Rapport TS224

Nicolas Bousquet, Kylian Ferron

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce projet était d'utiliser la puissance véhiculée par des signaux afin de les caractériser. Nous avons d'abord estimé la puissance véhiculée par un signal à l'aide de méthodes utilisant la transformée de Fourier comme le périodogramme et le spectre de puissance, puis nous avons utilisé la méthode de Capon qui elle n'utilise pas la transformée de Fourier. Enfin, nous avons comparé ces différentes méthodes face à l'ajout d'un bruit blanc gaussien.

Afin d'illustrer nos propos dans ce rapport, nous avons travaillé sur un processus aléatoire stationnaire, auquel on a appliqué une modulation PPM avec un facteur de suréchantillonnage de 20. Ce signal a déjà été utilisé dans le projet de communications numériques (TS229), nous avions déjà calculé sa DSP théorique que nous allons pouvoir utiliser comme référence pour nos différentes méthodes d'estimation.

Ainsi :

$$DSP_{théorique}(f) = \frac{\delta(f)}{4} + \frac{{T_s}^3(\pi f)^2}{16} sinc^4(\frac{T_s}{2} f)$$

avec $T_s = 10^{-6}s$ le temps symbole.

1. Approche utilisant la transformée de Fourier

1.1 Périodogramme non moyenné

Le périodogramme permet une estimation simple de la densité spectrale de puissance en prenant le carré de la transformée de Fourier. Dans le cadre du périodogramme non moyenné, nous calculons le spectre de puissance d'une seule réalisation du processus.

Soit $s(n)$ un signal de longueur N :

$$\hat{S}_{per}(f) = \frac{1}{N} TF\big(s(n)\big)^2$$

$$= \frac{1}{N} (\sum_{n=1}^{N} s(n) e^{-j2\pi n \frac{f}{N}})^2$$

Cette méthode n'a d'intérêt que pour un processus stationnaire. En effet, la transformée de Fourier n'est pertinente que pour des processus dont les propriétés spectrales ne changent pas au cours du temps.

Cette estimation de la DSP est particulièrement imprécise et ne peut être considérée comme fiable. En effet, n'utilisant qu'une seule réalisation du processus, elle est beaucoup trop sujette aux aléas qui sont propres à cette réalisation.

Voici ce que l'on obtient comme estimation de la DSP avec notre signal d'étude.

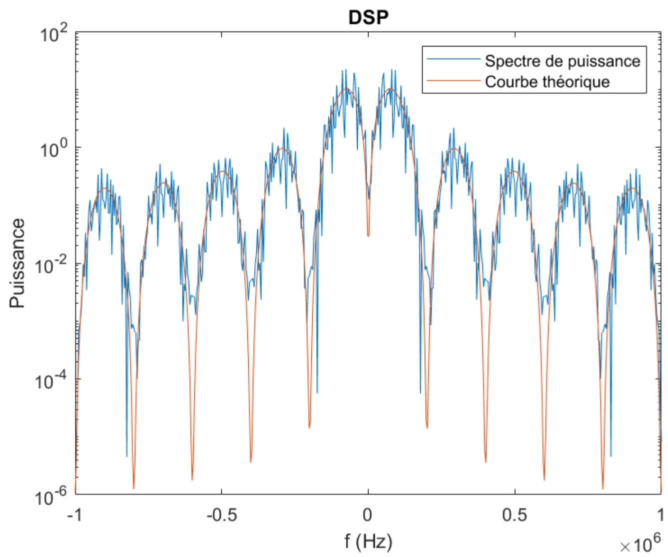

Figure 1 : Estimation de la DSP avec le spectre de puissance (Nfft = 512)

Pour pallier ces imprécisions, on peut augmenter le nombre de points contenus dans la transformée de Fourier. Cela aura pour conséquence d'affiner l'intervalle entre deux fréquences sur l'axe des abscisses. Si la longueur du signal est trop courte, on peut l'augmenter artificiellement avec du zero-padding. En effet, le nombre de points contenus dans la transformée de Fourier ne peut être supérieur au nombre de points contenus dans le signal de base. Cependant, ajouter des zéros à la fin de ce dernier augmentera sa longueur sans en changer le contenu fréquentiel. Il sera alors possible d'augmenter le nombre de points contenus dans la transformée de Fourier. Par ailleurs, il peut être utile de faire du zero-padding jusqu'à ce que la longueur du signal soit égale à une puissance de 2 afin de pouvoir utiliser la transformée de Fourier rapide (FFT).

