

7- Ecuaciones constitutivas

Las 3 ecuaciones constitutivas más utilizadas comúnmente serán presentadas. Ellas son abstracciones matemáticas y son dadas aquí en el contorno más pequeño para exhibir sus similitudes y diferencias. Pueden simplificarse mucho si el material es isotrópico. Dado que el concepto de isotropía es muy importante y se pasa por lo general demasiado levemente por los principiantes, nosotros dedicaremos el cap 8 a ello. Las propiedades de materiales reales serán discutidos en el cap 9.

7.1 Especificación de las propiedades de los materiales.

Las propiedades de los materiales son especificados por las ecuaciones constitutivas. Existe una amplia variedad de materiales. Así que, no debe sorprendernos que haya una gran cantidad de ecuaciones constitutivas describiendo una variedad casi infinita de materiales. Lo que es sorprendente, es el hecho de que 3 relaciones den una buena descripción de las propiedades mecánicas de muchos materiales a nuestro alrededor, a saber, los fluidos no viscosos, los fluidos viscosos Newtonianos, y el sólido perfectamente elástico. Describiremos esas relaciones idealizadas en este capítulo, pero nos apresuramos a añadir que las propiedades de los materiales reales difieren más o menos de las propiedades descritas por estas leyes idealizadas. Cuando las diferencias son grandes, hablamos de gases reales, fluidos viscosos no Newtonianos, sólidos viscoelásticos, plasticidad, etc., los cuales consideramos en el cap 9.

Una ecuación que describe una propiedad de un material es llamado *ecuación constitutiva* de ese material. Una relación tensión-deformación describe una propiedad mecánica de un material y es por lo tanto una ecuación constitutiva. Nuestro principal objetivo en este capítulo es discutir la relación tensión-deformación. Hay otras ecuaciones constitutivas, tales como las que describen las características de la transferencia de calor, resistencia eléctrica, etc., pero no son nuestra preocupación inmediata.

7.2 El fluido no viscoso.

Un fluido no viscoso es un fluido para el cual el tensor tensión es isotrópico, es decir, de la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad \triangle (7.2-1)$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker y p es un escalar llamado *presión*. En forma matricial, los componentes de tensión en un fluido no viscoso puede ser visto como

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (7.2-2)$$

La presión p en un gas ideal está relacionado con la densidad ρ y la temperatura T por la ecuación de estado

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (7.2-3)$$

donde R es la constante de gas. Para un gas real o un líquido, a menudo es posible obtener una ecuación de estado

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (7.2-4)$$

Una anomalía existe en el caso de un *fluido incompresible*, para el cual la ecuación de estado es simplemente

$$\rho = \text{constante}. \quad (7.2-5)$$

Así, la presión p está a la izquierda como una variable arbitraria para un fluido incompresible. Es determinado solamente por las ecuaciones de movimiento y las condiciones de borde. Por ejemplo, un fluido incompresible en un cilindro de una prensa hidráulica puede asumir cualquier presión, dependiendo de la fuerza aplicada sobre el pistón.

Ya que la hidrodinámica se ocupa principalmente de fluidos incompresibles, veremos que la presión es controlada por las condiciones de borde, mientras que las variaciones en la presión (el gradiente de presión) son calculadas por las ecuaciones de movimiento.

El aire y el agua pueden ser tratados como no viscosos en muchos problemas. Por ejemplo, en problemas de las mareas alrededor de la tierra, olas en el océano, el vuelo de un aeroplano, el flujo de un chorro de agua, y la combustión en un motor de automóvil. Se obtienen excelentes resultados cuando se ignora la viscosidad de un medio y se lo trata como un fluido no viscoso. Por otro lado, hay problemas importantes en los cuales la viscosidad del medio, aunque sea pequeña, no debe ser descuidada. Entre esos problemas están los de determinar la fuerza de arrastre que actúa sobre un aeroplano, si un flujo es turbulento o laminar, el calentamiento de una nave espacial al reingresar, y el enfriamiento de un motor de automóvil.

