5- Análisis de Deformación

Fuerzas aplicadas a sólidos causan deformación y fuerzas aplicadas a líquidos causan flujo. A menudo el mayor objetivo de un análisis es encontrar la deformación o el flujo. Ese es nuestro objetivo en este capítulo para analizar la deformación de cuerpos sólidos de manera tal que pueda ser relevante para el estado tensional de esos cuerpos.

5.1 Deformación.

Si estiramos una banda de goma, esta se extiende. Si comprimimos un cilindro, se acorta. Si doblamos una varilla, se flexiona. Si torcemos un eje, se torsiona. Vea la Fig.5.1. El tensor tensión causa un tensor strain (deformación). Tensión de corte causa strain (deformación) de corte . Esto es sentido común. Para expresar estos fenómenos cuantitativamente, es necesario definir una medida de la deformación (strain).

Considere una cuerda de una longitud inicial L_0. Si es estirada a una longitud L, como se muestra en la Fig.5.1(a), es natural describir el cambio por relaciones sin dimensiones como L / L_0 , $(L - L_0)/L_0$, y $(L - L_0)/L$. El uso de relaciones adimensionales elimina la longitud absoluta de la consideración. Se considera comúnmente que estas relaciones, y no las longitudes L o L_0 , están relacionados a la tensión en la cuerda. Esta expectativa puede ser verificada en el laboratorio. La proporción L / L_0 es llamada la proporción de estiramiento (stretching) y es denotada por el símbolo **λ**. Las proporciones

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0}, \qquad \epsilon' = \frac{L - L_0}{L} \tag{5.1–1}$$

son medidas de strain (deformación). Cualquiera de ellas puede ser usada, aunque numéricamente son diferentes. Por ejemplo, si L=2, y L_0 =1, tenemos que **λ**=2, ϵ = 1, y ϵ'= ½. Tenemos razones (que veremos más adelante) para introducir también las medidas

$$e = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2}, \qquad \varepsilon = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}. \tag{5.1–2}$$

Si L = 2 y L_0 =1, tenemos que e = 3/8 y ε= 3/2 . Pero si L=1.01 y L_0 =1.00, entonces $e \doteq 0.01$ y $\varepsilon \doteq 0.01$, y $\epsilon \doteq 0.01$, y $\epsilon' \doteq 0.01$. Por lo tanto, en estiramientos infinitesimales, todas estas medidas de strain son aproximadamente iguales. En estiramientos finitos, sin embargo, ellos son diferentes.

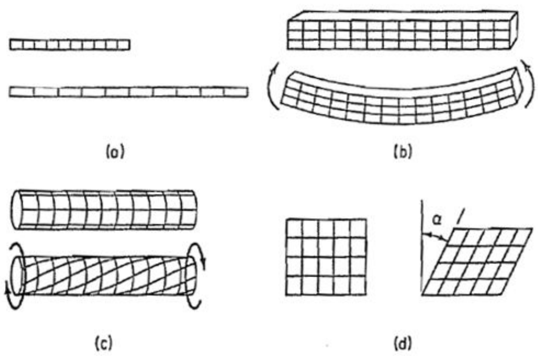


Figure 5.1 Patterns of deformation. (a) Stretching. (b) Bending. (c) Twisting. (d) Simple shear.

Las medidas de strain pueden ser usadas para describir deformaciones más complejas. Por ejemplo, si doblamos una viga rectangular por momentos actuando en sus extremos, como se muestra en la Fig.5.1(b), la viga se desviará en un arco. Las "fibras" superiores se acortarán y las inferiores se estiraran. Estas strains longitudinales están relacionadas con el momento de flexión actuando sobre la viga.
Para ilustrar corte, considere un eje cilíndrico circular, como se muestra en la Fig.5.1(c). Cuando el eje es torsionado, los elementos en el eje son distorsionados de la manera que se muestra en la Fig.5.1(d). En este caso, el ángulo α puede ser tomado como una medida de strain. Es más habitual, sin embargo, tomar *tan*α o ½.*tan*α como la strain de corte; las razones para esta elección serán explicadas después.
La selección de medidas propias de strain es dictada básicamente por la relación tensión-strain (es decir, la ecuación constitutiva del material). Por ejemplo, si traccionamos sobre una soga, esta se estira. Los resultados experimentales pueden ser presentados como una curva del tensor tensión σ trazada frente a la proporción de estiramiento λ o la strain e. Una fórmula empírica que relaciona σ con e se determinará a continuación. El caso de deformación infinitesimal es simple porque las diferentes medidas presentadas de strain coinciden. Se encontró que, para la mayoría de los materiales de ingeniería sujetos a una deformación infinitesimal en estiramiento uniaxial, se relacionan como

$$\sigma = Ee \qquad (5.1\text{-}3)$$

donde *E* es una constante llamada módulo de Young, es válido dentro de cierto rango de tensión. La ecuación (5.1-3) es llamada *Ley de Hooke*. Un material que la obedece se dice que es una material *Hookeano*. El acero es un material Hookeano si σ es menor que cierto límite que es llamado un *rendimiento de stress* en tensión.
Correspondiente a la ecuación (5.1-3), la relación para un material Hookeano sometido a un strain de corte infinitesimal es

$$\tau = G.\tan\alpha \qquad (5.1\text{-}4)$$

donde G es otra constante llamada *módulo de corte* o *módulo de rigidez*. El rango de validez de la ecuación (5.1-4) está limitada de nuevo por un rendimiento de stress, esta vez en corte. El rendimiento de stress en tensión, en compresión, y en corte son diferentes en general.

Las ecuaciones (5.1-3) y (5.1-4) son las más simples de las ecuaciones constitutivas. Los casos más generales serán discutidos en el cap 7, 8 y 9.

