

CPSC 542F WINTER 2017

Convex Analysis and Optimization

Lecture Notes

SUMMER RESEARCH INTERNSHIP, UNIVERSITY OF WESTERN ONTARIO

GITHUB.COM/LAURETHTEX/CLUSTERING

This research was done under the supervision of Dr. Pauline Barmby with the financial support of the MITACS Globalink Research Internship Award within a total of 12 weeks, from June 16th to September 5th of 2014.

First release, August 2014

e cose di questo tipo...

La Cosmologia è quel ramo della scienza che studia l'universo nel suo insieme, per comprenderne l'origine e l'evoluzione, mediante strumenti osservativi, fisici e matematici. In particolare la cosmologia *planckiana* si occupa dell'universo nella sua evoluzione a partire dal tempo di Planck (10^{-43} s). Si parla di *evoluzione* dell'universo da poco più di 100 anni, quindi è una "scienza" giovane. I recenti risultati di Plank offrono le seguenti stime: $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ che qui verranno sottintese se non diversamente indicato. Per quanto riguarda la materia barionica, $\Omega_b = 0.05$, ossia il 95% dell'universo è a noi sconosciuto. Il modello cosmologico Standard attuale concorda in buona parte con le osservazioni: quindi *descrive* l'universo, ma non è in grado *spiegare* la fisica che ci sta sotto.

Nella prima parte del corso l'universo verrà trattato come un contenitore di fluido, nella seconda parte verrà trattata la formazione delle strutture attraverso piccole perturbazioni e instabilità gravitazionali. I principi del Modello Cosmologico Standard sono due:

Principio Cosmologico. L'universo (almeno su grande scala) è *omogeneo e isotropo*. Oggi per "grande scala" si intende circa 100 Mpc, dove l'isotropia è osservata attraverso la distribuzione delle galassie ad alto z, ma il concetto di "grande" dipende dal tempo cosmico.

La Gravità è ben descritta dalla Teoria della Relatività Generale. Le proprietà geometriche dello spazio sono legate alla quantità di energia/materia ivi contenuta. Dal principio precedente ne consegue che la distribuzione della materia è perfettamente omogenea e isotropa.

In passato era in voga il principio cosmologico *perfetto*: così come non esistono direzioni privilegiate, non esistono tempi privilegiati, ma è stato abbandonato in seguito alla scoperta della CMB.

1.1 Metrica

È necessaria una metrica per determinare una distanza tra due punti nello spazio-tempo. La definizione più generale affinché omogeneità e isotropia vengano preservate è:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

dove $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ e 0 è l'indice della componente temporale del quadrivettore. Se il valore $ds^2 = 0$ si parla di intervallo di tipo *luce* (la luce viaggia su geodetiche nulle), se è > 0 di tipo *tempo*, se è < 0 di tipo *spazio*. Applicando i principi del Modello Standard:

$$ds^2 = c dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.2)$$

ossia $g_{0i} = 0$ affinché non ci sia una direzione privilegiata nel tempo (mmm...) e $g_{00} = c^2$ affinché venga riprodotta la traiettoria di un fotone.

1.1.1 Superfici 2D

Esistono 3 tipi di superfici bidimensionali in base alla curvatura C :

| Superficie | C | Parametrizzazione | .. | |
|------------------|-------|---|---|---------------------------|
| Piano Cartesiano | 0 | $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ | $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ | $\rho = ar$ |
| Sup. Sferica | > 0 | $0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ | $dl^2 = R^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$ | $R = a, \sin \theta = r$ |
| Sup. Iperbolica | < 0 | $0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ | $dl^2 = R^2(\sinh^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$ | $R = a, \sinh \theta = r$ |

Parametrizzandole in coordinate cilindriche è possibile trovare una forma generale:

$$dl^2 = a^2 \left(r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right); \quad k = \begin{cases} 0 & \text{Cartesiano} \\ +1 & \text{Sferica} \\ -1 & \text{Iperbolica} \end{cases} \quad (1.3)$$

1.1.2 Superfici 3D

Analogamente, ponendo $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$, si ricavano le stesse relazioni per le superfici tridimensionali:

| Superficie | C | .. | |
|------------------|-------|--|-------------------------|
| Piano Cartesiano | 0 | $dl^2 = R^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$ | $R = a$ |
| Sup. Sferica | > 0 | $dl^2 = R^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2)$ | $R = a, \sin \chi = r$ |
| Sup. Iperbolica | < 0 | $dl^2 = R^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2)$ | $R = a, \sinh \chi = r$ |

Riconducibili alla seguente metrica, detta di **Robertson-Walker (universo omogeneo, isotropo e velocità finita c dei fotoni)**:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (\sin^2 \theta d^2 \varphi + d^2 \theta) \right); \quad k = \begin{cases} 0 & \text{Cartesiano} \\ +1 & \text{Sferica} \\ -1 & \text{Iperbolica} \end{cases} \quad (1.4)$$

In precedenza sono state fatte alcune sostituzioni strategiche, si definiscono quindi:

- a fattore di scala (o di espansione), che ha dimensioni di una lunghezza (la dimensionalità è contenuta esclusivamente in questo parametro) e può dipendere dal tempo ($a = a(t)$)
- k costante di curvatura

1.2 Distanze

Esistono diverse definizioni di ‘distanza’, che può dipendere

1.2.1 Distanza Propria

Si assume di fare una misura istantanea ($dt = 0$) della distanza tra sorgente e osservatore (non è possibile in relatività). Inoltre si può assumere $d\theta = d\phi = 0$ senza perdere di generalità, ossia ci si pone sulla traiettoria di un fotone che segue le (????).

$$d_{PR} = \int_0^r \frac{a dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = a \mathfrak{f}(r) \quad \mathfrak{f}(r) := \begin{cases} \arcsin r & k = +1 \\ r & k = 0 \\ \operatorname{arcsinh} r & k = -1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Se $a = a(t)$, allora $d_{PR} = d_{PR}(t)$ e si può derivare la velocità:

$$v_R = \frac{dd_{PR}}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} d_{PR} = H d_{PR}$$

$$H := \frac{\dot{a}}{a} \quad [\text{s}^{-1}]$$

In base a questa relazione, detta **legge di Hubble-Lemaitre**, esiste una velocità di recessione nella direzione radiale che è proporzionale alla distanza. Il **parametro di Hubble** H , che può dipendere dal tempo, quantifica questa proporzionalità. Si parla ambiguumamente di *costante di Hubble* riferendosi al fatto che, *oggi* in *ogni punto* dell'universo, possiede lo stesso valore H_0 . Facendone l'inverso si ottiene il tempo di Hubble, ossia l'età che l'universo avrebbe se si fosse espanso linearmente.