7.3 Fluido Newtoniano.

Un fluido newtoniano es un fluido viscoso para el cual la tensión de corte es linealmente proporcional a la tasa de deformación. Para un fluido newtoniano, la relación tensión-deformación está especificada por la ecuación

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathcal{D}_{ijkl}V_{kl}. \quad \Delta \quad (7.3-1)$$

donde σ_{ij} es el tensor tensión, V_{kl} es el tensor tasa de deformación, \mathcal{D}_{ijkl} es el tensor de coeficientes de viscosidad del fluido, y p es la presión estática. El término $-p\delta_{ij}$ representa el estado de tensión posible en un fluido en reposo (cuando $V_{kl} = 0$). La presión estática se supone que depende de la densidad y temperatura del fluido, de acuerdo con una ecuación

de estado. Para fluidos newtonianos, asumimos que los elementos del tensor \mathcal{D}_{ijkl} pueden depender de la temperatura, pero no de la tensión o la deformación. El tensor \mathcal{D}_{ijkl} , de rango 4, tiene $3^4=81$ elementos. No todas esas constantes son independientes. Un estudio de los números teóricamente posible, de elementos independientes puede ser llevado a cabo examinando las propiedades de simetría de los tensores σ_{ij} , V_{kl} y la simetría que puede existir en la constitución atómica del fluido. No lo discutiremos aquí, porque no conocemos ningún fluido que haya sido examinado con tal detalle que tenga todas las constantes en el tensor \mathcal{D}_{ijkl} determinadas. Los fluidos deben ser isotrópicos, para los cuales la estructura de \mathcal{D}_{ijkl} se simplifica en gran medida, como veremos en breve. Los lectores interesados en la estructura general de \mathcal{D}_{ijkl} deberían leer la secc 7.4 y las referencias a las que hace referencia, ya que el tensor de constantes elástica C_{ijkl} tiene una estructura similar.

Si un fluido es isotrópico, es decir, si el tensor \mathcal{D}_{ijkl} tiene la misma matriz de componentes en cualquier sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, entonces \mathcal{D}_{ijkl} puede ser expresado en término de 2 constantes independientes λ y μ (ver secc 8.4) como

$$\mathcal{D}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (7.3-2)$$

y obtenemos

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu V_{ij}. \quad \triangle (7.3-3)$$

Una contracción de la ecuación (7.3-3) da

$$\sigma_{kk} = -3p + (3\lambda + 2\mu) V_{kk}. \quad (7.3-4)$$

Si se supone que la tensión normal media $\frac{1}{3} \sigma_{kk}$ es independiente de la tasa de dilatación V_{kk} , entonces debemos hacer

$$3\lambda + 2\mu = 0; \quad (7.3-5)$$

Así, la ecuación constitutiva se convierte

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3}\mu V_{kk} \delta_{ij}. \quad \triangle (7.3-6)$$

Esta formulación se debe a George G. Stokes, y un fluido que obedece la ecuación (7.3-6) es llamado fluido Stokes, para el cual una constante material μ , el coeficiente de viscosidad, basta para definir su propiedad. Si un fluido es *incompresible*, entonces $V_{kk} = 0$, y obtenemos la ecuación constitutiva para un *fluido viscoso incompresible*:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu V_{ij}. \quad \triangle (7.3-7)$$

Si $\mu=0$, obtenemos la ecuación constitutiva de un *fluido no viscoso*:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}. \quad (7.3-8)$$

La presencia del término de presión estática p marca una diferencia fundamental entre mecánica de fluidos y elasticidad. Para acomodar esta nueva variable, a menudo se asume que existe una *ecuación de estado* que relaciona la presión p , la densidad ρ y la temperatura absoluta T , es decir,

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (7.2-9)$$

Por ejemplo, para un gas ideal, se aplica la ecuación (7.2-3); para un gas real puede ser usada la ecuación (9.1-3). Para el agua dulce y el agua de mar, Tait (1888) y Li (1967) obtuvieron sus ecuaciones de estado (referencia al final del cap 9). Un fluido *incompresible* especificado por la ecuación (7.2-5) es de nuevo un caso especial, para el cual la presión p es una variable a ser determinada por las ecuaciones de movimiento y condiciones de borde.

