

## 4- Tensiones y ejes principales

Tensiones principales, tensiones invariantes, tensiones desviación y el corte máximo son conceptos importantes. Ellos nos dicen el estado de tensión en la forma numérica más simple. Ellos están directamente relacionados a la resistencia de los materiales. Uno tiene que evaluarlos con frecuencia; por lo tanto, en este capítulo nos dedicamos a ellos.

### 4.1 Introducción.

Podemos ver que de los 9 componentes de tensión, 6 son independientes, son necesarios para especificar el estado de interacción del material en cualquier punto dado de un cuerpo. Estos 9 componentes de tensión forman una matriz simétrica

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{ij} = \sigma_{ji}),$$

cuyos componentes se transforman como los componentes de un tensor bajo rotación de coordenadas. Más adelante mostraremos que debido a que el tensor tensión es simétrico, puede ser encontrado con respecto al cual la matriz de componentes de tensión puede ser reducida a una matriz diagonal de la forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

El conjunto particular de ejes coordenados con respecto a los cuales la matriz de tensión es diagonal son llamados *tensiones principales*. Los planos coordenados que determinan los ejes principales se llaman *planos principales*. Físicamente, cada una de las tensiones principales es una tensión normal actuando sobre un plano principal. Sobre cada plano principal, el vector tensión es normal al plano y no hay componentes de corte.

Conocer los ejes principales y tensiones principales es obviamente útil, porque ellos nos ayudan a visualizar el estado de tensión en cualquier punto. De hecho, el asunto es tan importante que al resolver problemas de mecánica del continuo, raramente nos detenemos antes de que la respuesta final se reduzca a los valores principales. Necesitamos saber, por lo tanto, no solamente que las tensiones principales existen y que pueden ser encontradas desde el principio, sino también los medios prácticos para encontrarlas. Demostraremos que la simetría de los tensores es una razón básica para la existencia de los ejes principales. Otros tensores simétricos, como el tensor tensión, por analogía y un proceso matemático idéntico, también deben tener ejes y valores principales. De hecho, la prueba que daremos para la posibilidad de reducir una matriz simétrica de valores reales en una principal no está

limitada a 3 dimensiones, puede ser extendido a N dimensiones. Encontraremos que tal extensión es de gran importancia cuando consideramos vibraciones mecánicas de cuerpos elásticos, o acústicos en general. En la teoría de la vibración, los valores principales corresponden a las frecuencias de vibración, y las coordenadas principales describen los modos normales de vibración. No discutiremos estos temas ahora, más bien, simplemente señalamos que el tema que estamos estudiando es más amplio que solamente la tensión.

Por otro lado, si un tensor no es simétrico, entonces ni la existencia de valores principales ni la posibilidad de reducción a una matriz diagonal debido a la rotación de coordenadas puede estar asegurado. La simetría es por lo tanto un gran activo.

Como una introducción, consideramos el caso 2-dimensional en gran detalle. Entonces procederemos al caso de 3 dimensiones en notación abreviada. Finalmente, usaremos las tensiones principales para estudiar algunas representaciones geométricas del estado de tensión, así como para introducir algunas definiciones adicionales.

#### 4.2 Estado plano de tensión.

Consideremos una situación física simplificada en el cual una delgada membrana es estirada por fuerzas que actúan sobre los bordes y situada en su plano. Un ejemplo se muestra en la Fig. 4.1. Dejaremos las caras  $z=h$  y  $z=-h$  libre (sin tensión). En este caso, podemos decir con seguridad que ya que los componentes de la tensión  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zy}$ ,  $\sigma_{zx}$ , son cero sobre la superficie, ellos son aproximadamente cero en toda la membrana porque la membrana es muy delgada; esto es,

$$\sigma_{zz}, \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = 0 \quad (4.2-1)$$

El estado de tensión en el cual estas ecuaciones se mantienen es llamado *estado plano de tensión* en el plano xy. Obviamente, en un plano de tensión estamos preocupados solamente en los componentes en la matriz simétrica

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

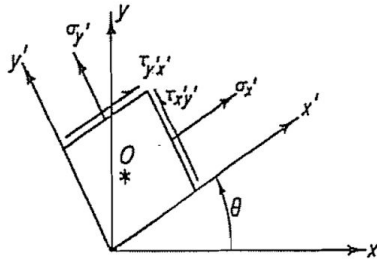
Aquí por claridad, escribimos  $\sigma_x$  por  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_y$  por  $\sigma_{yy}$ , y  $\tau_{xy}$  por  $\sigma_{xy}$ .