Si può verificare che la legge di Hubble è già implicita nel principio cosmologico, ma questo non ci compete.

Wong et al., 2019. Combines time delay data from 6 quasars to get $\mathbf{H_0 = 73.3 \pm 1.75 \text{ km/sec/Mpc}}$, in agreement with the SHOES Cepheid-based distance ladder measurement (74.03 ± 1.42) and disagreeing with the latest CMB model based value, $\mathbf{H_0 = 67.80 \pm 0.9 \text{ km/sec/Mpc}}$. On the other hand Freedman et al. get a distance ladder value of $\mathbf{H_0 = 69.8 \pm 0.8 \text{ (stat)} \pm 1.7 \text{ (syst) km/sec/Mpc}}$ using the tip of the red giant branch to calibrate Type Ia supernovae.

From: Ned Wright's Website

La *Distanza Propria* calcolata ad *oggi* è definita **Distanza Comovente (o Comobile)**:

$$d_C := d_{PR}(t = t_0) = a(t_0) \mathfrak{f}(r) = \frac{a(t_0)}{a(t)} d_{PR} \quad (1.6)$$

1.2.2 Redshift

Siano λ_e la lunghezza d'onda di un segnale emesso localmente da una sorgente e λ_{ob} quella ricevuta dall'osservatore si definisce *redshift* la quantità

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_{ob}}{\lambda_e} - 1 \quad (1.7)$$

Si consideri l'emissione consecutiva di due fotoni a t_e e $t_e + \delta t_e$ rispettivamente. Come già visto in precedenza si ha $ds^2 = 0$ e si può assumere $d\theta = d\varphi = 0$ senza perdere di generalità. Dall'equazione (4) si ottiene:

$$\int_{t_e}^{t_{ob}} \frac{c dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'}} = f(r) \equiv \int_{t_e + \delta t_e}^{t_{ob} + \delta t_{ob}} \frac{c dt}{a(t)} \quad (1.8)$$

dal momento che $f(r)$ dipende solo dalla geometria. Per δt_e e δt_{ob} piccoli (ossia $a = \text{cost}$ nel tempo di integrazione), ponendo $a_e = a$ e $a_{ob} = a_0$ (*0, oggi*), si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a}; \quad av_e = a_0 v_0; \quad 1+z = \frac{a_0}{a} \quad (1.9)$$

Possiamo quindi pensare z come la misura di quanto è variato il fattore di scala dal tempo dell'emissione del fotone. Un risultato analogo poteva essere ottenuto ipotizzando osservatore e sorgente in moto relativo (effetto Doppler), ma non esiste una velocità effettiva di allontanamento: è lo spazio che si dilata.

1.2.3 Distanza di Luminosità

Si definisce a partire dalla relazione tra luminosità $L[\text{erg/s}]$ e flusso l considerando i seguenti effetti:

- *Dilatazione temporale:* $\frac{dt}{dt_0} = \frac{a(t)}{a(t_0)}$
- *Redshift (cambiamento di energia):* $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{a(t)}{a(t_0)}$
- *Variazione della geodetica:* $r \rightarrow ar$

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2} \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2} \frac{1}{(1+z)^2} \quad d_L := a_0 r (1+z) \quad (1.10)$$

Distanza (di diametro) Angolare

Si definisce misurando le dimensioni angolari di un righello standard, ossia di una classe di oggetti astrofisici che hanno la stessa dimensione intrinseca D posti a distanza diversa (in realtà non esistono, *sigh*). Si parte dall'equazione (3) e si assume $dr = d\varphi = 0$ e $dt = 0$ (poichè si osservano le due estremità dell'oggetto contemporaneamente):

$$(D^2 =) ds^2 = a^2 r^2 d\theta^2 \rightarrow \frac{D}{d\theta} = ar \quad d_A := a(t) r \quad (1.11)$$

Confrontandola con la (12) si ottiene la **relazione di dualità**:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} \quad (1.12)$$

Queste due distanze sono definite diversamente, non ce ne è un “più fisica” dell’altra: la scelta va fatta in base al tipo di osservazione. Se si utilizza la luminosità intrinseca (es. cefeedi, SNe, ...)

per stimare la distanza, si applica la definizione d_L ; se esistesse un righello standard cosmologico (es. orizzonte cosmologico), si applica la definizione d_A . Questa relazione DEVE valer se l'universo fosse Robertson-Walker, mentre in un universo statico si avrebbe $d_A = d_L$.

Esistono altre definizioni di distanza: parallasse, moti propri e così via... Tutte tendono allo stesso valore per z piccoli.

Sommario:

$$\begin{aligned}d_{PR} &= a \mathfrak{f}(r) \\d_C &= \frac{a_0}{a} d_{PR} \\d_L &= a_0 r (1+z) \\d_A &= ar \\1+z &= \frac{a_0}{a}\end{aligned}$$

1.2.4 Risultati Osservativi

Tutte le distanze possono essere riscritte in funzione di un unico parametro $a = a(t)$ sviluppandolo in serie:

$$a(t) \simeq a_0 \left(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 \right) \quad H := \frac{\dot{a}}{a}; \quad q := -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (1.13)$$

dove q è detto *parametro di decelerazione* ed è adimensionale. Viene definito col - perché in passato i modelli sostenevano che l'espansione dell'universo fosse decelerata.

Hubble test applicato a d_L

Applicando lo sviluppo alla *distanza di luminosità* si ha:

$$d_L \simeq \frac{cz}{H_0} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - q_0) z \right) \quad (1.14)$$

da cui, applicando il logaritmo e sviluppando per $\log(1+x) \rightarrow \frac{x}{\ln 10}$, si ottiene la relazione:

$$\log d_L = \log cz - \log H_0 + 0.217(1 - q_0)z; \quad (1.15)$$

oppure, esplicitandola in magnitudini ($m - M = \mu = 5 \log \frac{d}{10 \text{pc}}$):

$$\underline{m} - \underline{M} = 25 + 5 \log cz - 5 \log H_0 + 1.086 (1 - q_0) z; \quad (1.16)$$

dalla quale tramite osservazioni e modelli (es. per le SNTN $M_V = -19$ è possibile calibrare H_0 localmente e q_0 a z più elevato).