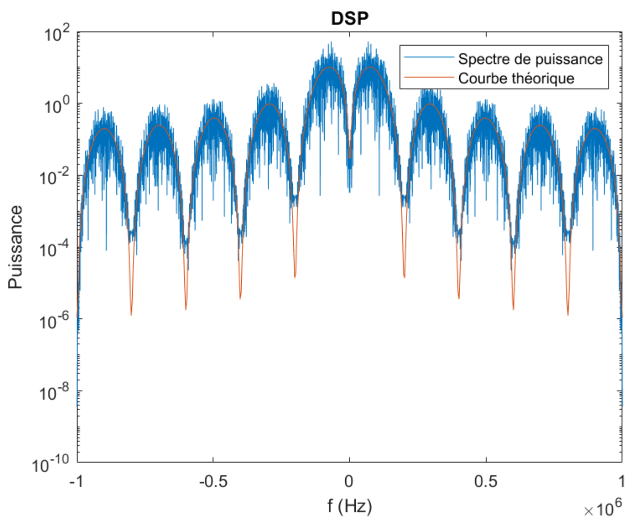

Figure 2 : Estimation de la DSP avec le spectre de puissance (Nfft = 4096)

La puissance estimée (l'aire sous la courbe, sur 512 points) est de 512 W avec la méthode des trapèzes.

1.2 Méthode de Daniel

La méthode de Daniel consiste à lisser la courbe obtenue avec la méthode précédente à l'aide d'une fenêtre glissante.

Formule mathématique : soit un signal $s(n)$ stationnaire de longueur de longueur N et une fenêtre rectangulaire de longueur $2D$:

$$\hat{S}_{Daniel}(f) = \frac{1}{2D} \sum_{f=-D}^{D} \hat{S}_{per}(f)$$

$$= = \frac{1}{2DN} \sum_{f=-D}^{D} (\sum_{n=1}^{N} s(n)e^{-j2\pi n\frac{f}{N}})^2$$

Cette méthode permet de gommer en partie les irrégularités de la courbe de la première méthode en la lissant.

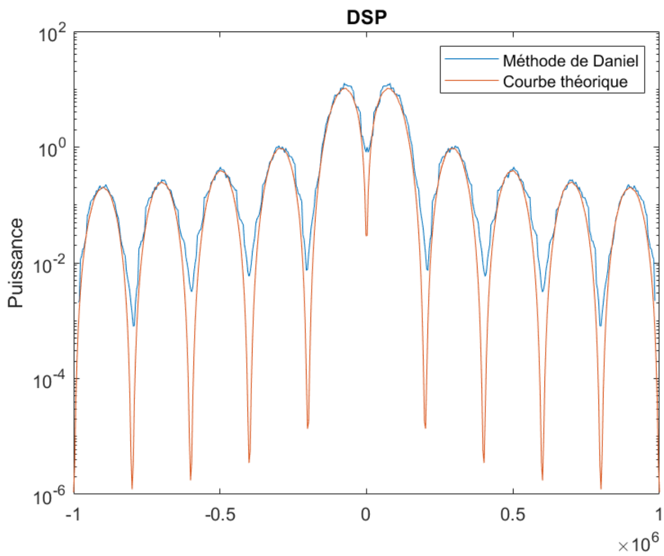

Figure 3 : Estimation de la DSP par la méthode de Daniel avec une fenêtre de taille 12 et un signal de taille 512

Cependant, il est important de bien choisir la taille de la fenêtre. Une fenêtre trop petite aura tendance à ne pas assez lisser la courbe, tandis qu'une fenêtre trop grand risque de trop la lisser. Par exemple, dans l'image ci-dessous, la courbe a été trop lissée.