Consideramos una rotación de coordenadas de xy a x'y' y aplicamos los resultados de la secc 3.5 para encontrar los componentes de tensión en el nuevo marco de referencia:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, los cosenos directores entre los 2 sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares pueden ser expresados en términos de un único ángulo  $\theta$ . (Ver Fig. 4.2) La matriz de cosenos directores es

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2-2)$$



**Figure 4.2** Change of coordinates in plane state of stress.

Escribiendo  $x$ ,  $y$  y  $x'$ ,  $y'$  en lugar de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x'_1$ ,  $x'_2$ ;  $\sigma_x$  por  $\tau_{11}$ ;  $\tau_{xy}$  por  $\tau_{12}$ , etc. e identificando los cosenos directores  $\beta_{ij}$  de acuerdo a la ecuación (4.2-2), obtenemos, sustituyendo en la ecuación (3.5-3), los nuevos componentes:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \quad (4.2-3) \quad \sigma_{x'x'}$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \quad (4.2-4) \quad \sigma_{y'y'}$$

$$\tau_{x'y'} = (-\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (4.2-5) \quad \sigma_{x'y'}$$

Donde

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta),$$

Podemos escribir las ecuaciones anteriores como

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \quad (4.2-6)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta, \quad (4.2-7)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta. \quad (4.2-8)$$

cálculo auxiliar:

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

A partir de estas ecuaciones se deduce que

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y, \quad (4.2-9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial \theta} = 2\tau_{x'y'}, \quad \frac{\partial \sigma_{y'}}{\partial \theta} = -2\tau_{x'y'}, \quad (4.2-10)$$

$$\tau_{x'y'} = 0 \text{ when } \tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.2-11)$$

Las direcciones de los ejes  $x'$  e  $y'$  correspondientes a un valor particular de  $\theta$  dado por la ecuación (4.2-11) son llamados *direcciones principales*; los ejes  $x'$  e  $y'$  son llamados los *ejes principales*, y  $\sigma_{x'}$  y  $\sigma_{y'}$ , son llamados *tensiones principales*.

Si  $x'$ ,  $y'$  son ejes principales, entonces  $\tau_{x'y'} = 0$ , y las ecuaciones (4.2-10) muestran que  $\sigma_{x'}$  es un máximo o un mínimo con respecto a todas las opciones de  $\theta$ . De manera similar, para  $\sigma_{y'}$ . Sustituyendo  $\theta$  de la ecuación (4.2-11) en la ecuación (4.2-6) y (4.2-7), obtenemos el resultado

$$\begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad \Delta \quad (4.2-12)$$

Por otro lado, diferenciando  $\tau_{x'y'}$  y de la ecuación (4.2-8) con respecto a  $\theta$  e igualando la derivada a cero, encontramos un ángulo  $\theta$  en el cual  $\tau_{x'y'}$  alcanza un valor extremo. Se puede ver que este ángulo es  $\pm 45^\circ$  desde las direcciones principales dadas por la ecuación (4.2-11) y que el valor máximo de  $\tau_{x'y'}$  es

