2- Vectores y Tensores

2.1 Vectores

Un vector en un espacio Euclídeo de 3 dimensiones es definido como un segmento de línea recta con una magnitud y una dirección dadas. Designaremos a los vectores como ***AB***, o por letras en negrita **u,v,F,T,**...

Dos vectores son iguales si tienen la misma dirección y la misma magnitud. Un vector unitario es un vector de magnitud 1. El vector cero, denotado como **0**, es un vector de magnitud cero. Usamos los símbolos |*AB*|, |**u**| y *v (cursiva)* para representar las magnitudes de ***AB***, **u** y **v** respectivamente.

La suma de 2 vectores es otro vector obtenido por la regla del paralelogramo, y escribimos, por ejemplo, ***AB*** + ***BC*** = ***AC***. La suma vectorial es conmutativa y asociativa.

Un vector multiplicado por un número produce otro vector. Si k es un número real positivo, $k.\mathbf{a}$ representa un vector con la misma dirección de **a** y una magnitud k veces más grande. Si k es negativo, $k.\mathbf{a}$ es un vector cuya magnitud es $|k|$ veces más grande y cuya dirección es opuesta a **a**. Si k=0, tenemos $0.\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

La sustracción de vectores puede ser definida como

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Si decimos que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, son vectores unitarios en la dirección positiva de los ejes $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, podemos representar cualquier vector en el espacio Euclídeo tridimensional con ejes de coordenadas $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, como una combinación lineal de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$. Además, si un vector **u** es representado por la combinación lineal

$$\mathbf{u} = u_1 .\mathbf{e}_1 + u_2 .\mathbf{e}_2 + u_3 .\mathbf{e}_3 \qquad (2.1\text{-}1)$$

entonces u_1 ,u_2 ,u_3 son los componentes de **u**, y **u** puede ser representado como un vector (u_1 ,u_2 ,u_3).

La magnitud |**u**| se obtiene como

$$|\mathbf{u}|= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \; ; \qquad (2.1\text{-}2)$$

y por lo tanto **u**=**0** , si y sólo si, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

El producto escalar (o punto) de **u** y **v** denotado como **u.v**, es definido como

$$\mathbf{u.v}= |\mathbf{u}| \, . \, |\mathbf{v}| \, . \, \boldsymbol{\cos\theta} \qquad (0\leq\boldsymbol{\theta}\leq\pi), \qquad (2.1\text{-}3)$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo entre los vectores. Esto representa el producto de una magnitud de un vector y la componente del segundo vector en la dirección del primero, es decir

u.v= (magnitud de **u**).(magnitud de **v** a lo largo de **u**) (2.1-4)

Si

$$\mathbf{u} = u_1 .\mathbf{e}_1 + u_2 .\mathbf{e}_2 + u_3 .\mathbf{e}_3 \; ;$$
$$\mathbf{v} = v_1 .\mathbf{e}_1 + v_2 .\mathbf{e}_2 + v_3 .\mathbf{e}_3$$

el producto escalar de estos 2 vectores puede ser expresado en términos de los componentes

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1 .v_1 + u_2 .v_2 + u_3 .v_3 \qquad (2.1\text{-}5)$$

Mientras el producto escalar de 2 vectores es un escalar, el producto vectorial (o cruz) de 2 vectores **u** y **v** produce otro vector **w**; y escribimos **w=u**x**v**. La magnitud de **w** está definida como

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\theta} \qquad (0 \leq \boldsymbol{\theta} \leq \pi), \qquad (2.1\text{-}6)$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo entre los vectores **u** y **v**, y la dirección de **w** está definida como perpendicular al plano determinado por **u** y **v**, de manera que **u**, **v** y **w** forman el sistema de la mano derecha. El producto vectorial satisface las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \\
&\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \\
&\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad\qquad (2.1\text{-}7) \\
&\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \\
&\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3;\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1;\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Usando estas relaciones, el producto vectorial puede ser expresado en términos de sus componentes como:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2.v_3 - u_3.v_2).\mathbf{e}_1 + (u_3.v_1 - u_1.v_3).\mathbf{e}_2 + (u_1.v_2 - u_2.v_1).\mathbf{e}_3\ . \quad (2.1\text{-}8)$$

2.2 Ecuaciones vectoriales.

El espíritu del análisis vectorial es usar símbolos para representar cantidades para expresar una relación física o un hecho geométrico como una ecuación. Por ejemplo, si tenemos una partícula en la que las fuerzas $\mathbf{F}^{(1)}$, $\mathbf{F}^{(2)}$,...,$\mathbf{F}^{(n)}$ actúan, entonces se dice que la condición de equilibrio para esta partícula es

$$\mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)} + \ldots + \mathbf{F}^{(n)} = \mathbf{0}. \qquad (2.2\text{-}1)$$

Como otro ejemplo, decimos que la siguiente ecuación para el vector **r** representa un plano si **n** es un vector unitario y *p* es una constante:

$$\mathbf{r}.\mathbf{n} = p. \qquad (2.2\text{-}2)$$

Por esta declaración, se entiende que el lugar del punto final de un vector de radio **r** que satisface la ecuación anterior es un plano. El significado geométrico es más claro. El vector **n**, llamado *vector unitario normal al plano*, está especificado. El producto escalar **r.n** representa la proyección escalar de **r** sobre **n**. La ecuación (2.2-2) establece que si consideramos todos los vectores **r** cuyo componente sobre **n** es una constante *p*, obtenemos un plano. (ver Fig. 2.1)

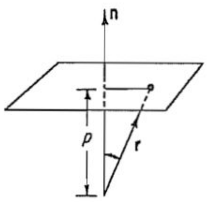

Figure 2.1 Equation of a plane, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$.

