Teorica II

Temario

- Programación de metas
- Supuestos básicos necesarios para formular un modelo matemático lineal con variables continuas
- Un ejemplo de centros de producción

Elementos de un modelo

Condiciones de vínculo
Son las que relacionan las actividades entre sí o con el contexto.

- Fuertes: deben ser cumplidas siempre.
- Débiles: pueden no cumplirse a un cierto costo (se resuelven con programación de metas).

- Conflictivas o contradictorias: dos o más condiciones no pueden cumplirse simultáneamente.

Programación de Metas

Siguiendo con el ejemplo de la semana pasada...

MAX 7 DC + 4 LV

BOTELLA) 1 DC + 1 LV <= 400

ETIQUETA) 1 DC + 1 LV <= 500

SUSTBASE) 0.2 DC + 0.1 LV <= 60

AROMAT) 0.04 DC + 0.25 LV <= 70

MINDC) DC >= 100

MINLV) LV >= 80

MAXLV) LV <= 280

Nos dicen que se rompió el transporte que traía las botellas

- Tenemos la posibilidad de contratar el flete de Tito que nos cobra $2 por botella pero a ese precio solamente nos transporta hasta 300 botellas

- Además, Tito dice que si transportamos menos de 300 botellas con su flete nos va a cobrar $1 por cada botella por debajo de las 300 (con el flete medio vacío pierde plata)

- Si queremos transportar más de 300 botellas nos saldrá $4 por cada botella que deseemos transportar por encima de las 300 botellas (hay que contratar otro flete)

¿Cómo hacemos para poner una restricción que nos detecte cuánto transportamos por encima de 300 botellas y cuánto por debajo de 300 botellas?

Si ponemos una variable para medir la diferencia entre lo que transporta y 300 botellas

DIFERENCIA = (DC + LV) – 300

¿Qué valores podría tomar la variable DIFERENCIA?

- Podría ser positiva (si DC+LV es mayor que 300)
- Podría ser negativa (si DC+LV es menor que 300)
- Podría valer cero (si DC+LV = 300)

¡Pero no puede haber variables negativas! Entonces ¿cómo hacemos para representar un valor negativo?
Puede transportar más o menos de 300 botellas. (restricción débil que puede no cumplirse a cierto costo)

Para eso se comparan las botellas transportadas con la meta (300) y reemplazamos la variable DIFERENCIA por una resta de dos variables (EXCESO – DEFECTO)

(DC + LV) - 300 = EXCESO – DEFECTO

¿qué valores toman EXCESO y DEFECTO?

Si (DC+LV) es igual a 400

(DC + LV) - 300 = EXCESO – DEFECTO
400 - 300 = 100 - 0

Si (DC+LV) es igual a 250

(DC + LV) - 300 = EXCESO – DEFECTO
250 - 300 = 0 - 50

Es decir, EXCESO y DEFECTO son variables mayores o iguales que cero y, sin embargo, con las metas podemos representar diferencias negativas

y así quedaría el Z

MAX 7 DC + 4 LV – 2 (DC + LV - EXCESO) - 4 EXCESO – 1 DEFECTO

Ahora ¿por qué aseguramos que cuando EXCESO es distinta de cero, DEFECTO vale cero (y también que cuando DEFECTO es distinta de cero, EXCESO vale cero)?
¡Porque le conviene a la función objetivo!

Si al Z le conviniera que tomaran valor simultáneamente EXCESO y DEFECTO el esquema de metas no funcionaría bien.

En programación lineal continua no tenemos manera de hacer que cuando una variable es distinta de cero haya otra variable que esté obligada a valer cero. Para eso vamos a tener que definir variables enteras binarias (que tomen valor cero o uno solamente), pero eso lo vamos a ver en la clase de variables enteras.