Hubble test applicato alla densità di oggetti

In un universo euclideo si ha che la densità di oggetti $N \propto d_L^3$. Tutti gli oggetti con flusso superiore ad l saranno contenuti in un cubo di densità $N(< l) \propto l^{-\frac{3}{2}}$. Quindi si dovrà osservare la relazione:

$$\log N(> l) \propto -1.5 \log l \propto 0.6 m; \quad (1.17)$$

Rilassando il vincolo di universo euclideo è necessario calcolare l'integrale:

$$N(l) = 4\pi \int_0^r dr' \frac{r'^2}{\sqrt{1-kr'^2}} n(t(r')) a(t(r'))^3; \quad (1.18)$$

che si risolve assumendo che esista una classe di oggetti celesti per la quale la densità rimane costante nel tempo ($n_0 a_0^3 = n a^3$). In passato le prime stime furono fatte mediante le galassie, oggi sappiamo che non esistono oggetti che si comportano così per tempi cosmologici. In questa assunzione si può espandere la funzione integranda $\frac{r'^2}{\sqrt{1-kr'^2}}$ per $r \rightarrow 0$ per ottenere la relazione:

$$\log N(> l) = cost + 3 \log z - \frac{3}{2 \ln 10} (1 + q_0) z; \quad (1.19)$$

in cui H_0 è in pancia alla $cost$. Si noti che il numero di oggetti non diverge (cfr. Paradosso di Olbers), ci arriva informazione solo da una parte di Universo, quella in connessione causale con noi.

2.1 Equazioni di Friedmann

I modelli di Friedmann prevedono 3 ingredienti:

- Teoria della Relatività Generale (eq. di Einstein)
- Universo Omogeneo e Isotropo
- Fluido Perfetto

Le equazioni di campo di Einstein sono un set di 16 equazioni che descrivono l'interazione gravitazionale come il risultato dell' spazio-tempo curvato da massa ed energia.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Il membro di sinistra rappresenta la parte geometrica, mediante il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$, il tensore geometrico $g_{\mu\nu}$ e lo scalare di Ricci R . Il membro di destra rappresenta il contenuto di energia-materi dell'universo tramite il tensore energia-impulso $_{\mu\nu}$. Nei modelli di Friedmann che prevedono omogeneità e isotropia, il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è descritto dalla metrica di Robertson Walker. Inoltre, assumendo la condizione di fluido perfetto (no viscosità, no conduzione), il tensore energia-impulso dipende esclusivamente da pressione p e densità ρ :

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} + (p + \rho c^2)u_\mu u_\nu.$$

Delle 16 equazioni soltanto 2 non diventano delle identità e sono quelle tempo-tempo e spazio-spazio:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)a \quad (\text{tempo}); \quad a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2 = 4\pi G\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)a^2 \quad (\text{spazio}).$$

Per ricavarle ci vorrebbe una settimana di lezioni e calcoli per ottenere tramite la metrica tutti i simboli di Christoffel. Verranno ricavate in approssimazione newtoniana. In ogni caso si sostituisce \ddot{a} della prima equazione nella seconda e si ottengono la **Prima e Seconda Equazione di Friedmann**.

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a \quad (2.1)$$

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2 \quad (2.2)$$

Che possono essere legate tra loro dall'equazione di adiabaticità (perché l'universo non dovrebbe essere adiabatico?) nella forma $dU = -pdV$ ossia:

$$d(\rho c^2 a^3) = -pda^3 \quad (2.3)$$

Soltanto 2 di queste 3 equazioni sono comunque indipendenti tra di loro.

Proviamo a giustificarle in ambito newtoniano studiando a in funzione del tempo e utilizzando i due teoremi di Birkoff che sono gli equivalenti del teorema di Gauss in relatività generale.

Teoremi di Birkoff. (1) Il campo gravitazionale di un corpo sferico in una spazio vuoto è statico ed è descritto al suo esterno dalla metrica di Schwarzschild (quella di un oggetto puntiforme).

(2) Il campo gravitazionale prodotto da un guscio sferico (anche non statico) è descritto al suo interno dalla metrica di Minkowski (quella dello spazio piatto).

Si studia la dinamica di un punto P posto su una sfera di raggio $l = d_C \frac{a}{a_0} =: \tilde{D}a$ centrata in O . Affinché si possano trascurare gli effetti relativistici, il tempo di collasso libera $\tau_{ff} \propto (G\rho)^{-1/2}$ deve essere molto maggiore del *light crossing time* $\tau = l/c$. Parimenti, si possono considerare scale più grande del raggio di Schwarzschild (scala su cui l'energia di massa è in equilibrio con quella gravitazionale). Dall'equazione del moto di Newton si ha:

$$l \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{Gm}{l^2}l \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{l^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{GM}{l} \right) \quad \rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2 + cost$$

Si può ottenere la seconda equazione di Friedmann se si assume $cost = -kc^2$. Questa non è altro che l'equazione di conservazione dell'energia, per la quale $-kc^2$ rappresenta la somma dei contributi di energia cinetica e potenziale. Per $k = 0$ si ha un bilanciamento perfetto, per $k = +1$ domina il termine potenziale (collasso) e per $k = -1$ domina il termine cinetico (espansione).

La prima equazione di Friedmann si ricava in maniera analoga utilizzando un trucchetto relativistico $\rho_{eff} = \rho + \frac{3p}{c^2}$, ossia esiste una densità effettiva data dalla densità di massa e da un termine relativistico legato alla pressione. L'equazione si ricava passando dalla massa alla densità e utilizzando la densità effettiva. Si può dimostrare, per verificare che si è ancora in grado di fare i conti, che utilizzando l'equazione di adiabaticità si ottiene anche la seconda equazione di Friedmann.

In passato l'idea generale era che l'universo dovesse essere statico, ma le relazioni (?? e ??) prevedono un universo in espansione. Sarebbe pertanto necessario porre $\rho + 3p/c^2 = 0$, se non fosse che questa condizione è *unphysical* dato che pressione e densità dovrebbero avere un segno discorde. Per cui...

Einstein: «Grazie mille Sig. Friedmann, ho capito che c'è qualcosa che non va nelle mie equazioni». Senza Fonte.