Por otra parte, elegantes como son, las ecuaciones vectoriales no son siempre convenientes. En efecto, cuando Descartes introdujo la geometría analítica en el que los vectores son expresados por sus componentes con respecto a un marco de referencia, fue una gran contribución. Así, con referencia a un conjunto de ejes de coordenadas cartesianas rectangulares O-xyz, las ecuaciones (2.2-1) y (2.2-2) pueden escribirse, respectivamente, como

$$\sum_{i=1}^{n} F_x^{(i)} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_y^{(i)} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_z^{(i)} = 0; \qquad (2.2\text{-}3)$$

$$ax + by + cz = p. \qquad (2.2\text{-}4)$$

Donde $F_x^{(i)}$, $F_y^{(i)}$ $F_z^{(i)}$, representan las componentes del vector $\mathbf{F}^{(i)}$ con respecto al marco de referencia *O-xyz*; *x,y,z* representan los componentes de **r**; y a,b,c representan los del vector unitario normal **n**.
Por qué se prefiere la forma analítica? Por qué estamos dispuestos a sacrificar la elegancia de la notación vectorial? La respuesta es convincente: nos gusta expresar las cantidades físicas en números. Para especificar un radio vector, es conveniente especificar el trío de números (*x,y,z*). Para especificar una fuerza **F**, es conveniente definir los tres componentes F_x ,F_y ,F_z . De hecho, en los cálculos prácticos, usamos las ecuaciones (2.2-3) y (2.2-4) mucho más frecuentemente que (2.2-1) y (2.2-2).

2.3 La convención de sumatoria.
Para el desarrollo futuro, una importante cuestión de notación debe ser dominado.
Un conjunto de *n* variables $x_1, x_2, ..., x_n$, es denotado usualmente como x_i, i= 1,...,*n*. Cuando se escribe por separado, el símbolo x_i , representa cualquiera de las variables $x_1, x_2, ..., x_n$. El rango de *i* debe ser indicado en cualquier caso; la forma más sencilla es escribir, como se ilustra aquí, *i*= 1,2,...,*n*. el símbolo *i* es un índice. Un índice puede ser un subíndice o un superíndice. Un sistema de ecuaciones que usa índices se dice que está en notación indicial.
Consideremos la ecuación que describe un plano en un espacio de referencia 3d que se referencia con ejes x_1, x_2, x_3 , es decir,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p, \qquad (2.3\text{-}1)$$

donde a_i y *p* son constantes. Esta ecuación puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = p \quad . \qquad (2.3\text{-}2)$$

Sin embargo, deberíamos introducir la convención de sumatoria y escribimos la ecuación anterior de una forma sencilla

$$a_i x_i = p \quad . \qquad (2.3\text{-}3)$$

La convención es la siguiente: *La repetición de un índice en un término denotará una sumatoria con respecto al índice sobre su rango.* El rango de un índice *i* es el conjunto de *n* enteros 1 a ***n*****.** Un índice que es sumado (contraído) es llamado *índice dummy*; uno que no es sumado es llamado *índice libre*.
Ya que un índice dummy indica sumatoria, no importa el símbolo que se use. Así, $a_i x_i$ es lo mismo que $a_j x_j$. Esto es análogo a las variables dummy en una integral, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

Ejemplos.

El uso de índices y la convención de sumatoria puede ser ilustrado por otros ejemplos. Considere un vector unitario **v** en 3d en un espacio Euclídeo con coordenadas rectangulares *x, y, z*. Decimos que los cosenos de α_i están definido como

$$\alpha_1 = cos(\mathbf{v},\mathbf{x}),\ \alpha_2 = cos(\mathbf{v},\mathbf{y}),\ \alpha_3 = cos(\mathbf{v},\mathbf{z})$$

donde (*v,x*) denota el ángulo entre ***v*** y el eje x, etc. El conjunto de números α_i (i=1,2,3) representa los componentes del vector unitario en los ejes coordenados. El hecho que la longitud del vector sea unitario se expresa por la ecuación

$$(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2 = 1,$$

O simplemente,

$$(\alpha_{ii})^2 = 1. \qquad (2.3\text{-}4)$$

Como otra ilustración, considere un elemento línea con componentes *dx, dy, dz* en un sistema de coordenadas cartesianas x,y,z. El cuadrado de la longitud de un elemento línea es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (2.3\text{-}5).$$

Si definimos

$$dx_1 = dx\ ;\ dx_2 = dy\ ;\ dx_3 = dz. \qquad (2.3\text{-}6)$$

y

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1.$$
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0. \qquad (2.3\text{-}7)$$

Entonces la ecuación (2.3-5) se puede escribir como

$$ds^2 = \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j\ , \qquad \blacktriangle(2.3\text{-}8)$$

con el entendimiento que el rango de los índices *i* y *j* es de 1 a 3. Notar que hay 2 sumatorias en esta expresión, una sobre *i* y otra sobre *j*. El símbolo δ_{ij} como definimos en (2.3-7) es llamado *delta de kronecker*.

Matrices y Determinantes.

