

3- Tensión

En el cap 1 introducimos el concepto de tensión. En el cap 2 definimos y analizamos los tensores cartesianos. En este cap discutiremos las propiedades del tensor tensión.

3.1 Notaciones de tensión.

El concepto de tensión ha sido discutido en la sección 1.6. Considere un continuo en un paralelepípedo rectangular, como se muestra en Fig. 3.1.

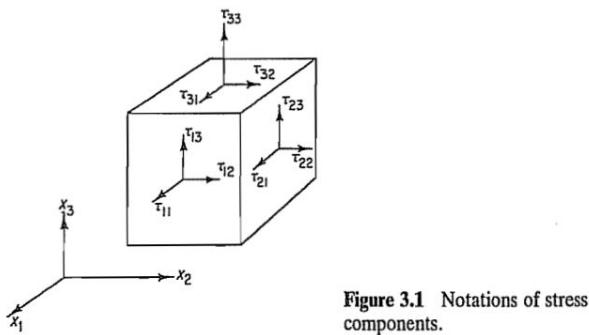


Figure 3.1 Notations of stress components.

Sea un marco de referencia cartesiano rectangular con ejes coordenados x_1 , x_2 , x_3 paralelos a los ejes del paralelepípedo usado. Sea la superficie ΔS_1 , una superficie del paralelepípedo con un vector normal externo apuntando en la dirección positiva del eje x_1 . Tenemos el vector tensión actuando sobre ΔS_1 , que denotamos como \mathbf{T} , con 3 componentes en las $\overset{1}{T}_1$, $\overset{1}{T}_2$, $\overset{1}{T}_3$ direcciones de los ejes coordenados x_1 , x_2 , x_3 , respectivamente. En este caso especial, introducimos un nuevo conjunto de símbolos para estos componentes de tensión:

$$\overset{1}{T}_1 = \tau_{11}, \overset{1}{T}_2 = \tau_{12}, \overset{1}{T}_3 = \tau_{13}. \quad (3.1-1)$$

Del mismo modo, dejamos ΔS_2 la superficie con normal $\overset{2}{z}$ externa apuntando en la dirección del eje x_2 . El vector tensión actuando sobre ΔS_2 , $\overset{2}{T}$, tiene 3 componentes en la dirección de x_1 , x_2 , x_3 . Estos componentes serán denotados como

$$\overset{2}{T}_1 = \tau_{21}, \overset{2}{T}_2 = \tau_{22}, \overset{2}{T}_3 = \tau_{23}. \quad (3.1-2)$$

La situación es similar para ΔS_3 . Si ordenamos los componentes de la tensión, o tracción, actuando sobre las 3 superficies en una matriz cuadrada, obtenemos

	Components of Stresses		
	1	2	3
Surface normal to x_1	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
Surface normal to x_2	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}
Surface normal to x_3	τ_{31}	τ_{32}	τ_{33}

Esto está ilustrado en la Fig.3.1. Los componentes τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} , son llamados *tensiones normales*, y los componentes restantes τ_{12} , τ_{13} , etc, son llamados *tensiones de corte*. Cada uno de estos componentes tiene las dimensiones de fuerza por unidad de área, o M/LT^2 .

Una gran diversidad para la notaciones de tensión existen en la literatura. La más ampliamente utilizada en la literatura americana, en referencia a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares x,y,z , es

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.1-4)$$

ó

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1-5)$$

Es importante destacar una vez más que una tensión se entiende como una fuerza (por unidad de área) situada en el lado positivo del elemento de superficie (el lado en el lado positivo de la normal externa) ejerce en la parte situada en el lado negativo. Así, si la normal exterior de un elemento de superficie de puntos en la dirección positiva del eje x_2 y τ_{22} es positiva, el vector que representa el componente de tensión normal sobre un elemento de superficie apuntará en la dirección positiva del eje x_2 , entonces el vector tensión que actúa sobre el elemento apunta también en la dirección negativa de x_2 . (Ver Fig. 3.2).

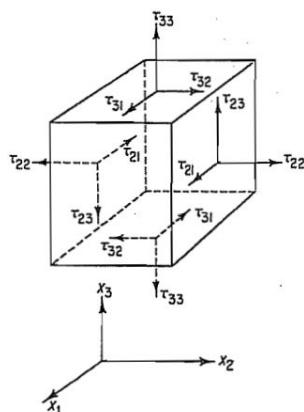


Figure 3.2 Directions of positive stress components.

De manera análoga, los valores positivos de τ_{21} , τ_{23} implicarán vectores tensión de corte apuntando en la dirección positiva de los ejes x_1 , x_3 , si la normal externa no está de acuerdo con el eje x_2 , como se ilustra en la Fig.3.2. Un estudio cuidadoso de la figura es esencial. Naturalmente, estas normas están de acuerdo con la notación habitual de tensión, compresión y corte.