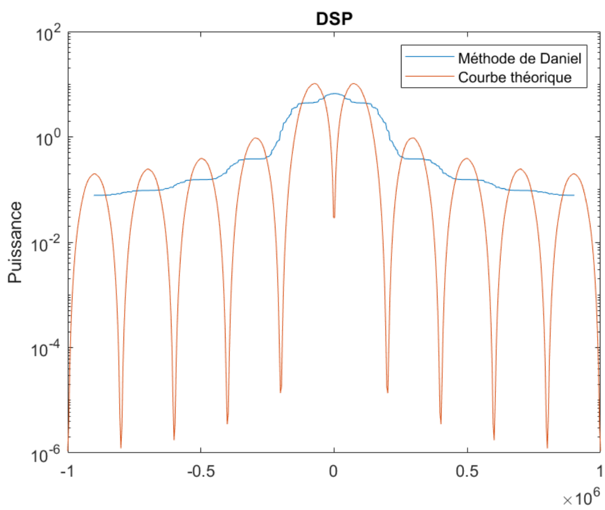

Figure 4 : Estimation de la DSP par la méthode de Daniel avec une fenêtre de taille 50 et un signal de taille 512

La puissance estimée (l'aire sous la courbe, sur 512 points) est de 563.2 W avec la méthode des trapèzes.

1.3 Méthode de Welch

Principe : on découpe le signal en plusieurs segments plus petits, qui éventuellement se chevauchent. On calcule ensuite le carré de la transformée de Fourier de chacun de ces segments afin d'obtenir le spectre de puissance de chaque segment. Puis on moyenne les spectres de puissance de chaque segment. Cette méthode n'est pertinente que si l'on travaille sur des signaux stationnaires. En effet, il ne faut pas que les caractéristiques spectrales entre les segments soient différentes. Il est également préférable de travailler sur des signaux relativement longs. En effet, plus le signal étudié sera long, plus on pourra avoir un nombre de segments important et donc plus la moyenne (et donc la DSP) sera précise et lisse.

Formule mathématique : soit un signal *s(n)* stationnaire de longueur M est découpé en K segments de longueur N et décalés de D points l'un par rapport à l'autre. Ainsi, le $k^{ième}$ segment s'écrit :

$$s_k(n) = s(n + (k-1)D)$$

La densité spectrale estimée s'écrira elle :

$$\hat{S}_{Welch}(f) = \frac{1}{KN}\sum_{k=1}^{K} TF\big(s_k(n)\big)^2$$

$$= \frac{1}{KN}\sum_{k=1}^{K}(\sum_{n=1}^{N} s(n+(k-1)D)e^{-j2\pi n\frac{f}{N}})^2$$

Voici ce que l'on obtient pour la méthode de Welch avec notre signal.

Cette méthode permet d'obtenir une courbe particulièrement lisse. Cependant, à l'image de la méthode de Daniel, comme elle consiste à moyenner, les variations de puissance très marquées (pics vers le haut ou vers le bas) sont atténuées.

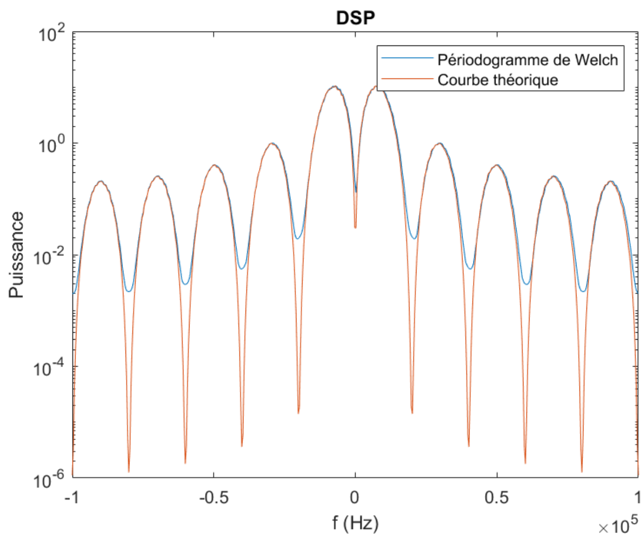

Figure 5 : Estimation de la DSP par la méthode de Welch

La puissance estimée (l'aire sous la courbe, sur 512 points) est de 511.9 W avec la méthode des trapèzes.

