8- Isotropía

El concepto de isotropía es usado frecuentemente como una suposición simplificadora en mecánica del continuo. Primero, definimos un material isotrópico y tensores isotrópicos. Entonces determinamos tensores de rango 2, 3 y 4, y les aplicamos las ecuaciones constitutivas de los materiales isotrópicos.

8.1 El concepto de material isotrópico.

Materiales cuyas propiedades mecánicas no dependen de las direcciones se dice que son *isotrópicos*. Por ejemplo, si se realiza una prueba de tensión en un metal y se comprueba que el resultado no depende de la dirección en que se cortó la muestra de tensión del lingote y que la contracción lateral es la misma en todas las direcciones perpendiculares a la dirección de tracción, podemos sospechar que el material es isotrópico.

Para dar una definición precisa, haremos uso de la ecuación constitutiva: *Un material es isotrópico si sus ecuaciones constitutivas no se alteran bajo transformaciones de coordenadas ortogonales (secc 2.4).* Por ejemplo, si la ecuación constitutiva es $\boldsymbol{\sigma}_{ij}= C_{ijkl}\mathbf{e}_{kl}$, exigimos que después de una transformación ortogonal, la ley $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}= C_{ijkl}\,\underline{\mathbf{e}}_{kl}$, donde las cantidades subrayadas hacen referencia a las nuevas coordenadas.

Ya que las transformaciones ortogonales consisten en traslaciones, rotaciones y reflexiones de los ejes coordenados, la definición requiere que la forma matemática de la ecuación constitutiva permanezca sin cambios, sin importar que los ejes se trasladen, roten o se reflejen. En particular, la matriz de constantes del material debe tener los mismos valores en cualquier sistema de coordenadas cartesianas rectangulares orientada en la mano derecha o izquierda.

8.2 Tensor isotrópico.

Definiciones.

Un *tensor isotrópico* en el espacio euclídeo es un tensor cuyos componentes en cualquier sistema cartesiano rectangular son inalterados por transformaciones ortogonales de coordenadas.

Por definición (secc 2.4), una transformación ortogonal de x_1, x_2, x_3 a $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$,es

$$\underline{x}_i = \boldsymbol{\beta}_{ij}\, x_j + \boldsymbol{\alpha}_i \quad , \quad (i= 1,2,3) \qquad (8.2\text{-}1)$$

donde $\boldsymbol{\beta}_{ij}$ y $\boldsymbol{\alpha}_i$ son constantes, bajo la restricción que

$$\boldsymbol{\beta}_{ik}\boldsymbol{\beta}_{jk} = \boldsymbol{\delta}_{ij} \qquad (8.2\text{-}2).$$

Se dice que una transformación ortogonal es propia si un sistema de ejes coordenados de mano derecha es transformado en otro de mano derecha. Para que una transformación sea propia, el Jacobiano debe ser positivo (secc 2.5). Para una transformación ortogonal (8.2-1), el Jacobiano es el determinante | $\boldsymbol{\beta}_{ij}$ | , donde, de acuerdo a la ecuación (8.2-2), debe ser el valor ±1. Por lo tanto, para que una transformación ortogonal sea propia, debemos tener

$$\det | \boldsymbol{\beta}_{ij} | = 1 \qquad (8.2\text{-}3)$$

Por ejemplo, todas las rotaciones de ejes coordenados son propias, pero una reflexión en el plano x_2x_3

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -x_1, \\ \bar{x}_2 = x_2, \\ \bar{x}_3 = x_3, \end{cases} \qquad (\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |\beta_{ij}| = -1 \qquad (8.2\text{-}4)$$

es ortogonal, pero impropia, porque se convierte de un sistema de mano derecha a uno de mano izquierda.

Conexión entre tensores isotrópicos y material isotrópico.

Probaremos que si la relación

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\mathbf{e}_{kl} \qquad (8.2\text{-}5)$$

es isotrópica, entonces C_{ijkl} es un tensor isotrópico.

