Max-Flow

Quantum adiabatic computing

Nicola Barbaro (1070668) - Mario Bifulco (881727)

A.A. 2022/2023

Università degli studi di Torino - Ottimizzazione Combinatoria

Table of contents

Max-Flow

Problema di flusso massimo

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, anche chiamata *rete di flusso*, si richiede di trovare il massimo flusso che può scorrere da un nodo sorgente s a un nodo foce t.

Formulazione matematica

$$
\begin{aligned}
\text{massimizza} \quad & \sum_{(s,i) \in FS_i} x_{si} = x_{ts} & & (1)\\
\text{soggetto a} \quad & \sum_{(h,i) \in BS_i} x_{hi} - \sum_{(i,h) \in FS_i} x_{ij} = 0 & \forall i \in V \backslash \{s, t\} \quad & (2)\\
& \Big(\sum_{(i,t) \in BS_t} x_{it} \Big) - x_{ts} = 0 & & (3)\\
& x_{ts} - \Big(\sum_{(s,i) \in FS_s} x_{si} \Big) = 0 & & (4)\\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in E \quad & (5).
\end{aligned}
$$

Problema del minimo taglio

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, si richiede di partizionare i vertici V in modo che:

1. Il nodo sorgente e quello foce non appartengano alla stessa partizione
2. Tutti gli archi che collegano la partizione del nodo sorgente a quella del nodo foce sommano ad una capacità minima tra tutti i possibili tagli legali.

Formulazione matematica 1/2

$$
\begin{aligned}
\text{minimizza} \quad & \sum_{(i,j)\in E} \omega_{ij} u_{ij} && && (1)\\
\text{soggetto a} \quad & \pi_t - \pi_s \geq 1 && && (2)\\
& \pi_i - \pi_j + \omega_{ij} \geq 0 && \forall (i,j) \in E && (3)\\
& \omega_{ij} \geq 0 && \forall (i,j) \in E && (4).
\end{aligned}
$$

Formulazione matematica 2/2

Dove le variabili assumono valori:

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S \text{ e } j \in T\text{, ossia lo spigolo (i,j) appartiene al taglio } X_C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\pi_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema Max-Flow Min-Cut

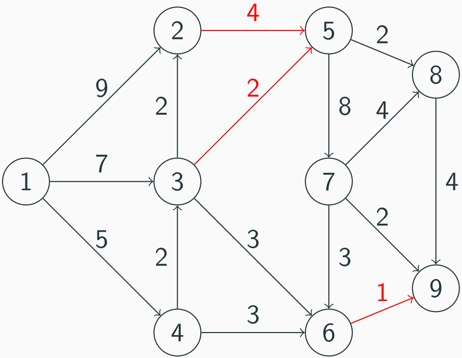
Teorema della dualità forte

Dato uno programma lineare primale P, se esso ammette soluzione ottimale x^*, allora anche il programma lineare duale D associato a P ammette soluzione ottima y^*, e in particolare si riscontra $y^* = x^*$.

Teorema Max-Flow Min-Cut

Il massimo valore di un flusso $s - t$ è uguale al taglio $s - t$ di capacità minima tra tutti i possibili tagli.

Esempio di un grafo di flusso



Dove il flusso massimo assume valore 7 e il taglio di capacità minima è composto dagli archi $\langle(2, 5), (3, 5), (6, 9)\rangle$.

QAC

Computazione quantistica adiabatica

La computazione quantistica affronta i problemi in modo intrinsecamente diverso rispetto all'approccio classico.

La programmazione adiabatica ricerca la configurazione di variabili che minimizza l'energia del sistema fisico, ovvero una griglia di QuBit.

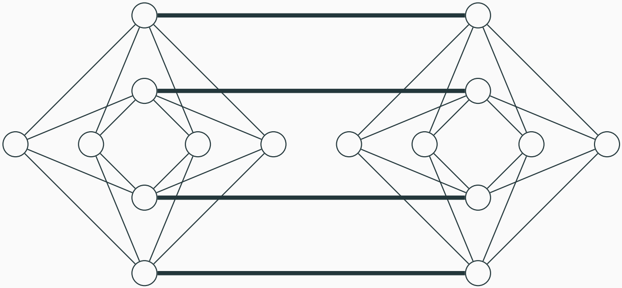
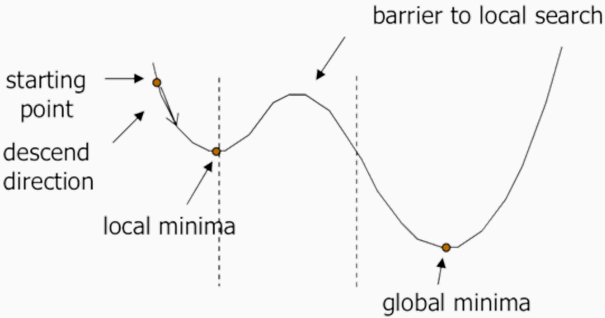


Figure 1: Esempio di QCPU a 16 qubit

La ricerca effettuata tramite gli stati d'energia del sistema è approssimabile all'algoritmo di Simulated Annealing.



Problemi QUBO

Per essere eseguiti su macchine quantistiche i problemi devono essere riscritti come *problemi QUBO*.

Ovvero problemi composti da sole variabili binarie che assumono la forma:

$$\text{minimizzare } \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \ddots & b_3 \\ 0 & \cdots & c_3 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

Da CSP a QUBO

Min-Cut come problema QUBO

Per trasformare il problema Min-Cut in forma QUBO occorre rendere tutti i vincoli equazioni di somma zero, per cui i vincoli vengono riscritti come:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizza} \quad & \sum_{(i,j)\in E} \omega_{ij} u_{ij} && && (1)\\
\text{soggetto a} \quad & \pi_t - \pi_s - s_1 - 1 = 0 && && (2)\\
& \pi_i - \pi_j + \omega_{ij} - s_2 = 0 && \forall (i,j) \in E && (3)\\
& \omega_{ij} - s_3 = 0 && \forall (i,j) \in E && (4).
\end{aligned}
$$

Conversione delle variabili

I problemi QUBO sono caratterizzati da variabili booleane, occorre quindi convertire le variabili di slack nella loro espansione binaria.

Il primo vincolo non permette a s_1 di assumere valori superiori a 1, è quindi sufficiente una variabile binaria y_1^0.

Per il secondo vincolo una cifra non è più sufficiente, occorrono due variabili, $s_2 = y_2^0 + 2y_2^1$.

Come per il primo vincolo, nel terzo caso possiamo sostituire s_3 con y_3^0.

Rilassamento Lagrangiano

Formulazione matematica

Dunque, riportiamo l'equazione del problema Min-Cut in forma QUBO:

$$\min z = \sum_{(u,v)\in E} \omega_{ij} u_{ij} + \lambda * ((\pi_t - \pi_s - y_1^0 - 1)^2 + \\ + \sum_{(i,j)\in E} (\pi_i - \pi_j + \omega_{ij} - y_2^0 - 2y_2^1)^2 + \sum_{(i,j)\in E} (\omega_{ij} - y_3^0)^2)$$

Implementazione

Struttura del codice

Sperimentazione svolta

Risultati ottenuti

Grazie per l'attenzione