3.2 Las leyes de movimiento.

La mecánica de continuos se fomenta en las leyes de movimiento de Newton. Sea el sistema de coordenadas x_1 , x_2 , x_3 , un marco de referencia inercial cartesiano rectangular. Dejamos el espacio ocupado por un cuerpo material en cualquier momento t denotado por $B(t)$. Ver Fig.3.3. Sea \mathbf{r} el vector posición de un punto con respecto al sistema de coordenadas. Consideremos un elemento infinitesimal de volumen dv encerrando el punto en \mathbf{r} . Sea ρ la densidad del material, y \mathbf{V} la velocidad en \mathbf{r} . Entonces la masa de

$$\int_B \mathbf{X} dv.$$

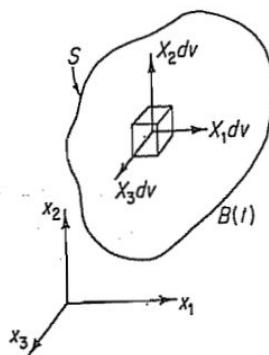


Figure 3.3 Body forces.

un elemento infinitesimal es $\rho.dv$, y el momento lineal (cantidad de movimiento) es $(\rho.dv).\mathbf{V}$. Una integración del momento sobre el dominio $B(t)$, es decir,

$$\mathcal{P} = \int_{B(t)} \mathbf{V} \cdot \rho dv, \quad (3.2-1)$$

es el momento lineal del cuerpo en la configuración $B(t)$. La integral del momento angular (moment of momentum) de un elemento cerca del origen, $\mathbf{r} \times \mathbf{V} \cdot \rho \, dv$, sobre el dominio $B(t)$, es decir,

$$\mathcal{H} = \int_{B(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho \, dv, \quad (3.2-2)$$

es el momento angular (cantidad de movimiento angular) del cuerpo. Las leyes de Newton, según lo declarado por Euler para un continuo, *afirman que la velocidad de cambio de un momento lineal es igual al total de la fuerza aplicada* \mathcal{F} actuando sobre el cuerpo, es decir,

$$\mathcal{P} = \mathcal{F} \quad (3.2-3)$$

y que la velocidad de cambio del momento angular es igual al torque total aplicado \mathcal{L} cerca del origen, es decir,

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \quad (3.2-4)$$

Es fácil de verificar que si la ecuación (3.2-3) se mantiene, entonces cuando (3.2-4) es válida para una elección del origen, ésta es válida para cualquier elección del origen.

Como hemos mencionado antes, existen 2 tipos de fuerzas externas actuando sobre los cuerpos materiales en la mecánica de medios continuos:

- (1) Fuerzas de cuerpo, actuando sobre elementos de volumen del cuerpo.
- (2) Fuerzas de superficie, o tensiones, actuando sobre elementos de superficie.

Ejemplos de fuerzas de cuerpo son la fuerza gravitacional y las fuerzas electromagnéticas.

Ejemplos de fuerzas de superficie son la presión aerodinámica actuando sobre un cuerpo, y la tensión debida al contacto mecánico entre 2 cuerpos, o entre una parte de un cuerpo y otra.

Para especificar una fuerza de cuerpo, consideramos un volumen encerrado por una superficie arbitraria S (Fig.3.3). El vector fuerza resultante contribuido por la fuerza del cuerpo se supone es representable en la forma de un volumen integral tomado sobre el dominio B encerrado en S ,

$$\int_B \mathbf{X} \, dv,$$

El vector \mathbf{X} , con 3 componentes X_1, X_2, X_3 , todos de dimensiones de fuerza por unidad de volumen, es decir, $M(LT)^{-2}$, es llamado la fuerza de cuerpo por unidad de volumen. Por ejemplo, en un campo gravitacional,

$$X_i = \rho g_i,$$

donde g_i son componentes de un campo de aceleración gravitacional y ρ es la densidad (masa por unidad de volumen) del material.

La fuerza de superficie actuando sobre una superficie imaginaria en el interior de un cuerpo es el vector tensión concebido en el principio de tensión de Euler y Cauchy. La fuerza de superficie actuando sobre una superficie externa de un cuerpo puede también ser expresada en términos del vector tensión. Conforme a este concepto, la fuerza total actuando sobre el material ocupando la región B interior a la superficie cerrada S es

$$\mathcal{F} = \oint_S \mathbf{T} \, dS + \int_B \mathbf{X} \, dv, \quad (3.2-5)$$

donde $\overset{\nu}{\mathbf{T}}$ es el vector tensión actuando sobre dS cuyo vector normal externo es ν . Del mismo modo, el torque alrededor del origen es dado por la expresión

$$\mathcal{L} = \oint_S \mathbf{r} \times \overset{\nu}{\mathbf{T}} ds + \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{X} dv. \quad (3.2-6)$$

(torque)

Combinando estas ecuaciones, obtenemos las ecuaciones del movimiento,

$$\oint_S \overset{\nu}{\mathbf{T}} ds + \int_B \mathbf{X} dv = \frac{D}{Dt} \int_B \nabla p dv, \quad \triangle (3.2-7)$$

$$\oint_S \mathbf{r} \times \overset{\nu}{\mathbf{T}} ds + \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{X} dv = \frac{D}{Dt} \int_B \mathbf{r} \times \nabla p dv. \quad \triangle (3.2-8)$$

No se hizo ninguna demanda sobre el dominio $B(t)$ aparte de considerar a las partículas del mismo material en todo momento. No hay reglas especiales alrededor de las partículas elegidas, aparte de la continuidad, es decir, que ellos forman un continuo. Las ecuaciones (3.2-7) y (3.2-8) son aplicables a cualquier cuerpo material. Pueden ser aplicados a un océano, pero también son aplicadas a una cucharada de agua. La superficie límite de $B(t)$ puede coincidir con el límite externo de un sólido elástico, pero también puede incluir solamente una porción del mismo.

