



UNIVERSITÀ
DI TORINO

Max-Flow

Quantum adiabatic computing

Nicola Barbaro (1070668) - Mario Bifulco (881727)

A.A. 2022/2023

Università degli studi di Torino - Ottimizzazione Combinatoria

Table of contents

1. Max-Flow

Teorema Max-Flow Min-Cut

2. Computazione quantistica adiabatica

Formulazione QUBO

3. Min-Cut come problema QUBO

4. Implementazione

Test eseguiti

Risultati

Max-Flow

Problema di flusso massimo

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, anche chiamato *rete di flusso*, si richiede di trovare il valore massimo, del bene che si vuole schematizzare, in grado di fluire nella rete dal nodo sorgente s al nodo foce t .

Utilizzi tipici sono legati al trasporto di beni o l'instradamento su reti.

massimizza $\sum_{(s,i) \in FS_i} x_{si} = x_{ts}$ (1)

soggetto a $\sum_{(h,i) \in BS_i} x_{hi} - \sum_{(i,h) \in FS_i} x_{ij} = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\}$ (2)

$$\left(\sum_{(i,t) \in BS_t} x_{it} \right) - x_{ts} = 0 \quad (3)$$

$$x_{ts} - \sum_{(s,i) \in FS_s} x_{si} = 0 \quad (4)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \quad (5).$$

1. Si vuole massimizzare il flusso su un arco *dummy*, senza capacità, che va dalla foce t alla fonte s .
2. Vincoli che permettono di rispettare la *conservazione dei flussi*.
3. Il flusso massimo trovato dal problema deve combaciare con la somma dei flussi entranti nella foce e con la somma dei flussi uscenti dalla fonte.
4. Bisogna rispettare il *vincolo di capacità*.

Problema del minimo taglio

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, si richiede di partizionare i vertici V in modo che:

1. Il nodo sorgente e quello foce non appartengano alla stessa partizione.
2. Considerando N_s , la partizione contenente la sorgente, e N_t , la partizione del nodo foce, la somma degli archi con coda in N_s e testa in N_t deve essere minima.

$$\text{minimizza} \quad \sum_{(i,j) \in E} \omega_{ij} u_{ij} \quad (1)$$

$$\text{soggetto a} \quad \pi_t - \pi_s \geq 1 \quad (2)$$

$$\pi_i - \pi_j + \omega_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \quad (3)$$

$$\omega_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \quad (4).$$

Dove le variabili assumono valore:

$$\pi_i = \begin{cases} 1 & i \in T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \omega_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in X_C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema Max-Flow Min-Cut

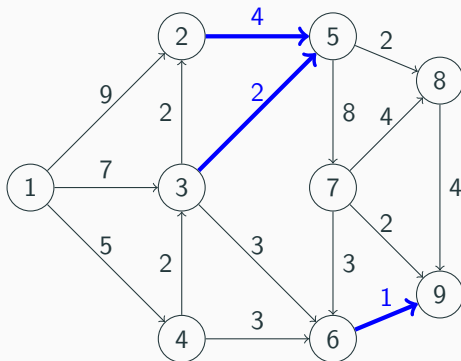
Teorema della dualità forte

Dato uno programma lineare primale P , se esso ammette soluzione ottimale x^* , allora anche il programma lineare duale D associato a P ammette soluzione ottima y^* , e in particolare si riscontra $y^* = x^*$.

Teorema Max-Flow Min-Cut

Il massimo valore di un flusso $s - t$ è uguale al taglio $s - t$ di capacità minima tra tutti i possibili tagli.

Esempio di un grafo di flusso



Nel grafo proposto, il flusso massimo assume valore 7 e il taglio di capacità minima è composto dagli archi $\langle(2, 5), (3, 5), (6, 9)\rangle$.

QAC

Computazione quantistica adiabatica

La computazione quantistica affronta i problemi in modo intrinsecamente diverso rispetto all'approccio classico.

La programmazione adiabatica ricerca la configurazione di variabili che minimizza l'energia del sistema fisico, ovvero una griglia di Qubit.