Demostración: por la regla del cociente (secc 2.9), C_{ijkl} es un tensor de rango 4. Por lo tanto, C_{ijkl} se transforma de acuerdo a la regla de transformación de tensores. Ahora, transformando la ec (8.2.5) en las coordenadas nuevas $\underline{X}_i$ tenemos

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \underline{C}_{ijkl}\,\underline{\mathbf{e}}_{kl} \qquad (8.2\text{-}6)$$

Pero por la definición de material isotrópico tenemos que

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = C_{ijkl}\,\underline{\mathbf{e}}_{kl} \qquad (8.2\text{-}7)$$

Así, comparando las ecuaciones (8.2-6) con (8.2-7), obtenemos que

$$C_{ijkl} = \underline{C}_{ijkl} \qquad (8.2\text{-}8)$$

Así, C_{ijkl} es un tensor isotrópico.

Tensores isotrópicos de rango 0, 1 y 2.

Todos los escalares son, por supuesto, isotrópicos. Pero no hay tensor isotrópico de rango 1 (diferente al trivial). Si el vector A_i fuera isotrópico, entonces tendría que satisfacer la ecuación

$$\underline{A}_i = A_i = \boldsymbol{\beta}_{ij} A_j \qquad (8.2\text{-}9)$$

para todas las posibles transformaciones ortogonales. En particular, para una rotación de 180° alrededor del eje X_1, tendríamos

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1, \\ \bar{x}_2 = -x_2, \\ \bar{x}_3 = -x_3, \end{cases} \qquad (\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (8.2\text{–}10)$$

la ecuación (8.2-9) se convierte en

$$A_1 = A_1,\ A_2 = -A_2,\ A_3 = -A_3.$$

Por lo tanto A_2 y A_3 son cero. De manera similar, por el mismo proceso pero con los roles de x_1, x_2, x_3 permutados, obtenemos $A_1=0$. Así, la no existencia de algún tensor isotrópico de rango 1 está probada.

Para tensores de rango 2, el delta de Kronecker $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ es un tensor isotrópico porque

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\delta}}_{ij} &= \boldsymbol{\beta}_{im}\boldsymbol{\beta}_{jn}\boldsymbol{\delta}_{mn} && \text{(por la definición de tensor)} \\ &= \boldsymbol{\beta}_{im}\boldsymbol{\beta}_{jm} && (\boldsymbol{\delta}_{mn} = 0 \text{ si } m \neq n) \\ &= \boldsymbol{\delta}_{ij} && \text{por la ecuación 8.2-2.} \end{aligned}$$

Nos proponemos a mostrar que todos los tensores de rango 2 pueden ser reducidos a la forma $p\boldsymbol{\delta}_{ij}$, donde p es un escalar.

Para la demostración, observemos primero que si un tensor B_{ij} es isotrópico, debe ser diagonal. Ya que, imponiendo la rotación de 180° alrededor del eje x_1, como especificamos en la ec.(8.2-10), obtenemos

$$\underline{B}_{12} = \boldsymbol{\beta}_{1m}\boldsymbol{\beta}_{2n} B_{mn} = -B_{12}$$

Pero la isotropía requiere que $\underline{B}_{12} = B_{12}$. Por lo tanto $B_{12} = 0$. De manera similar, $B_{ij}=0$ si $i \neq j$. De manera que B_{ij} es simétrico y diagonal.

A continuación, sea $\boldsymbol{\epsilon}_{ijk}$ el tensor de permutación, y considere la transformación

$$\bar{x}_j = (\delta_{ij} + d\theta\epsilon_{3ij})x_i,$$

$$(\beta_{ij}) = (\delta_{ij} + d\theta\epsilon_{3ij}) = \begin{pmatrix} 1 & d\theta & 0 \\ -d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (8.2\text{–}11)$$

el cual representa una rotación alrededor del eje X_3 con un ángulo de rotación infinitesimal $d\boldsymbol{\theta}$. (cuando $\boldsymbol{\theta}$ es muy pequeño -> cos $\boldsymbol{\theta} \doteq 1$, sen $\boldsymbol{\theta} \doteq 0$). La definición de tensores proporciona la relación