Deformaciones de las mayoría de las cosas en la naturaleza y la ingeniería son mucho más complejas que las que acabamos de discutir. Nosotros por lo tanto necesitamos un método general de tratamiento. Primero, sin embargo, vamos a considerar la descripción matemática de la deformación.

Sea un cuerpo que ocupa un espacio *S*. Referido a un marco de referencia cartesiano rectangular, todas las partículas en el cuerpo tienen un conjunto de coordenadas. Cuando el cuerpo es deformado, todas las partículas toman una nueva posición, que es descrita por un nuevo conjunto de coordenadas. Por ejemplo, una partícula *P*, localizada originalmente en un lugar con coordenadas (a_1,a_2,a_3), es movido al lugar *Q* con coordenadas (x_1,x_2,x_3) donde el cuerpo se traslada y se deforma. Entonces el vector *PQ* es llamado el *vector desplazamiento* de la partícula. (Ver Fig.5.2) Los componentes del vector desplazamiento son, claramente,

$$x_1 - a_1 \quad , \ x_2 - a_2 \quad , \ x_3 - a_3 \ .$$

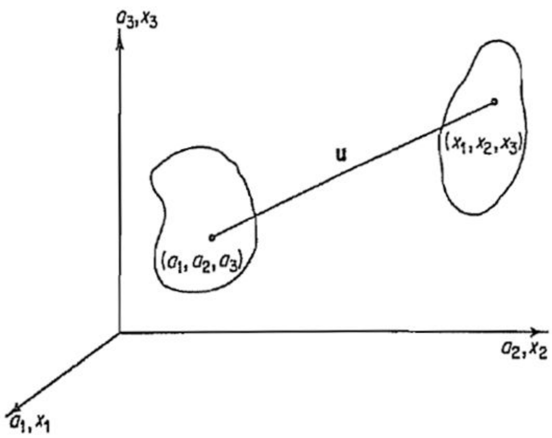


Figure 5.2 Displacement vector.

Si el desplazamiento es conocido por todas las partículas en el cuerpo, podemos construir la deformación del cuerpo a partir del original. Por lo tanto, una deformación puede ser descrita por un campo de desplazamiento. Las variables (a_1, a_2,a_3) referidas a cualquier partícula en la configuración original del cuerpo, y (x_1, x_2,x_3) son las coordenadas de esa partícula cuando el cuerpo es deformado. Entonces la deformación del cuerpo es conocida si x_1, x_2,x_3 son funciones conocidas de a_1, a_2,a_3:

$$x_i = x_i(a_1,\ a_2,a_3) \qquad (5.1\text{-}5)$$

Esta es una transformación (mapping) de a_1,a_2,a_3 hacia x_1,x_2,x_3 . En mecánica del continuo, asumimos que las deformaciones son continuas. Así, un vecino es transformado en un vecino. También asumimos que la transformación es uno a uno, es decir, las funciones en (5.1-5) son de un solo valor, continuos, y tienen una inversa única

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (5.1\text{-}6)$$

para todos los puntos del cuerpo.
El vector desplazamiento **u** es definido por los componentes

$$\mathbf{u}_i = x_i - a_i \qquad (5.1\text{-}7)$$

Si un vector desplazamiento es asociado con cada partícula en la posición original, podemos escribir

$$u_i(a_1, a_2, a_3) = x_i(a_1, a_2, a_3) - a_i \qquad (5.1\text{-}8)$$

Si ese desplazamiento es asociado con la partícula en la posición deformada, escribimos

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - a_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (5.1\text{-}9)$$

5.2 El Strain
La idea de que la tensión en un cuerpo está relacionado a la strain fué anunciado por primera vez por Robert Hooke (1635-1703) en 1676 en la forma de un anagrama, *ceiiinosssttuv*. Lo explicó en 1678 como

Ut tensio sic vis,

o "El poder de cualquier cuerpo elástico está en la misma proporción con la extensión". El significado de esta declaración es claro para cualquiera que alguna vez haya comprimido un resorte o estirado una banda elástica.
Un movimiento de cuerpo rígido no es inducido por tensión. Así, los desplazamientos en sí mismos no están relacionados directamente a la tensión. Para relacionar la deformación con tensión, debemos tener en cuenta el estiramiento o la distorsión del cuerpo. Para este propósito, consideremos 3 vecinos *P, P', P''* en el cuerpo. (Ver Fig. 5.3) Si ellos son transformados a los puntos *Q, Q', Q''* en la configuración deformada, el cambio en el área y ángulos del triángulo es completamente determinado si se conocen los cambios en las longitudes de los lados. Pero la ubicación del triángulo

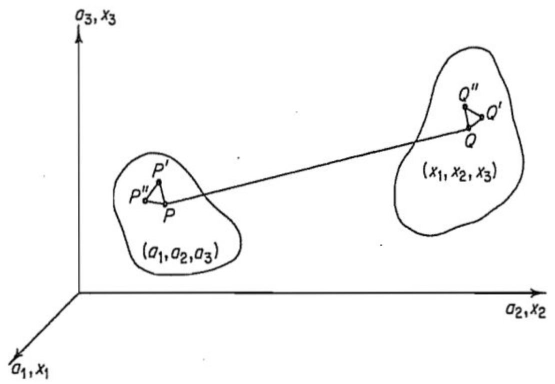


Figure 5.3 Deformation of a body.

no está determinado por el cambio de los lados. De manera similar, si el cambio de longitud entre cualesquiera 2 puntos arbitrarios de un cuerpo son conocidos, la nueva configuración del cuerpo estará completamente definida, excepto para la ubicación del cuerpo en el espacio. La descripción de la variación de distancia entre cualesquiera 2 puntos del cuerpo es la llave para el análisis de la deformación.