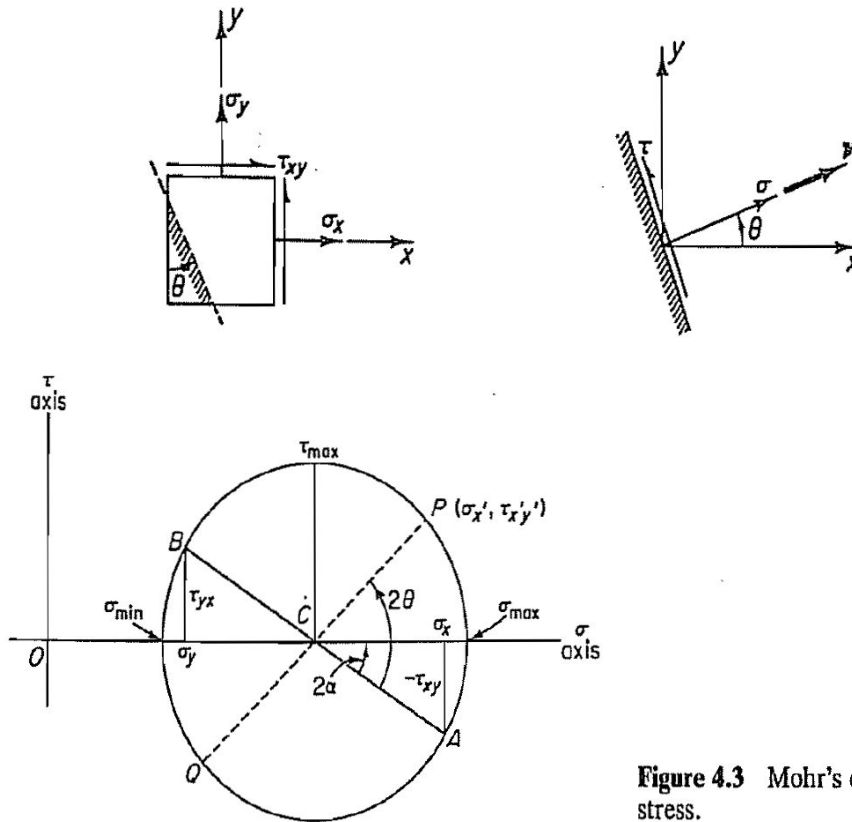
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad \Delta \quad (4.2-13)$$

Este es el máximo de la tensión de corte actuando sobre todos los planos paralelos al eje  $z$ . Cuando planos inclinados al eje  $z$  son considerados, algunos planos pueden tener un corte mayor a éste. (ver secc 4.8).

### 4.3 Círculo de MOHR para planos de tensión.

Una representación geométrica de las ecuaciones (4.2-6)-(4.2-13) fué dada por Otto Mohr. Un ejemplo se muestra en la Fig. 4.3. La tensión normal y de corte actuando sobre una superficie son dibujadas sobre un *plano de tensión* en el cual la abscisa (eje  $x$ ) representa la tensión normal y la ordenada (eje  $y$ ) la tensión de corte. Para la tensión (tracción) normal, una tensión es dibujada como positiva y una compresión como negativa. Para la tensión de corte, necesitamos una regla. Vamos a especificar (sólo para la construcción del círculo de mohr) que la tensión de corte es tomada como positiva en una cara de un elemento cuando sigue el sentido horario a partir del centro  $O$  del elemento (Fig. 4.2). Una tensión de corte generando un momento en dirección antihorario con respecto a  $O$  es considerada negativa.

Así,  $\tau_{xy}$  en la Fig. 4.4 es considerada negativa y  $\tau_{yx}$  es considerada positiva. Siguiendo esta regla especial, dibujamos en la Fig. 4.3, el punto A cuya abscisa es  $\sigma_x$  y cuya ordenada es  $-\tau_{xy}$ ; el punto B con abscisa  $\sigma_y$  y ordenada  $\tau_{yx}$ . Cuando unimos con una línea AB, que intersecta el eje  $\sigma_x$  en C. A continuación, con C como centro, dibujamos un círculo que pasa por A y B. Este es el círculo de Mohr.



**Figure 4.3** Mohr's circle for plane stress.

Para obtener las tensiones actuando sobre una superficie cuya normal forma un ángulo  $\theta$  con respecto al eje x en sentido antihorario, dibujamos un radio CP que forma un ángulo  $2\theta$  con respecto a la línea CA, como se muestra en la Fig. 4.3. Entonces, la abscisa de P da la tensión normal sobre esa superficie y la ordenada la tensión de corte. El punto centrado en el otro extremo de la línea PQ representa la tensión que actúa sobre la superficie cuya normal es formada para el ángulo  $\theta + \pi/2$  con el eje x.