3.3 Fórmula de Cauchy

De las ecuaciones de movimiento, vamos a obtener primero un simple resultado que establece que *el vector tensión $\mathbf{T}^{(+)}$ representando la acción del material exterior al elemento de superficie sobre el interior es igual en magnitud y opuesta en dirección del vector tensión $\mathbf{T}^{(-)}$ representando la acción del material interno sobre el exterior a través del mismo elemento de superficie.*

$$\mathbf{T}^{(-)} = -\mathbf{T}^{(+)}. \quad \triangle (3.3-1)$$

Para probarlo, consideremos una pequeña pastilla con 2 superficies paralelas de área ΔS y espesor δ , como se muestra en la Fig. 3.4. Cuando δ tiende a cero, mientras ΔS

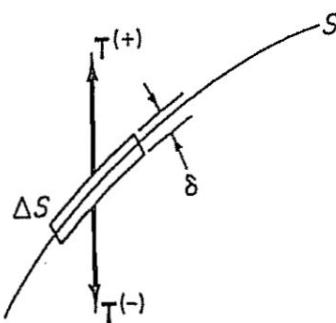


Figure 3.4 Equilibrium of a “pillbox” across a surface S .

permanece pequeño pero finito, las fuerzas de volumen y el momento (lineal) y velocidad de cambio con el tiempo se anulan, al igual que la contribución de las fuerzas de superficie en los lados de la pastilla. La ecuación de movimiento (3.2-3) implica, por lo tanto, que para ΔS pequeño,

$$\mathbf{T}^{(+)} \Delta S + \mathbf{T}^{(-)} \Delta S = 0.$$

A continuación se obtiene la ecuación (3.3-1).

Otra forma de expresar este resultado es decir que el vector tensión es una función del vector normal a la superficie. Cuando el sentido de la dirección del vector normal se invierte, la dirección del vector tensión también se invierte.

Ahora vamos a mostrar que *conociendo los componentes τ_{ij} , podemos escribir a la vez el vector tensión actuando sobre cualquier superficie con vector normal externo unitario ν cuyos componentes son ν_1, ν_2, ν_3 . Este vector tensión es denotado por $\overset{\nu}{T}$, con componentes $\overset{\nu}{T}_1, \overset{\nu}{T}_2, \overset{\nu}{T}_3$, dados por la fórmula de Cauchy:*

$$\overset{\nu}{T}_i = \nu_j \tau_{ji}. \quad \triangle (3.3-2)$$

La fórmula de Cauchy puede ser derivada de varias maneras. Daremos una derivación elemental.

Consideremos un tetraedro infinitesimal formado por 3 superficies paralelas a los planos coordenados y uno normal al vector unitario ν . (Ver Fig. 3.5)

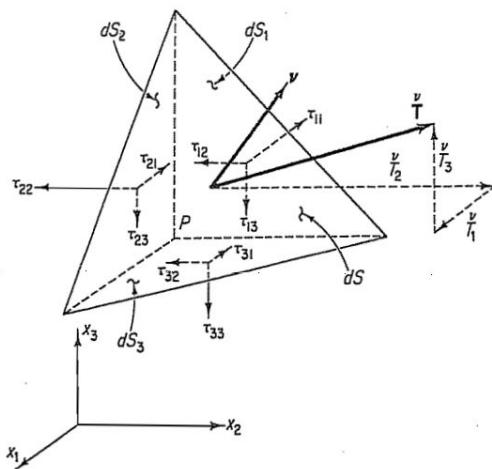


Figure 3.5 Surface tractions on a tetrahedron.

Sea dS el área de la superficie normal a ν . Entonces las áreas de las otras 3 superficies son:

$$dS_1 = dS \cos(\nu, \mathbf{x}_1) = \nu_1 dS = \text{área de la superficie paralela al plano } \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3,$$

$$dS_2 = \nu_2 dS = \text{área de la superficie paralela al plano } \mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1, \parallel \underline{\mathbf{e}}_2, \nu dS = \nu_2 dS \quad (\nu_2 \text{ proy de } dS \text{ sobre el plano})$$

$$dS_3 = \nu_3 dS = \text{área de la superficie paralela al plano } \mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2,$$

y el volumen del tetraedro es

$$dv = \frac{1}{3} h dS,$$

donde h es la altura del vértice P desde la base dS . Las fuerzas en la dirección positiva de x_1 , actuando en las 3 superficies coordenadas, se pueden escribir como

$$(-\tau_{11} + \epsilon_1)dS_1, \quad (-\tau_{21} + \epsilon_2)dS_2, \quad (-\tau_{31} + \epsilon_3)dS_3,$$

donde $\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}$, son las tensiones en el vértice P opuesto a dS . El signo negativo es obtenido porque las normales externas a las 3 superficies son opuestas en sentido con respecto a los ejes coordinados, y las ϵ son insertados porque las tracciones actúan en puntos ligeramente diferentes de P. Si suponemos que el campo tensorial es continuo, entonces $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, son cantidades infinitesimales. Por otra parte, la fuerza actuando sobre

el triángulo normal a v tiene componente $(\overset{\circ}{T}_1 + \epsilon)dS$ en la dirección positiva del eje X_1 , la fuerza de cuerpo tiene un componente X_1 , igual a $(X_1 + \epsilon')dv$, y la velocidad de cambio del momento tiene un componente $\rho \dot{V}_1 dv$, donde \dot{V}_1 es el componente de la aceleración en la dirección de X_1 . Aquí, $\overset{\circ}{T}_1$ y X_1 se refieren al punto P, y, ϵ y ϵ' son de nuevo infinitesimales. La primera ecuación de movimiento es así

$$\begin{aligned} & (-\tau_{11} + \epsilon_1)v_1 dS + (-\tau_{21} + \epsilon_2)v_2 dS \\ & + (-\tau_{31} + \epsilon_3)v_3 dS + (\overset{\circ}{T}_1 + \epsilon)dS + (X_1 + \epsilon')^{\frac{1}{3}} h dS = \rho \dot{V}_1^{\frac{1}{3}} h dS. \end{aligned} \quad (3.3-3)$$

dividiendo todo por dS , tomando el límite $h \rightarrow 0$, y notando que $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon, \epsilon'$ se anulan con h y dS , se obtiene

$$\overset{\circ}{T}_1 = \tau_{11}v_1 + \tau_{21}v_2 + \tau_{31}v_3, \quad (3.3-4)$$

el cual es el primer componente de ec.(3.3-2). Los otros componentes siguen de manera similar.