1.4 Cas des signaux non-stationnaires

Quand le signal n'est pas stationnaire, ces méthodes ne sont pas adaptées. En effet, appliquer la transformée de Fourier sur toute la longueur d'un signal non stationnaire ne permettrait pas d'estimer la puissance du signal puisqu'elle varierait au cours du temps. Une méthode plus adaptée serait d'utiliser un spectrogramme. En effet, cette méthode permet d'obtenir les fréquences contenues dans le signal au cours du temps.

2. Approche par la méthode de Capon

Pour la méthode de Capon, on crée un filtre très sélectif pour chaque fréquence. Pour un signal d'entrée réel $x(n)$ en entrée du filtre, la sortie y est définie par la relation :

$$y(n) = (h * x)(n)$$

avec $h(n)$ la réponse impulsionnelle du filtre.

On peut réécrire cette équation comme une multiplication de deux vecteurs. Soient

$$\bar{x} = [x_0\ x_1\ \dots\ x_{N-2}\ x_N]$$

le vecteur du signal d'entrée et

$$\bar{h}_f = [h_{f,1}\ h_{f,2}(1) \dots h_{f,N-2}(N-2)\ h_{f,N-1}(N-1)]$$

le vecteur de la réponse impulsionnelle de h pour une fréquence f.

Alors : $$\bar{y} = \bar{h}_f\ \bar{x}^T$$

Par ailleurs, la puissance instantanée du signal de sortie vaut :

$$\begin{aligned} P_{instantanée}(f) &= E(|\bar{y}|^2) \\ &= E(\left|\bar{h}_f\ \bar{x}^T\right|^2) \\ &= E(\left(\bar{h}_f\ \bar{x}^T\right)(\bar{h}_f\ \bar{x}^T)^T) \\ &= E((\bar{h}_f\ \bar{x}^T)\ (\bar{x}\ \bar{h}_f{}^T)) \\ &= \bar{h}_f\ E(\bar{x}^T \bar{x})\ \bar{h}_f{}^T \\ &= \bar{h}_f R_x \bar{h}_f{}^T \end{aligned}$$

avec R_x la matrice d'autocorrélation du signal x.

Or le gain le gain du filtre vaut 1 à la fréquence d'intérêt, soit $H(f) = 1$ à cette fréquence, avec $H(f)$ la transformée de Fourier de $h(n)$.

Exprimée sous forme de vecteur, on obtient alors :

$$H(f) = \bar{h}_f\ \bar{a}(f) = 1$$

avec $\bar{a}(f) = [1 \dots e^{-j2\pi(N-1)\frac{f}{f_{ech}}}]$.

Il faut donc trouver les coefficients de $\bar{h}_f$ qui permettent de respecter cette contrainte. On aura alors la réponse impulsionnelle optimale que doit avoir le filtre en chaque fréquence.

Pour cela on exprime le Lagrangien correspondant à ce problème de minimisation sous contrainte :

$$L(\bar{h}_f, \mu) = \bar{h}_f R_x \bar{h}_f - \mu(\bar{h}_f \bar{a}(f) - 1)$$

Le minimum de $L(\bar{h}_f, \mu)$ suivant le premier argument est atteint lorsque :

$$\bar{h}_f = \frac{\partial L(\bar{h}_f, \mu)}{\partial \bar{h}_f} = 2R_x\bar{h}_f - \mu\bar{a}(f) = 0$$

$$\text{soit} \qquad \bar{h}_f = \frac{\mu}{2} R_x^{-1}\bar{a}(f)$$

La contrainte $\bar{h}_f\, \bar{a}(f) = 1$ fournit alors :

$$\frac{\mu}{2} = \frac{1}{\bar{a}(f) R_x^{-1} \bar{a}(f)^T}$$

soit finalement :

$$\bar{h}_f = \frac{R_x^{-1}\bar{a}(f)}{\bar{a}(f) R_x^{-1} \bar{a}(f)^T}$$

On rappelle que $P_{instantanée}(f) = \bar{h}_f R_x \bar{h}_f^{\ T}$. Ainsi, maintenant que l'on connaît la formule de $\bar{h}_f$, on peut calculer la puissance instantanée $P_{instantanée}$ pour toutes les fréquences f et avoir une estimation de la DSP.