Para probar que esta construcción es válida, notemos que el círculo de mohr está centrado en C, donde

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad (4.3-1)$$

y el radio

$$\overline{AC} = \overline{CP} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.3-2)$$

De la Fig. 4.3, vemos que la abscisa de P es

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \overline{OC} + \overline{CP} \cos (2\theta - 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + \overline{CP} (\cos 2\theta \cos 2\alpha + \sin 2\theta \sin 2\alpha).\end{aligned}\quad (4.3-3)$$

Pero vemos también del diagrama que

$$\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\overline{CP}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\overline{CP}}. \quad (4.3-4)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.3-3), obtenemos

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \quad (4.3-5)$$

el cual es exactamente el mismo resultado que la ecuación (4.2-6).

De manera similar, obtenemos la ordenada de P:

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= \overline{CP} \sin (2\theta - 2\alpha) = \overline{CP} (\sin 2\theta \cos 2\alpha - \cos 2\theta \sin 2\alpha) \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (4.3-6)$$

que concuerda con la ecuación (4.2-8) en magnitud pero difiere en signo. El signo es aportado por la convención adoptada para el círculo de Mohr. Un valor positivo  $\tau_{x'y'}$ , de acuerdo a la ecuación (4.2-8), sería para un momento en el sentido antihorario y habría sido trazado con ordenada negativa en el círculo de Mohr. Por lo tanto, todo concuerda y la validez del círculo de Mohr queda probada.

El círculo de Mohr da una visualización de cómo las tensiones varían con la orientación la superficie. Nos dice cómo localizar los ejes principales. Nos muestra que los planos en los cuales aparecen las tensiones de corte máximas están orientados a 45° de los planos principales. En la práctica, de todas maneras, un cálculo directo resolviendo la ecuación (4.5-3) en la sección 4.5 es el camino rápido para calcular las tensiones principales.

#### 4.4 Círculos de Mohr para estados de tensión en 3 dimensiones. (FALTA)

#### 4.5 Tensiones Principales.

En un estado general de tensión, el vector tensión que actúa sobre una superficie con normal  $\mathbf{v}$  depende de la dirección de  $\mathbf{v}$ . Dado un punto en un cuerpo, el ángulo entre el vector tensión y el vector normal  $\mathbf{v}$  varía con la orientación de la superficie. Mostraremos que podemos encontrar siempre una superficie orientada donde el vector normal es exactamente normal a ésta. De hecho, demostraremos que existen por lo menos 3 superficies mutuamente ortogonales que cumplen este requerimiento para cualquier punto en el cuerpo. Cada superficie es llamada *plano principal*, son normales a los *ejes principales*, y el valor de la tensión normal que actúa en el plano principal es una *Tensión principal*.

Sea  $\mathbf{v}$  un vector unitario en la dirección de un eje principal, y sea  $\sigma$  la tensión principal correspondiente. Entonces el vector tensión que actúa sobre la superficie normal a  $\mathbf{v}$  tiene componentes  $\sigma V_i$ , referidos a un conjunto de coordenadas cartesianas rectangulares  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Por otro lado, este mismo vector es dado por la expresión  $\tau_{ji} V_j$ , donde  $\tau_{ij}$  es el tensor tensión. Por lo tanto, escribiendo  $V_i = \delta_{ji} V_j$ , tenemos, al igualar estas 2 expresiones y pasando a un mismo lado,

$$(\tau_{ji} - \sigma \delta_{ji}) v_j = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.5-1)$$

Estas 3 ecuaciones, con  $i = 1, 2, 3$ , se deben resolver para  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$ .

Ya que  $\mathbf{v}$  es un vector unitario, debemos encontrar un conjunto de soluciones no triviales para los cuales  $V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 1$ . Así, la ecuación (4.5-1) plantea un problema de eigenvalores. Ya que  $\tau_{ij}$  es una matriz de valores reales y simétrica, sólo necesitamos recordar un resultado en la teoría de matrices para afirmar que *existen 3 tensiones principales de valor real y un conjunto de ejes principales ortonormal. Si las tensiones principales son todas positivas, todas negativas o mezcladas depende de si la forma cuadrática  $\tau_{ij} X_i X_j$  es definido positivo, negativo o incierto, respectivamente.* Sin embargo, debido a la importancia de estos resultados, los derivaremos a continuación.