La fórmula de Cauchy nos asegura que los 9 componentes de tensión τ_{ij} , son necesarios y suficientes para definir la tracción a través de cualquier elemento de superficie en un cuerpo. Por lo tanto, el estado de tensión en un cuerpo es caracterizado completamente por el conjunto de cantidades τ_{ij} . Ya que $\overset{\circ}{T}_1$ es un vector y la ec (3.3-2) es válida para un vector arbitrario v_i , resulta que τ_{ij} es un tensor. De ahora en adelante, τ_{ij} será llamado un vector tensión.

Comprobación de errores aceptables. (falta)

3.4 Ecuaciones de equilibrio

Pasamos ahora a transformar las ecuaciones de movimiento, (3.2-7) y (3.2-8), en ecuaciones diferenciales. Esto puede hacerse elegantemente por el teorema de Gauss de los promedios y la fórmula de Cauchy, como se mostrará en el cap 10, pero aquí vamos a seguir la claridad física.

Considere el estado de equilibrio estático de un paralelepípedo infinitesimal con superficies paralelas a los planos coordenados. Las tensiones actuando sobre varias superficies se muestran en la Fig.3.6. La fuerza $\tau_{11} \cdot dx_2 \cdot dx_3$ actúa sobre el lado izquierdo, la fuerza $[\tau_{11} + (\partial\tau_{11}/\partial x_1) dx_1] dx_2 \cdot dx_3$ actúa sobre el lado derecho, etc. Como se explicará a continuación, estas expresiones están basadas en la suposición de continuidad de las tensiones.

La fuerza de cuerpo es $X_i dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$.

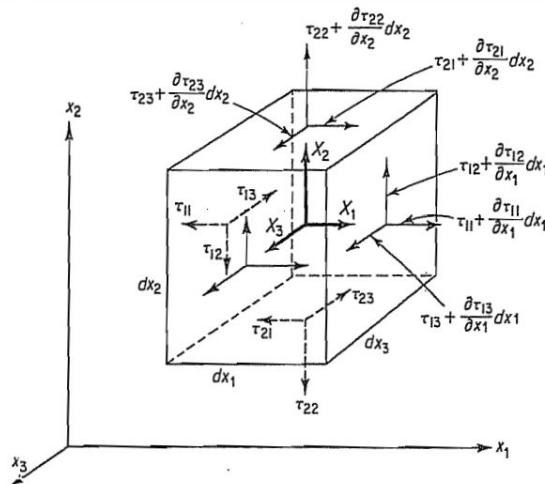


Figure 3.6 Equilibrating stress components on an infinitesimal parallelepiped.

Las tensiones indicadas en la figura pueden explicarse a continuación. Estamos interesados en un campo tensorial no uniforme. Todos los componentes de tensión son una función de la posición. Así, el componente de tensión τ_{11} es una función de $x_1, x_2, x_3 : \tau_{11}(x_1, x_2, x_3)$. En un punto ligeramente a la derecha del punto (x_1, x_2, x_3) , denotado como $(x_1 + dx_1, x_2, x_3)$, el valor de la tensión τ_{11} es una función continuamente diferenciable de x_1, x_2, x_3 , entonces, de acuerdo con el teorema de Taylor, con un resto obtenemos

$$\begin{aligned}\tau_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) &= \tau_{11}(x_1, x_2, x_3) + dx_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad + dx_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x_1^2}(x_1 + \alpha dx_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$. Si $(\partial^2 \tau_{11} / \partial x_1^2)$ es finito, entonces el último término puede hacerse arbitrariamente pequeño comparado con los otros términos con la elección de dx_1 suficientemente pequeño. Con esa elección, obtenemos

$$\tau_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) = \tau_{11}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1.$$

En la Fig.3.6 escribimos, para abreviar, τ_{11} y $\tau_{11} + (\partial\tau_{11}/\partial x_1) dx_1$ sobre las superficies donde actúan las tensiones. A la izquierda, abajo y en la superficie posterior están ubicados en x_1, x_2, x_3 . Los bordes del objeto tienen longitudes dx_1, dx_2, dx_3 .

Todas las tensiones y sus derivadas son evaluadas en (x_1, x_2, x_3) . El equilibrio del cuerpo demanda que la fuerza resultante sea 0. Considere las fuerzas en la dirección x_1 . Como se

muestra en la Fig 3.7, tenemos 6 componentes de fuerza de superficie y una componente de fuerza de cuerpo. La suma es

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \tau_{11} dx_2 dx_3 + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 \\ & - \tau_{21} dx_3 dx_1 + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ & - \tau_{31} dx_1 dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \quad (3.4-1) \end{aligned}$$

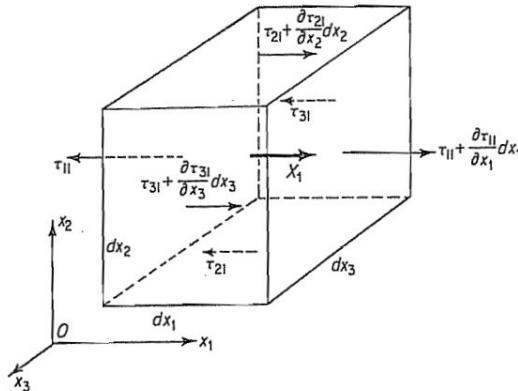


Figure 3.7 Components of tractions in x_1 -direction.

