Max-Flow

Quantum adiabatic computing

Nicola Barbaro (1070668) - Mario Bifulco (881727)

A.A. 2022/2023

Università degli studi di Torino - Ottimizzazione Combinatoria

Table of contents

Max-Flow

Problema di flusso massimo

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, anche chiamato *rete di flusso*, si richiede di trovare il valore massimo, del bene che si vuole schematizzare, in grado di fluire nella rete dal nodo sorgente s al nodo foce t.

Utilizzi tipici sono legati al trasporto di beni o l'instradamento su reti.

Formulazione matematica

$$
\begin{aligned}
\text{massimizza} \quad & \sum_{(s,i)\in FS_i} x_{si} = x_{ts} & & (1)\\
\text{soggetto a} \quad & \sum_{(h,i)\in BS_i} x_{hi} - \sum_{(i,h)\in FS_i} x_{ij} = 0 & \forall i \in V \backslash \{s,t\} \quad & (2)\\
& \left(\sum_{(i,t)\in BS_t} x_{it}\right) - x_{ts} = 0 & & (3)\\
& x_{ts} - \sum_{(s,i)\in FS_s} x_{si} = 0 & & (4)\\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij} & \forall (i,j) \in E \quad & (5).
\end{aligned}
$$

Vincoli del problema

1. Si vuole massimizzare il flusso su un arco *dummy*, senza capacità, che va dalla foce t alla fonte s.
2. Vincoli che permettono di rispettare la *conservazione dei flussi*.
3. Il flusso massimo trovato dal problema deve combaciare con la somma dei flussi entranti nella foce e con la somma dei flussi uscenti dalla fonte.
4. Bisogna rispettare il *vincolo di capacità*.

Problema del minimo taglio

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, si richiede di partizionare i vertici V in modo che:

1. Il nodo sorgente e quello foce non appartengano alla stessa partizione.
2. Considerando N_s, la partizione contenente la sorgente, e N_t, la partizione del nodo foce, la somma degli archi con coda in N_s e testa in N_t deve essere minima.

Formulazione matematica

$$
\begin{aligned}
\text{minimizza} \quad & \sum_{(i,j)\in E} \omega_{ij} u_{ij} & & (1)\\
\text{soggetto a} \quad & \pi_t - \pi_s \geq 1 & & (2)\\
& \pi_i - \pi_j + \omega_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in E \quad & (3)\\
& \omega_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in E \quad & (4).
\end{aligned}
$$

Dove le variabili assumono valore:

$$
\pi_i = \begin{cases} 1 & i \in T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \omega_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in X_C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

Teorema Max-Flow Min-Cut

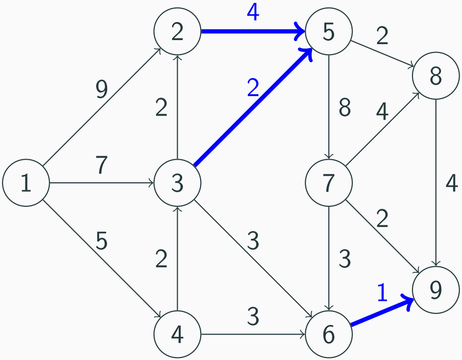
Teorema della dualità forte

Dato uno programma lineare primale P, se esso ammette soluzione ottimale x^*, allora anche il programma lineare duale D associato a P ammette soluzione ottima y^*, e in particolare si riscontra $y^* = x^*$.

Teorema Max-Flow Min-Cut

Il massimo valore di un flusso $s - t$ è uguale al taglio $s - t$ di capacità minima tra tutti i possibili tagli.

Esempio di un grafo di flusso



Nel grafo proposto, il flusso massimo assume valore 7 e il taglio di capacità minima è composto dagli archi $\langle(2,5),(3,5),(6,9)\rangle$.

QAC

Computazione quantistica adiabatica

La computazione quantistica affronta i problemi in modo intrinsecamente diverso rispetto all'approccio classico.

La programmazione adiabatica ricerca la configurazione di variabili che minimizza l'energia del sistema fisico, ovvero una griglia di QuBit.

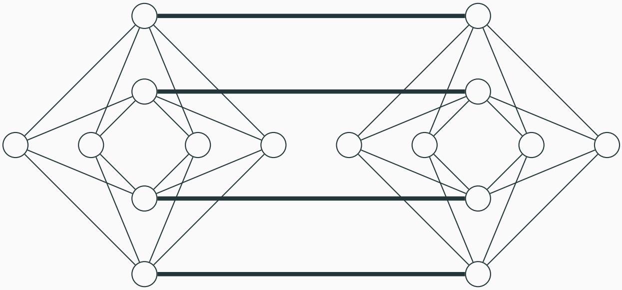
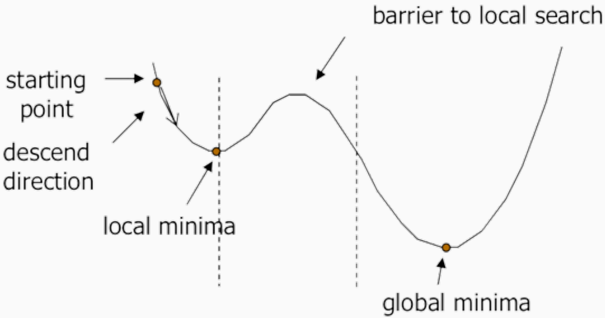


Figure 1: Esempio di QPU a 16 qubit

Simulated Annealing

La ricerca effettuata tramite gli stati d'energia del sistema è approssimabile all'algoritmo di Simulated Annealing.