$$\begin{aligned} \underline{B}_{ij} &= (\boldsymbol{\delta}_{im} + d\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\epsilon}_{3im})(\boldsymbol{\delta}_{jn} + d\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\epsilon}_{3jn})B_{mn} \\ &= \boldsymbol{\delta}_{im}\boldsymbol{\delta}_{jn}B_{mn} + d\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\epsilon}_{3im}\,\boldsymbol{\delta}_{jn}B_{mn} + \boldsymbol{\epsilon}_{3jn}\,\boldsymbol{\delta}_{im}B_{mn}) + d\boldsymbol{\theta}^2\boldsymbol{\epsilon}_{3im}\boldsymbol{\epsilon}_{3jn}B_{mn} \quad (8.2\text{-}12) \\ &= B_{ij} + d\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\epsilon}_{3im}B_{mj} + \boldsymbol{\epsilon}_{3jn}B_{in}) + O(d\boldsymbol{\theta}^2). \end{aligned}$$

Pero si B_{ij} es isotrópico, debemos tener $\underline{B}_{ij} = B_{ij}$. Por lo tanto, para una pequeña pero arbitraria $d\boldsymbol{\theta}$, tenemos

$$\epsilon_{3im}B_{mj} + \epsilon_{3jn}B_{in} = 0. \qquad (8.2\text{-}13)$$

Haciendo i=1, j=1; (m=2 para que no se anule) tenemos

$$\epsilon_{312}B_{21} + \epsilon_{312}B_{12} = B_{21} + B_{12} = 0.$$

Pero B_{ij} es simétrica como hemos demostrado. Por lo tanto, $B_{21} = B_{12} = 0$. Esto está de acuerdo con lo que acabamos de aprender, pero no se obtienen nuevos conocimientos.

Ahora haciendo i=1, j=2, tenemos que

$$\epsilon_{312}B_{22} + \epsilon_{321}B_{11} = B_{22} - B_{11} = 0.$$

Por lo tanto, $B_{11} = B_{22}$. Es evidente que una rotación similar alrededor del eje X_1 produciría $B_{23} = 0$, $B_{22} = B_{33}$, y una rotación alrededor del eje X_2 producirá $B_{31} = 0$, $B_{33} = B_{11}$. Por lo tanto, el tensor isotrópico B_{ij} es reducido a la forma $B_{11}\boldsymbol{\delta}_{ij}$. Escribiendo p por B_{11} obtenemos $B_{ij} = p\boldsymbol{\delta}_{ij}$.

Ahora, cualquier rotación de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares a otro, puede ser llevado a cabo por repetición de rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes coordenados. Por lo tanto, las condiciones que acabamos de examinar son las únicas condiciones impuestas por la isotropía con respecto a las transformaciones ortogonales propias. Así, $B_{ij} = p\boldsymbol{\delta}_{ij}$ para todas las transformaciones ortogonales propias.

Para el tensor isotrópico de segundo rango $p\boldsymbol{\delta}_{ij}$, una reflexión en el plano X_2X_3, (8.2-4), no cambia el valor del tensor. Por el argumento de rotación arbitraria, concluimos que una reflexión en cualquier plano no afectaría su valor. Por lo tanto, la forma que hemos encontrado es isotrópica con respecto a todas las transformaciones ortogonales. (*Lo que había que demostrar*).

Esta prueba se debe a Jeffreys. Notar que para un tensor isotrópico, los ejes coordenados pueden ser etiquetados en un orden arbitrario. Así, una permutación cíclica de los índices 1, 2, 3 no puede afectar los valores de los componentes de un tensor que es isotrópico con respecto a rotación de ejes coordenados. Por consiguiente, $B_{12} = 0$ implica que $B_{31} = 0$. Si el tensor es isotrópico también con respecto a reflexión, entonces una permutación arbitraria de los índices 1, 2 ,3 no afectará los valores de los componentes. El uso de estos argumentos puede acortar la prueba.