Dividiendo por $dx_1 dx_2 dx_3$, obtenemos

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0. \quad (3.4-2)$$

Una permutación cíclica de los índices conduce a ecuaciones similares de equilibrio para las fuerzas en las direcciones de x_2, x_3 . Todo el conjunto, se escribe con notación indicial como

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0. \quad \Delta \quad (3.4-3)$$

Este es un resultado importante.

El equilibrio de un elemento requiere también que el momento resultante sea 0. Si no existen momentos externos proporcionales al volumen, la consideración de momentos conduce a la conclusión importante que *el tensor tensión es simétrico*, es decir

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}. \quad \Delta \quad (3.4-4)$$

Esto está demostrado a continuación. Refiriéndose a la Fig.3.6 y considerando el momento de todas las fuerzas con respecto al eje x_3 , vemos que aquellos componentes de fuerzas paralelas a Ox_3 o en los planos que contienen a Ox_3 no aportan momento. Los

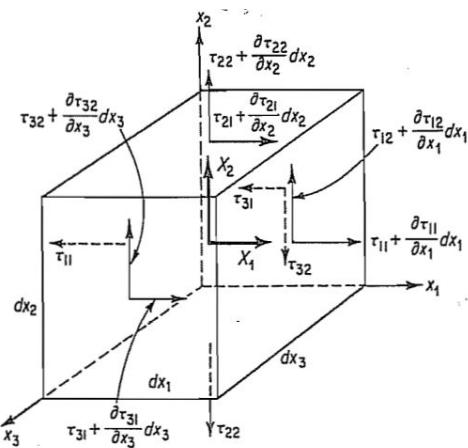


Figure 3.8 Components of tractions that contribute moment about the Ox_3 -axis.

componentes que contribuyen un momento alrededor del eje x_3 se muestra en la Fig.3.8. Por lo tanto, teniendo cuidado con el brazo del momento adecuadamente, tenemos

$$\begin{aligned}
 & - \left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \tau_{11} dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} \\
 & + \left(\tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 dx_1 - \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 dx_2 \\
 & + \left(\tau_{22} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_1}{2} - \tau_{22} dx_1 dx_3 \frac{dx_1}{2} \\
 & + \left(\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \frac{dx_1}{2} - \tau_{32} dx_1 dx_2 \frac{dx_1}{2} \\
 & - \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \frac{dx_2}{2} + \tau_{31} dx_1 dx_2 \frac{dx_2}{2} \\
 & - X_1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} + X_2 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Dividiendo por dx_1, dx_2, dx_3 y pasando al límite como $dx_1 \rightarrow 0, dx_2 \rightarrow 0, dx_3 \rightarrow 0$, obtenemos

$$\tau_{12} = \tau_{21}. \quad (3.4-5)$$

Consideraciones similares de momentos resultantes alrededor de Ox_2 y Ox_3 nos dirigen al resultado general de la ecuación (3.4-3).

Hasta aquí, hemos considerado la condición de equilibrio. Si se desea derivar la ecuación de movimiento en vez de la de equilibrio, sólo es necesario aplicar el principio de D'Alembert, a nuestro elemento cúbico. De acuerdo al principio de D'Alembert, una partícula en movimiento puede ser considerada en equilibrio si el negativo del producto de la masa y la aceleración de la partícula es aplicado como una fuerza externa sobre la partícula. Esta es la fuerza inercial. Para un sistema de partículas, el principio de D'Alembert se aplica si el resultado de las fuerzas iniciales sobre todas las partículas se aplica sobre el centro de masa del sistema.

Para el elemento considerado en esta sección, si \mathbf{a} (con componentes a_1, a_2, a_3) representa el vector aceleración de la partícula con respecto a un marco inercial de referencia, a continuación la masa del elemento es $\rho dx_1 dx_2 dx_3$, la fuerza de inercia es

$-\rho dx_1 dx_2 dx_3$. Una adición de esto a la ecuación (3.4-1) y dividiendo por $dx_1 dx_2 dx_3$, lleva a la ecuación de movimiento,

$$\rho a_i = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1, \text{ etc.,} \quad (3.4-6)$$

es decir,

$$\rho a_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + X_i. \quad (3.4-7)$$

3.5 Cambio de componentes de tensión en transformación de coordenadas.

En las secciones previas, los componentes de tensión τ_{ij} son definidos con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares X_1, X_2, X_3 . Ahora tenemos un segundo conjunto de coordenadas cartesianas rectangulares X'_1, X'_2, X'_3 , con el mismo origen, pero orientado de diferente manera, y considerando los componentes de tensión en el nuevo sistema de referencia (Fig.3.9). Dejamos que estas coordenadas estén relacionadas por una relación lineal

$$x'_k = \beta_{ki} x_i, \quad (k=1,2,3) \quad (3.5-1)$$

donde β_{ki} son los cosenos dirección de los ejes X'_k con respecto al los ejes X_i . Ya que τ_{ij} es un tensor (sec 3.3) lo podemos escribir bajo la ley de transformación. Sin embargo, haciendo hincapié en la importancia del resultado, vamos insertar una derivación básica basada en la fórmula de Cauchy, el cual establece que si dS es un elemento de superficie cuyo vector normal externo ν tiene componentes ν_i , entonces la fuerza por unidad de área

actuando sobre dS es un vector $\overset{\nu}{T}$ con componentes

$$\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ji} \nu_j. \quad (3.5-2)$$