El sistema de ecuaciones (4.5-1) tiene un conjunto de soluciones no triviales  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  si y sólo si el determinante de los coeficientes desaparece, es decir

$$|\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0. \quad (4.5-2)$$

Es una ecuación cúbica en  $\sigma$ ; sus raíces son las tensiones principales. Para cada valor de tensión principal, puede ser determinado un vector normal unitario  $\mathbf{v}$ .

Expandiendo la ecuación (4.5-1), tenemos

$$\begin{aligned} |\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| &= \begin{vmatrix} \tau_{11} - \sigma & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma \end{vmatrix} \\ &= -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0, \end{aligned} \quad (4.5-3)$$

donde

$$I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}, \quad (4.5-4)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{33} & \tau_{31} \\ \tau_{13} & \tau_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix}, \quad (4.5-5)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.5-6)$$

Por otro lado, si  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  son las raíces de la ecuación (4.5-3), pueden ser escritas como

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0, \quad (4.5-7)$$

Se puede ver que las siguientes relaciones entre las raíces y los coeficientes debe mantenerse:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (4.5-8)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (4.5-9)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (4.5-10)$$

ya que las tensiones principales caracterizan el estado físico de tensión en un punto, ellos son independientes de cualquier coordenada de referencia. Por lo tanto, la ecuación (4.5-7) es independiente de la orientación de las coordenadas de referencia. Pero la ecuación (4.5-7) es exactamente la misma que (4.5-3). Por lo tanto, la ecuación (4.5-3) y los coeficientes  $I_1, I_2, I_3$  son llamados *los invariantes* del tensor tensión con respecto a la rotación de coordenadas.

Ahora demostraremos que, por la simetría del tensor tensión, las 3 tensiones principales son todas reales y los 3 planos principales son mutuamente ortogonales. Estas importantes propiedades pueden establecerse cuando el tensor tensión es simétrico, es decir,

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}. \quad (4.5-11)$$

La prueba es la siguiente. Sean  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$  vectores principales en la dirección de los ejes principales, con componentes  $v_i^1, v_i^2, v_i^3$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que son soluciones de la ecuación (4.5-1) correspondientes a las raíces  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  respectivamente; entonces

$$\begin{aligned} (\tau_{ij} - \sigma_1\delta_{ij})v_j^1 &= 0, \\ (\tau_{ij} - \sigma_2\delta_{ij})v_j^2 &= 0, \\ (\tau_{ij} - \sigma_3\delta_{ij})v_j^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5-12)$$



Multiplicando la primera ecuación por  $\bar{v}_i^2$  y la segunda por  $\bar{v}_i^1$ , sumando sobre  $i$ , y restando las ecuaciones resultantes, obtenemos

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \bar{v}_i^2 v_i^1 = 0 \quad (4.5-13)$$

debido a la condición de simetría (4.5-11), el cual implica que

$$\tau_{ij}^1 \bar{v}_j^2 v_i^1 = \tau_{ji}^1 \bar{v}_j^2 v_i^1 = \tau_{ij}^2 \bar{v}_j^1 v_i^2, \quad (4.5-14)$$

la última ecuación es obtenida intercambiando los índices dummy  $i$  y  $j$ .

Ahora, si asumimos tentativamente que la ecuación (4.5-3) tiene raíces complejas, entonces, ya que los coeficientes en esa ecuación son valores reales, una raíz compleja conjugada también debe existir, y el conjunto de raíces puede escribirse como

$$\sigma_1 = \alpha + i\beta, \quad \sigma_2 = \alpha - i\beta, \quad \sigma_3$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma_3$  son números reales e  $i$  representa el número imaginario  $\sqrt{-1}$ . En este caso,

las ecuaciones (4.5-12) muestran que  $\bar{v}_j^1$  y  $\bar{v}_j^2$  (subíndice  $j$ ), son conjugados uno del otro y se pueden escribir como

$$\bar{v}_j^1 \equiv a_j + ib_j, \quad \bar{v}_j^2 \equiv a_j - ib_j.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{v}_j^1 v_j^2 &= (a_j + ib_j)(a_j - ib_j) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Se deduce de la ecuación (4.5-13) que  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2i\beta = 0$ . Entonces  $\beta = 0$ . Pero esta es una contradicción de la suposición original que las raíces son complejas. Así, la suposición de la existencia de raíces complejas es insostenible, y las raíces  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  son todas reales.