... Einstein, nel 1921, introdusse il termine $-\Lambda g_{\mu\nu}$ [L²]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Ancora oggi non è chiaro se il termine $-\Lambda g_{\mu\nu}$ sia legato alla geometria dello spazio-tempo come sosteneva Einstein (teoria della gravità modificata) o alla parte energetica (energia oscura, noi votiamo per lei). Il tensore energia-impulso viene modificato in: $\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$. Lambda contribuisce in modo negativo alla pressione e positivo alla densità e le equazioni di Friedmann diventano:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\tilde{\rho} + \frac{3\tilde{p}}{c^2}\right)a \quad \tilde{p} = p + p_\Lambda = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (2.4)$$

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi}{3}G\tilde{\rho}a^2 \quad \tilde{\rho} = \rho + \rho_\Lambda = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (2.5)$$

2.1.1 Modello di Einstein

Il modello di Einstein soddisfa le seguenti richieste:

- $\dot{a} = \ddot{a} = 0$
- Universo di sola materia con $p = p_b = 0$

Applicando questi vincoli alle equazioni di Friedmann (??) e utilizzando le definizioni di $\tilde{\rho}$ e \tilde{p} si ottiene:

$$\tilde{p} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} = -\frac{kc^4}{8\pi Ga^2} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \frac{k}{a^2} \quad [\text{L}^{-2}]$$

che mostra come, nel modello di Einstein, Λ sia legata al parametro di curvatura. Inoltre si può calcolare qual è la densità ordinaria ρ :

$$\rho = \tilde{\rho} - \rho_\Lambda = \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2} - \frac{kc^2}{8\pi Ga^2} = \frac{kc^2}{4\pi Ga^2}$$

Questo valore, per avere senso fisicamente, deve essere positivo ossia si deve verificare che $k = +1$. Infine si può calcolare qual è il valore di Λ che rende l'universo statico:

$$\Lambda_e = \frac{4\pi G\rho}{c^2}$$

Quindi quello di Einstein è un universo di materia con **geometria sferica** e diventa statico allorché $\Lambda = \Lambda_e$.

Per soddisfare il pregiudizio dell'epoca (universo eterno e statico) si è complicato l'equazione in modo arbitrario (pur conservando linearità, ...) e ha dovuto inserire una richiesta cavillosa (la cosmologica deve avere un valore ben preciso). Nel 1929 Hubble scoprì l'espansione dell'universo, Einstein prese una penna e cancellò la Λ .

2.1.2 Modello di De Sitter

Il modello di De Sitter, seppur stravagante, tornerà utile più avanti per modellare il periodo dell'inflazione. Si basa sulle seguenti assunzioni:

- Universo completamente vuoto di materia: $\rho = 0$ e $p = 0$;
- Universo piatto: $k = 0$;
- L'unico contributo è quello della $\Lambda \neq 0$.

Tramite le definizioni di $\tilde{\rho}$ e \tilde{p} si ottiene:

$$\tilde{p} = -\tilde{\rho}c^2$$

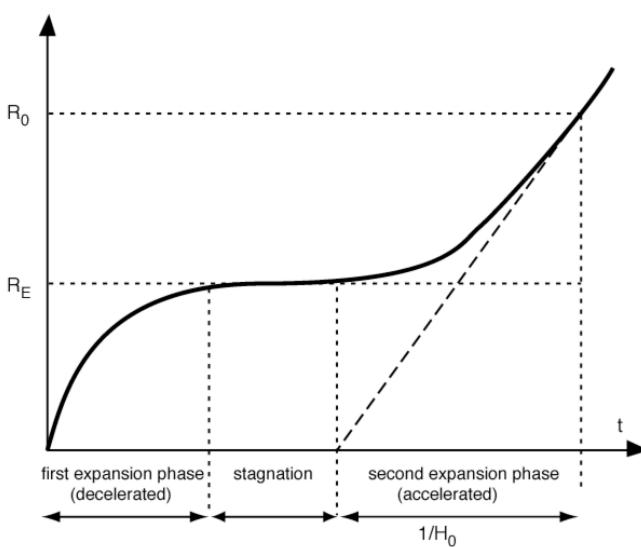
Ritroveremo queste equazioni per la descrizione del vuoto (interpretazione moderna della costante cosmologica). Utilizzando la prima equazione di Friedmann ?? e la definizione ρ_Λ si ottiene:

$$a = a_0 e^{H dt} \quad H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c = \text{cost} \quad (2.6)$$

Quindi quello di De Sitter è un universo privo di materia con geometria piatta che evolve con accelerazione esponenziale per un tempo infinito.

Non esiste un principio fisico che afferma che l'energia del vuoto sia 0. Ogni qual volta si è trovato un problema nel Modello Standard, si è trovato la soluzione aggiungendo la costante cosmologica (con un parametro in più i dati fittano meglio). Come negli anni '60 in cui si è scoperto un eccesso di quasar a $z = 2$, giustificato da Lemaître tramite la reintroduzione Λ .

The 1960s also saw the discovery of puzzling new astronomical entities, extremely luminous objects apparently lying at tremendous distance (Schmidt 1963, 1965; Schmidt and Matthews 1964; Sandage 1965). Two unusual aspects of the entities (soon known as quasi-stellar objects or ‘quasars’) were that they did not appear to conform to the standard relation between redshift and distance obeyed by ordinary galaxies, while they exhibited a preponderance of redshifts at around the large value of $z = 2$ (Hoyle and Burbidge 1966; Longair and Scheuer 1967; Burbidge and Burbidge 1967). The discovery prompted a new appraisal of Lemaître’s hesitating model of the cosmos, with a number of physicists interpreting the phenomenon as evidence for a stagnant phase in cosmic expansion due to a positive cosmological constant. Lemaître proposed his famous hypothesis of a universe that originated as a ‘primeval atom’ (Lemaître 1931b; Kragh and Lambert 2007). With such cosmic origins in mind, he noted that a judicious choice of value for the cosmological constant could give a cosmic expansion in three stages; an initial phase during which the expansion is de-accelerated by gravity, a ‘loitering’ phase in which the de-acceleration is balanced by the repulsive influence of the cosmic constant, and a final phase in which the repulsion becomes dominant (Lemaître 1931c, 1931d, 1933). Here the cosmic expansion was governed by a cosmological constant given $\Lambda = \Lambda_e(1 + \varepsilon)$ where the adjustable parameter ε determined the length of the stagnation period. A schematic of this model, known as the ‘hesitating’ or ‘loitering’ universe is shown below.



From: cita O’Raif & Luminet 2011

In realtà si è scoperto che avere i quasar a $z = 2$ era un effetto dovuto a bias di selezione e la costante cosmologica è stata nuovamente messa da parte. Infine negli anni ’70 si è osservato tramite le SNe che l’espansione dell’universo oggi è accelerata e ciò è giustificabile con una costante cosmologica che rende $\ddot{a} > 0$ (contribuendo negativamente alla pressione).

2.2 Soluzioni analitiche del Modello di Friedmann

2.2.1 Parametro di Densità e Geometria

Manipolando le equazioni di Friedmann è possibile introdurre numerosi parametri strategici per studiare i legami tra le variabili fondamentali della cosmologia.