Las reglas del álgebra de matrices y la evaluación de determinantes puede ser expresada de una forma simplificada con la convención de sumatoria. Una matriz **A** *mxn* es un arreglo rectangular ordenado de *m.n* elementos. Denotamos

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.3\text{–}9)$$

de manera que a_{ij} es el elemento en la i-ésima fila y j-ésima columna de la matriz **A**. El índice *i* toma los valores de 1 a *m*, y *j* toma valores de 1 a *n*. **A** transpuesta es otra matriz, denotada como $\mathbf{A}^T$, cuyos elementos son los mismos de **A**, excepto que las filas y las columnas están intercambiadas. Así,

$$\mathbf{A}^T = (a_{ij})^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.3\text{–}10)$$

El producto de 2 matrices de 3x3, **A** = (a_{ij}), **B** = (b_{ij}), es una matriz cuadrada de 3x3 definida como

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & \cdots \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & \cdots \end{pmatrix} \qquad (2.3\text{–}11)$$

cuyo elemento en la fila *i* y la columna *j* puede escribirse, con la convención de sumatoria, como

$$(\mathbf{A.B})_{ij} = (a_{ik}.b_{kj}) \qquad (2.3\text{-}12)$$

Un vector **u** puede representarse por una matriz fila (u_i), y la ecuación (2.1-2) puede escribirse

$$|\mathbf{u}|^2 = (u_i)(u_j)^T = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 = u_i u_i \qquad (2.3\text{-}13)$$

Por estas reglas, el producto escalar de 2 vectores **u.v**, (2.1-3), puede ser escrita como

$$\mathbf{u.v} = (u_i)\,(v_i)^T = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u_i v_i \,. \qquad (2.3\text{-}14).$$

El determinante de una matriz cuadrada es un número que es la suma de todos los productos de los elementos de la matriz, tomando uno de cada fila y uno de cada columna, y no hay 2 o más de cualquier fila o columna, y con el signo especificado por una regla dada en breve. Por ejemplo, el determinante de una matriz **A** de 3x3 se escribe como *det **A*** y se define como

$$\det \mathbf{A} = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.3–15}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

La regla especial de signos es como sigue: organizar el primer índice en el orden 1,2,3. A continuación revisamos el orden del segundo índice. Si se permutan como 1,2,3,1,2,3,..., entonces el signo es positivo; de otra manera el signo es negativo.

Vamos a introducir un símbolo especial, ϵ_{rst} , llamado *símbolo de permutación* definido como

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{222} = \epsilon_{333} = \epsilon_{112} = \epsilon_{211} = \epsilon_{121} = \epsilon_{311} = \ldots = 0,$$
$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \tag{2.3-16}$$
$$\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1.$$

En otras palabras, ϵ_{ijk} se anula cuando los valores de cualquier par de índices coincide; $\epsilon_{ijk} = 1$ cuando los subíndices permutan como 1,2,3; y $\epsilon_{ijk} = -1$ en otro caso. Entonces el determinante de la matriz (a_{ij}) se puede escribir como

$$\det(a_{ij}) = \epsilon_{rst}\ a_{r1}a_{s2}a_{t3} \tag{2.3-17}$$

Usando el símbolo ϵ_{rst} podemos escribir (2.1-8) definiendo el producto vectorial **u** x **v** como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \epsilon_{rst}\ u_s v_t\, \mathbf{e}_r \tag{2.3-18}$$

La identidad ϵ-δ.

El delta de Kronecker y el símbolo de permutación son cantidades muy importantes que aparecerán una y otra vez en este libro. Ellos están conectados por la identidad

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ist} = \delta_{js}\,\delta_{kt} - \delta_{jt}\,\delta_{ks} \qquad \blacktriangle(2.3\text{-}19)$$

Esta identidad es usada frecuentemente como para justificar su atención especial aquí y puede ser verificado por el ensayo real.

Diferenciación.

Finalmente, deberíamos extender la convención de sumatoria a las fórmulas de derivación. Sea $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función de *n* variables $x_1, x_2, ..., x_n$. Entonces su diferencial se puede escribir como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i \qquad (2.3\text{-}20).$$

2.4 Traslación y rotación de coordenadas.

Espacio de dos dimensiones

Considere 2 conjuntos de marcos de referencia cartesianas rectangulares *O-xy* y *O'-x'y'* sobre un plano. Si el marco de referencia *O'-x'y'* es obtenido a partir de *O-xy* por un desplazamiento del origen sin un cambio de orientación, entonces la transformación es una *traslación*. Si un punto *P* tiene coordenadas (*x,y*) y (*x',y'*) con respecto al viejo y nuevo marco de referencia, respectivamente, y si las coordenadas de el nuevo origen *O'* son (*h,k*) relativo a *O-xy*, entonces

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k. \end{cases} \qquad (2.4\text{–}1)$$

Si el origen permanece fijo, y los nuevos ejes se obtienen girando *Ox* y *Oy* en un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ en sentido antihorario, entonces la transformación de ejes es una rotación. Sea *P* con coordenadas (x,y), (x',y') relativo a las viejos y nuevos sistemas de referencia, respectivamente. Entonces (mirando Fig.2.2)

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\boldsymbol{\theta} - y' \sin\boldsymbol{\theta} \\ y &= x' \sin\boldsymbol{\theta} - y' \cos\boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \qquad (2.4\text{-}2)$$

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\boldsymbol{\theta} + y \sin\boldsymbol{\theta} \\ y' &= -x \sin\boldsymbol{\theta} + y \cos\boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \qquad (2.4\text{-}3)$$

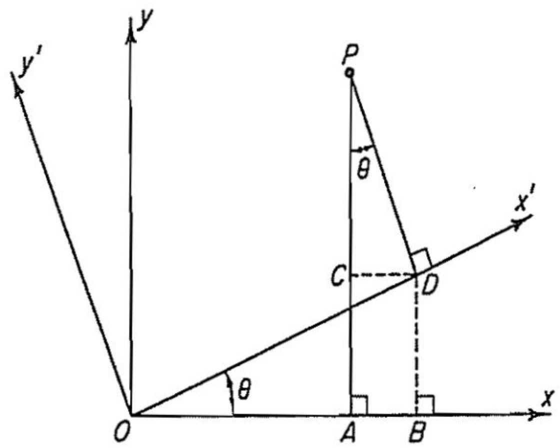

Figure 2.2 Rotation of coordinates.