8.3 Tensores isotrópicos de rango 3.

Para tensores de rango 3, podemos verificar que el tensor permutación ϵ_{ijk} es isotrópico con respecto a la rotación de ejes coordenados (transformaciones

ortogonales propias). No es isotrópico con respecto a la reflexión en un plano coordenado, porque una reflexión tal como (8.2-4) convierte ϵ_{123} en $\underline{\epsilon}_{123} = -1$.
Podemos mostrar que con respecto a todas las rotaciones de coordenadas, los únicos tensores isotrópicos de rango 3 son múltiplos escalares de ϵ_{ijk}. La prueba puede ser construida de manera similar que para el tensor de rango 2. Sea u_{ijk} un tensor isotrópico de rango 3. Considere una rotación infinitesimal de un ángulo $d\theta$ alrededor de una eje arbitrario ξ (un vector con componentes ξ_k) pasando por el origen:

$$\underline{X}_j = (\delta_{ij} + d\theta.\xi_k.\epsilon_{kij})X_i \qquad (8.3\text{-}1)$$

Entonces, de acuerdo con la ley de transformación del tensor,

$$\begin{aligned}\underline{u}_{ijk} &= (\delta_{im} + d\theta.\xi_s.\epsilon_{sim})(\delta_{jn} + d\theta.\xi_s.\epsilon_{sjn})(\delta_{kp} + d\theta.\xi_s.\epsilon_{skp})u_{mnp}\\ &= u_{ijk} + d\theta\{\ \xi_s.\epsilon_{sim}.u_{mjk} + \xi_s.\epsilon_{sjn}.u_{ink} + \xi_s.\epsilon_{skp}.u_{ijp}\ \} + O(d\theta^2).\end{aligned}$$

Por isotropía, $\underline{u}_{ijk} = u_{ijk}$; por consiguiente, para $d\theta$ pequeño, la cantidad en las llaves debe desaparecer. (Podemos ignorar las cantidades de orden mayor.) Así, para todo i, j, k,

$$\xi_s.\epsilon_{sim}.u_{mjk} + \xi_s.\epsilon_{sjn}.u_{ink} + \xi_s.\epsilon_{skp}.u_{ijp} = 0 \qquad (8.3\text{-}2)$$

Tomando i = j = 1. Entonces

$$-\xi_2.u_{31k} + \xi_3.u_{21k} - \xi_2.u_{13k} + \xi_3.u_{12k} + \xi_s.\epsilon_{sk1}.u_{111} + \xi_s.\epsilon_{sk2}.u_{112} + \xi_s.\epsilon_{sk3}.u_{113} = 0 \qquad (8.3\text{-}3).$$

Ahora hacemos k = 2. Entonces, ya que ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 son arbitrarios, sus componentes deben desaparecer, y obtenemos

$$\begin{aligned}u_{212} + u_{122} &= u_{111}\\ u_{312} + u_{132} &= 0, \qquad (8.3\text{-}4)\\ u_{113} &= 0.\end{aligned}$$

De la última ecuación y por la simetría, $u_{ijk} = 0$ si 2 de los i, j, son iguales y el tercero diferente. Entonces, por la primera ecuación de (8.3-4), u_{ijk} también es cero si todas i, j , k son iguales. La segunda ecuación muestra que

$$u_{ijk} = - u_{jik}.$$

Si, en (8.3-3), hacemos *k=1*, entonces todos los términos se anulan, sin dar nueva información.
Finalmente, consideramos el caso en el cual i, j, k son todos diferentes en (8.3-2). Notemos que u_{mjk} es cero cuando $m = j$. Entonces está claro que la ecuación (8.3-2) se mantiene porque todos los coeficientes se anulan. Se deduce que el único tensor isotrópico de rango 3 (isotrópico con respeto a rotaciones, no reflexiones) es un múltiplo escalar de ϵ_{ijk}. (Lo que había que demostrar)

8.4 Tensores isotrópicos de rango 4.

Los tensores isotrópicos de rango 4 son de particular interés para las ecuaciones constitutivas de los materiales. Se ve fácilmente que puesto que el tensor unitario $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ es isotrópico, los tensores

$$\boldsymbol{\delta}_{jn}\boldsymbol{\delta}_{kl}\ ,\quad \boldsymbol{\delta}_{ik}\boldsymbol{\delta}_{jl} + \boldsymbol{\delta}_{il}\boldsymbol{\delta}_{jk}\ ,\ \boldsymbol{\delta}_{ik}\boldsymbol{\delta}_{jl} - \boldsymbol{\delta}_{il}\boldsymbol{\delta}_{jk} = \boldsymbol{\epsilon}_{sij}\boldsymbol{\epsilon}_{skl} \qquad (8.4\text{-}1)$$

son isotrópicos. Nos proponemos a mostrar que si u_{ijkl} es un tensor isotrópico de rango 4, entonces es de la forma