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= -\frac{4\pi}{3} G \left(\tilde{\rho} + \frac{3\tilde{p}}{c^2} \right) a & H &:= \frac{\dot{a}}{a} \\ \dot{a}^2 + kc^2 &= \frac{8\pi}{3} G \tilde{\rho} a^2 & q &:= -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \\ d(\rho c^2 a^3) &= -pd a^3 & \rho_{cr} &:= \frac{3H^2}{8\pi G}\end{aligned}$$

Dividendo la seconda equazione per a_0^2 e inserendo i parametri H_0 e ρ_0 si ottiene:

$$H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{cr,0}} \right) = -\frac{kc^2}{a_0^2} \quad (2.7)$$

Il segno di k è determinato dall’anti-segno della parentesi tonda. Si definisce **parametro di densità** il valore:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad \Omega_0 \begin{cases} = 1 & \rho_0 = \rho_{cr,0} & k = 0 & piatto \\ > 1 & \rho_0 > \rho_{cr,0} & k = +1 & sferico \\ < 1 & \rho_0 < \rho_{cr,0} & k = -1 & iperbolico \end{cases} \quad (2.8)$$

Affinché l'universo sia piatto e non curvo, il parametro di densità deve avere un valore estremamente preciso (per questo motivo è detta densità *critica*).

Le misure ci dicono che:

$$\rho_{cr,0} \simeq 1.9 \cdot 10^{-29} h^2 \quad [\text{g cm}^{-3}] \quad (2.9)$$

$$\simeq 2.775 \cdot 10^{11} h^2 \quad [\text{M}_\odot \text{ Mpc}^{-3}] \quad (2.10)$$

Per determinare la geometria dell'universo bisogna conoscere Ω_0 , misurando la densità oggi e confrontandola con quella critica. Nel calcolo della densità vanno considerate tutte le componenti. Nell'universo attuale materia ed energia oscura dominano, possiamo descrivere l'universo come fluido costituito da due componenti. Per far ciò si utilizzano le definizioni di $\tilde{\rho}$ e \tilde{p} nell'equazione di Friedmann:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a + \frac{\Lambda c^2}{3} a$$

Grazie al secondo termine si potrebbe avere un'accelerazione positiva. Dividendo l'altra equazione per a_0^2 si ha:

$$H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{cr,0}} - \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{cr,0}} \right) = -\frac{kc^2}{a_0^2} \quad (2.11)$$

da cui introducendo il parametro di densità totale:

$$H_0^2 (1 - \Omega_{TOT}) = -\frac{kc^2}{a_0^2} \quad \Omega_{TOT} = \Omega_0 + \Omega_{0\Lambda} \quad (2.12)$$

La curvatura è ora definita da quanto dal somma delle due componenti differisce dall'unità (ocio: $\Omega_0 = \Omega_{0m}$ ossia in questo caso Ω_0 è riferito alla materia).

2.2.2 Equazione di Stato

L'Universo è costituito da 3 principali componenti:

- **Materia non relativistica.** $p_m = nk_B T = \frac{\rho_m}{m_p} k_B T \approx 0 \quad (\rho_m \approx 0)$
- **Radiazione o Materia relativistica.** $p_R = \frac{1}{3} \rho_R c^2$
- **Costante Cosmologica.** $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$

In cosmologia si definisce quindi il termine w per l'equazione di stato:

$$p = w \rho c^2 \quad \rightarrow \quad c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = w c^2 \quad w = \begin{cases} 0 & \text{materia} \\ 1/3 & \text{comp.radiativa} \\ -1 & \text{cost.cosm} \end{cases} \quad (2.13)$$

Affinché la velocità del suono c_s rimanga minore di quella della luce c , bisogna che $w < 1$ (a $w = 1$ si ha quella conosciuta come *stiff matter*). Inoltre, la positività della pressione nella fisica ordinaria richiede $w > 0$. Quindi il **parametro dell'equazione di stato** w nella fisica ordinaria può assumere un valore $0 < w \leq 1$ (intervallo di Zeldovich).

Armati di questo, lo si applica all'equazione di adiabaticità, si sviluppa il differenziale e si integra per separazione di variabili:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \quad \rightarrow \quad \rho \propto z^\alpha = \alpha \begin{cases} 3 & \text{materia} \\ 4 & \text{comp.radiativa} \\ 0 & \text{cost.cosm} \end{cases} \quad (2.14)$$

Gli esponenti non ci sorprendono: a^{-3} nel caso della materia è come dire Vol^{-1} , nel caso della componente relativistica si aggiunge un altro a^{-1} dovuto al redshift.

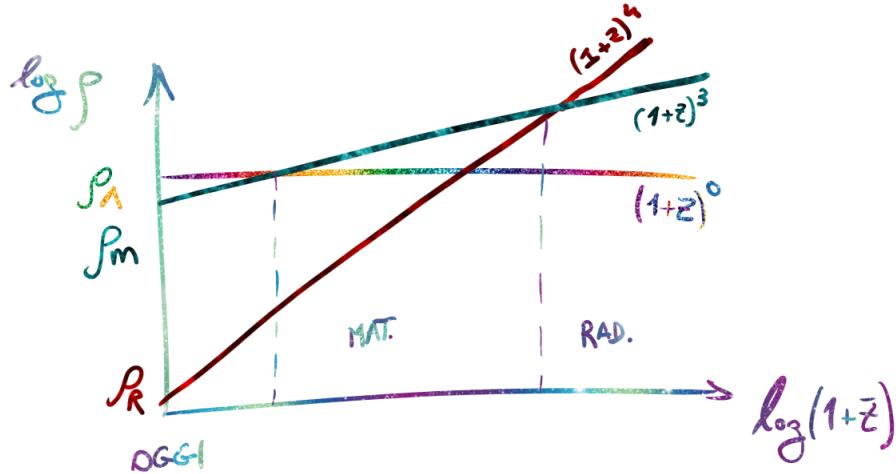


Figura 2.1: Andamento della densità delle tre componenti al variare del redshift.

Sostituendo il valore della densità della (2.14) nell'equazione di Friedmann e facendo qualche operazione cosmatematica si ottiene:

$$H^2 = H_0^2 (1+z)^2 [1 - \Omega_0 + \Omega_0 (1+z)^{1+3w}] \quad (2.15)$$

che regola l'evoluzione del tempo del parametro di Hubble (la geometria è in Ω_0). In universo con più componenti assume la forma generale:

$$H^2 = H_0^2 (1+z)^2 \left[1 - \sum_i \Omega_{0i} + \sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{1+3w_i} \right] = H_0^2 E(z)^2 \quad (2.16)$$

Per l'universo attuale bisogna includere Ω_m e Ω_Λ .