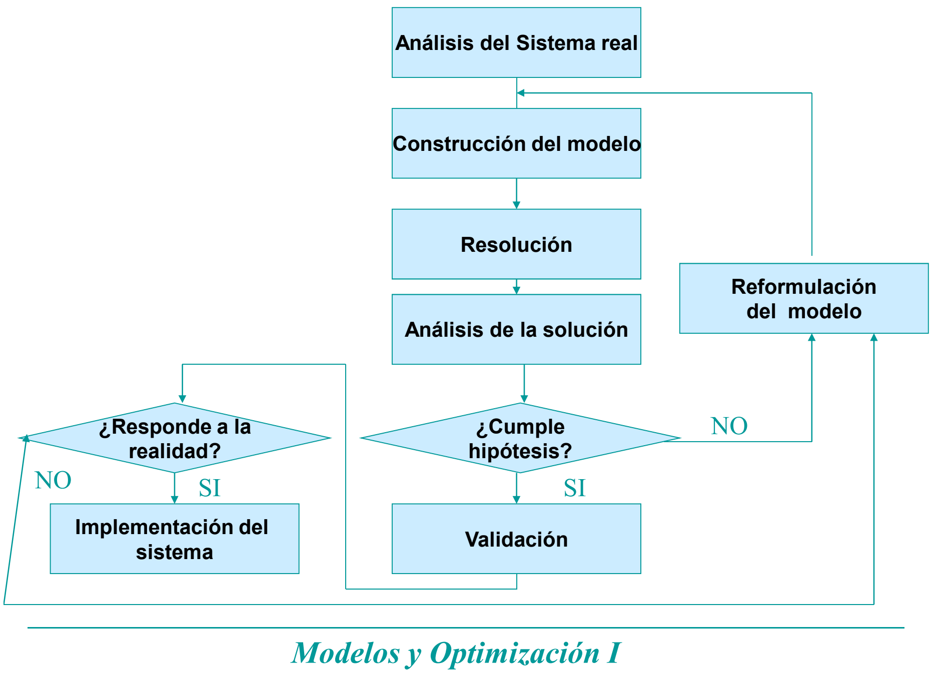
Supuestos básicos de la Programación Lineal Continua

Proporcionalidad
Tanto el beneficio como el uso de recursos son directamente proporcionales al nivel de actividad

Aditividad
No existen interacciones entre las actividades que cambien la medida total de la efectividad o el uso total de algún recurso

Divisibilidad
Las unidades de actividad pueden dividirse en niveles fraccionarios cualesquiera, de modo que pueden permitirse valores no enteros para las variables

