cuerpo: *La sumatoria de momentos de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo entorno a cualquier punto es cero.*

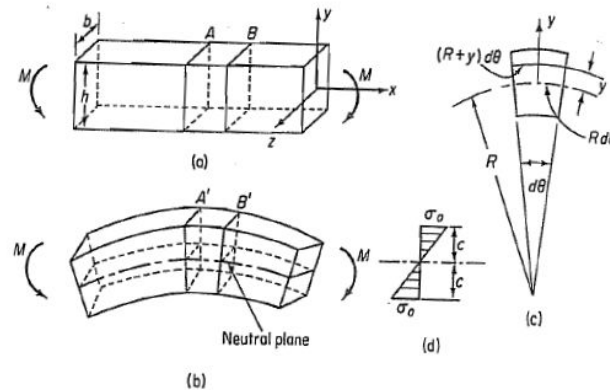
Uso de diagramas de cuerpo libre en el análisis de problemas.

La palabra *cuerpo* o la frase *un sistema de partículas* usado en las secciones previas pueden ser interpretadas de una manera más general. Si una máquina está en equilibrio, todas sus partes están en equilibrio. Por una selección adecuada de las partes a ser examinadas, una variedad de información puede ser obtenida. Este método es como la exploración de un cirujano de un órgano enfermo por una biopsia. Con secciones imaginarias, cortamos ciertas partes libres del cuerpo y examinamos sus condiciones de



equilibrio. Un diagrama de la parte con todas las fuerzas externas que actúan sobre él identificados claramente se llama *diagrama de cuerpo libre*. El método que usamos por lo tanto se llama *método de cuerpo libre*.

### Faltan ejemplos 1,2,3,4,5 y 6



**Figure 1.14** Bending of a prismatic beam. (a) The configuration of the beam at zero-stress state. (b) The beam bent by a uniform bending moment  $M$ . (c) Under the hypotheses of the classical beam theory, the deformed form of a small segment of the beam bounded by two cross-sectional planes  $A$  and  $B$  in (a) and  $A'$ ,  $B'$  in (b) is shown.  $R$  is the radius of curvature of the neutral surface on which the origin of the coordinates system  $x$ ,  $y$ ,  $z$  is located. (d) The distribution of the bending stress in a cross section of the beam. The bending stress is zero on the neutral surface, and is a linear function of  $y$  under the assumption that plane cross sections perpendicular to the neutral axis remain plane in bending deformation.

### Teoría de vigas simples.

Considere una viga prismática de un material uniforme flexible con una sección transversal rectangular sometido a un par de momentos de flexión de magnitud  $M$  actuando sobre los extremos, como se muestra en la Fig. 1.14(a). Si la sección transversal de una viga es simétrica con respecto al plano que contiene los momentos de los extremos, la viga se flexionará (desviará) en un arco circular en el mismo plano como se muestra en la Fig. 1.14(b). La desviación curva debe ser un arco circular, debido a la simetría, debido a que cada sección transversal está sujeto a la misma tensión y deformación (stress y strain). Asumimos que la desviación es pequeña (comparado con la longitud de la viga). Elegimos un marco de referencia rectangular XYZ, con el eje X apuntando en dirección del largo de la viga, Y perpendicular a X pero en el plano de flexión, y Z perpendicular a X y a Y. El origen de coordenadas lo elegimos en el centroide de una sección transversal, por razones que aclararemos en breve.

La deflexión de una viga puede ser descrita por la deflexión de la superficie centroidal (el plano  $Y=0$  cuando la viga no está desviada) y cualquier desplazamiento relativo a esta superficie. Considere 2 secciones transversales vecinas A y B que son perpendiculares al plano  $Y=0$  cuando la viga no está cargada. Cuando la viga está doblada en un arco circular, los 2 planos A y B están deformados en los planos A' y B' que permanecerán normales al arco (Fig. 1.14 (c)). Que A' y B' son planos es debido a la simetría. Que ellos sean perpendiculares al arco centroidal es también debido a la simetría. Dejamos que el radio de la curvatura del arco centroidal sea  $R$ . Cuando las secciones transversales A' y B' están dobladas en un ángulo relativo  $d\theta$ , la longitud del arco centroidal es  $R \cdot d\theta$ ; mientras una

línea a distancia  $y$  y alrededor por encima de la línea centroidal tendrá una longitud de  $(R+y)d\theta$ . El cambio en la longitud es  $y d\theta$ . Una división por su longitud original  $R d\theta$  produce la deformación (strain)

$$\epsilon_{xx} = \frac{y}{R} \quad (1.11-24)$$

En respuesta de la deformación  $\epsilon_{xx}$ , habrá una tensión  $\sigma_{xx}$ . Ahora hacemos la suposición que  $\sigma_{xx}$  es el único componente de tensión, mientras  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Entonces, recordando la ley de Hooke tenemos

$$\sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx} = E \cdot \frac{y}{R} \quad (1.11-25)$$