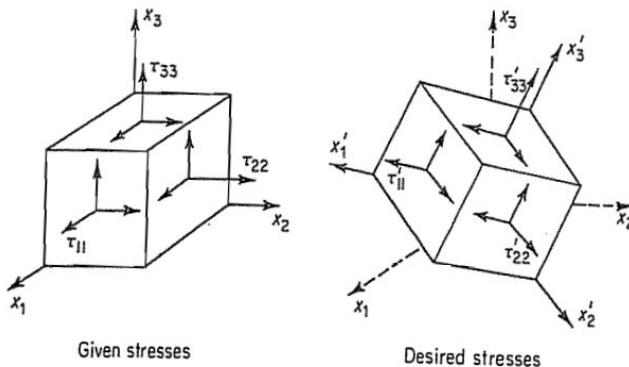


Figure 3.9 Transformation of stress components under rotation of coordinate systems.

Si la normal ν es elegida para ser paralela al eje X'_k , de modo que

$$\nu_1 = \beta_{k1}, \quad \nu_2 = \beta_{k2}, \quad \nu_3 = \beta_{k3},$$

entonces el vector tensión $\overset{k}{\mathbf{T}'}$ tiene componentes

$$\overset{k}{T}'_i = \tau_{ji} \beta_{kj}.$$

El componente del vector $\overset{k}{\mathbf{T}'}$ en la dirección del eje x'_m , es dado por el producto de $\overset{k}{T}'_i$ y β_{mi} . Por lo tanto, el componente de tensión

$$\begin{aligned}\tau'_{km} &= \text{proyección de } \overset{k}{\mathbf{T}'} \text{ sobre el eje } x'_m, \\ &= \overset{k}{T}'_1 \beta_{m1} + \overset{k}{T}'_2 \beta_{m2} + \overset{k}{T}'_3 \beta_{m3} \\ &= \tau_{j1} \beta_{kj} \beta_{m1} + \tau_{j2} \beta_{kj} \beta_{m2} + \tau_{j3} \beta_{kj} \beta_{m3};\end{aligned}$$

es decir,

$$\tau'_{km} = \tau_{ji} \beta_{kj} \cdot \beta_{mi} \quad (3.5-3) // \text{componente del tensor en la nueva base}$$

Si comparamos la ecuación (3.5-3) con (2.5-6), vemos que los componentes de tensión se transforman como un tensor cartesiano de orden 2. Así, el concepto físico de tensión descrito por τ_{ij} está de acuerdo con la definición matemática de un tensor de orden 2 en el espacio euclídeo.

3.6 Componentes de tensión en coordenadas ortogonales curvilíneas.

Las coordenadas ortogonales curvilíneas se introducen en mecánica de continuo si las condiciones de borde son simplificadas por un marco de referencia tal. Por ejemplo, si queremos estudiar el flujo en una tubo circular cilíndrico o la torsión de un eje circular, es natural que se utilicen coordenadas cilíndricas. Si deseamos estudiar la distribución de tensión en una esfera, es natural el uso de coordenadas esféricas. En realidad, si queremos estudiar la explosión que deforma una placa delgada de metal en un casquete esférico, puede ser útil el uso de un marco de referencia rectangular para el estado original del disco y una marco de referencia esférico-polar para el estado deformado.

Es apropiado para resolver los componentes de tensión en las direcciones de las coordenadas curvilíneas y designarlos por los subíndices correspondientes. Por ejemplo, en un conjunto de coordenadas cilíndricas, r, θ, z , que están relacionadas con las coordenadas rectangulares x, y, z por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \\ r^2 = x^2 + y^2, \\ z = z, \end{cases} \quad (3.6-1)$$

es natural denotar los componentes del tensor tensión como un punto (r, θ, z) por

$$\begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta r} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \text{ OR } \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.6-2)$$

Para relacionar estos componentes a σ_x , τ_{xy} , etc, vamos a construir un marco de referencia rectangular local x' , y' , z' en el punto (r, θ, z) , con el origen ubicado en el punto (r, θ, z) , el eje x' en dirección donde crece r , el eje y' en dirección donde crece θ , y z' paralelo al eje z (Fig. 3.10).

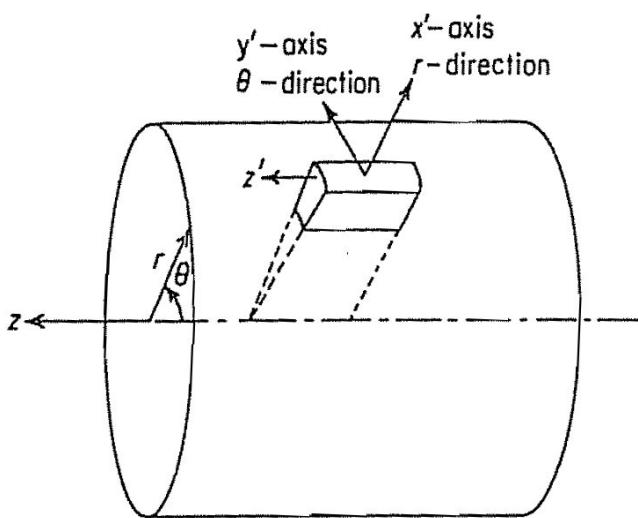


Figure 3.10 Stress components in cylindrical polar coordinates.