Si assume ora che ci sia una sola componente, la materia, per cui $0 \leq w \leq 1$. Della prima equazione di Friedmann, \ddot{a} restituisce necessariamente un valore strettamente negativo, ossia la funzione $a(t)$ ha la concavità verso il basso e non può avere un flesso. Inoltre sappiamo osservativamente che l'universo è in espansione $\dot{a}_0 > 0$. La funzione $a(t)$ è quindi monotona crescente e tornando indietro nel tempo si ha che inevitabilmente interseca l'asse del tempo, ossia esiste un $t = 0$ (un inizio del tempo, "Big Bang"). Solo se esistesse un fluido avente $w < -1/3$ si potrebbe avere un flesso. Il Big Bang è accompagnato da condizioni fisiche antipatiche, ossia per $t \rightarrow 0$ si avrebbe: $a \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$. Questo è dovuto al fatto che si entra in regimi di cui non si conoscono le leggi fisiche, il limite di validità è il Tempo di Planck $\approx 10^{-43}$ s. Per evitare il Big Bang: universo non omogeneo e isotropo (no RW), fluido non perfetto, componente con $w < -1/3$ (c'è, ma si vedrà che non è sufficiente).

2.2.3 Universo di Einstein - De Sitter

Il modello di Einstein - De Sitter caratterizza un universo piatto $k = 0$ ($\Omega_0 = 1$). Le soluzioni sono estremamente importanti perché valgono per buona parte dell'universo. Partendo dall'equazione

(??) si ottengono le seguenti relazioni per i parametri principali:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (2.17)$$

$$t = t_0 (1+z)^{\frac{-3(1+w)}{2}} \quad (2.18)$$

$$H = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t} = \frac{H_0 t_0}{t} = H_0 (1+z)^{\frac{3(1+w)}{2}} \quad (2.19)$$

$$q = \frac{1+3w}{2} > 0 \quad (2.20)$$

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{H_0} \quad (2.21)$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2} = \rho_0 \frac{1}{6\pi G (1+w)^2} \frac{1}{t^2} \quad (2.22)$$

L'universo è in espansione monotona crescente (ma decelerata in modo costante) ed è infinito. Verso il Big Bang $H \rightarrow \infty$, inoltre all'aumentare di w (pressione) \ddot{a} diventa più basso, fenomeno contrario al concetto di "scoppio"! Infatti il nome "Big Bang" era stato assegnato al modello da coloro che lo sfottavano. Il tempo dell'universo oggi (età) non è esattamente $1/H_0$ per l'effetto della decelerazione dell'espansione.

| $w = 0$ (materia) | $w = \frac{1}{3}$ (radiazione) |
|--|---|
| $a \propto t^{2/3}$ | $a \propto t^{1/2}$ |
| $t = t_0 (1+z)^{-3/2}$ | $t = t_0 (1+z)^{-2}$ |
| $H = H_0 (1+z)^{3/2} = \frac{2}{3t}$ | $H = H_0 (1+z)^2 = \frac{1}{2t}$ |
| $q = 1/2$ | $q = 1$ |
| $t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}$ | $t_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{H_0}$ |
| $\rho = \rho_0 \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}$ | $\rho = \rho_0 \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2}$ |

2.2.4 Universi Curvi

Per analizzare il comportamento dei principali parametri cosmologici nel caso di universi non piatti, si modifica l'equazione (??) come segue:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \left[(1 - \Omega_0) + \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} \right]$$

Il primo termine nella parentesi quadra, il termine di curvatura, è costante. Il secondo dipende dal tempo, quindi si studia per quale valore di a i due si equivalgono:

$$a^* : \quad |1 - \Omega_0| = \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a^*} \right)^{1+3w} \quad \leftrightarrow \quad z^* : \quad |\Omega_0^{-1} - 1|^{\frac{1}{1+3w}}$$

Quando $a \ll a^*$ oppure $z \gg z^*$ (vicino al Big Bang), l'equazione diventa:

$$\dot{a} = a_0 H_0 \Omega_0^{1/2} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{1+3w}{2}}$$

un fattore costante $\Omega_0^{1/2}$ in più rispetto al modello Einstein De Sitter, ossia tutti gli universi curvi si comportano come quello piatto vicino al Big Bang. Un'eventuale curvatura diventerebbe significativa a $|1+z^*| = |\Omega_0^{-1} - 1|$. Per esempio, $z^* = 10$ per $\Omega_0 = 0.1$ e $z^* = 2$ per $\Omega_0 = 0.3$.

Messaggio. Anche se fosse curvo, possiamo assumere l'universo piatto per buona parte della sua storia (almeno fino a $z \approx 10$). Per studiare l'eventuale curvatura è necessario fare osservazioni vicine a oggi.

Quando $a \gg a^*$ oppure $z \ll z^*$, si distinguono quindi i due casi

Universi Aperti

In questo caso $\Omega_0 < 1$, quindi \dot{a} è strettamente positiva. Dato che osservativamente $\dot{a}_0 > 0$, l'espansione è monotona crescente e vale:

$$\dot{a} = a_0 H_0 \sqrt{1 - \Omega_0} = \text{cost} \quad (2.23)$$

$$a = a_0 H_0 \sqrt{1 - \Omega_0} t \propto t \quad (2.24)$$

$$H = 1/t \quad (2.25)$$

$$q = 0 \quad (2.26)$$

$$\rho = \rho_{cr} \Omega_0 \left(H_0 (1 - \Omega_0)^{1/2} t \right)^{-3(1+w)} \quad (2.27)$$

In particolare si ha un'espansione lineare libera (non decelerata come nel modello EdS), quindi a cresce più velocemente.

Universi Chiusi

In questo caso $\Omega_0 > 1$, quindi può esistere un valore di a per cui $\dot{a} = 0$, ossia la crescita dell'universo si arresta. In particolare questo succede per:

$$\dot{a} = 0 \quad \rightarrow \quad a_{max} = a_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \right)^{\frac{1}{1+3w}}; \quad \rho_{min} = \rho_0 \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right)^{\frac{3(1+w)}{1+3w}}$$

Questo modello prevede un'espansione fino ad a_{max} e una contrazione con andamento simmetrico (Big Crunch). Per motivi di *quantum cosmology* si potrebbe evitare il completo collasso, generando così quelli conosciuti come universi pulsanti.

Come sommario si illustrano nella seguente figura le tre soluzioni previste per un universo di Friedmann a una sola componente.