Usando la notación de índice, dejamos que x_1 , x_2 reemplacen a *x* e *y*, y x'_1 , x'_2 reemplacen a *x'* e *y'*. Entonces, evidentemente una rotación especificada por (2.4-3) puede ser representada por la ecuación

$$x'_i = \boldsymbol{\beta}_{ij}\, x_j\ ;\ (i = 1,2) \qquad (2.4\text{-}4)$$

Donde $\boldsymbol{\beta}_{ij}$ son elementos de la matriz cuadrada

$$(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (2.4\text{–}5)$$

La transformación inversa de la ecuación (2.4-4) es

$$x_i = \boldsymbol{\beta}_{ji}\, x'_j\ ;\ (i = 1,2) \qquad (2.4\text{-}6)$$

donde, según la ecuación (2.4-2), β_{ji} es el elemento en la fila *j* y columna *i* de la matriz (β_{ij}). Está claro que la matriz (β_{ji}) es la transpuesta de la matriz (β_{ij}), es decir

$$(\beta_{ji}) = (\beta_{ij})^T \qquad (2.4\text{-}7)$$

Por otro lado, desde el punto de vista del conjunto solución de las ecuaciones lineales (2.2-4), la matriz (β_{ji}) en la ecuación (2.4-6) debe ser identificada como la inversa de la matriz (β_{ij}), es decir

$$(\beta_{ji}) = (\beta_{ij})^{-1} \qquad (2.4\text{-}8)$$

Así obtenemos una propiedad fundamental de la matriz de transformación (β_{ij}) que define la rotación en coordenadas cartesianas rectangulares:

$$(\beta_{ij})^T = (\beta_{ij})^{-1} \ . \qquad (2.4\text{-}9)$$

Una matriz (β_{ij}), i,j = 1,2,..,n, que satisface la ecuación (2.4-9) es llamada una **matriz ortogonal**. Una transformación se dice que es ortogonal si la matriz asociada es ortogonal. La matriz de la ecuación (2.4-5) que define una rotación de coordenadas es ortogonal.
Para una matriz ortogonal, tenemos

$$(\beta_{ij})\,(\beta_{ij})^T = (\beta_{ij})(\beta_{ij})^{-1} = (\delta_{ij}) \ ,$$

donde (δ_{ij}) es el delta de Kronecker. Por lo tanto,

$$\beta_{ik}\,\beta_{kj} = (\delta_{ij}). \qquad (2.4\text{-}10)$$

Para aclarar el significado geométrico de esta importante ecuación, tomaremos directamente para la transformación de rotación como sigue. Un vector unitario desde el origen a lo largo del eje x'_i tiene cosenos con direcciones β_{i1} β_{i2} con respecto al los ejes x_1 y x_2 respectivamente. El hecho de que su longitud es unitaria es expresado en la siguiente ecuación

$$(\beta_{i1})^2 + (\beta_{i2})^2 = 1, \ (i = 1,2) \qquad (2.4\text{-}11)$$

El hecho de que un vector unitario a lo largo del eje x'_i es perpendicular a un vector unitario a lo largo del eje x'_j si j≠i está expresado por la ecuación

$$\beta_{i1}\,\beta_{j1} + \beta_{i2}\,\beta_{j2} = 0, \ \ (j \neq i) \qquad (2.4\text{-}12)$$

Combinando las ecuación (2.4-11) y (2.4-12), obtenemos la ecuación (2.4-10).
Nota: de manera alternativa, ya que conocemos que los β_{ij} son de la ecuación (2.4-5), podemos verificar la ecuación (2.4-10) por cálculo directo.

Espacio 3D.
Obviamente la discusión anterior puede ser extendida a 3 dimensiones sin problemas. El rango de índices *i,j* puede ser extendido a 1,2,3. Así, consideramos 2 sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares x_1, x_2, x_3 y x'_1, x'_2, x'_3, con el mismo origen. Sea **x** que denota el vector posición de un punto *P* con componentes x_1, x_2, x_3 ó x'_1, x'_2, x'_3 ,. Sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ los vectores unitarios en las direcciones de los ejes positivos x_1, x_2, x_3.

Ellos son llamados vectores base del sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3. Tenemos $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$ son los vectores base del sistema de coordenadas x'_1, x'_2, x'_3. Tenga en cuenta, dado que las coordenadas son ortogonales, tenemos

$$\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j = \boldsymbol{\delta}_{ij}\ ,\ \mathbf{e'}_i\,\mathbf{e'}_j = \boldsymbol{\delta}_{ij} \qquad \text{(2.4-13)}$$

En término de los vectores base, el vector **x** puede ser expresado como sigue:

$$\mathbf{x} = x_j\,\mathbf{e}_j = x'_j\,\mathbf{e'}_j\,. \qquad \text{(2.4-14)}$$

El producto escalar de ambos lados de la ecuación (2.4-14) con $\mathbf{e}_i$ nos da:

$$x_j\,(\mathbf{e}_j.\mathbf{e}_i) = x'_j\,(\mathbf{e'}_j.\mathbf{e}_i). \qquad \text{(2.4-15)}$$

Pero

$$x_j\,(\mathbf{e}_j.\mathbf{e}_i) = x_j\,\boldsymbol{\delta}_{ij} = x_i\,;$$

Por lo tanto,

$$x_i = (\mathbf{e'}_j.\mathbf{e}_i)\,x'_j\,. \qquad \text{(2.4-16)}$$

Ahora, definimos

$$(\mathbf{e'}_j.\mathbf{e}_i) \equiv \boldsymbol{\beta}_{ji}\,; \qquad \text{(2.4-17)}$$