Entonces, en la notación convencional, las tensiones $\tau_{x'x'}$, $\tau_{y'y'}$, ..., están bien definidas. Ahora podemos definir los componentes de tensión listados en (3.6-2) identificando r , θ , z , con x' , y' , z' .

$$\tau_{rr} = \tau_{x'x'}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{x'y'}, \quad \tau_{\theta\theta} = \tau_{y'y'}, \quad (3.6-3)$$

etc. Ya que los sistemas de coordenadas x' , y' , z' y X , Y , Z son ambos cartesianos, podemos aplicar la ley de transformación de (3.5-3). Los cosenos dirección de los ejes x' , y' , z' relativos a x , y , z son (ver Fig. 2.2 y ecuación 2.4-3)

$$(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6-4)$$

Por lo tanto, en virtud de las ecuaciones (3.5-3) y (3.6-3), tenemos

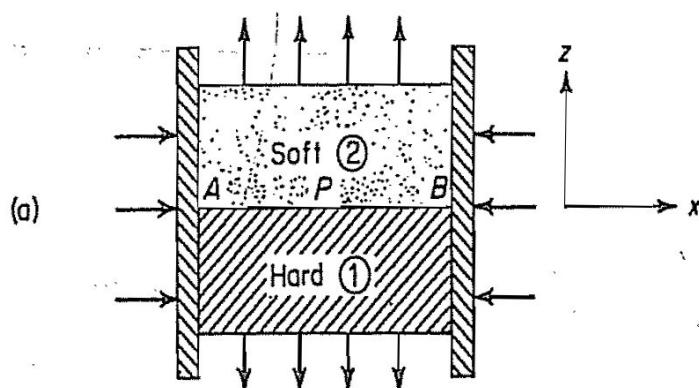
$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\
 \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\
 \sigma_z &= \sigma_z, \\
 \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\
 \tau_{zx} &= \tau_{zr} \cos \theta - \tau_{z\theta} \sin \theta, \\
 \tau_{zy} &= \tau_{zr} \sin \theta + \tau_{z\theta} \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{3.6-5}$$

Esférica u otra coordenada ortogonal curvilínea puede ser tratada de manera similar.

3.7 Condiciones de borde de tensión.

Los problemas en mecánica suelen aparecer de esta manera: conocemos algo acerca de las fuerzas o velocidades o desplazamientos sobre la superficie de un sólido o fluido y se investiga qué pasa adentro del cuerpo. Por ejemplo, el viento sopla sobre una construcción cuyos cimientos sabemos que son firmes. ¿Cuál es la tensión actuando en las columnas y vigas? son seguros? Para resolver esas preguntas, establecemos los hechos conocidos relacionados con el mundo exterior en la forma de condiciones de borde y así usar las ecuaciones diferenciales (ecuaciones vectoriales) para extender la información al interior del cuerpo. Si una solución es encontrada para satisfacer todas las ecuaciones vectoriales y condiciones de borde, la información completa es obtenida para todo el interior del cuerpo. En la superficie de un cuerpo o en una interface entre 2 cuerpos, la tracción (fuerza por unidad de área) actuando sobre la superficie debe ser igual en ambos lados de la superficie. Esto, en efecto, es el concepto básico de tensión que define la interacción de una parte de un cuerpo con otra.

Considere un cubo compuesto de un material duro unido a un material blando, como se muestra en Fig. 3.11(a). Dejamos el bloque comprimido entre 2 paredes planas. Ambos, el material blando y duro serán tensionados. En un punto P sobre la superficie AB , la situación puede ilustrarse por una secuencia de diagramas de cuerpo libre como se muestra en la figura.