Considere un elemento de línea infinitesimal conectando el punto $P(a_1,a_2,a_3)$ con un punto vecino $P'(a_1+da_1, a_2+da_2,a_3+da_3)$. El cuadrado de la longitud ds_0 de PP' en la configuración original es dado por

$$ds_0^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2. \tag{5.2–1}$$

Cuando P y P' son deformados en los puntos $Q(x_1,x_2,x_3)$ y $Q'(x_1+dx_1, x_2+dx_2,,x_3+dx_3)$, respectivamente, el cuadrado de la longitud ds del nuevo elemento QQ' es

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{5.2–2}$$

Por las ecuaciones (5.1-5) y (5.1-6), tenemos

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j, \qquad da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j. \tag{5.2–3}$$

Ahora, con la introducción del delta de Kronecker, podemos escribir

$$ds_0^2 = \delta_{ij}\, da_i\, da_j = \delta_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial a_j}{\partial x_m} dx_l\, dx_m, \tag{5.2–4}$$

$$ds^2 = \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j = \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} da_l\, da_m. \tag{5.2–5}$$

La diferencia entre los cuadrados de los elementos de longitud puede escribirse, después de varios cambios en los símbolos de los índices dummy, ya sea como

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij}\right) da_i\, da_j, \tag{5.2–6}$$

o como

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j}\right) dx_i\, dx_j. \tag{5.2–7}$$

Definimos los tensores STRAIN

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i}\frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij}\right), \tag{5.2–8}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial a_\beta}{\partial x_j}\right), \tag{5.2–9}$$

de modo que

$$ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij}\,da_i\,da_j, \tag{5.2–10}$$

$$ds^2 - ds_0^2 = 2e_{ij}\,dx_i\,dx_j. \tag{5.2–11}$$

El tensor strain E_{ij} fué introducido por Green y St. Venant y es llamado *tensor strain de Green (Green-Lagrange)*. El tensor strain e_{ij} fué introducido por Cauchy para deformaciones infinitesimales, y por Almansi y Hamel para deformaciones finitas y es conocido como *tensor strain de Almansi*. En analogía con terminologías en hidrodinámica, $\boldsymbol{E_{ij}}$ a menudo se conoce como *Lagrangiano* y $\boldsymbol{e_{ij}}$ como *Euleriano*.

Como E_{ij} y e_{ij} así definidos son tensores en el sistema de coordenadas a_i y x_i, respectivamente, se deduce de la regla del cociente cuando es aplicado a la ecuación (5.2-10) y (5.2-11). Los tensores E_{ij} y e_{ij} son obviamente simétricos, es decir,

$$\boldsymbol{E_{ij} = E_{ji}}, \quad \boldsymbol{e_{ij} = e_{ji}} \tag{5.2-12}$$

Una consecuencia inmediata de las ecuaciones (5.2-10) y (5.2-11) es que $ds^2\text{-}ds_0^2=0$ implica $E_{ij} = e_{ij} = 0$ y viceversa. Pero una deformación en la cual la longitud de todos los elementos de línea permanecen sin cambios es un movimiento de cuerpo rígido. Por lo tanto, *la condición necesaria y suficiente para que una deformación de un cuerpo sea un movimiento de cuerpo rígido es que todos los componentes del tensor strain E_{ij} y e_{ij} son cero en todo el cuerpo.*

5.3 Componentes de Strain en términos de desplazamientos.
Si introducimos el vector desplazamiento **u** con componentes

$$u_\alpha = x_\alpha - a_\alpha, \quad (\alpha = 1,2,3) \tag{5.3-1}$$

Entonces

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i}, \qquad \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} = \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}, \tag{5.3–2}$$

y los tensores strain se reducen a la forma simple

$$
\begin{aligned}
E_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i}\right)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial a_j} + \delta_{\beta j}\right) - \delta_{ij}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j}\right]
\end{aligned}
\qquad (5.3\text{–}3)
$$

y

$$
\begin{aligned}
e_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\left(-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \delta_{\alpha i}\right)\left(-\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} + \delta_{\beta j}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\right].
\end{aligned}
\qquad (5.3\text{–}4)
$$

En notación no abreviada (*x, y, z* por x_1,x_2,x_3; *a, b, c* por a_1,a_2,a_3; y *u, v, w* por u_1,u_2,u_3), contamos con los términos típicos

$$
\begin{aligned}
E_{aa} &= \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2\right], \\
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \\
E_{ab} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial w}{\partial b}\right)\right], \\
e_{xy} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].
\end{aligned}
\qquad (5.3\text{–}5)
$$

Notar que *u, v, w* son considerados funciones de *a, b, c*, la posición de puntos en el cuerpo en la configuración no deformada, donde el tensor strain Lagrangiano es evaluado; mientras son considerados funciones de *x, y, z,* la posición de puntos en la configuración deformada, cuando el tensor strain Euleriano es evaluado.
Si los componentes de desplazamiento u_i son tales que sus primeras derivadas son mucho menores que los cuadrados y productos de las derivadas parciales de u_i ,son despreciables, entonces $\mathbf{e}_{ij}$ se reduce al *tensor strain de Cauchy,*

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]. \qquad (5.3\text{–}6)$$

En notación no abreviada,

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = e_{yx}, \\
e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = e_{zx}, \qquad (5.3\text{–}7) \\
e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & e_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = e_{zy}.
\end{aligned}$$

En el caso de desplazamiento infinitesimal, la distinción entre los tensores Lagrangiano y Euleriano desaparece, desde entonces es irrelevante si las derivadas de los desplazamientos se calculan en la posición de un punto antes o después de una deformación.