Problemi QUBO

Per essere eseguiti su macchine quantistiche, i problemi devono essere riscritti come *problemi QUBO*.

Ovvero, problemi composti da sole variabili binarie che assumono la forma:

$$\text{minimizzare } \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

Da CSP a QUBO

Min-Cut come problema QUBO

Per trasformare il problema Min-Cut in forma QUBO occorre rendere tutti i vincoli equazioni di somma zero, per cui i vincoli vengono riscritti come:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizza} \quad & \sum_{(i,j)\in E} \omega_{ij} u_{ij} \\
\text{soggetto a} \quad & \pi_t - \pi_s - 1 = 0 \\
& \pi_i - \pi_j + \omega_{ij} - s_2 = 0 \qquad \forall (i,j) \in E
\end{aligned}
$$

Conversione delle variabili

I problemi QUBO sono caratterizzati da variabili booleane, occorre quindi convertire le variabili di slack nella loro espansione binaria.

Nel secondo vincolo, la variabile di slack s_2 può assumere valori compresi tra zero e due, per questo motivo viene sostituita con $y_2^0 + 2y_2^1$, sufficiente per rappresentare i numeri nell'intervallo $[0, 3]$.

Rilassamento Lagrangiano

I vincoli del problema sono trasformati in penalità sommate alla funzione obiettivo.

In questo modo si ottiene una singola equazione composta da variabili binarie e i rispettivi coefficienti.

Formulazione matematica

Dunque, riportiamo l'equazione del problema Min-Cut in forma QUBO:

$$\mathcal{H}_P = \underbrace{\sum_{(u,v)\in E} \omega_{ij} u_{ij}}_{\text{Funzione obiettivo}} + \lambda(\underbrace{\pi_t - \pi_s - 1}_{\text{Primo vincolo}})^2 +$$

$$+ \lambda \sum_{(i,j)\in E} (\underbrace{\pi_i - \pi_j + \omega_{ij} - y_2^0 - 2y_2^1}_{\text{Secondo vincolo}})^2$$

Implementazione

Struttura del codice

Il codice proposto è formato da uno script principale che si occupa di caricare i dati ed eseguire i diversi algoritmi testate su tutto il dataset.

Nel pacchetto *implementation* sono contenuti i metodi per l'esecuzione degli algoritmi classici e quantistici.

Sperimentazione svolta

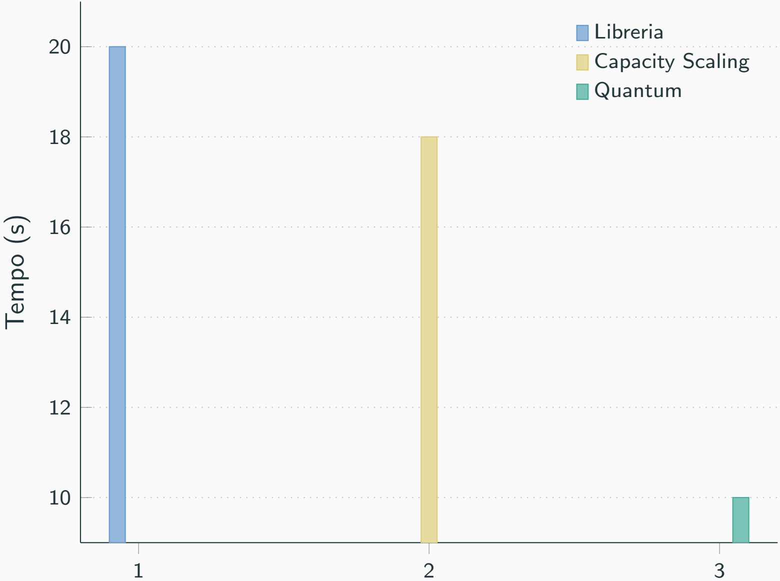
L'implementazione Min-Cut in forma QUBO è stato eseguito sulla QPU della D-Wave, confrontando i tempi d'esecuzione con:

1. Il metodo della libreria per il calcolo del flusso massimo.
2. Una nostra implementazione dell'algoritmo *Capacity Scaling*.

Inoltre, è possibile svolgere un'indagine qualitativa per valutare pregi e difetti delle quattro strategie sperimentate.

Risultati ottenuti

TODO inserire dati reali e valutare tabella riassuntiva



Grazie per l’attenzione