Entonces,

$$x_i = \boldsymbol{\beta}_{ji}\,x'_j\,. \qquad (j = 1,2,3) \quad \text{(2.4-18)}$$

Después, por ambos lados de la ecuación (2.4-14) con $\mathbf{e'}_i$. Esto nos da

$$x_j\,(\mathbf{e}_j.\mathbf{e'}_i) = x'_j\,(\mathbf{e'}_j.\mathbf{e'}_i).$$

Pero $(\mathbf{e'}_j.\mathbf{e'}_i) = \boldsymbol{\delta}_{ij}$ y $(\mathbf{e}_j.\mathbf{e'}_i) = \boldsymbol{\beta}_{ji}$; por lo tanto, obtenemos

$$x'_i = \boldsymbol{\beta}_{ij}\,x_j \quad ;(i = 1,2,3) \qquad \text{(2.4-19)}$$

Las ecuaciones (2.4-18) y (2.4-19) son generalizaciones de las ecuaciones (2.4-4) y (2.4-6) en el caso de 3 dimensiones.

La ecuación (2.4-17) muestra los significados geométricos de los coeficientes $\boldsymbol{\beta}_{ij}$. Las ecuaciones (2.4-7) y (2.4-8) manteniendo i,j = 1,2,3 dejan claro porqué las ecuaciones (2.4-18) y (2.4-19) son transformaciones inversas el uno del otro. Entonces las ecuaciones (2.4-9) y (2.4-10) siguen.

Ahora los números x_1, x_2, x_3 que representan las coordenadas del punto *P* en la Fig. 2.3 son también los componentes del radio vector **A**. Un reconocimiento de este hecho nos da inmediatamente la regla de transformación de los componentes de un vector en coordenadas cartesianas rectangulares:

$$A'_i = \boldsymbol{\beta}_{ij}\,A_j\,, \qquad A_i = \boldsymbol{\beta}_{ji}\,A'_j \qquad \text{(2.4-20)}$$

en donde $\boldsymbol{\beta}_{ij}$ representa el coseno del ángulo entre los ejes Ox'_i y Ox_j.

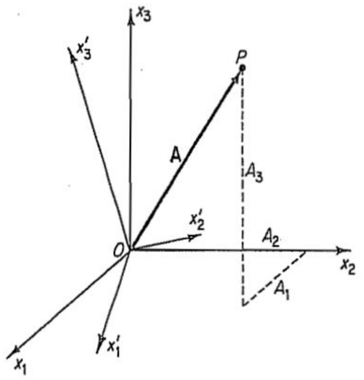

Figure 2.3 Radius vector and coordinates.

Finalmente, señalamos que los 3 vectores unitarios a lo largo de x'_1 , x'_2 , x'_3 forman los bordes de un cubo de volumen 1. El volumen de un paralelepípedo que tiene cualesquiera 3 vectores **u**, **v**, **w** como bordes es determinado por el triple producto **u.(v** x **w)** o por su negativa; el signo es determinado en función de si los 3 vectores **u**, **v**, **w** , en ese orden, respetan el sistema de la mano derecha o no. Si lo respetan, entonces el volumen es igual al determinante de sus componentes:

$$\text{Volume} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.4\text{–}21)$$

Supongamos que $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, y $\mathbf{x'}_1$, $\mathbf{x'}_2$, $\mathbf{x'}_3$, respetan la orientación de la mano derecha. Entonces está claro que el determinante de $\boldsymbol{\beta}_{ij}$ representa el volumen de un cubo unitario y por lo tanto su valor es 1:

$$|\beta_{ij}| \equiv \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 1. \qquad (2.4\text{–}22)$$

2.5 Transformación de coordenadas en general.

Un conjunto de variables independientes x_1, x_2, x_3 especifican las coordenadas de un punto en el sistema de referencia. Un conjunto de ecuaciones

$$\underline{\mathbf{x}}_1 = f_i\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \qquad (i = 1,2,3) \qquad (2.5\text{-}1)$$

describen una transformación de x_1, x_2, x_3 a un conjunto de nuevas variables $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$. La transformación inversa

$$\mathbf{x}_1 = g_i\,(\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) \qquad (i = 1,2,3) \qquad (2.5\text{-}2)$$

procede en la dirección inversa. Con el fin de garantizar que cada transformación reversible exista y tenga una correspondencia uno a uno en cierta región *R* de las variables (x_1, x_2, x_3), es decir, con el fin de que cada conjunto de números ($\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$) define un único conjunto de números (x_1, x_2, x_3), para (x_1, x_2, x_3) en la región *R*, y viceversa, es suficiente que

(1)- Las funciones f_i son de un solo valor, son continuas, y poseen primeras derivadas parciales continuas en la región *R*.

(2)- El *determinante Jacobiano* $J = \det(\partial \underline{x}_i / \partial x_j)$ no se anula en ningún punto de la región *R*. Esto es,

$$J = \det\left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}\right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.5\text{–}3)$$

Las transformaciones de coordenadas con las propiedades 1 y 2 son llamadas *transformaciones admisibles*. Si el Jacobiano es positivo en todas partes, entonces un conjunto con sentido de mano derecha se transforma en otro de mano derecha, y la transformación se dice que es *propia*. Si el Jacobiano es negativo en todas partes, un sistema de mano derecha se transforma en una de Mano izquierda, y la transformación se dice que es *impropia*. En este libro, suponemos tácitamente que nuestras transformaciones son *admisibles y propias*.

Significado del Determinante Jacobiano.