Advertencia: la notación para la Strain de corte.
En la mayoría de los libros y papers, las componentes de strain son definidos como

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{u}{x}, & \gamma_{xy} &= 2e_{xy} = \frac{u}{y} + \frac{v}{x}, \\
e_y &= \frac{v}{y}, & \gamma_{yz} &= 2e_{yz} = \frac{v}{z} + \frac{w}{y}, \\
e_z &= \frac{w}{z}, & \gamma_{zx} &= 2e_{zx} = \frac{u}{z} + \frac{w}{x}.
\end{aligned}$$

En otras palabras, las strains de corte, denotadas por γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, son 2 veces mayores que los componentes e_{xy}, e_{yz}, e_{zx} ,respectivamente. No vamos a utilizar esta notación, porque los componentes e_x, γ_{xy}, etc., juntos no forman un tensor, y una gran cantidad de conveniencia matemática se pierde. Pero tenga cuidado de estas diferencias cuando se lee otros libros o papers.

5.4 Interpretación geométrica de componentes de strain infinitesimal.
Sean x, y, z un conjunto de coordenadas cartesianas rectangulares. Considere un elemento de línea de longitud *dx* paralelo al eje x (*dy=dz=0*). El cambio del cuadrado de la longitud de este elemento debido a deformación es

$$ds^2 - ds_0^2 = 2e_{xx}(dx)^2.$$

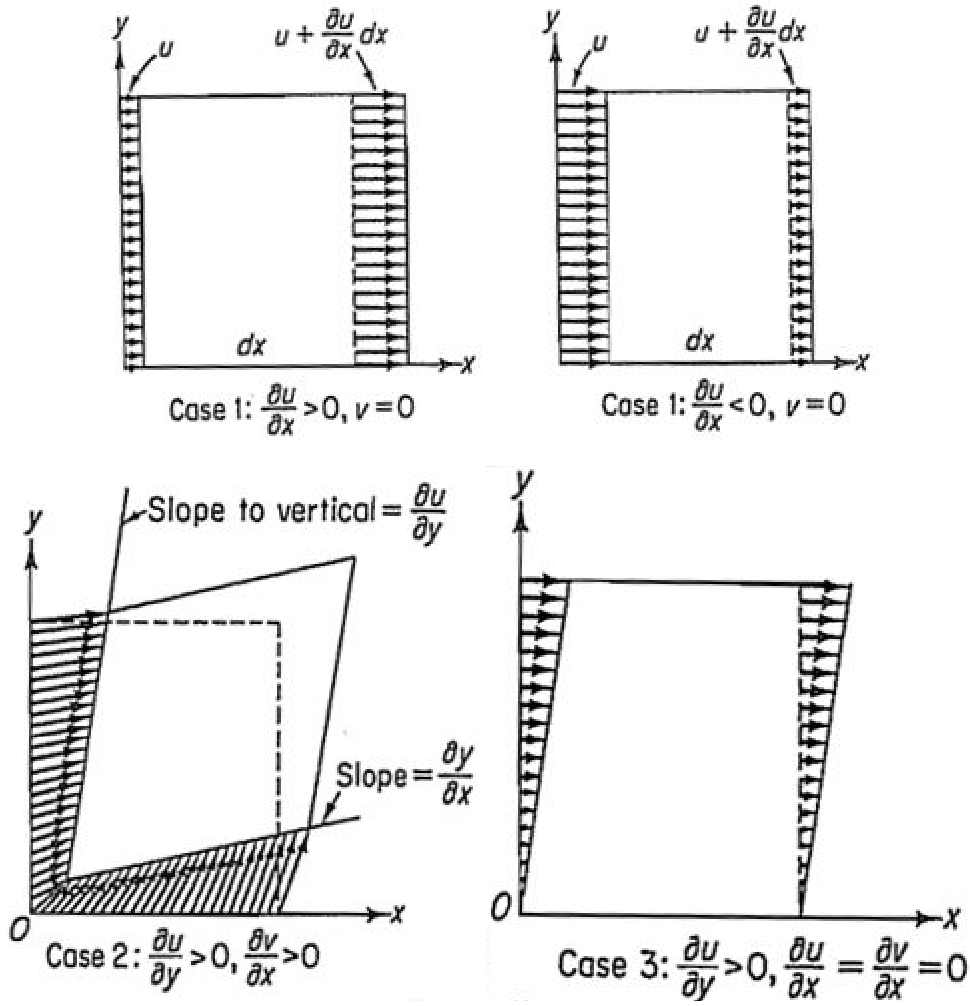
Por lo tanto,

$$ds - ds_0 = \frac{2e_{xx}(dx)^2}{ds+ds_0}$$

Pero ds=dx en este caso, y ds_0 difiere de ds solamente por una cantidad pequeña de segundo orden si asumimos que los desplazamientos $u, v, w,$ y los componentes strain e_{xx} son infinitesimales. Por lo tanto,

$$\frac{ds - ds_0}{ds} = e_{xx} \qquad (5.4\text{-}1)$$

y se ve que e_{xx} representa la extensión, o cambio de longitud por unidad de longitud, de un vector paralelo al eje x. Una aplicación de esta discusión a un elemento de volumen es ilustrado en la Fig.5.4, caso 1.



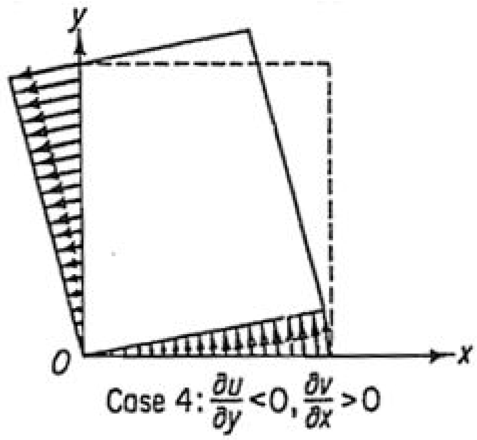


Fig. 5.4 Gradientes de deformación e interpretación de componentes de strain infinitesimal.