$$\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\delta}_{jn}\boldsymbol{\delta}_{kl} + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\delta}_{ik}\boldsymbol{\delta}_{jl} + \boldsymbol{\delta}_{il}\boldsymbol{\delta}_{jk}) + \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\delta}_{ik}\boldsymbol{\delta}_{jl} - \boldsymbol{\delta}_{il}\boldsymbol{\delta}_{jk}) \qquad (8.4\text{-}2)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\nu}$ son escalares. Además, si u_{ijkl} tiene la propiedades de simetría

$$u_{ijkl} = u_{jikl}\ ,\ u_{ijkl} = u_{ijlk} \qquad (8.4\text{-}3)$$

entonces (se debe tener $\boldsymbol{\nu}$=0)

$$u_{ijkl} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\delta}_{jn}\boldsymbol{\delta}_{kl} + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\delta}_{ik}\boldsymbol{\delta}_{jl} + \boldsymbol{\delta}_{il}\boldsymbol{\delta}_{jk}) \qquad (8.4\text{-}4)$$

Demostración: estableceremos los resultados por isotropía con respecto a la rotación de ejes coordenados y reflexiones en los planos coordenados.

Primero, notamos que los ejes coordenados pueden ser etiquetados en un orden arbitrario. Así, una permutación en los índices 1, 2, 3 no puede afectar los valores de los componentes de un tensor isotrópico. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &u_{1111} = u_{2222} = u_{3333}\ , \\ &u_{1122} = u_{2233} = u_{3311} = u_{1133} = u_{2211} = u_{3322}\ , \qquad (8.4\text{-}5) \\ &u_{1212} = u_{2323} = u_{3131} = u_{1313} = u_{2121} = u_{3232}\ , \\ &u_{1221} = u_{2332} = u_{3113} = u_{2112} = u_{3223} = u_{1331}. \end{aligned}$$

A continuación, notamos que una rotación de 180° alrededor del eje X_1, correspondiente a la transformación dada por la ecuación (8.2-10), cambia el signo de cualquier término con un número impar del índice 1. Pero esos términos no deben cambiar de signo debido a la isotropía. Por lo tanto, valen cero. Por ejemplo,

$$u_{1222} = u_{1223} = u_{2212} = 0. \qquad (8.4\text{-}6)$$

Por la simetría, esto es verdadero para cualquier índice *i*.

Estas condiciones reducen el máximo número de componentes numéricamente distintos del tensor u_{ijkl} a cuatro, a saber, u_{1111} , u_{1122} , u_{1212} , u_{1221} .

Ahora vamos a imponer la transformación dada por (8.2-11) correspondiente a una rotación infinitesimal alrededor del eje X_3. La ley de transformación del tensor requiere que

$$\underline{u}_{pqrs} = u_{pqrs} + \quad d\boldsymbol{\theta}\{\ \boldsymbol{\epsilon}_{3ip}.u_{iqrs} + \boldsymbol{\epsilon}_{3iq}.u_{pirs} + \boldsymbol{\epsilon}_{3ir}.u_{pqis} + \boldsymbol{\epsilon}_{3is}.u_{pqri}\} + O(d\boldsymbol{\theta}^2). \quad (8.4\text{-}7)$$

Ya que para un tensor isotrópico $\underline{u}_{pqrs} = u_{pqrs}$ los términos en las llaves deben anularse,

$$\epsilon_{3ip}.u_{iqrs} + \epsilon_{3iq}.u_{pirs} + \epsilon_{3ir}.u_{pqis} + \epsilon_{3is}.u_{pqri} = 0. \qquad (8.4\text{-}8)$$

