

6- Campos de velocidad y condiciones de compatibilidad

Consideraremos el campo de velocidad y definiremos el tensor tasa de deformación (strain-rate). Entonces estudiaremos la cuestión de compatibilidad de los componentes strain o los componentes de tasa de deformación.

6.1 Campos de velocidad.

Para el estudio del flujo del fluido, en general estamos interesados en el campo velocidad, es decir, la velocidad de cada partícula en el cuerpo del fluido. Nos referimos a la ubicación de cada partícula de fluido en un marco de referencia O-xyz; entonces el campo de flujo es descrito por el campo vector velocidad $\mathbf{v}(x,y,z)$, que define la velocidad en todos los puntos (x,y,z) . En términos de componentes, el campo velocidad está expresado por las funciones

$$u(x,y,z); v(x,y,z); w(x,y,z),$$

o si usamos notación indicial, como $v_i(x_1, x_2, x_3)$.

Para un flujo continuo, consideremos las funciones continuas y diferenciables $v_i(x_1, x_2, x_3)$. Sin embargo, existen ocasiones en las que hay que estudiar la relación entre velocidades de los puntos vecinos. Sean las partículas P y P' situadas instantáneamente como x_i y $x_i + dx_i$, respectivamente. La diferencia en las velocidades de esos 2 puntos es:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad (6.1-1)$$

donde la derivada parcial $\partial v_i / \partial x_j$ es evaluada en la partícula P . Ahora,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (6.1-2)$$

Definimos el tensor tasa de deformación v_{ij} y el tensor spin Ω_{ij} como

$$V_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.1-3)$$

$$\Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (6.1-4)$$

Entonces

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = V_{ij} - \Omega_{ij}. \quad (6.1-5)$$

Es evidente que V_{ij} es simétrico y Ω_{ij} es antisimétrico; es decir,

$$V_{ij} = V_{ji}, \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \quad (6.1-6)$$

Por lo tanto, el tensor Ω_{ij} tiene solamente 3 elementos independientes, y existe un vector $\mathbf{\Omega}$ dual a Ω_{ij} , que es,

$$\Omega_k \equiv \epsilon_{ijk} \Omega_{ij}, \text{ es decir, } \mathbf{\Omega} \equiv \text{curl } \mathbf{v} \quad (\text{rot } \mathbf{v}) \quad (6.1-7)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de permutación. El vector $\mathbf{\Omega}$ es llamado vector de vorticidad. Las ecuaciones (6.1-7) y (6.1-1) son similares a las ecuaciones (5.5-3) y (5.5-5). Sus interpretaciones geométricas son también similares. Por lo tanto, el análisis del campo de velocidad es muy parecido al análisis de un campo de deformación infinitesimal. En consecuencia, si multiplicamos V_i por un intervalo infinitesimal de tiempo dt , el resultado es un desplazamiento infinitesimal $u_i = V_i dt$. Por lo tanto, todo lo que hemos aprendido acerca de un campo de deformaciones infinitesimal puede ser inmediatamente extendido correspondientemente a la *tasa de cambio* de la deformación, con la palabra *velocidad* reemplazando la palabra *desplazamiento*.

6.2 La condición de compatibilidad.

Supongamos que tenemos un conjunto de 2 ecuaciones con derivadas parciales de una función desconocida $u(x,y)$, como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + 3y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2. \quad (6.2-1)$$

Conocemos que esas ecuaciones no tienen solución: tenemos demasiadas ecuaciones que son mutuamente inconsistentes. La inconsistencia puede ser clarificada si calculamos la segunda derivada (cruzadas) de las 2 ecuaciones: el primer campo 3 y el segundo $2x$, no son iguales.

Por lo tanto, cuando las ecuaciones en derivadas parciales son dadas, surge la ecuación de integrabilidad. Las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y) \quad (6.2-2)$$

no puede ser integrada a menos que la condición

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (6.2-3)$$

sea satisfecha. Esta condición, una *condición de integrabilidad*, es también llamada *ecuación de compatibilidad*.

Ahora consideremos un estado plano de deformación, como el que puede existir en un propelente sólido en el propulsor de un cohete. Suponga que un ingeniero construye un modelo de laboratorio y obtuvo, por varios instrumentos medidores de deformación, equipamiento fotoelástico, láser holográfico combinado con análisis de patrones de Moire, etc, un conjunto de datos de deformación que pueden ser presentados como

$$e_{xx} = f(x, y), \quad e_{yy} = g(x, y), \quad e_{xy} = h(x, y), \quad e_{zz} = e_{xx} = e_{xy} = 0. \quad (6.2-4)$$

se plantea la ecuación de si los datos son auto-consistentes. Podría la consistencia ser chequeada? Y si son consistentes, podemos calcular los desplazamientos $u(x, y)$ y $v(x, y)$ a partir de esos datos?

Si la deformación es pequeña, la última ecuación puede ser formulada como una ecuación matemática integrando la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f(x, y), \quad (= e_{xx}) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= g(x, y), \quad (= e_{yy}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 2h(x, y), \quad (= 2e_{xy}) \end{aligned} \quad (6.2-5)$$

Ahora si derivamos la primera ecuación con respecto a y 2 veces, la segunda con respecto a x 2 veces, y la tercera con respecto a x y a y una vez, obtenemos

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (6.2-6)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad (6.2-7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.2-6) en (6.2-7), tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad (6.2-8)$$

Los datos experimentales satisfacen esta ecuación. Si no, los datos no son consistentes y debe haber habido errores.

Expresando los resultados anteriores en términos de componentes de strain, tenemos

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.2-9)$$

la cual es la ecuación de compatibilidad para un estado de strain plano.