Para ver el significado del componente e_{xy}, consideremos un rectángulo pequeño en el cuerpo con los bordes *dx, dy*. Es evidente a partir de la Fig.5.4, Casos 2, 3 y 4, que la suma ∂u/∂y + ∂v/∂x representa el cambio en el ángulo xOy, que era originalmente un ángulo positivo. Así,

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{1}{2}\tan\text{ (change of angle } xOy). \qquad (5.4\text{–}2)$$

En el uso de la ingeniería, los componentes de strain e_{ij} (i ≠ j) está duplicado, es decir, $2e_{ij}$, son llamados Strains Shearing (strains de corte) o detrusions (?). El nombre es particularmente sugestivo en el caso 3 de la Fig.5.4, lo que es llamado el caso de *corte simple.*

5.5 Rotación infinitesimal.

Consideremos un campo de desplazamiento infinitesimal $u_i(x_1,x_2,x_3)$. Desde u_i, se forma el tensor cartesiano

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \qquad (5.5\text{–}1)$$

el cual es antisimétrico, es decir,

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}. \qquad (5.5\text{–}2)$$

Por lo tanto, el tensor w_{ij} tiene solamente 3 componentes independientes - w_{12}, w_{23} y w_{31} - porque w_{11}, w_{22} y w_{33} son cero. De tal tensor antisimétrico, podemos construir siempre un *vector dual*

$$\omega_k = \tfrac{1}{2}\epsilon_{kij}\omega_{ij}, \qquad (5.5\text{–}3)$$

donde ϵ_{kij} es el símbolo de permutación. Del otro lado, con la identidad ϵ-δ, resulta que $\epsilon_{ijk}\,\omega_k = \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji})$, el cual por la ecuación (5.5-2) es ω_{ij}. Por lo tanto,

$$\omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\,\omega_k \qquad (5.5\text{-}4)$$

Así, ω_{ij} puede ser llamado *tensor dual* (antisimétrico) de un vector ω_k. Llamaremos a ω_k y ω_{ij} , respectivamente, el *vector rotación* y *tensor rotación* del campo de desplazamiento u_i .

Una ligera modificación de la prueba se dá en el final de la sección 5.2 que nos convencerá que la anulación del tensor simétrico E_{ij} *o* e_{ij} es una condición necesaria y suficiente para una vecindad de una partícula que se mueve como un cuerpo rígido. Un movimiento de cuerpo rígido consiste de una traslación y una rotación. La traslación es u_i . Qué es una rotación? Demostraremos que en un campo de desplazamiento infinitesimal para el cual el tensor strain se anula en un punto *P*, la rotación de una vecindad de *P* es dado por el vector ω_k. Para mostrar esto, consideremos un punto *P*' en una vecindad de *P*. Dejamos que las coordenadas de *P* y *P'* sean x_i y dx_i, respectivamente. El desplazamiento relativo de *P'* con respecto a *P* es

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,dx_j. \qquad (5.5\text{–}5)$$

Así lo podemos escribir como

$$du_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j.$$

La primera cantidad entre paréntesis es el tensor strain infinitesimal, que se asume como cero. La segunda cantidad entre paréntesis puede ser identificado con la ecuación (5.5-1). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} du_i &= -\omega_{ij}dx_j = \omega_{ji}\,dx_j \\ &= -\epsilon_{ijk}\omega_k\,dx_j && \text{[by Eq. (5.5–4)]} \qquad (5.5\text{–}6) \\ &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{dx})_i && \text{(by definition).} \end{aligned}$$

Así, el desplazamiento relativo es el producto vectorial de ω y dx. Esto es exactamente lo que habría sido producido por una rotación infinitesimal $|\omega|$ alrededor de un eje que pasa por *P* en la dirección de ω.

Cabe señalar que hemos restringido desplazamientos angulares infinitesimales. Medidas angulares para desplazamientos finitos están relacionados a ω_{ij} en una manera más compleja.

5.6 Componentes de Strain finita.

Cuando las componentes de Strain no son pequeños, también es fácil dar una interpretación geométrica simple para los componentes de los tensores strain.
Consideremos un conjunto de coordenadas cartesianas rectangulares respecto a la cual los componentes de strain son definidos como en la Secc.5.2. Sea un elemento de línea antes de la deformación ***da***, con componentes $da_1 = ds_0$, $da_2 = 0$, $da_3 = 0$. La extensión E_1 de estos elementos es definido por

$$E_1 = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \qquad (5.6\text{–}1)$$

o

$$ds = (1 + E_1)\, ds_0. \qquad (5.6\text{–}2)$$

De la ecuación (5.2-10), tenemos

$$ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij}\, da_i\, da_j = 2E_{11}(da_1)^2. \qquad (5.6\text{–}3)$$

combinando las ecuaciones (5.6-2) y (5.6-3) obtenemos

$$(1 + E_1)^2 - 1 = 2E_{11} \qquad (5.6\text{–}4)$$

lo que le da el significado de E_{11} en términos de E_1 . Inversamente,

$$E_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1. \qquad (5.6\text{–}5)$$

Esto se reduce a

$$E_{11} \doteq E_1 \qquad (5.6\text{-}6)$$

cuando E_{11} es pequeño comparado con 1.
Para obtener el significado físico del componente E_{12} , consideremos 2 elementos de línea $\boldsymbol{ds_0}$ y $\boldsymbol{d\underline{s}_0}$ que están en el ángulo positivo en el estado original:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{ds}_0: & da_1 = ds_0, & da_2 = 0, & da_3 = 0; \\ \mathbf{d\bar{s}}_0: & da_1 = 0, & da_2 = d\bar{s}_0, & da_3 = 0. \end{array} \qquad (5.6\text{–}7)$$