Le soluzioni analitiche si ricavano soltanto per il modello di Einstein De Sitter, ma nel caso di universi curvi si possono trovare delle soluzioni in forma parametrica, ossia sfruttando la relazione:

$$\begin{cases} y = f(y') \\ y' = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \int dp \frac{1}{p} \frac{df}{dp} \\ y = f(p) \end{cases}$$

Non si troverà quindi la relazione formale di y rispetto a x , ma saranno entrambi scritti in funzione di un terzo parametro p . Nel nostro linguaggio x sarà il tempo e y il fattore di scala, quindi la relazione tra a e t si studierà attraverso un terzo parametro.

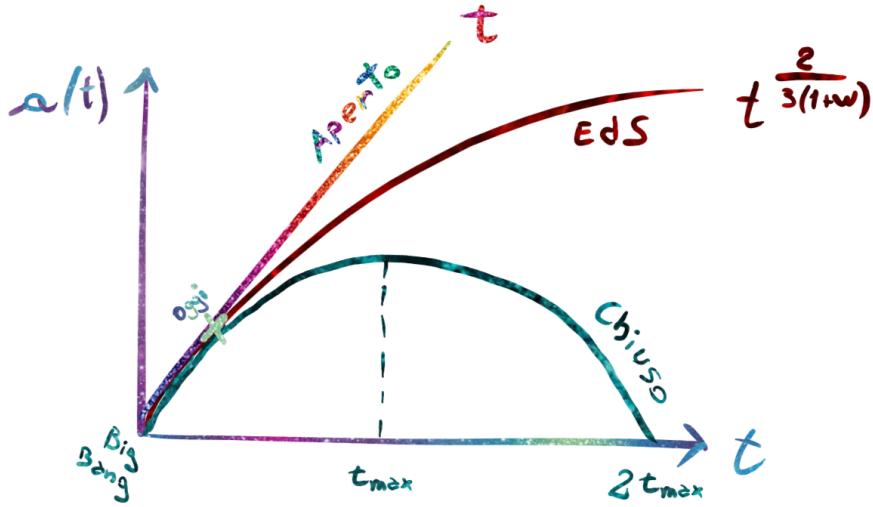


Figura 2.2: Andamento di a al variare del tempo per le tre geometrie nel caso di universo di Friedmann. Tutte e tre sono vincolate ad avere un Big Bang per le assunzioni del modello.

Si assume $c = 1$ e $w = 0$, ossia universi di materia (di polvere) e si sostituisce la relazione (??) nella seconda equazione di Friedmann (??). Definendo il parametro $p := \dot{a}$ e la costante $A := 8\pi G \rho_0 a_0^3/3$, si ottiene:

$$\begin{cases} t = - \int dp \frac{2A}{(p^2+k)^2} \\ a = \frac{A}{p^2+k} \end{cases}$$

Si studia il caso in cui $k = +1$ ponendo $p := \tan \theta \rightarrow dp = d\theta / \cos^2 \theta$ e $2\theta = \pi - \alpha$:

$$\begin{cases} t = \frac{A}{2}(\alpha - \sin \alpha) \\ a = \frac{A}{2}(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

Applicando le definizioni di ρ_{cr} , Ω_0 e la relazione $a_0^2 H_0^2 = (\Omega_0 - 1)^{-1}$ (dalla ??) si ottengono le soluzioni, che sono tutte le possibili combinazioni della coppia (a, t) al variare del parametro α :

$$\begin{cases} a = \frac{a_0}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos \alpha) \\ t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\alpha - \sin \alpha) \end{cases} \quad (2.28)$$

Si ha $\dot{a} > 0$ per $0 < \alpha < \pi$, dopodiché la curva si richiude simmetricamente. L'età dell'universo prevista per questo modello è:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left(\arccos \left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \right) - \frac{2}{\Omega_0} \sqrt{\Omega_0 - 1} \right)$$

Si può verificare che l'età dell'universo (a parità di H_0) è sempre minore rispetto a quella dell'universo EdS :

$$t_0 = \mathfrak{C} \frac{1}{H_0} \quad \mathfrak{C} < 2/3 \quad (2.29)$$

In modo simile è possibile trovare le soluzioni parametriche per gli universi di materia nel caso in cui $k = -1$ ($\Omega_0 < 1$):

$$\begin{cases} a = \frac{a_0}{2} \frac{\Omega_0}{1-\Omega_0} (\cosh \alpha - 1) \\ t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0-1)^{3/2}} (\sinh \alpha - \alpha) \end{cases} \quad (2.30)$$

$$t_0 = \mathfrak{C} \frac{1}{H_0} \quad \mathfrak{C} > 2/3 \quad (2.31)$$

Come già osservato in precedenza, si ha un'espansione infinita con un comportamento asintotico $a \propto t$.

Tutte le soluzioni ricavate in questo paragrafo, che siano analitiche o parametriche, valgono soltanto nel caso in cui si considera un universo a un'unica componente. Per studiare l'effetto di più componenti le equazioni rimangono sotto forma di integrali e vanno risolte numericamente.

Sommario («Ok quello che stiamo facendo?»):

- Soluzioni dei modelli di Friedmann per una sola componente;
- Soluzioni analitiche per EdS;
- Soluzioni parametriche per universi curvi di sola materia.

2.2.5 Modelli a due componenti

Dall'equazione (??) si esplicita la quantità $\dot{a} = a_0 H_0 E / (1+z) = a H_0 E$ e la si inserisce nella relazione (quirefffs):

$$f(r) = \int_a^{a_0} \frac{c \, da'}{a' \dot{a}'} = \frac{c}{H_0} \int_a^{a_0} \frac{da'}{E \, a'^2} \quad (2.32)$$

dove $E(z) = \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}$ per $\Omega_{tot} = 1$. Nel caso di universo piatto, essendo $f(r) = r$ si ha:

$$d_A = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \quad (2.33)$$

altrimenti è necessario applicare un arcoseno o un arcoseno iperbolico. A questo punto "si fa partire il cronometro", ossia si studia il legame tra tempo e redshift. Dalla (??) per la sola materia, $w = 0$, si ha:

$$\dot{a} = a_0 H_0 \sqrt{\Omega_0 z + 1} \quad (2.34)$$

Tramite la relazione $1+z = a_0/a$ si ottiene il legame differenziale tra t e z e integrando:

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{1}{H_0} (1+z')^{-2} (\Omega_0 z' + 1)^{-1/2} dz' \quad (2.35)$$

$$\approx \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_0}} \frac{2}{3} z^{-3/2} \quad per \quad \Omega_0 z \gg 1 \quad (2.36)$$

Siamo felici perché vicino al Big Bang (curvatura ininfluente) ritroviamo la dipendenza prevista dal modello EdS. Per più di un componente bisogna integrare la formula generale:

$$dt = -\frac{1}{H_0 E} \frac{1}{(1+z)} dz \quad (2.37)$$

La quantità "complementare" all'età dell'universo oggi è il **Lookback Time**:

$$t_{LB}(z) = t_0 - t(z)$$

Sia la densità, sia la densità critica possono dipendere dal tempo, a maggior ragione anche Ω non sarà costante nel tempo. Dalle equazioni (??) e (??) si può calcolare:

$$\Omega(z) = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}(t)} \quad \rightarrow \quad \Omega^{-1}(z) - 1 = \frac{\Omega_0^{-1} - 1}{(1+z)^{1+3w}}$$

che misura quanto dista dall'unità $\Omega(z)$ rispetto a quanto dista dall'unità oggi.