Cuando  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ , la ecuación (4.5-13) y las ecuaciones similares implican que

$$\bar{v}_i^1 v_i^2 = 0, \quad \bar{v}_i^2 v_i^3 = 0, \quad \bar{v}_i^3 v_i^1 = 0; \quad (4.5-15)$$

es decir, los vectores principales son mutuamente ortogonales unos con otros. Si

$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ ,  $\bar{v}_i^3$  será fijo pero podemos determinar un número infinito de pares de vectores

$\bar{v}_i^1$  y  $\bar{v}_i^2$  ortogonales a  $\bar{v}_i^3$ . Si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  entonces cualquier conjunto de ejes ortogonales podrían tomarse como ejes principales.

Si los ejes de referencia  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  son elegidos coincidentes con los ejes principales, la matriz de componentes de tensión se convierte

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (4.5-16)$$

#### 4.6 Tensiones de corte.

Hemos visto que sobre un elemento de superficie con un vector normal  $\mathbf{v}$  apuntando hacia afuera (con componentes  $v_i$ ), actúa una tracción  $\mathbf{T}$  (con componentes  $T_i = \tau_{ji}v_j$ ). Los componentes de  $\mathbf{T}$  en la dirección de  $\mathbf{v}$  es la tensión normal actuando en el elemento de superficie. Dejamos esta tensión normal denotada por  $\sigma_{(n)}$ . Ya que el componente de un vector en la dirección de un vector unitario es dado por el producto escalar de 2 vectores, obtenemos

$$\sigma_{(n)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \tau_{ji}v_i v_j. \quad (4.6-1)$$

Por otro lado, ya que el vector  $\mathbf{T}$  puede descomponerse en 2 componentes ortogonales  $\sigma_{(n)}$  y  $\boldsymbol{\tau}$ , donde  $\boldsymbol{\tau}$  denota la tensión tangente de corte a la superficie (ver Fig. 4.5), vemos que la magnitud de la tensión de corte sobre una superficie teniendo la normal  $\mathbf{v}$  está dado por la ecuación

$$\tau^2 = |\mathbf{T}|^2 - \sigma_{(n)}^2. \quad (4.6-2)$$

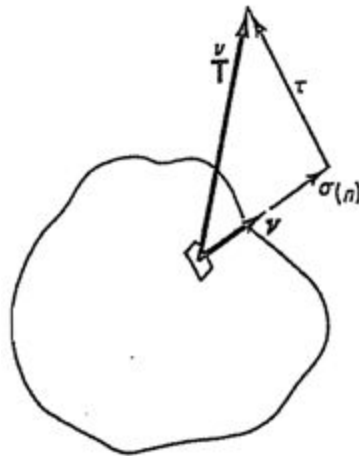


Figure 4.5 Notations.

Dejamos que los ejes principales sean elegidos como los ejes coordenados, y sean  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  las tensiones principales. Entonces

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_1 v_1, & T_2 &= \sigma_2 v_2, & T_3 &= \sigma_3 v_3, \\ |\mathbf{T}|^2 &= (\sigma_1 v_1)^2 + (\sigma_2 v_2)^2 + (\sigma_3 v_3)^2, \end{aligned} \quad (4.6-3)$$

y de la ecuación (4.6-1),

$$\sigma_{(n)} = \sigma_1 v_1^2 + \sigma_2 v_2^2 + \sigma_3 v_3^2, \quad (4.6-4)$$

$$\sigma_{(n)}^2 = [\sigma_1 v_1^2 + \sigma_2 v_2^2 + \sigma_3 v_3^2]^2. \quad (4.6-5)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.6-2) y observando que

$$(v_1)^2 - (v_1)^4 = (v_1)^2[1 - (v_1)^2] = (v_1)^2[(v_2)^2 + (v_3)^2], \quad (4.6-6)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \tau^2 = & (v_1)^2(v_2)^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (v_2)^2(v_3)^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \\ & + (v_3)^2(v_1)^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2. \end{aligned} \quad (4.6-7)$$

Por ejemplo, si  $v_1=v_2=1/\sqrt{2}$  y  $v_3=0$ , entonces  $\tau = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$ .

Falta:

**4.7** Tensor desviación de tensión.

**4.8** Tensiones de Lamé