Después de la deformación, estos elementos de línea se convierten en ***ds*** (con componentes $\boldsymbol{dx_i}$) y $\boldsymbol{d\underline{s}}$ (con componentes $\boldsymbol{dx_i}$). Formando el producto escalar de los elementos deformados, obtenemos

$$ds\, d\underline{s} \cos\theta = dx_k\, d\underline{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial a_i}\, \boldsymbol{da}_i\, \frac{\partial x_k}{\partial a_j}\, \boldsymbol{d\underline{a}}_j$$

$$= \frac{\partial x_k}{\partial a_1} \frac{\partial x_k}{\partial a_2}\, \boldsymbol{ds}_0 \boldsymbol{d\underline{s}}_0$$

Pero de acuerdo a la definición dada en la ecuación (5.2-8), tenemos, con $\delta_{12}=0$,

$$E_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial x_k}{\partial a_1} \frac{\partial x_k}{\partial a_2}$$

Por lo tanto,

$$ds\, d\underline{s} \cos \theta = 2E_{12}\, ds_0 d\underline{s}_0 \qquad (5.6\text{-}8)$$

Pero de las ecuaciones (5.6-1) y (5.6-5) obtenemos:

$$ds = ds_0\ (1+2E_{11})\text{^}(1/2)\ ;$$

$$d\underline{s} = d\underline{s}_0\ (1+2E_{22})\text{^}(1/2)\ ;$$

Ahora, la ecuación (5.6-8) produce

$$\cos\theta = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}. \qquad (5.6\text{–}9)$$

El ángulo θ es el ángulo entre los elementos de línea *ds* y $d\underline{s}$ después de la deformación. El cambio del ángulo entre los 2 elementos de línea, que en el estado original eran ortogonales, es $\alpha_{12} = \pi/2 - \theta$. De la ecuación (5.6-9), por lo tanto se obtuvo

$$\sin\alpha_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}. \qquad (5.6\text{–}10)$$

Estas ecuaciones exhiben la relación de E_{12} con los ángulos θ y α_{12}. La interpretación no es simple como en el caso infinitesimal debido a la participación de E_{12} y E_{22} en estas ecuaciones.

Una interpretación completamente análoga puede ser hecha para los componentes strain Eurelianos. Definiendo la extensión e_1 por unidad de longitud *deformada* como

$$e_1 = \frac{ds - ds_0}{ds}, \qquad (5.6\text{–}11)$$

encontramos que

$$e_1 = 1 - \sqrt{1-2e_{11}}. \qquad (5.6\text{–}12)$$

Además, si la desviación desde un ángulo positivo entre 2 elementos en el estado original el cual, después de la deformación, se vuelve ortogonal es definido por β_{12}, tenemos

$$\sin\beta_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1-2e_{11}}\sqrt{1-2e_{22}}}. \qquad (5.6\text{–}13)$$

En el caso de strains infinitesimales, las ecuaciones (5.6-10) y (5.6-13) se reduce a los resultados familiares

$$e_1 \doteq e_{11}, \qquad E_1 \doteq E_{11}, \qquad \alpha_{12} \doteq 2E_{12}, \qquad \beta_{12} \doteq 2e_{12}. \qquad (5.6\text{–}14)$$

5.7 Strains principales: Círculo de Mohr.
Sin agregar demasiado, podemos extender los resultados de las secciones 4.1 a 4.8 a la Strain, porque esas propiedades están derivadas desde el simple hecho que el tensor en cuestión es simétrico. Todo lo que tenemos que hacer es intercambiar la palabra tensión por Strain. Así:

(a) Existen 3 strains principales e_1, e_2, e_3 que son raíces de la ecuación determinante

$$|e_{ij} - e\,\boldsymbol{\delta}_{ij}| = 0. \qquad (5.7\text{-}1)$$

Las raíces de esta ecuación cúbica son todos números reales.

(b) Asociado con cada strain principal, decimos, e_1, hay un eje principal, con cosenos directores $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ que son soluciones de las ecuaciones

$$(e_{ij} - e_1\,\boldsymbol{\delta}_{ij})\, v_j^{(1)} = 0, \qquad (i=1,2,3) \qquad (5.7\text{-}2)$$

Los 3 conjuntos de soluciones $(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)})$, $(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)})$, $(v_1^{(3)}, v_2^{(3)}, v_3^{(3)})$ son componentes de 3 vectores unitarios. Si las raíces e_1, e_2, e_3 de (5.7-1) son distintas ($e_1 \neq e_2 \neq e_3$), entonces los 3 ejes principales son ortogonales entre sí. Si 2 de las strains principales son iguales, entonces la ecuación (5.7-2) tiene infinitas soluciones, de las cuales un número infinito de pares de vectores ortogonales pueden ser seleccionados y considerados como ejes principales. Si las 3 raíces son iguales, entonces cualquier conjunto de 3 vectores unitarios ortogonales puede ser considerado como principal.

(c) Un plano perpendicular a un eje principal es llamado *plano principal.*

(d) Si los ejes coordenados x_1, x_2, x_3 coinciden con los ejes principales, el tensor strain toma su forma canónica

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

(e) Podemos definir un tensor strain desviador (desviador de deformación) $e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{\alpha\alpha}\, \boldsymbol{\delta}_{ij}$. Tensores e'_{ij} y e_{ij} tienen las siguientes invariantes de strain independientes:

$$\begin{aligned} I_1 &= e_{ij}\delta_{ij}. & J_1 &= e'_{ij}\delta_{ij} = 0, \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}e_{ik}e_{ik}, & J_2 &= \tfrac{1}{2}e'_{ik}e'_{ik}, \\ I_3 &= \tfrac{1}{3}e_{ik}e_{km}e_{mi}. & J_3 &= \tfrac{1}{3}e'_{ik}e'_{km}e'_{mi}. \end{aligned} \qquad (5.7\text{–}3)$$

(f) El círculo de Mohr puede ser usado para el análisis gráfico de Strain. El elipsoide de Lamé es también aplicable a Strain.