Dado que sólo los momentos de flexión pura actúan sobre la viga, la fuerza axial resultante debe desaparecer. Esto es,

$$\int_A \sigma_{xx} dA = 0. \quad (1.11-26)$$

donde  $A$  es la sección transversal,  $dA$  es un elemento de área en la sección transversal, y la integración se extiende sobre toda la sección transversal. Sustituyendo la ecuación (1.11-25) en la ecuación (1.11-26) obtenemos

$$\int_A y dA = 0 \quad (1.11-27)$$

que dice que el origen ( $y=0$ ) debe ser el *centroide* de la sección transversal. Esto explica nuestra elección original de el centroide como el origen. El plano centroidal  $y=0$  está sin tensión durante la flexión. Partículas del material no están tensionados en la dirección del eje. Por lo tanto, este plano es llamado *superficie neutral* de la viga.

El momento resultante de la tensión de flexión  $\sigma_{xx}$  sobre el eje  $Z$  debe ser igual al momento externo  $M$ . Una fuerza  $\sigma_{xx} dA$  actuando sobre un elemento de área  $dA$  en una sección transversal tiene un brazo de momento  $y$ ; por lo tanto el momento de flexión es

$$M = \int_A y \sigma_{xx} dA \quad (1.11-28)$$

sustituyendo la ecuación (1.11-25) en esta ecuación obtenemos

$$M = \frac{E}{R} \int_A y^2 dA \quad (1.11-29)$$

Ahora definimos la última integral como el *área del momento de inercia de la sección transversal* y lo denotamos como  $I$ :

$$I = \int_A y^2 dA \quad (1.11-30)$$

Entonces las ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{R} \quad ; \quad \sigma_{xx} = \sigma_0 \frac{y}{c} \quad ; \quad \sigma_0 = \frac{Mc}{I} \quad \blacktriangle \quad (1.11-31)$$

donde  $c$  es la distancia más larga desde la superficie neutral hasta el borde de la sección transversal (ver la Fig. 1.14(d)). La tensión  $\sigma_0$  es la tensión de flexión más grande en la viga. Esta es llamada la resistencia externa (outer fiber stress) se asocia con el lado externo de la sección transversal de la viga.  $I$  es una propiedad de la geometría de la sección transversal. Para una sección transversal rectangular con una profundidad  $h$  y un ancho  $b$ , como se muestra en la Fig. 1.14(a), tenemos  $c = \frac{h}{2}$  y  $I = \frac{1}{12}bh^3$ .

\*\*30 fórmulas importantes en este libro están marcadas con un triángulo negro a la derecha. Éstas son 30 líneas dignas de memorizar.

Estas fórmulas nos dan la tensión y la deformación en una viga en forma de prisma cuando está sujeta a una flexión pura. Se podrían usar para una viga en forma de prisma sujeto a una carga general? La respuesta es que la solución ya no es exactamente correcta, está demostrado empíricamente que es sorprendentemente buena. La razón básica es que las tensiones de corte que deben existir que causen una flexión en el caso general, usualmente son despreciables comparados con el momento de flexión. Por lo tanto, en general, la hipótesis que la sección plana permanece plana es muy buena, y las ecuaciones (1.11-24) a (1.11-31) pueden ser consideradas verdaderas localmente a lo largo de la viga.



Figure 1.15 A beam subjected to a distributed loading.

### La Flexión de una viga

Basado en la observación empírica, podemos analizar la flexión de una viga bajo una carga lateral.

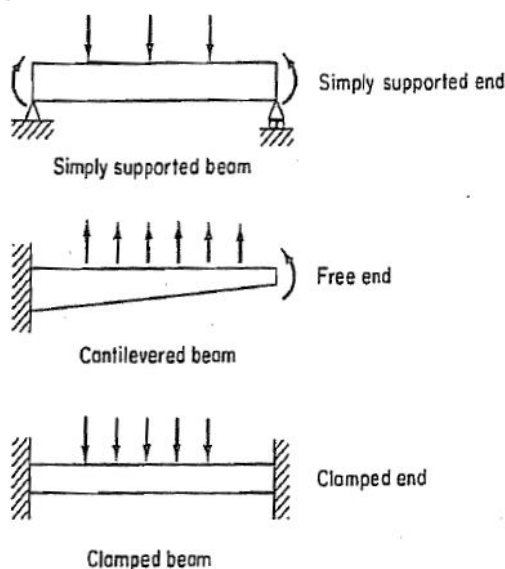


Figure 1.16 End conditions of beams.