Se oggi Ω_0 vale 1 (universo piatto), $\Omega(t)$ sarà sempre stato e sempre sarà 1. Se $\Omega_0 > 1$, allora $\Omega(z) > 1 \quad \forall z$ e se $\Omega_0 < 1$, allora $\Omega(z) < 1 \quad \forall z$. L'universo non può cambiare la sua geometria durante la sua evoluzione.

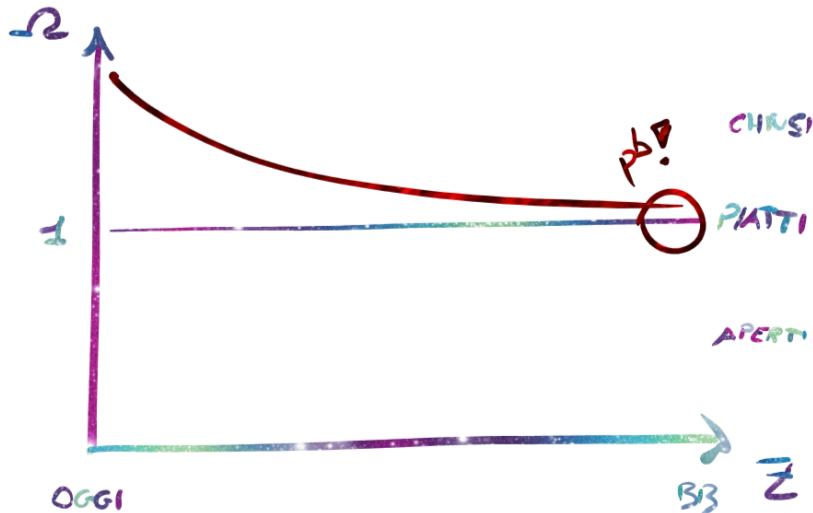


Figura 2.3: Andamento di Ω al variare del redshift per le tre geometrie nel caso di universo di Friedmann. Tutte e tre verso il Big Bang tendono a $\Omega = 1$.

Se si ha più di una componente, la formula generale da utilizzare è:

$$\Omega(z) = \Omega_0 \frac{(1+z)^{3(1+w)}}{E(z)^2} \quad (2.38)$$

Problema della Piattezza. Oggi si misura $\Omega_0 = 1$ e già negli anni '70 si sapeva che $\Omega_0 \approx 1$. Ma dal Big Bang è passato talmente tanto tempo che, per avere oggi questo valore, doveva inizialmente valere 1 con una precisione di 10^{-60} (valore estremamente innaturale).

2.3 Orizzonte Cosmologico

Ci si aspetterebbe che l'universo in connessione causale con noi osservatori sia $c\Delta t$, ma l'universo si espande! Si definisce quindi il *raggio dell'orizzonte cosmologico (o delle particelle)* la quantità:

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} \quad (2.39)$$

Per $a \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ pare accadere che $R_H \rightarrow \infty$ e questo implicherebbe che tutto l'universo al Big Bang fosse in connessione causale (che senso avrebbe definire un raggio?), ma questo non succede. Si può verificare mediante un opportuno cambio di variabile e l'utilizzo dell'equazione (??):

$$R_H(a) = a(t) \int_0^{a(t)} \frac{c da'}{a' da'} = \frac{2}{1+3w} \frac{c}{H_0 \Omega_0^{1/2}} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{3(1+w)}{2}}$$

Quindi il raggio dell'orizzonte per $a \rightarrow 0$ non diverge. Si utilizza una sola componente, infatti come discuteremo a breve vicino al Big Bang domina soltanto la componente radiativa. Inoltre si ha:

$$R_H(t) = \frac{2}{1+3w} \frac{c}{H_0} \frac{t}{t_0} = 3ct \left(\frac{1+w}{1+3w} \right) = \begin{cases} 3ct & w=0 \\ 2ct & w=\frac{1}{3} (BB) \end{cases} \quad (2.40)$$

Quindi cresce più velocemente di ct , ossia mette in comunicazione regioni più vaste di quanto ci aspettavamo. R_H rappresenta la scala su cui bisogna considerare le interazioni causali (microfisica), al suo esterno agisce solo la gravità.

Un altro modo per definire l'orizzonte è la **Sfera di Hubble** (o raggio dell'orizzonte effettivo), definita come la distanza che percorre la luce in un'unità di tempo tipica del tempo di espansione dell'universo ($1/H$):

$$\tilde{R}_H(t) = c \tau_{exp} = \frac{c}{H} \quad (2.41)$$

Mentre la definizione precedente era una quantità integrale sulla sfera di espansione temporale, in questo caso si ha un valore istantaneo definito da $H(t)$. Per l'universo primordiale vale $R_H \equiv \tilde{R}_H(t)$. Nel caso di universi EdS si ha:

$$\tilde{R}_H(t) = \frac{1+3w}{2} R_H$$

Il tempo tipico di espansione è fondamentale per decidere quali processi, in determinati periodi della storia dell'universo, possono essere considerati trascurabili o meno.

Si definisce invece *raggio dell'orizzonte degli eventi* la quantità:

$$R_H(t) = a(t) \int_t^{\infty} \frac{c dt'}{a(t')} \quad (2.42)$$

e stabilisce il raggio delle regioni dell'universo che al tempo t entrano in connessione causale con l'osservatore. Questa quantità non è solitamente utilizzata in cosmologia. Tutti i modelli di Friedmann prevedono un Big Bang e un orizzonte cosmologico finito.

2.4 Componenti Osservate nell'Universo

Galassie

La funzione di luminosità di Schechter provvede una descrizione parametrica della densità spaziale delle galassie in funzione della loro luminosità.

$$\phi(L) = \frac{\phi_*}{L_*} \left(\frac{L}{L_*} \right)^{-\alpha} e^{-L/L_*}$$