Para apreciar el significado del determinante jacobiano, suponemos que hemos encontrado que (x^0_1, x^0_2, x^0_3) se corresponden con ($\underline{x}^0_1$, $\underline{x}^0_2$, $\underline{x}^0_3$), es decir, que satisfacen la ecuación (2.5-1), y nos preguntamos si podemos encontrar una transformación inversa en un pequeño entorno de esos puntos. Calculamos el diferencial de la ecuación (2.5-1) y obtenemos

$$d\underline{x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \quad (i=1,2,3) \qquad (2.5\text{-}4)$$

y evaluamos las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ en el punto (x^0_1, x^0_2, x^0_3). La ecuación (2.5-4) define una transformación lineal del vector dx_i en el vector $d\underline{x}_i$. Si resolvemos el conjunto de ecuaciones lineales (2.5-4) para x_j, sabemos que la solución existe sólo si el determinante de los coeficientes no es nulo:

$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \neq 0 \qquad (2.5\text{-}5)$$

Por lo tanto existe una inversa en la vecindad de (x^0_1, x^0_2, x^0_3) solamente si (2.5-3) es válido. Además, cuando $J \neq 0$, la ecuación (2.5-4) se puede resolver para obtener

$$dx_i = c_{ij} \,.\, d\underline{x}_j \qquad (2.5\text{-}6)$$

donde las c_{ij} son constantes. Por lo tanto, una transformación inversa se puede encontrar en una pequeña vecindad del punto conocido. Así, las condiciones 1 y 2 antes mencionadas son condiciones suficientes para la existencia de una inversa en un entorno pequeño del punto conocido. Mediante la aplicación reiterada de este argumento a nuevos puntos conocidos a cierta distancia del punto inicial, se puede extender y encontrar la región *R* en donde la transformación inversa uno a uno dado por (2.5-2) existe.

2.6 Definiciones analíticas de escalares, vectores y tensores cartesianos.
Sean (x^0_1, x^0_2, x^0_3) y $(\underline{x}^0_1, \underline{x}^0_2, \underline{x}^0_3)$ dos conjuntos fijos de marcos de referencia cartesianos rectangulares, relacionados por la ley de transformación:

$$\underline{x}_i = \beta_{ij}\, x_j \qquad (2.6\text{-}1)$$

donde β_{ij} es el coseno dirección del ángulo entre los vectores unitarios de las coordenadas $\underline{x}_i$ y x_j . Por lo tanto,

$$\beta_{21} = \cos(\underline{x}_2 , x_1) \ , \quad (2.6\text{-}2)$$

La transformación inversa es

$$x_i = \beta_{ji}\, \underline{x}_j \quad . \qquad (2.6\text{-}3)$$

Un sistema de coordenadas se llama *escalar*, *vector*, o *tensor,* dependiendo de cómo los componentes del sistema son definidos en las variables x_1, x_2, x_3 y cómo ellos son transformados cuando estas variables cambian a $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$.
Un sistema es llamado *escalar* si tiene solamente un componente Φ en las variables x_i y un componente $\underline{\Phi}$ en las variables $\underline{x}_i$, y si Φ y $\underline{\Phi}$ son numéricamente iguales en los puntos correspondientes,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \underline{\Phi}\,(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3). \quad (2.6\text{-}4)$$

Un sistema es llamado *campo vector* o un *campo tensorial de rango 1* si tiene 3 componentes ξ_i en las variables x_i y 3 componentes $\underline{\xi}_i$ en las variables $\underline{x}_i$ y si los componentes se relacionan por la ley característica

$$\underline{\xi}_i(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) = \xi_k\,(x_1, x_2, x_3).\beta_{ik} \ ,$$
$$\xi_i\,(x_1, x_2, x_3) = \underline{\xi}_k(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3).\beta_{ki} \ . \qquad (2.6\text{-}5)$$

Generalizando estas definiciones a un sistema que tiene 9 componentes cuando *i* y *j* están en el rango 1,2,3, definimos un *campo tensorial de orden 2* si este sistema que tiene 9 componentes t_{ij} en las variables x_1, x_2, x_3 y 9 componentes $\underline{t}_{ij}$ en las variables $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ y si los componentes están relacionados por la ley característica

$$\underline{t}_{ij}\,(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) = t_{mn}\,(x_1, x_2, x_3).\beta_{im}.\beta_{jn}$$
$$t_{ij}\,(x_1, x_2, x_3) = \underline{t}_{mn}\,(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3).\beta_{mi}.\beta_{nj} \qquad (2.6\text{-}6)$$

La generalización de campos tensoriales de rango superior es inmediata. Estas definiciones pueden obviamente ser modificadas a 2 dimensiones si los índices varían en 1,2, o a *n* dimensiones si los índices varían 1,2,...,*n*. Ya que nuestras definiciones son basadas en transformaciones de un marco de referencia cartesiano rectangular a otro, los sistemas así definidos son llamados *tensores cartesianos*. Por simplicidad en este libro sólo usaremos ecuaciones tensoriales cartesianas.

Elaboración de por qué los vectores y tensores se definen de esta manera.
La definición analítica de vectores es diseñado para seguir la idea de un radio vector. Todos sabemos que el radio vector, un vector que une el origen (0,0,0) con un punto (x_1, x_2, x_3), expresa nuestra idea de un vector y se expresa numéricamente en término de sus componentes $(x_1\text{-}0, x_2\text{-}0, x_3\text{-}0)$, es decir, (x_1, x_2, x_3). Cuando este vector es visto desde otro marco de referencia, los componentes que se refieren al nuevo marco pueden ser calculados desde el viejo de acuerdo a la ecuación (2.6-1), el cual es la *ley de*

transformación de los componentes de un radio vector. Nuestra generalización de la ecuación (2.6-1) en la (2.6-2), que define todos los vectores, es equivalente a decir que podemos llamar a una entidad un vector si se comporta como un radio vector, es decir, si tiene una dirección fija y una magnitud fija.