Certeza
Todos los parámetros del modelo son constantes conocidas

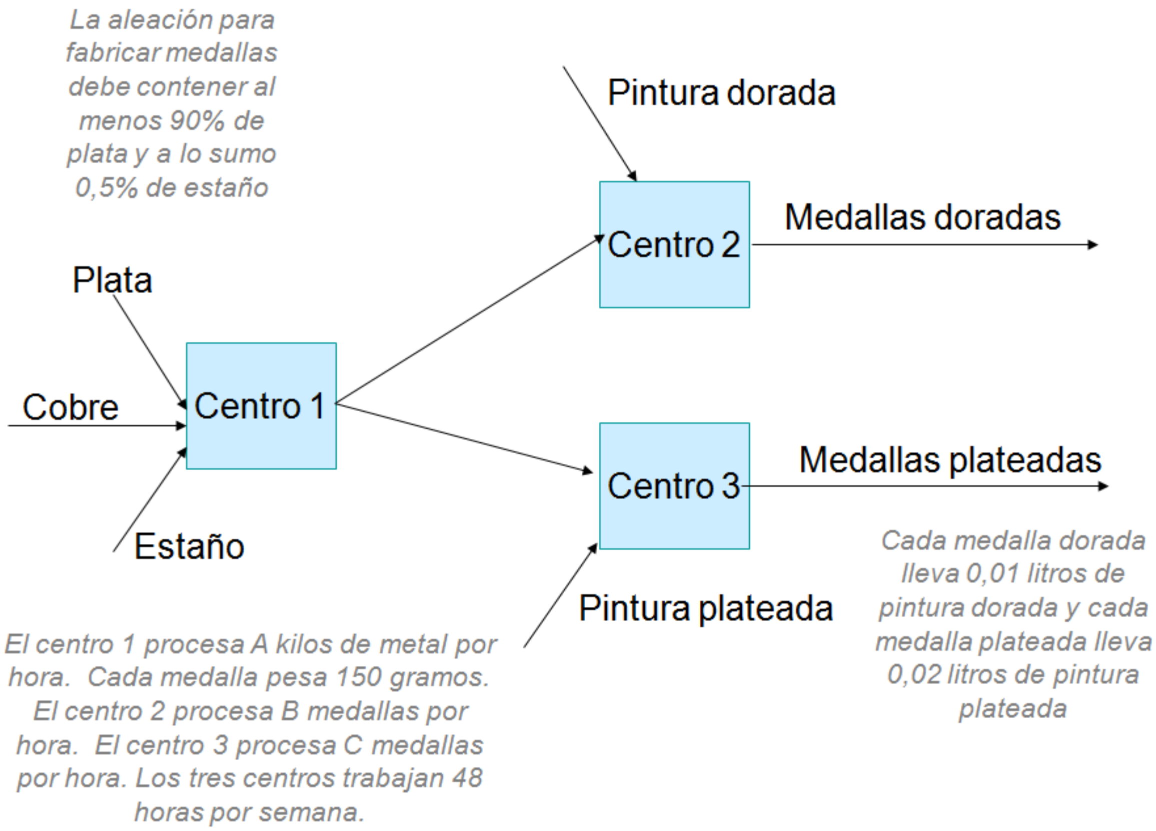


El caso práctico de hoy:

Armado vs Mezcla y otros centros de producción

La empresa "Olimpia" fabrica medallas doradas y plateadas haciendo una aleación de plata, cobre y estaño.
Los metales entran en el centro 1, en ese centro se fabrican medallas y se distribuyen a los centros 2 (donde se pintan de dorado) y 3 (donde se pintan de plateado).
La aleación para fabricar medallas debe contener al menos 90% de plata y a lo sumo 0,5% de estaño.
El centro 1 procesa A kilos de metal por hora. Cada medalla pesa 150 gramos.
El centro 2 procesa B medallas por hora.
El centro 3 procesa C medallas por hora.
Los tres centros (1, 2 y 3) trabajan 48 horas por semana
Cada medalla dorada lleva 0,01 litros de pintura dorada y cada medalla plateada lleva 0,02 litros de pintura plateada.
Se dispone semanalmente de D kilos de plata, E kilos de cobre, F kilos de estaño, G litros de pintura dorada y H litros de pintura plateada.
Los costos de los insumos son: Plata: $P1/kg; Cobre: $P2/kg; Estaño: $P3/kg.; Pintura dorada, $P4/litro; Pintura plateada, $P5/litro.