Porque hay solamente 3 valores posibles (1, 2, 3) para cada uno de los cuatro índices *pqrs*, al menos dos de ellos deben ser iguales. Por eso, podemos considerar los casos por separado donde (a) los cuatro son iguales, (b) tres son iguales, (c) dos son iguales y otros dos distintos, y (d) dos son iguales y los otros dos iguales.
En el caso *a*, tenemos $p=q=r=s=1$. Entonces vemos que todos los términos en (8.4-8) se anulan de acuerdo con (8.4-6). De manera similar, $p=q=r=s=2$ *ó* 3 no proporciona información.
En el caso *b*, tenemos $p=q=r=1$, $s=2$. Obtenemos

$$-u_{2112} - u_{1212} - u_{1122} + u_{1111} = 0. \qquad (8.4\text{-}9)$$

Ninguna nueva información es obtenida estableciendo $p=q=r=2$, $s=1$, porque esto simplemente equivale a un intercambio de índices 1 y 2, que ha sido considerado en (8.4-5). El caso $p=q=r=3$ es trivial porque el término ϵ_{3ip} se anula.
Los casos *c* y *d* produce las condiciones contenidas en (8.4-5) y (8.4-6).
Ya que una rotación desde un sistema de coordenadas rectangular a otra con el mismo origen puede ser obtenida por repetidas rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes coordenados, no se imponen condiciones adicionales sobre u_{pqrs} por isotropía.
Ahora hacemos

$$\begin{aligned} u_{1122} &= \lambda, \\ u_{1212} &= \mu + \nu, \qquad (8.4\text{-}10) \\ u_{2112} &= \mu - \nu. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (8.4-9) dice

$$u_{1111} = \lambda + 2\mu. \qquad (8.4\text{-}11)$$

Parecen, por lo tanto, ser 3 tensores isotrópicos independientes de orden 4, obtenidos tomando cada uno de λ, μ y ν a su vez igual a 1 y los otros 0.
El tensor obtenido por hacer $\lambda=1$, $\mu=\nu=0$ tiene componentes $u_{ijkl}=1$ si i=j, k=l y se anula en todos los otros casos. Por lo tanto, es equivalente a

$$u_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}. \qquad (8.4\text{-}12)$$

En el tensor obtenido tomando μ=1, $\lambda=\nu$=0 el componente u_{ijkl}=1 si i=k, j=l, i≠j y si i=l, j=k, i≠j; mientras u_{ijkl} = 2 si i=j=k=l. Otros componentes son cero. Esto es exactamente

$$u_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \qquad (8.4\text{-}13)$$

El tensor obtenido haciendo $\lambda=\mu$=0, ν=1 tiene elementos u_{ijkl} = 1 cuando i=k, j=l, i≠j; y u_{ijkl} = -1 cuando i=l, j=k, i≠j. Todos los otros componentes son cero. Por lo tanto,

$$u_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\ . \qquad (8.4\text{-}14)$$

El tensor isotrópico general de rango 4 está dado por (8.4-2). Desde esta ecuación, la ecuación (8.4-4) sigue bajo la condición de simetría dada en (8.4-3). (Lo que había que demostrar).

8.5 Materiales isótropos.

Si un sólido elástico es isótropo, el tensor C_{ijkl} en la sección (8.1-1),

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\mathbf{e}_{\mathbf{kl}} \qquad (8.5\text{-}1)$$

debe ser isótropo (secc 8.2). Además, ha sido mostrado que $C_{ijkl} = C_{jikl}$ porque el tensor tensión es simétrico y que $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ porque el tensor deformación es simétrico y la suma $C_{ijkl}\mathbf{e}_{\mathbf{kl}}$, es simétrica sin perder generalidad. Por lo tanto, de acuerdo a (8.4-4),

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (8.5\text{-}2)$$

y la ecuación (8.5-1) se convierte en

$$\sigma_{ij} = \lambda\mathbf{e}_{\mathbf{kk}}\delta_{\mathbf{ij}} + 2\mu\mathbf{e}_{\mathbf{ij}} \qquad (8.5\text{-}3)$$

<u>Esta es la forma más general de la relación tensión-deformación para un sólido elástico isótropo para el cual las tensiones son funciones lineales de las deformaciones</u> (strains). Por lo tanto, un sólido elástico isótropo está caracterizado por 2 constantes materiales: λ y μ.

De manera similar, un fluido viscoso isótropo (secc 7.3) está gobernado por la relación

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\boldsymbol{V}_{\mathbf{kk}}\delta_{ij} + 2\mu\boldsymbol{V}_{\mathbf{ij}} \qquad (8.5\text{-}4)$$

($\boldsymbol{V}_{\mathbf{ij}}$ tensor tasa de deformación.)