Estas observaciones están destinadas a diferenciar una matriz a partir de un vector. Podemos listar los componentes de un vector en la forma de columna de una matriz; pero no todas las columnas de matrices son vectores. Por ejemplo, para identificarte a ti mismo puedes listar la edad, calle, código postal en la columna de una matriz. Qué puedes decir acerca de esta matriz? nada muy interesante. Esto ciertamente no es un vector.

Los pasos matemáticos que tomaron en la generalización de la definición dada en (2.6-5) para un vector de (2.6-6) para un tensor son bastante natural. Estas ecuaciones son bastante similares que si llamamos vector a un tensor de orden 1, pero no podemos llamar los tensores de orden 2, 3 ..etc. Cual es el significado físico de estos tensores de orden superior? El camino más efectivo para responder esta pregunta es considerar algunos ejemplos concretos, tales como la tensión. Ver los problemas 2.26, 2.27, 2.28.

2.26 Si todos los componentes de un tensor cartesiano desaparecen en un sistema de referencia, entonces ellos también desaparecen en todos los otros sistemas de coordenadas cartesianas. Este es quizás la propiedad más importante de los campos tensoriales.

2.27 Teorema: La suma o diferencia de 2 tensores cartesianos del mismo rango es también un tensor de ese rango. Así, cualquier combinación lineal de tensores del mismo rango es también un tensor del mismo rango.

Sean A_{ij} y B_{ij} 2 tensores. Bajo una transformación de coordenadas dada por la ec. (2.6-1), tenemos los nuevos componentes

$$\underline{A}_{ij} = A_{mn}\,\boldsymbol{\beta}_{im}\,\boldsymbol{\beta}_{jn}\ ,\quad \underline{B}_{ij} = B_{mn}\,\boldsymbol{\beta}_{im}\,\boldsymbol{\beta}_{jn}$$

sumando o restando, obtenemos

$$\underline{A}_{ij} \pm \underline{B}_{ij} = \boldsymbol{\beta}_{im}\,\boldsymbol{\beta}_{jn}\,(A_{mn} \pm B_{mn})$$

Y el teorema es probado.

2.28 Teorema: Sean $A_{a1\dots ar}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B_{a1\dots ar}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tensores. Entonces la ecuación

$$A_{a1\dots ar}(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_{a1\dots ar}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

es una ecuación tensorial. Es decir, si esta ecuación es verdadera en un sistema de coordenadas cartesiano, entonces también es verdadero en cualquier sistema de coordenadas cartesiano.

Demostración:

Multiplicando ambos lados de la ecuación por

$$\boldsymbol{\beta}_{ia1}\boldsymbol{\beta}_{ja2}\dots\boldsymbol{\beta}_{kar}$$

y sumando sobre los índices repetidos da como resultado la ecuación

$$\underline{A}_{ij\dots k}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) = B_{ij\dots k}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$$

Alternativamente, escribimos la ecuación como A-B=0. Entonces todos los componentes de A-B desaparecen. Luego aplicamos los resultados de las demostraciones 2.27 y 2.26.

2.7 El significado de las ecuaciones tensoriales.
Los teoremas indicados en los problemas en el final de la sección anterior contiene la propiedad más importante del campo tensorial: *si todos los componentes de un campo tensorial se anulan en un sistema de coordenadas, del mismo modo se anulan en todos los sistemas de coordenadas que pueden ser obtenidos mediante transformaciones admisibles.*
Así, la importancia del análisis de tensores puede resumirse en la siguiente declaración: la forma de una ecuación puede tener validez general con respecto a cualquier marco de referencia solamente si todos los términos en la ecuación tienen las mismas características del tensor. Si esta condición no se cumple, un simple cambio en el sistema de referencia destruirá la forma de la relación, y la forma sería, por lo tanto, meramente fortuita.
Vemos que el análisis tensorial es tan importante como el análisis dimensional en cualquier formulación de relaciones físicas. En el análisis dimensional, estudiamos los cambios que experimenta una magnitud física con particular elección de las unidades fundamentales. 2 cantidades físicas no pueden ser iguales a no ser que tengan las mismas dimensiones. Una ecuación describiendo una relación física no puede ser correcta a no ser que sea invariante con respecto a cambios de unidades fundamentales.
Debido al diseño de las leyes de transformaciones tensoriales, las ecuaciones están en armonía con la física.

2.8 Notación para vectores y tensores: negrita o índices?
En la mecánica del contínuo nos ocupamos de vectores que describen desplazamientos, velocidades, fuerzas, etc., y tensores describiendo tensiones, deformaciones, ecuaciones constitutivas, etc. Para vectores, la notación usual de letras negritas o una flecha, como **u** o $\underline{u}$, es aceptable para todos; pero para tensores, hay diferentes opiniones. Un tensor de orden 2 puede escribirse como una letra en negrita o con una doble flecha o con un par de llaves. Por lo tanto, si T es un tensor de segundo orden, puede ser escrito como **T**, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ o $\{T\}$.
La primera notación es la más simple, pero debes recordar lo que representa ese símbolo; si es un vector o es un tensor. Las otras notaciones son incómodas. Objeciones más importantes a la notación simple surgen cuando varios vectores y tensores están asociados. En el análisis vectorial, tenemos que distinguir el producto escalar del producto vectorial. Qué hay de los tensores? Vamos a definir varios tipos de productos tensoriales? Tenemos que hacerlo, porque hay varias formas de asociar tensores. El asunto se vuelve complicado. Por esta razón, en trabajos más teóricos que requieren un uso extensivo de tensores, la notación indicial es usada. En esta notación, vectores y tensores están resueltos en sus componentes con respecto al marco de referencia y denotados por símbolos tales como u_i, u_{ij}, etc. Esos componentes son números reales. Las operaciones matemáticas en ellos siguen las reglas usuales de la aritmética.. No se necesita introducir reglas especiales. Así, obtenemos una medida de simplicidad. Además, la notación indicial exhibe el orden y el rango de un tensor claramente. Se muestra el papel del marco de referencia explícitamente.
La última ventaja mencionada de la notación indicial, por lo tanto, es también, una debilidad: llama la atención del lector lejos de la entidad física. Por lo tanto, uno tiene que adaptarse y familiarizarse con ambos sistemas.