Los fluidos que obedecen las ecuaciones (7.3-1) y (7.3-3), cuyos efectos de viscosidad están representados por términos que son lineales en los componentes de la tasa de deformación, son llamados *fluidos Newtonianos*. Los fluidos que se comportan de otra manera decimos que son *No Newtonianos*. Por ejemplo, un fluido cuyo coeficiente de viscosidad depende de los invariantes básicos de V_{ij} es no newtoniano.

7.4 Sólido elástico Hookeano.

Un sólido elástico Hookeano es un sólido que obedece la ley de Hooke, el cual establece que el tensor tensión es linealmente proporcional al tensor deformación, es decir,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}, \quad \Delta \quad (7.4-1)$$

donde σ_{ij} es el tensor tensión, e_{kl} es el tensor deformación y C_{ijkl} es un tensor de constantes elásticas, o módulo, que son independientes de la tensión o deformación. La cualidad tensorial de las constantes C_{ijkl} siguen la regla del cociente (secc 2.9).

Como un tensor de rango 4, tiene $3^4=81$ elementos; pero en la medida que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, debemos tener

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (7.4-2)$$

Además, puesto que $e_{kl} = e_{lk}$ y en la ecuación (7.4-1) los índices k y l son mudos para la contracción, siempre podemos simetrizar con respecto a k y l sin alterar la suma. Así, podemos escribir siempre la ecuación (7.4-1) como

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{ijlk})e_{kl} = C'_{ijkl}e_{kl}, \quad (7.4-3)$$

con la propiedad

$$C'_{ijkl} = C'_{ijlk} \quad (7.4-4)$$

Si se ha hecho tal simetrización, entonces bajo las condiciones (7.4-2) y (7.4-4), tiene un máximo de 36 constantes independientes. Que el número total de constantes elásticas no puede ser mayor que 36 puede ser visto si recordamos que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ es y $e_{ij} = e_{ji}$, hay sólo 6 elementos independientes en el tensor tensión σ_{ij} y 6 en la deformación (strain) e_{ij} . Por lo

tanto, si cada elemento de σ_{ij} está linealmente relacionado a todos los elementos de e_{ij} , o viceversa, habrá 6 ecuaciones con 6 constantes cada una y, por lo tanto, 36 constantes en total.

Para la mayoría de sólidos elásticos, el número de constantes elásticas independientes es más pequeño que 36. La reducción es causada por la existencia de simetría material.

La mayor reducción en el número de constantes elásticas es obtenida cuando el material es isotrópico, es decir, cuando las propiedades elásticas son idénticas en todas las direcciones. Más precisamente, la isotropía para un material está definida por el requisito de que la matriz de números C_{ijkl} tenga exactamente los mismos valores, independientemente de cómo se oriente el sistema de coordenadas. Debido a la importancia del concepto de isotropía, la discutiremos con mayor detalle en el cap 8. Demostrará que para cualquier material isotrópico, exactamente 2 constantes elásticas independientes caracterizan el material. La ley de Hooke para un sólido elástico isotrópico es

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \blacktriangle (7.4-5)$$

Las constantes λ y μ son llamadas *constantes de Lamé*. En literatura ingenieril, la segunda constante de Lamé es escrita prácticamente siempre como G y es identificada como el *módulo de corte*.

Será útil escribir las ecuaciones (7.4-5) *in extenso*. Con x , y , y z como coordenadas cartesianas rectangulares, tenemos la ley de Hooke para un sólido elástico isotrópico:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{zz} \\ \sigma_{xy} &= 2Ge_{xy}, \quad \sigma_{yz} = 2Ge_{yz}, \quad \sigma_{zx} = 2Ge_{zx} \end{aligned} \quad \blacktriangle (7.4-6)$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas para e_{ij} . Pero habitualmente, la forma inversa se escribe como

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], & e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}, \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], & e_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz}, \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], & e_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx} = \frac{1}{2G} \sigma_{zx}. \end{aligned} \quad \blacktriangle (7.4-7)$$

O en notación indicial,

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij}. \quad \blacktriangle (7.4-8)$$

Las constantes E , ν y G están relacionadas con las constantes de Lamé λ y G (μ). E es llamado *módulo de Young*, ν es llamado coeficiente de Poisson, y G es llamado el *módulo de elasticidad en corte*, o *módulo de corte*. En el caso unidimensional, σ_{xx} es el único componente de tensión que no desaparece, hemos usado la versión simplificada de estas ecuaciones en el cap 5, (5.1-3) y (5.1-4).