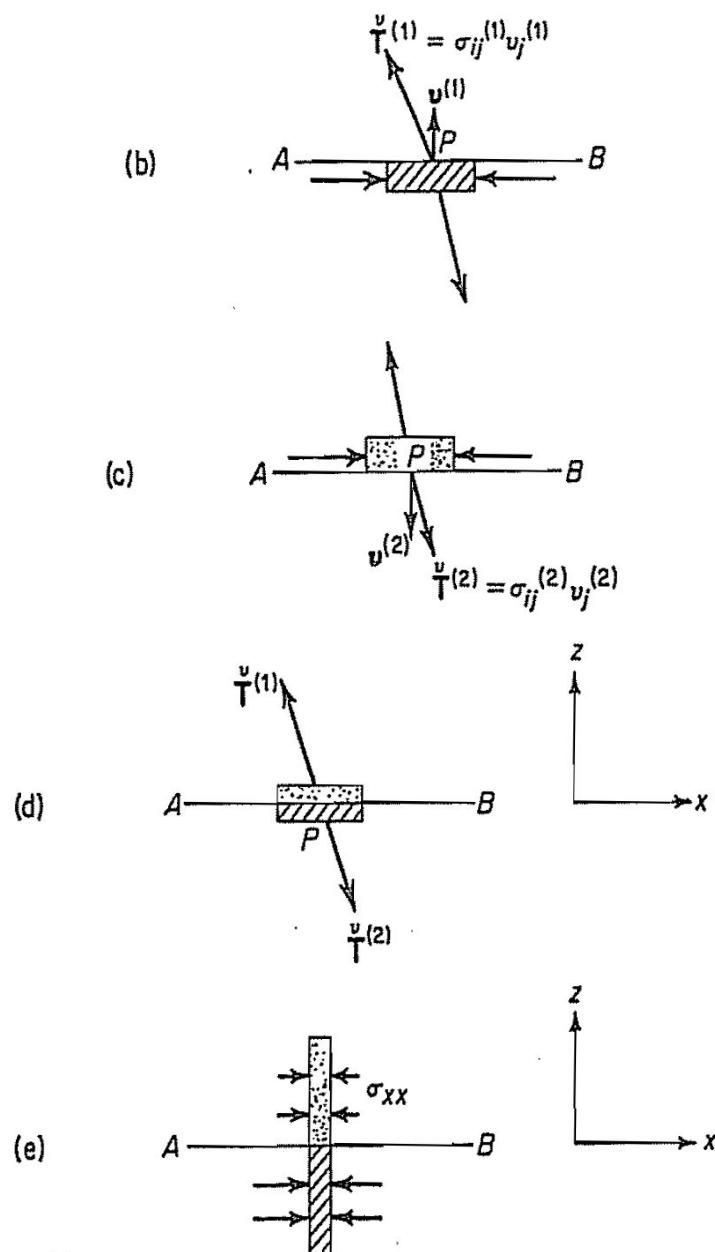


Fig. 3.11. Derivación de las condiciones de borde de tensión en una interface entre 2 materiales. (a) Una interface AB entre 2 medios continuos 1 y 2. (b) Diagrama de cuerpo libre de un elemento

pequeño de material nº1 en el punto P sobre la superficie. El vector tensión $\mathbf{T}^{(1)}$ actúa sobre la superficie AB de ese elemento. (c) Diagrama de cuerpo libre de una elemento pequeño de material nº2 en P. (d) Diagrama de cuerpo libre de una pequeño elemento plano incluyendo ambos materiales. (e) Diagrama de cuerpo libre de un pequeño elemento vertical, mostrando que σ_{xx} , puede ser discontinuo en la interface.

Para el material duro, sobre el lado positivo de la interface en P, ahí, actúa una tracción superficial $\mathbf{T}^{(1)}$, Fig.3.11(b). Con X_1, X_2, X_3 , identificados con las coordenadas x, y, z , el vector unitario $\mathbf{v}^{(1)}$ tiene 3 componentes $(0,0,1)$, y el vector tracción $\mathbf{T}^{(1)}$ tiene 3 componentes $\sigma_{ij}^{(1)} \mathbf{v}_j^{(1)}$, ($i=1,2,3$), donde $\sigma_{ij}^{(1)}$ es el tensor tensión en el material duro.

Para el material blando, debe existir una tracción similar $\overset{\nu}{T}^{(2)}$, con componentes $\sigma_{ij}^{(2)} \nu_j^{(2)}$, Fig.3.11(c). El equilibrio de una pastilla infinitesimal, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre (Fig.3.11(d)), requiere que

$$\overset{\nu}{T}^{(1)} = \overset{\nu}{T}^{(2)}. \quad (3.7-1)$$

Esta es la condición de igualdad de tracción superficial sobre los 2 lados de una interface. Más explícitamente, dejamos que la interface sea el plano xy , y el eje z normal a xy . Entonces, la ecuación vectorial (3.7-1) implica las 3 ecuaciones

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad (3.7-2)$$

que son las condiciones de borde sobre las tensiones en el medio 1 y 2 en su interface.

Notar que estas condiciones de borde indican nada acerca de los componentes de tensión σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} . Esos componentes no son obligados a ser continuos a través del borde. En efecto, si los módulos elásticos de materiales 1 y 2 son desiguales y la tensión de compresión es uniforme, entonces, en general,

$$\sigma_{xx}^{(1)} \neq \sigma_{xx}^{(2)}, \quad \sigma_{yy}^{(1)} \neq \sigma_{yy}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} \neq \sigma_{xy}^{(2)}, \quad (3.7-3)$$

Que estas discontinuidades no están en conflicto con ninguna condición de equilibrio se puede ver en Fig.3.11(e).

Un caso especial es uno en el cual 2 medios son tan suaves que sus tensiones son completamente despreciables comparadas con aquellas en el medio 1 (por ejemplo, aire vs metal). Entonces la superficie se dice que es *libre*, y las condiciones de borde son

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad (3.7-4)$$

Por otra parte, si la tracción en el medio 2 es conocida, entonces puede ser considerada como una carga “externa” actuando sobre el medio 1. Así, las condiciones de borde de tensión sobre un cuerpo sólido usualmente toman la forma

$$\sigma_{nn} = p_1, \quad \sigma_{nt_1} = p_2, \quad \sigma_{nt_2} = p_3, \quad (3.7-5)$$

donde p_1 , p_2 , p_3 , son funciones específicas de la posición y tiempo, y n , t_1 , t_2 , son un conjunto de ejes ortogonales locales con n apuntando en la dirección de la normal externa. Si bien todas las superficies están entre 2 espacios, es una práctica general prestar atención a un lugar de la superficie y llamar al otro lado “externo”. Por ejemplo, ingenieros de estructuras hablan de una carga de viento sobre una construcción como una “carga externa” aplicada a una construcción. Recíprocamente, para un fluido dinámico, la estructura no es más que un borde rígido para el flujo de aire. La misma interface presenta 2 diferentes tipos de condiciones de borde para los 2 medios. La justificación básica para una divergencia de esta actitud es que la pequeña deformación elástica de la estructura es de poca importancia para la aerodinámica que calcula la presión aerodinámica actuando sobre la estructura, mientras la deformación elástica es lo más importante para el análisis estructural quien determina la seguridad de la construcción. Por lo tanto, para la aerodinámica la construcción es rígida, mientras para la elasticidad no lo es. En otras palabras, ambas condiciones de borde son aproximaciones.

Faltan los problemas.(Ver en el libro pág 81).