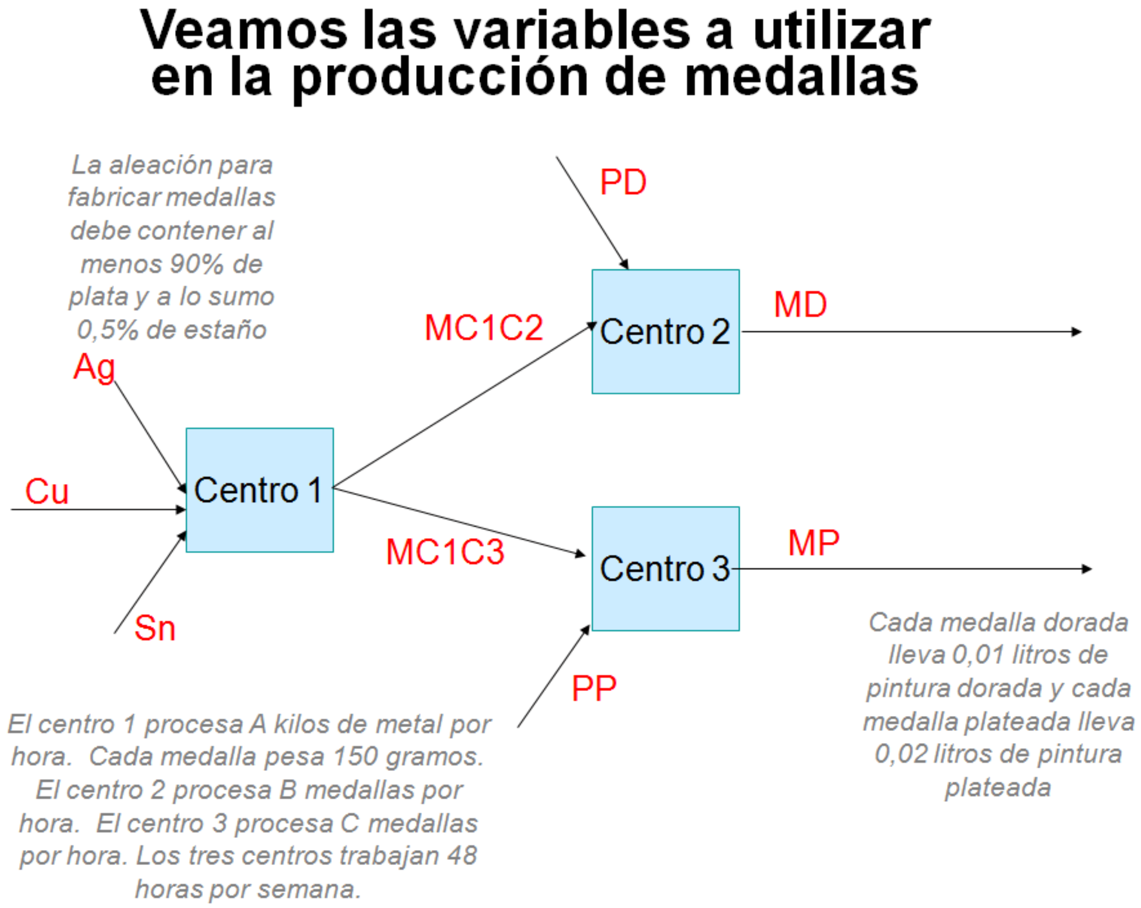
A continuación vemos un diagrama del proceso de producción.



Las medallas doradas y plateadas se venden en dos tipos de presentación llamadas “Alfa” y “Beta”.
La presentación “Alfa” consiste en vender 3 medallas doradas y 2 plateadas en una bolsita. Cada bolsita de “Alfa” se vende a $A1 y su demanda al fin de la semana será de A2 bolsitas.
La presentación “Beta” tiene también 5 medallas en una bolsita (4 plateadas y 1 dorada). Cada bolsita de “Beta” se vende a $T1 y su demanda al fin de la semana será de T2 bolsitas.

Una posible solución:

Definición de variables:
Ag: cantidad usada de Plata (kg/sem)
Cu: cantidad usada de Cobre (kg/sem)
Sn: cantidad usada de Estaño (kg/sem)
MC1Cj: Medallas que salen del C1 y van al Cj (medallas/sem)
PP: cantidad usada de Pintura plateada (litros/sem)
PD: cantidad usada de Pintura dorada (litros/sem)
MP: cantidad fabricada de Medallas plateadas (medallas/sem)
MD: cantidad fabricada de Medallas doradas (medallas/sem)



Son muy importantes las variables MC1C2 y MC1C3 porque son las que conectan un centro con el otro, porque la manera de plantear el problema es centro por centro, pero necesitamos las variables de conexión a fines de que quede todo como parte de un mismo modelo y no como 3 modelos desconectados.

Centro 1

¡Típico centro de mezcla!