Es muy fácil de recordar la ecuación (7.4-7). Recordar el caso unidimensional (5.1-3). Aplicarlo al bloque simple como se ilustra en la Fig. 1.9. Cuando el bloque es comprimido en la dirección Z, se acorta por una deformación

$$\mathbf{e}_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} \quad (7.4-9)$$

Mientras tanto, los lados laterales del bloque se hincharán un poco. Para un material lineal, la deformación abultada es proporcional a σ_{zz} y está en un sentido opuesto a la tensión: Una compresión induce una hinchazón (pandeo) lateral: una tensión induce encogimiento lateral. Por lo tanto, escribimos

$$\mathbf{e}_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}, \quad \mathbf{e}_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \quad (7.4-10)$$

Este es el caso en el cual σ_{zz} es la única tensión que no desaparece. Si el bloque es sometido también a σ_{xx} , σ_{yy} , como se muestra en la Fig. 3.1, y si el material es isotrópico y lineal (de modo que las causas y efectos son linealmente superpuestos), entonces la influencia de σ_{xx} sobre \mathbf{e}_{yy} , \mathbf{e}_{zz} y σ_{yy} debe ser la misma que la influencia de σ_{zz} sobre \mathbf{e}_{xx} , \mathbf{e}_{yy} . Por lo tanto, la ecuación (7.4-9) se convierte

$$\mathbf{e}_{zz} = -\frac{1}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

el cual es una de las ecuaciones (7.4-7), y de manera similar para las otras ecuaciones en (7.4-7). Para las tensiones de corte y las strain de corte, cada componente produce su propio efecto.

Otras formas de la ley de Hooke.

Para un *material elástico isotrópico*, la ley de Hooke puede indicarse en la forma

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 3K\mathbf{e}_{\alpha\alpha}, \quad (7.4-11)$$

$$\sigma'_{ij} = 2G\mathbf{e}'_{ij}, \quad (7.4-12)$$

donde K y G son constantes y σ'_{ij} y \mathbf{e}'_{ij} son desviación de tensión y desviación de deformación (strain), respectivamente, es decir,

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad (7.4-13)$$

$$\mathbf{e}'_{ij} = \mathbf{e}_{ij} - \frac{1}{3} \mathbf{e}_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad (7.4-14)$$

Hemos visto antes que $\frac{1}{3} \sigma_{\alpha\alpha}$ es la tensión media en un punto y que, si la tensión era infinitesimal, $\mathbf{e}_{\alpha\alpha}$ es el cambio en el volumen por unidad de volumen: ambos son invariantes. Así, la ecuación (7.4-11) establece que el cambio en el volumen del material es proporcional a la tensión media. En el caso especial de la presión hidrostática, es decir, cuando

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \end{aligned}$$

tenemos $\sigma_{\alpha\alpha} = -3p$, y la ecuación (7.4-11) se puede escribir, en el caso de una deformación infinitesimal, con V y ΔV denotando volumen y cambio de volumen respectivamente, como

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K} \quad \blacktriangle (7.4-15)$$

Así, el coeficiente K es llamado adecuadamente el *módulo de volumen* (*bulk modulus*) del material.

La desviación de deformación \mathbf{e}'_{ij} describe una deformación sin ningún cambio en volumen. La desviación de tensión es simplemente proporcional a la desviación de deformación. Las relaciones entre las constantes elásticas son:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{G(E-2G)}{3G-E} = K - \frac{2}{3}G = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ &= \frac{3K\nu}{1+\nu} = \frac{3K(3K-E)}{9K-E}, \\ G &= \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu} = \frac{3}{2}(K-\lambda) = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = \frac{3KE}{9K-E}, \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} = \frac{\lambda}{(3K-\lambda)} = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{3K-2G}{2(3K+G)} = \frac{3K-E}{6K}, \\ E &= \frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G} = \frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu} = \frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda} \\ &= 2G(1+\nu) = \frac{9KG}{3K+G} = 3K(1-2\nu), \\ K &= \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu} = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{GE}{3(3G-E)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \\ \frac{G}{\lambda+G} &= 1-2\nu, \quad \frac{\lambda}{\lambda+2G} = \frac{\nu}{1-\nu}. \end{aligned} \quad (7.4-16)$$

Cuando la relación de Poisson ν es $1/4$, $\lambda = G$. Cuando ν es $1/2$, entonces $G = E/3$, $1/K = 0$, y $\mathbf{e}_{\alpha\alpha} = 0$.