Un criterio similar es aplicado a un campo de velocidad de un fluido en 2D. Los componentes del tensor tasa de deformación puede ser medido, por ejemplo, con el método de birrefringencia óptica. O un conjunto de razones (derivadas) strain pueden ser obtenidas teóricamente. Para chequear la consistencia, debemos tener

$$\frac{\partial^2 V_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 V_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.2-10)$$

donde V_{ij} son los componentes del tensor tasa de deformación. (Vea secc. 6.1). En fluidos mecánicos, sin embargo, esta ecuación se conoce como la *condición de integrabilidad*. Así, compatibilidad e integrabilidad significan la misma cosa.

6.3 Compatibilidad de componentes strain en 3D.

Extendiendo lo discutido en la sección previa a 3 dimensiones, cómo integramos las ecuaciones diferenciales

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad (6.3-1)$$

para determinar u_i ?

Puesto que hay 6 ecuaciones para 3 funciones desconocidas u_i , el sistema de ecuaciones (6.3-1) tendrá una única solución sólo si las funciones e_{ij} satisfacen las condiciones de compatibilidad.

Por derivación de la ecuación anterior obtenemos

$$e_{ij,kl} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl}) \quad (6.3-2)$$

donde los índices k y l seguidos a la coma indican derivadas parciales sucesivas con respecto a x_k y x_l . Intercambiando subíndices, obtenemos

$$\begin{aligned} e_{kl,ij} &= \frac{1}{2} (u_{k,lij} + u_{l,kij}) \\ e_{jl,ik} &= \frac{1}{2} (u_{j,lik} + u_{l,jik}) \\ e_{ik,jl} &= \frac{1}{2} (u_{i,kjl} + u_{k,ijl}) . \end{aligned}$$

De aquí verificamos que a la vez

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 . \quad \blacktriangle (6.3-3)$$

Esta es la *ecuación de compatibilidad* de St. Venant para deformaciones infinitesimales.

De las 81 ecuaciones representadas por la ecuación (6.3-3), solamente 6 son independientes. El resto son identidades o repeticiones, a causa de la simetría de e_{ij} con respecto a i, j y de $e_{ij,kl}$ con respecto a k, l . Las 6 ecuaciones, escritas en notación no abreviada, son

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \quad \blacktriangle (6.3-4) \\ 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Para deformaciones finitas, una condición de compatibilidad puede ser derivada del teorema de Riemann por el hecho que el cuerpo deformado permanece en un espacio Euclídeo. Riemann ha dado las condiciones necesarias y suficientes para el tensor métrico (relacionado a la deformación) para representar un espacio euclídeo. Las ecuaciones (6.3-3) o (6.3-4) son condiciones necesarias. Son suficientes? Es decir, las 6 condiciones de compatibilidad, junto con las 6 ecuaciones diferenciales dadas por la ecuación (6.3-1), garantizan la existencia de un conjunto de funciones $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$, $u_3(x, y, z)$ de valor único y continuas en un continuo? Para contestar esta pregunta, primero observamos que como los componentes de strain solamente determinan las posiciones relativas de puntos en un cuerpo, y desde cualquier movimiento de cuerpo rígido se corresponde un strain nulo, esperamos que la solución u_i pueda ser determinada sólo hasta un movimiento de cuerpo rígido arbitrario. Después, si e_{ij} se especifica arbitrariamente, esperaríamos que casos similares a los que se muestran en la Fig.6.1 existan. Aquí, una porción rectangular de material es dado, de los cuales los lados AB, BC, AD y DE (C y E son el mismo punto) están compuestos de sucesivos elementos rectangulares pequeños (cada elemento similar a los ilustrados en la Fig.5.4). Cada elemento es deformado de acuerdo a las strains especificadas. Pegando los elementos deformados, primero a lo largo de AB y BC y entonces a lo largo de AD y

DE, podríamos terminar en el punto C y E separados, ya sea con un hueco entre ellos o con un solapamiento de material en algún lugar.

Para que exista una solución continua de valor único (hasta un movimiento de cuerpo rígido), los extremos C y E deben encontrarse perfectamente en la configuración deformada. Esto no puede garantizarse a menos que el campo de deformación especificado obedezca ciertas condiciones.

Siguiendo este tipo de razonamiento, uno puede construir una integral de línea comenzando en un punto arbitrario A en el cuerpo para encontrar el desplazamiento (u_1, u_2, u_3) en el punto C a lo largo de 2 caminos arbitrarios diferentes y exigir que los resultados sean los mismos.

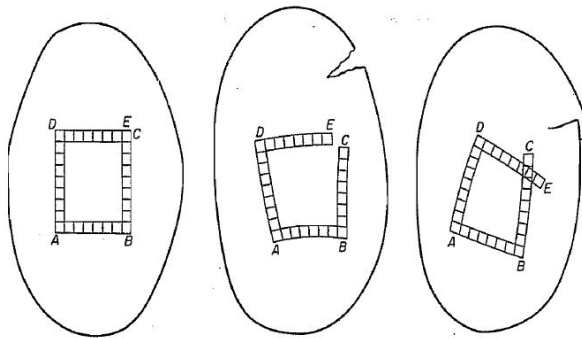


Figure 6.1 Illustration for the requirement of compatibility. The figure on the left consists of a sequence of rectangular elements making up a continuous region in the unstrained state. If strains were specified for each of the little rectangles, and they deformed according to the specifications, then on putting the deformed little rectangles together, the conditions illustrated in the middle or right-hand figure might occur. A sufficient condition, discussed in the text, is necessary to prevent these situations from happening.

Cesaro (1906) demostró que las condiciones suficientes para la unicidad de una solución son exactamente las ecuaciones (6.3-4) si la región encerrada por el camino arbitrario está simplemente conectada. Por lo tanto, si una región está multi conectada condiciones de suficiencia adicionales son requeridas.