2.9 Regla del cociente.

Considere un conjunto de n^3 funciones $A(1,1,1)$, $A(1,1,2)$, $A(1,2,3)$, etc. o $A(i,j,k)$ para abreviar, con cada uno de los índices i,j,k variando de 1,2,..., n. A pesar de que el conjunto de funciones tiene $A(i,j,k)$ tiene el número correcto de componentes, no sabemos si es un tensor. Ahora supongamos que sabemos algo de la naturaleza del producto entre $A(i,j,k)$ con un tensor arbitrario. Entonces hay un método que nos permite establecer si $A(i,j,k)$ es un tensor sin tomarse la molestia de determinar la ley de transformación directamente.

Por ejemplo, sea $\xi_i(x)$ un vector. Supongamos que el producto $A(i,j,k).\xi_i$ (convención de suma sobre i) se utiliza para producir un tensor de tipo $A_{jk}(x)$, es decir,

$$A(i,j,k).\xi_i = A_{jk}(x), \qquad (2.9\text{-}1)$$

Entonces podemos probar que $A(i,j,k)$ es un tensor de tipo $A_{ijk}(x)$.

La prueba es muy simple. Ya que $A(i,j,k).\xi_i$ es de tipo A_{jk} , se transforma en $\underline{x}$-coordenadas como

$$\underline{A}(i,j,k).\underline{\xi}_i = \underline{A}_{jk} = \boldsymbol{\beta}_{jr}\,\boldsymbol{\beta}_{ks}\,A_{rs} = \boldsymbol{\beta}_{jr}\,\boldsymbol{\beta}_{ks}\,[A(m,r,s).\xi_m]. \qquad (2.9\text{-}2)$$

Pero $\xi_m = \boldsymbol{\beta}_{im}\,\underline{\xi}_i$. Insertando esto en el lado derecho de la ecuación anterior y pasando todos los términos a un lado, obtenemos

$$[\,\underline{A}(i,j,k) - \boldsymbol{\beta}_{jr}\,\boldsymbol{\beta}_{ks}\,\boldsymbol{\beta}_{im}\,A(m,r,s)].\ \underline{\xi}_i = 0. \qquad (2.9\text{-}3)$$

Ahora $\underline{\xi}_i$ es un vector arbitrario. Por lo tanto, la cantidad dentro de los corchetes debe ser nulo, y tenemos

$$\underline{A}(i,j,k) = \boldsymbol{\beta}_{im}\,\boldsymbol{\beta}_{jr}\,\boldsymbol{\beta}_{ks}\,A(m,r,s). \qquad (2.9\text{-}4)$$

que es precisamente la ley de transformación del tensor de tipo A_{ijk} .

El patrón del procedimiento anterior puede ser generalizado para tensores de orden superior.

2.10 Derivadas parciales.

Cuando solamente coordenadas cartesianas son consideradas, las derivadas parciales de cualquier campo tensorial se comportan como los componentes de un tensor cartesiano. Para mostrar esto, vamos a considerar 2 conjuntos de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) y $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ relacionados por

$$x_i = \boldsymbol{\beta}_{ij}\,x_j + \boldsymbol{\alpha}_i, \qquad (2.10\text{-}1)$$

donde $\boldsymbol{\beta}_{ij}$ y $\boldsymbol{\alpha}_i$ son constantes.

Ahora si $\xi_i\,(x_1, x_2, x_3)$ es un tensor, de manera que

$$\underline{\xi}_i\,(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) = \xi_k\,(x_1, x_2, x_3).\ \boldsymbol{\beta}_{ik}\,, \qquad (2.10\text{-}2)$$

Entonces, derivando en ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \bar{x}_j} = \beta_{ik}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial \bar{x}_j} = \beta_{ik}\beta_{jm}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_m} \qquad (2.10\text{-}3)$$

que verifica la declaración.

Es común en la práctica el uso de la coma para denotar la derivada parcial. Así,

$$\xi_{i,j} \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}, \qquad \Phi_{,i} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \qquad \sigma_{ij,k} \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}.$$

Cuando nos limitamos a coordenadas cartesianas, $\mathbf{\Phi}_{,i}$, $\xi_{i,j}$ y $\boldsymbol{\sigma}_{ij,k}$ son tensores de grado 1,2 y 3 respectivamente, siempre que $\mathbf{\Phi}$, ξ y $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ sean tensores.

<u>Problemas</u>. En esta sección hay problemas que están presentes en las guías prácticas.

Vector Notation	Index Notation	Rank of Tensor
$\mathbf{v}$ (vector)	v_i	1
$\lambda = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ (dot, scalar, or inner product)	$\lambda = u_i v_i$	0
$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (cross or vector product)	$w_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$	1
grad $\phi = \nabla\phi$ (gradient of scalar field)	$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$	1
grad $\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v}$ (vector gradient)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$	2
div $\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$ (divergence)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$	0
curl $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ (curl)	$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$	1
$\nabla^2\mathbf{v} = \nabla\cdot\nabla\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}$ (Laplacian)	$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i}$	1