7.5 Efecto de la temperatura.

En las secciones anteriores, las relaciones tensión-deformación (stress-strain) o tasa de tensión (stress-rate) están determinadas a una determinada temperatura. La viscosidad de un fluido, sin embargo, varía con la temperatura al igual que el módulo

elástico de un sólido. En otras palabras, los coeficientes D_{ijkl} en la ecuación (7.3-1) y C_{ijkl} en (7.4-1) son funciones de la temperatura y están determinadas bajo un experimento isotérmico.

El calor induce expansión térmica y efectos de estado de tensión cero de un sólido o líquido. Si un cuerpo no tiene tensión a una temperatura T_0 , y la tensión permanece en cero cuando la temperatura cambió a T , entonces la ley lineal

$$\mathbf{e}_{ij} = \alpha_{ij} (T - T_0) \quad (7.5-1)$$

establece que el cuerpo tendrá una deformación \mathbf{e}_{ij} relativa al estado en T_0 .

Inversamente, si la configuración del cuerpo es tan contenido que $\mathbf{e}_{ij} = 0$ cuando la temperatura cambia de T_0 a T , entonces una tensión

$$\sigma_{ij} = -\beta_{ij} (T - T_0) \quad (7.5-2)$$

es inducida en el cuerpo. α_{ij} y β_{ij} son tensores simétricos de constantes materiales medidos a cero tensión y cero deformación, respectivamente, a temperatura T_0 .

Cuando (7.5-2) es combinado con la ley de Hooke, obtenemos la *ley de Duhamel-Neumann* para termoelasticidad:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0) \quad \blacktriangle (7.4-15)$$

Para un material isotrópico, el tensor de segundo orden β_{ij} debe ser también isotrópico. Resulta que β_{ij} debe ser de la forma $\beta \delta_{ij}$ (ver sección 8.2). Por lo tanto, para un sólido Hookeano isotrópico,

$$\sigma_{ij} = \lambda \mathbf{e}_{kk} \delta_{ij} + 2G \mathbf{e}_{ij} - \beta (T - T_0) \delta_{ij} \quad (7.5-4)$$

Aquí, λ y G son constantes de Lamé medidas a temperatura constante.

7.6 Materiales con comportamiento mecánico más complejo.

Como hemos dicho antes, los fluidos no viscosos, los fluidos Newtonianos, y los sólidos elásticos Hookeanos son abstracciones. Ningún material real conocido se comporta exactamente como uno de ellos, aunque en rangos limitados de temperatura, tensión, y deformación (strain), algunos materiales pueden seguir algunas de estas leyes bastante bien.

Los materiales reales pueden tener un comportamiento más complejo. Para fluidos, pinturas y barnices domésticos son No-Newtonianos, como lo son la arcilla húmeda y el barro. La mayoría de las soluciones coloidales son No-Newtonianos también. Para los sólidos, la mayoría de los materiales estructurales son, afortunadamente, Hookeanos en el rango útil de tensiones y deformaciones; pero más allá de ciertos límites, la ley de Hooke ya no se aplica. Por ejemplo, prácticamente todos los materiales sólidos pueden ser quebrados (fracturados) de una manera u otra, bajo

tensiones suficientemente grandes o deformaciones, pero romper es desobedecer la ley de Hooke.

Sin embargo, la vasta literatura en mecánica del continuo está centrada acerca de estos materiales idealizados, y los resultados han sido notablemente útiles. Discutiremos comportamientos más complejos de líquidos y sólidos en el cap 9, pero dejaremos el tratamiento matemático de los No-Newtoniano, elásticos no lineales o sólidos inelásticos para tratados especializados.