5.8 Componentes de Strain infinitesimal en coordenadas polares.
Como indicamos en la sección 3.6, a menudo es deseable introducir coordenadas curvilíneas para referencia. Los componentes de Strain pueden ser representados en un marco de referencia local orientado en la dirección de las coordenadas curvilíneas. Por ejemplo en coordenadas polares r, θ, z, las componentes de strain pueden ser designados e_{rr}, $e_{\theta\theta}$, e_{zz} , $e_{r\theta}$, e_{rz}, $e_{z\theta}$, y se relacionan con e_{xx}, e_{yy} , e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx} por la ley de transformación tensorial, como en los casos de tensiones (ver secc 3.6).
Sin embargo, si los vectores desplazamiento se resuelven en componentes en las direcciones de las coordenadas curvilíneas, la relación strain-desplazamiento implica derivadas de los componentes desplazamiento y por lo tanto es influenciado por la curvatura del sistema de coordenadas. Las relaciones strain-desplazamiento pueden parecer bastante diferentes de las fórmulas correspondientes en coordenadas rectangulares.
Un método verdaderamente general para la manipulación de las coordenadas curvilíneas es el del análisis general de tensores. El lector lo puede consultar en tratados más avanzados. Una introducción se dá en los autores de *Foundations of Solid Mechanics,* (Fung, 1965, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.). Limitándonos en el presente libro a tensores cartesianos, trataremos cada conjunto de coordenadas curvilíneas de una manera ad hoc.
Ilustraremos 2 enfoques ad hoc en el caso de coordenadas cilíndricas polares: por transformación de coordenadas y por enumeración detallada. La primera se discutirá en esta sección, la última en la sección 5.9.
En el primer enfoque arrancamos con las relaciones entre las coordenadas polares r, θ, z y las coordenadas rectangulares x, y , z:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}, \\ y = r\sin\theta, & r^2 = x^2 + y^2, \end{cases} \qquad z = z. \tag{5.8–1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta, \tag{5.8–2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}. \tag{5.8–3}$$

Resulta que cualquier derivada con respecto a x e y en las ecuaciones cartesianas pueden ser transformadas en derivadas con respecto a r y θ como,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{5.8-4}$$

Ahora, en coordenadas polares, denotamos los componentes del vector desplazamiento ***u*** como u_r, u_θ , u_z como se muestra en Fig.5.5.

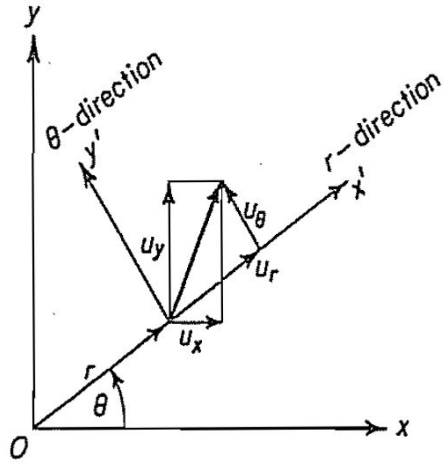


Figure 5.5 Displacement vector in polar coordinates.

Los componentes del mismo vector resueltos en las direcciones de las coordenadas rectangulares son u_x, u_y , u_z . De la figura, se ve que estos desplazamientos están relacionados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_x &= u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta, \\ u_y &= u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta, \\ u_z &= u_z. \end{aligned} \tag{5.8-5}$$

Los componentes del Strain en coordenadas polares se designan como

$$\begin{pmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{pmatrix} \tag{5.8-6}$$

Estos son realmente los componentes de strain referidos a un marco local de coordenadas rectangulares $x'y'z'$, con *x'* coincidiendo con la dirección de *r*, *y'* coincidiendo con la dirección de θ , y *z'* con la dirección de *z*. Los cosenos directores entre los 2 conjuntos de coordenadas son:

	x	y	z
r or x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
θ or y'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
z or z'	0	0	1

(5.8–7)

La ley de transformación del tensor se mantiene, y tenemos

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= e_{xx}\cos^2\theta + e_{yy}\sin^2\theta + e_{xy}\sin 2\theta,\\
e_{\theta\theta} &= e_{xx}\sin^2\theta + e_{yy}\cos^2\theta - e_{xy}\sin 2\theta,\\
e_{r\theta} &= (e_{yy} - e_{xx})\cos\theta\sin\theta + e_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta),\\
e_{zr} &= e_{zx}\cos\theta + e_{zy}\sin\theta,\\
e_{z\theta} &= -e_{zx}\sin\theta + e_{zy}\cos\theta,\\
e_{zz} &= e_{zz}.
\end{aligned} \tag{5.8–8}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
&e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \qquad e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right),\\
&e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{5.8–9}$$

Ahora, una sustitución de las ecuaciones (5.8-4) y (5.8-3) en la ecuación (5.8-9) produce

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin^2\theta\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right),\\
e_{yy} &= \sin^2\theta\frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos^2\theta\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}\right) + \cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right),\\
e_{xy} &= \frac{\sin^2\theta}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} - \frac{u_r}{r}\right) + \frac{\cos^2\theta}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right).
\end{aligned} \tag{5.8–10}$$

Sustituyendo éstos y resultados similares en la ecuación (5.8-8) y reduciendo, obtenemos

$$
\begin{aligned}
e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r},\\
e_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta},\\
e_{r\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right),\\
e_{zr} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right),\\
e_{z\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right),\\
e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}.
\end{aligned}
\qquad (5.8\text{–}11)
$$

Así, vemos que el método de transformación de coordenadas es tedioso pero sencillo. Note que las estructuras de las ecuaciones (5.8-11) y (5.8-9) son diferentes. En el lenguaje del análisis de tensores, la diferencia es causada por las diferencias en la métrica fundamental de los tensores de los 2 sistemas de coordenadas.
El lector deberá ser cuidadoso de nuevo con las notaciones de tensores para el strain, de modo que las componentes de la strain de corte $e_{r\theta}$, e_{rz}, $e_{z\theta}$, son la mitad de los que normalmente se dan como $\gamma_{r\theta}$, γ_{rz}, $\gamma_{z\theta}$, en la mayoría de los libros.