Por ejemplo, considere las vigas ilustradas en Fig. 1.16. dejamos que la flexión curva de la viga (flexión de la superficie neutral) sea  $y(x)$ . Cuando  $y(x)$  es pequeño (mucho más pequeño que la longitud de la viga), esta curvatura puede aproximarse por  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , y el uso de la ecuación (1.11-31) nos lleva a la ecuación básica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} M(x) \quad \blacktriangle (1.11-32)$$

La flexión de la viga  $y(x)$  puede ser obtenida resolviendo esta ecuación con apropiadas condiciones de borde, que pueden ser:

Con el extremo simple apoyado (flexión y momento desaparecen):

$$y=0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \quad (1.11-33)$$

Extremo fijo (flexión y pendiente (slope) desaparece):

$$y=0, \quad \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.11-34)$$

Extremo libre (momento y corte especificado):

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = S. \quad (1.11-35)$$

(Ver Fig. 1.16) Todas estas son evidentes excepto la última, para cuya explicación examinaremos el Problema 1.14, el cual muestra que el momento de carga  $M$ , el corte transversal  $S$ , y la carga lateral por unidad de longitud  $w$  están relacionados por las ecuaciones

$$\frac{dM}{dx} = S; \quad \frac{dS}{dx} = w. \quad \blacktriangle (1.11-36)$$

Pero ya que  $M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$ , debemos tener  $S = EI \frac{d^3y}{dx^3}$  como en la ecuación (1.11-35).

Si la curvatura es pequeña (de manera que lo anterior puede ser válido), pero la pendiente es finita, entonces debemos usar la expresión exacta para  $1/R$ , que lleva a la siguiente ecuación en lugar de (1.11-32):

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1.11-37)$$

Como ejemplo, considere una flexión pequeña de una viga voladiza fija en el extremo izquierdo, como se muestra en la Fig. 1.17, y sujeto a un momento de flexión constante. El lado derecho de la ecuación (1.11-32) es constante en este caso, de manera que la ecuación puede ser integrada para obtener

$$y(x) = \frac{M}{EI} \frac{x^2}{2} + Ax + B, \quad (1.11-38)$$



Figure 1.17 Bending of a cantilever beam.

Donde  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias. Las condiciones de borde  $y = \frac{dy}{dx} = 0$  en  $x=0$  dan que  $A=B=0$ , de manera que la solución es

$$y = \frac{M}{EI} \frac{x^2}{2}. \quad (1.11-39)$$

En este caso especial, las condiciones de borde sobre el lado libre también se satisfacen con  $M=\text{constante}$ .

Podemos por lo tanto, satisfacer todas las condiciones de borde en general? Después de todo, nuestra viga tiene 2 lados con 2 condiciones de borde cada una, de modo que

tenemos 4 condiciones de borde, mientras nuestra ecuación diferencial (1.11-32) es solamente de 2° orden. Vamos a tener un número suficiente de constantes arbitrarias para satisfacer todas las condiciones de borde? La respuesta, tal y como está, es no. Una reflexión mayor nos dice, por lo tanto, que para una carga general, la ecuación diferencial debe obtenerse combinando (1.11-36) con la ecuación (1.11-32). Así, la ecuación general será

$$w = \frac{dS}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2y}{dx^2} \right), \quad \blacktriangle (1.11-40)$$

que es una ecuación diferencial de 4° orden, capaz de manejar 4 condiciones de borde. En el caso de una viga uniforme, tenemos

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \quad \blacktriangle (1.11-41)$$

La ecuación (1.11-40) es una ecuación aproximada, es exacta solamente en la flexión pura de una viga prismática, pero es usada a menudo para describir la flexión de una viga en el caso general, incluso para vigas de secciones transversales variables. En general, para una viga fina, produce aproximaciones cercanas. La desviación significativa ocurre solamente cuando la viga no es fina o por construcciones sandwich con un núcleo muy suave de material en la que el corte de flexión se vuelve significativa.