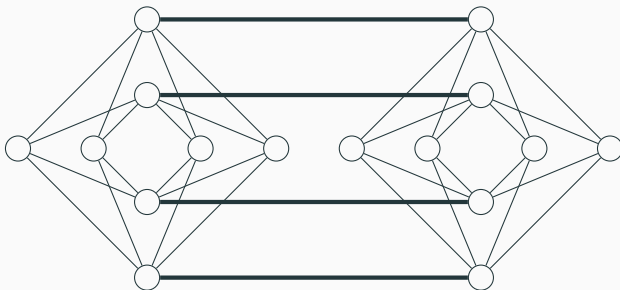
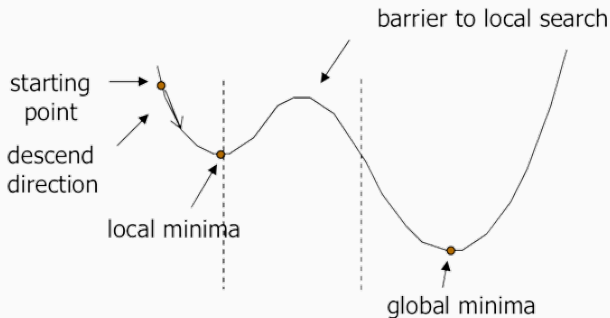


Figura 1: Esempio di QPU a 16 qubit

Simulated Annealing

La ricerca effettuata tramite gli stati d'energia del sistema è approssimabile all'algoritmo di Simulated Annealing.



Problemi QUBO

Per essere eseguiti su macchine quantistiche, i problemi devono essere riscritti come *problemi QUBO*.

Ovvero, problemi composti da sole variabili binarie che assumono la forma:

$$\text{minimizzare } \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

Da CSP a QUBO

Min-Cut come problema QUBO

Per trasformare il problema Min-Cut in forma QUBO occorre rendere tutti i vincoli equazioni di somma zero, per cui i vincoli vengono riscritti come:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizza} & \sum_{(i,j) \in E} \omega_{ij} u_{ij} \\ \text{soggetto a} & \pi_t - \pi_s - 1 = 0 \\ & \pi_i - \pi_j + \omega_{ij} - s_2 = 0 \quad \forall (i,j) \in E \end{array}$$

I problemi QUBO sono caratterizzati da variabili booleane, occorre quindi convertire le variabili di slack nella loro espansione binaria.

Nel secondo vincolo, la variabile di slack s_2 può assumere valori compresi tra zero e due, per questo motivo viene sostituita con $y_2^0 + 2y_2^1$, sufficiente per rappresentare i numeri nell'intervallo $[0, 3]$.

I vincoli del problema sono trasformati in penalità sommate alla funzione obiettivo.

In questo modo si ottiene una singola equazione composta da variabili binarie e i rispettivi coefficienti.

Dunque, riportiamo l'equazione del problema Min-Cut in forma QUBO:

$$\mathcal{H}_P = \underbrace{\sum_{(u,v) \in E} \omega_{ij} u_{ij}}_{\text{Funzione obiettivo}} + \underbrace{\lambda (\pi_t - \pi_s - 1)^2}_{\text{Primo vincolo}} + \lambda \sum_{(i,j) \in E} \underbrace{(\pi_i - \pi_j + \omega_{ij} - y_2^0 - 2y_2^1)^2}_{\text{Secondo vincolo}}$$

Implementazione

Il codice proposto è formato da uno script principale che si occupa di caricare i dati ed eseguire i diversi algoritmi testate su tutto il dataset.

Nel pacchetto *implementation* sono contenuti i metodi per l'esecuzione degli algoritmi classici e quantistici.

L'implementazione Min-Cut in forma QUBO è stato eseguito sulla QPU della D-Wave, confrontando i tempi d'esecuzione con:

1. Il metodo della libreria per il calcolo del flusso massimo.
2. Una nostra implementazione dell'algoritmo *Capacity Scaling*.

Inoltre, è possibile svolgere un'indagine qualitativa per valutare pregi e difetti delle tre strategie sperimentate.

Tabella 1: Tempi d'esecuzione

Grafo	Libreria (s)	Capacity Scaling (s)	QAC (s)
2015-06-10	0.00100	0.00100	11,37926 (0,15433)
...
2021-09-13	0.00001	0.00200	11,12439 (0,17091)
BVZ-tsukuba8 [†]	88.28760	416.60800	81.99760
BVZ-venus1 [†]	266.89360	1232.29300	144.78604
...
KZ2-venus10 [†]	1188.77692	14554.88358	759.89836
...
Media (BVZ, KZ2)	471,75020	7723,76792	444,71604

Tabella 2: Flusso massimo calcolato

Grafo	Calcolo classico	Formulazione QUBO
2015-06-10	14	14
...
2021-09-13	12	12
BVZ-tsukuba8 [†]	54458	111389
BVZ-venus1 [†]	274732	78967
...
KZ2-venus10 [†]	1375201	2356322
...
Errore relativo	0%	63,2%

Grazie per l'attenzione