Simulée sur notre signal d'étude dans Matlab, la méthode de Capon nous donne ceci.

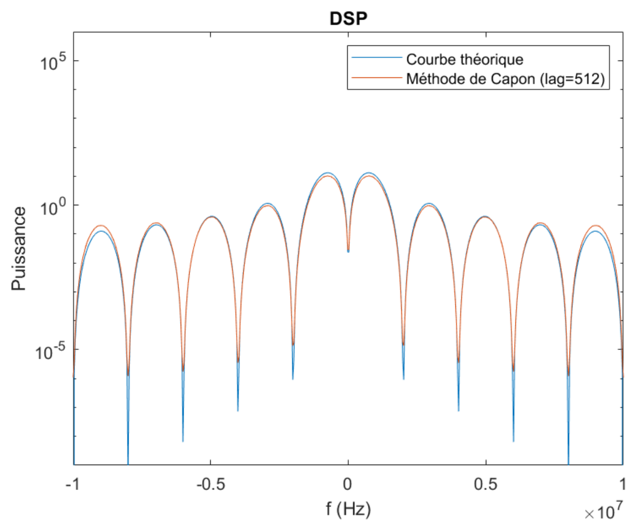

Figure 6 : Estimation de la DSP par la méthode de Capon

Comme le montre la courbe, cette méthode permet d'obtenir une estimation particulièrement précise de la densité spectrale de puissance. Son avantage principal est qu'elle ne moyenne pas, représentant donc les pics avec une grande précision. Le paramètre qui influe beaucoup sur la qualité de la courbe est la taille du signal étudié. En effet, plus le signal sera long, plus l'intervalle entre les fréquences sur l'axe des abscisses sera fin. À l'inverse, si le signal étudié est trop court ou si on calcule la matrice d'autocorrélation avec un « lag » trop petit, la courbe obtenue sera moins nette.

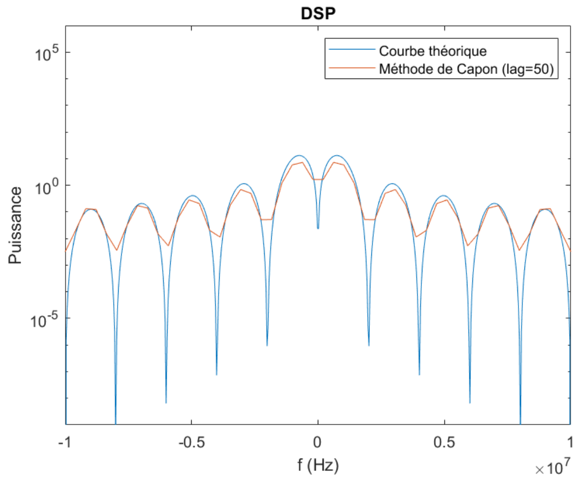

Figure 7 : Méthode de Capon avec un lag trop petit

La puissance (l'aire sous la courbe, sur 512 points) est de 492,9 W avec la méthode des trapèzes.