(5.6, 5.9* y 5.10* no entran según Cardona.)
*Quedan para completar si alguien lo quiere hacer.

5.9 Derivación directa de las relaciones de strain-desplazamiento en coordenadas polares.
Los resultados de la sección anterior pueden ser derivados directamente de la definición geométrica de los componentes de strain infinitesimales. Recordar que los componentes normales de strain supone la relación de cambio de longitud por unidad de longitud, mientras los componentes de corte de strain supone una mitad del cambio de un ángulo positivo. Para desplazamientos infinitesimales, esos cambios pueden verse directamente al dibujarlos como se muestran en la Fig. 5.6.

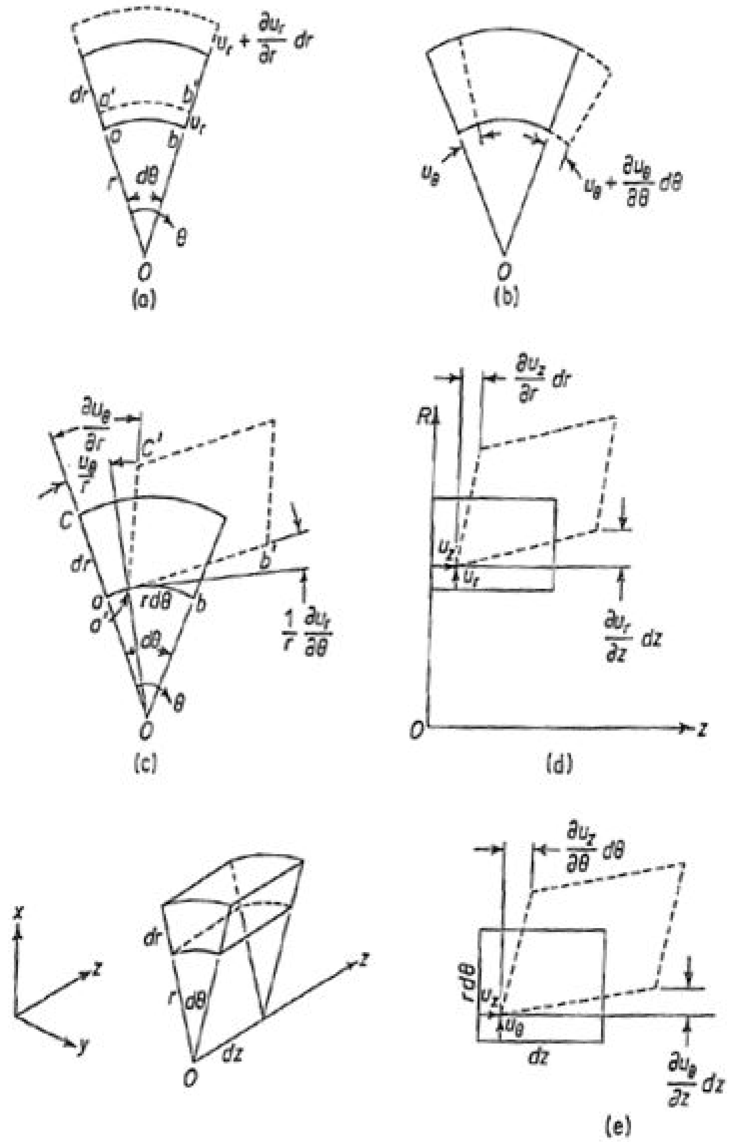


Fig. 5.6. Desplazamiento en coordenadas cilíndricas polares. (de E.E.Sechler, *Elasticity in Engineering*, Courtesy Mrs. Magaret Sechler.) Un diagrama de cuerpo libre de un elemento infinitesimal de material y 2 sistemas de coordenadas son mostrados en la esquina inferior izquierda. **(a)** Strain radial debida a la variación del campo desplazamiento radial en la dirección radial. **(b)** Strain circular debido a la variación del desplazamiento circular en la dirección circunferencial. **(c)** $\partial u_0 / \ \partial u_r$ y (1/r) $\partial u_r / \partial \boldsymbol{\theta}$ causan strain de corte $e_{r\theta}$. **(d)** $\partial u_z / \ \partial r$ y $\partial u_r / \partial z$ causan strain de corte e_{rz}. **(e)** (1/r) $\partial u_z / \partial \boldsymbol{\theta}$ y $\partial u_0 / \partial z$ causan strain de corte e_{z0}.

Considere primero el desplazamiento en la dirección *r*, u_r . Vemos de la Fig.5.6(a) que

$$e_{rr} = \frac{u_r + (\partial u_r/\partial r)dr - u_r}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \qquad (5.9\text{–}1)$$

De la misma figura, vemos también que un desplazamiento radial de un elemento circunferencial causa una elongación de ese elemento y, por lo tanto, una en la dirección $\boldsymbol{\theta}$. El elemento *ab*, que era originalmente de longitud $r\, d\boldsymbol{\theta}$, es desplazado a *a'b'* y se convierte en una longitud $(r+u_r)d\boldsymbol{\theta}$. La strain tangencial debida a este desplazamiento radial es, por lo tanto,