8.6 Coincidencia de los ejes principales de tensión y de deformación.

Un importante atributo de la isotropía de un cuerpo elástico (o un fluido viscoso) es que los ejes principales de tensión y los ejes principales de deformación (o tasa de deformación) coinciden. Esto se deduce de (8.5-3) o (8.5-4), porque los cosenos directores de los ejes principales de tensión y de deformación son, respectivamente, las soluciones de las ecuaciones (secc 4.5 y 5.7)

$$(\boldsymbol{\sigma}_{ji} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\delta}_{ji})\boldsymbol{\nu}_j = 0\ ,\ \ |\boldsymbol{\sigma}_{ji} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\delta}_{ji}| = 0, \qquad (8.6\text{-}1)$$

$$(\mathbf{e}_{ji} - \mathbf{e}\boldsymbol{\delta}_{ji})\boldsymbol{\nu}_j = 0\ ,\ \ |\mathbf{e}_{ji} - \mathbf{e}\boldsymbol{\delta}_{ji}| = 0, \qquad (8.6\text{-}2)$$

Por (8.5-3), (8.6-1) se convierte

$$(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{e}_{\mathbf{kk}}\boldsymbol{\delta}_{ij} + 2\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}_{\mathbf{ij}} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\delta}_{ji}\ )\boldsymbol{\nu}_j = 0\ , \qquad (8.6\text{-}3)$$

ó

$$2\boldsymbol{\mu}(\mathbf{e}_{\mathbf{ji}} - \boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\delta}_{ji})\boldsymbol{\nu}_j = 0 \qquad (8.6\text{-}4)$$

si introducimos una nueva variable

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{-e_{kk}}{2} \qquad (8.6\text{-}5)$$

Pero la ecuación (8.6-4) es precisamente de la misma forma que (8.6-2). Así, a pesar de que los eigenvalores (tensiones y deformaciones principales) son diferentes, las direcciones principales, dadas por las soluciones $\boldsymbol{\nu}_j$, son las mismas.
Hay otras maneras de reconocer la coincidencia de las direcciones principales de la tensión y la deformación. Por ejemplo, reconocemos en la construcción del círculo de Mohr (secc 4.3, 5.7) que el ángulo entre los ejes principales y el eje X no depende de la localización del centro del círculo. El ángulo principal puede determinarse si el centro se traslada al origen. Tal traslación se logra estableciendo $\boldsymbol{\sigma}_{kk}$=0, $\mathbf{e}_{kk}$=0, bajo cuya condición la relación tensión-deformación se convierte simplemente en

$$\boldsymbol{\sigma}'_{\mathbf{ij}} = 2\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}'_{\mathbf{ij}}$$

La coincidencia de direcciones principales es entonces evidente porque $2\boldsymbol{\mu}$ es sólo un factor numérico.

8.7 Otros métodos de caracterización de la isotropía.
Existen maneras para caracterizar la isotropía. Por ejemplo, uno puede definir la propiedad de un cuerpo elástico mediante la función (strain-energy) deformación-energía $W(e_{11}, e_{12},...,e_{33})$, el cual es una función de los componentes de deformación y que define los componentes de tensión mediante la relación

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \qquad (8.7\text{-}1)$$

Entonces la isotropía puede ser declarada como el hecho de que la función strain-energy depende sólo de los *invariantes* de la deformación. Por ejemplo, usando los invariantes de la deformación

$$\boldsymbol{I_1 = e_{ii}}$$
$$\boldsymbol{I_2 = \tfrac{1}{2}.e_{ij}e_{ji}} \text{ , ó } \boldsymbol{J_2 = \tfrac{1}{2}.e'_{ij}e'_{ji}}$$
$$\boldsymbol{I_3 = \tfrac{1}{2}.e_{ij}e_{jk}e_{ki}}$$

Podemos especificar $W(e_{11}, e_{12},...,e_{33})$ para ser una función

$$W(I_1, I_2, I_3) \qquad (8.7\text{-}2)$$

Ya que los invariantes conservan su forma (y valor) bajo todas las rotaciones de coordenadas, el mismo atributo se aplica a la ecuación (8.7-1).

Falta 8.8 "*Podemos reconocer la isotropía de un material a partir de su microestructura?***"** la cual tiene 2 ejemplos y problemas.