Relación Entrada/Salida (E/S):
(Ag + Cu + Sn) = 0,150 (MC1C2 + MC1C3)
Disponibilidad de Materia Prima:
Ag $\leq$ D Cu $\leq$ E Sn $\leq$ F
Mezcla a la entrada:
Ag $\geq$ 0,9 (Ag + Cu + Sn) Sn $\leq$ 0,005 (Ag + Cu + Sn)
Capacidad productiva:
(Ag + Cu + Sn) (KG/SEM) $\leq$ A (KG/H) 48 (H/SEM)

Centro 2

Aquí no hay mezcla

Relación Entrada/Salida (E/S):
MC1C2 = MD
Uso de pintura:
PD (L/sem) = 0,01 (L/Medalla) MD (Medalla/sem)
Disponibilidad de Pintura dorada:
PD (L/sem) $\leq$ G (L/sem)
Capacidad productiva:
(MC1C2) (Medalla/sem) $\leq$ B (Medalla/H) 48 (H/sem)

Centro 3

Aquí tampoco hay mezcla

Relación Entrada/Salida (E/S):
MC1C3 = MP
Uso de pintura:
PP (L/sem) = 0,02 (L/Medalla) MP (Medalla/sem)
Disponibilidad de Pintura plateada:
PP (L/sem) $\leq$ H (L/sem)
Capacidad productiva:
(MC1C3) (Medalla/sem) $\leq$ C (Medalla/H) 48 (H/sem)

Todavía nos falta modelizar la venta de las medallas en las dos bolsas (Alfa y Beta)

Tenemos que separar las medallas doradas y plateadas en las que van para Alfa y las que van para Beta

División medallas doradas y plateadas para Alfa y Beta:
MP = MPAlfa + MPBeta
MD = MDAlfa + MDBeta

Entonces tenemos que definir más variables:

MPAlfa: cantidad de medallas plateadas usadas para armar bolsas de tipo Alfa (medallas/sem)
MPBeta: cantidad de medallas plateadas usadas para armar bolsas de tipo Beta (medallas/sem)
MDAlfa: cantidad de medallas doradas usadas para armar bolsas de tipo Alfa (medallas/sem)
MDBeta: cantidad de medallas doradas usadas para armar bolsas de tipo Beta (medallas/sem)
Alfa: cantidad de bolsas de tipo Alfa armadas (bolsas/sem)
Beta: cantidad de bolsas de tipo Beta armadas (bolsas/sem)

Bolsas Alfa y Beta a vender

Este proceso es un armado

¿Por qué este proceso es un armado?

Porque puedo discriminar en el producto final (bolsas) los elementos que la componen (medallas)

En el armado es muy importante asegurar que cada componente esté presente en el producto final en la cantidad requerida

Por eso hay que poner una restricción por componente

Armado de bolsa Alfa
MDAlfa (medallas/sem) = 3 (medallas/bolsa) Alfa (bolsas/sem)
MPAlfa (medallas/sem) = 2 (medallas/bolsa) Alfa (bolsas/sem)

Demanda de bolsa Alfa
Alfa (bolsas/sem) $\leq$ A2 (bolsas/sem)
(si suponemos demanda máxima, en el caso en el cual supongamos demanda mínima hay que poner $\geq$)

<u>Armado de bolsa Beta</u>
MDBeta (medallas/sem) = 1 (medallas/bolsa) Beta (bolsas/sem)
MPBeta (medallas/sem) = 4 (medallas/bolsa) Beta (bolsas/sem)

<u>Demanda de bolsa Beta</u>
Beta (bolsas/sem) $\leq$ T2 (bolsas/sem)
(si suponemos demanda máxima, en el caso en el cual supongamos demanda mínima hay que poner $\geq$)

Todavía nos falta la función objetivo (también llamado Z)

Como tenemos algunas cosas que representan ganancias y otras que representan costos, podemos armar una función lineal de beneficio (ganancias – costos):

MAX Z = $A1 Alfa + $T1 Beta - $P1 Ag - $P2 Cu - $P3 Sn - $P4 PD - $P5 PP

¿Qué nos queda de esta clase?

- ❑ Programación de metas
- ❑ Supuestos básicos necesarios para formular un modelo matemático lineal con variables continuas
- ❑ Mezcla y Armado

No olvidar…
Bajar de la página web de Modelos I y estudiar el material adicional a esta clase.
Abarca los temas de: Estrategia modular de modelización, aplicación de Programación de metas en una ecuación de caja.