3. Influence d'un bruit blanc additif

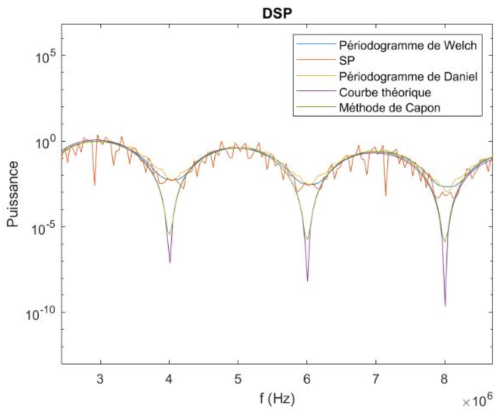

Figure 8 : Estimation de la DSP sans bruit

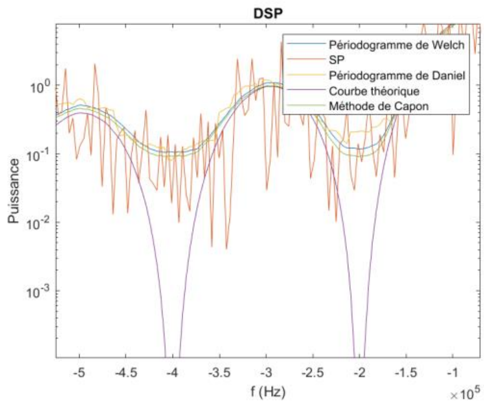

Figure 9 : Estimation de la DSP (SNR=10)

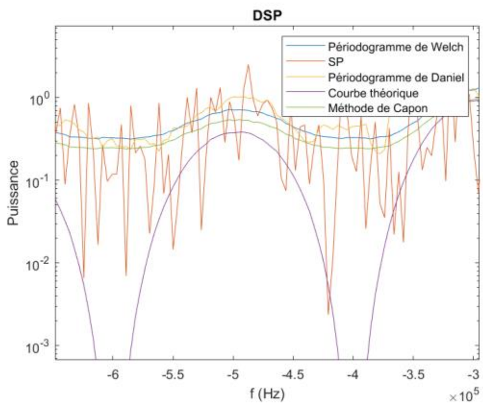

Figure 10 : Estimation de la DSP (SNR=5)

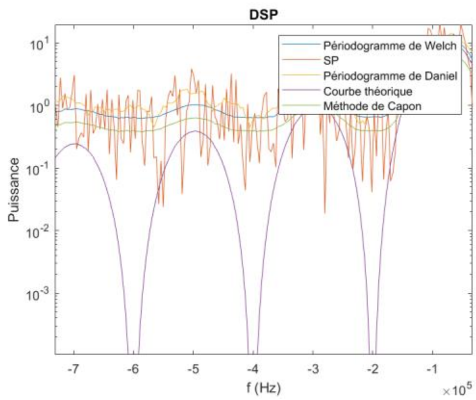

Figure 11 : Estimation de la DSP (SNR=2)

Comme montré ci-dessus, la méthode de Capon est celle qui résiste le mieux aux perturbations générées par le bruit, suivie de près par la méthode de Welch. En revanche, la méthode de Daniel et le spectre de puissance subissent beaucoup plus les effets de celui-ci.

Conclusion

Lors de ce projet, nous nous sommes intéressés à l'extraction de signatures de signaux et aux différentes méthodes d'estimation de la densité spectrale de puissance. Ainsi, nous avons pu utiliser à des fins concrètes certaines notions vues en cours comme les filtres, les transformées de Fourier, la fonction d'autocorrélation et les densités spectrales de puissance. Nous avons finalement pu conclure que les méthodes implémentées ne se valent pas toutes. Ainsi certaines méthodes sont plus précises que d'autres ou plus résistantes au bruit mais aussi souvent plus couteuses en calcul.

Bilan de l’organisation et du déroulement du projet

Ce projet s’est déroulé assez facilement, nous avons vite cernés ce qui était demandé. D’un côté nous avions beaucoup de liberté (sur le choix du signal à étudier par exemple) ce qui pouvait être déroutant au début. Mais d’un autre côté, ce qui était demandé n’était pas forcément difficile. Même la méthode de Capon qui pouvait sembler fastidieuse a été réalisée relativement rapidement. Concernant, la répartition des tâches, nous avons tout fait ensemble. Nous avions implémenté toutes les méthodes sauf celle de Capon pendant les séances de cours. Ensuite, nous avons implémenté la méthode de Capon après la dernière séance de projet, en 3h environ.