Modelos y Optimización I (71.14)

Guía de ejercicios prácticos (y útiles)

Modelos y Optimización I (71.14)

Guía de Trabajos Prácticos

La cátedra resume en esta guía todos los problemas que se considera permiten la suficiente ejercitación para alcanzar un buen conocimiento de la materia. Dentro de cada tema se presentan: un índice de temas a tratar, problemas tipo resueltos y problemas a resolver.

Solicitamos a los alumnos que nos hagan llegar sus observaciones y comentarios a través de sus ayudantes de trabajos prácticos, con el objeto de efectuar futuras correcciones y agregados que se consideren de interés. Dedicamos esta guía a todos los que colaboraron en su elaboración, con sugerencias y propuestas, y especialmente a quien comenzó con la tarea de recopilación, el ingeniero Horacio Malenqui.

Prólogo a la Segunda Edición

Esta segunda edición se realiza en base a las observaciones y comentarios recibidos de los alumnos y docentes de la cátedra.

Se han corregido errores y se han ampliado las explicaciones de los ***Problemas Tipo****. Asimismo, hemos eliminado algunos problemas e incorporado otros, tratando de actualizarla y mejorarla al mismo tiempo.*

Por otro lado se han modificado los datos de algunos ejercicios para facilitar su resolución numérica manual o automática.

Se agradece especialmente el trabajo realizado por la Lic. Silvia Ramos y por el Sr. Esteban Santellán quienes hicieron posible esta nueva edición.

Agosto 1993

Prólogo a la Tercera Edición

Más de ocho años pasaron ya desde la última actualización de esta Guía. Mucho tiempo. Y fueron ustedes, sus lectores, los que nos “recordaron” que estábamos en falta. Esto es bueno, pues confirma el sentir de nuestra cátedra: enseñar implica estar dispuestos a escuchar, para poder seguir aprendiendo.

Y escuchamos. Por ejemplo, diversas sugerencias y correcciones, las cuales hoy plasmamos en esta nueva Edición, agregando tanto Problemas para resolver como Problemas Tipo. Además, hemos actualizado muchos de ellos y facilitado su traslado a la práctica, al dedicarle más espacio a su resolución a través de software.

En este tiempo también, hemos escuchado, y observado, cómo los desganos y sinsabores de la vida cotidiana afectan cada vez más el aprendizaje en clase. Cómo impactan de forma tal, que nos olvidamos de que estamos en una Facultad para hacer algo que queremos y que, en el corto o en el largo plazo, esperamos nos dé alguna satisfacción. Por esta razón, les proponemos que permitan que esta Guía los “guíe” en el aprendizaje de la materia, sabiendo que están haciendo algo para ustedes. Y eso, hoy más que nunca, es muy bueno.

Febrero 2002

Nuestro agradecimiento a quienes llevaron a cabo el proceso de reforma de la guía que originó esta tercera edición: el líder del proyecto, Lic. Diego Sadras y sus colaboradores, el Lic. Pablo Colombo y el Lic. Pablo Echevarría. También a todos los docentes y alumnos que con sus sugerencias nos dan la oportunidad de mejorar día tras día. Esta edición es de todos ustedes.

"Los hombres vulgares –decía Ortega— están siempre satisfechos de sí mismos. Dan por buenos sus gustos, preferencias y opiniones, sin reflexionar demasiado. No se exigen nada, no se remiten a instancias superiores, se conforman con lo que buenamente encuentran en su cabeza y están encantados de ser como son.

Por el contrario, los hombres excelentes viven exigiéndose, no le encuentran sabor a la vida si no se ponen al servicio de una empresa superior y trascendente. Estos hombres desestiman lo que no les cuesta esfuerzo y sólo aceptan como digno de ellos lo que está aún por encima y les reclama un estirón para alcanzarlo. Esta es la vida como disciplina, la vida noble."

Alejandro Dolina
Crónicas del Ángel Gris

Bibliografía

1- *Hillier / Lieberman "Introducción a la investigación de operaciones" Ed. Mc Graw Hill*
2- *Wayne L. Winston - Investigación de Operaciones.*
3- *Hamdy A. Taha "Investigación de Operaciones" Ed. Wiley*
4- *Judea Pearl – Heuristics. Ed. Addison Wesley*
5- *Palma y Lacalle "Programación lineal, Método Simplex, Resolución de Problemas" Ed. Macchi*
6- *I. Marín, R.J. Palma, y C. Lara " La programación lineal en el proceso de decisión" Ed. Macchi*
7- *S. I. Gass "Programación lineal, Métodos y Aplicaciones" Ed. CECSA*
8- *H. Sasieni, A Yaspan y L. Friedman "Investigación de Operaciones" – Ed. Limusa*
9- *A. Kaufman "Métodos y Modelos de la Investigación de operaciones" Tomo 1. Ed CECSA*
10- *R. L. Ackoff y M. W. Sasieni "Fundamentos de la investigación de Operaciones" Ed. Limusa*
11- *G. B. Dantzig "Linear Programming and extensions" – Univ. Princeton – New Jersey*
12- *I. Marín "Métodos de exploración dirigida" Ed. Macchi – Buenos Aires, 1980*
13- *I. Marín, R. Palma, H. Rojo "Programación lineal, modelización y enunciados" Ed. Macchi*
14- *I. Marín, V. Rodríguez, O. Perino "Programación Lineal. Conceptos y Aplicaciones" Ed. Macchi*
15- *J. M. Vergara "Programación matemática y cálculo económico, teoría y aplicaciones" Ed. Vicens*
16- *H. P. Williams "Model Building in mathematical programming" Ed. Wiley*

☞ *En nuestra página en Internet, se pueden encontrar links relacionados.*

Pautas para el uso de la Guía de Trabajos Prácticos

La guía de trabajos prácticos presentada contiene diversos problemas sobre los temas desarrollados en las clases teórico-prácticas de la materia.

Cada tema contiene: uno o varios ***Problemas Tipo*** *y varios* ***Problemas para resolver****.*

Problemas Tipo

Son problemas representativos que se muestran analizados y resueltos. El objetivo es facilitar al alumno su iniciación en cada uno de los temas.

Esto se relaciona fuertemente con el método didáctico empleado, el cual se basa sustancialmente en la participación activa de los alumnos en clase. Por este motivo es necesario que los mismos trabajen sobre los problemas tipo y así, posteriormente, en la resolución de los ejercicios propuestos para cada ocasión. De esta forma, se posibilitará una mejor comprensión de los temas actuando como catalizador positivo de la participación en clase y de la asimilación de los temas.

Problemas para resolver

En cada tema se enuncian varios problemas para resolver. No es necesario que el alumno resuelva todos los ejercicios para saber el tema. Los ejercicios que no se hayan resuelto durante el cuatrimestre servirán como práctica para los coloquios finales.

Durante las clases prácticas grupales, será el ayudante a cargo del grupo quien determinará los ejercicios a realizar de acuerdo con las dificultades y falencias que detecte durante las mismas.

Debe quedar claro que en los planteos de programación lineal no existe una única solución posible. Un mismo enunciado puede ser planteado de diversas maneras (cada una con sus hipótesis particulares) y todas ellas ser correctas, siempre que no se modifique ningún aspecto del enunciado dado.

Para un óptimo aprovechamiento del tiempo de estas clases, los alumnos deberán traer planteados los problemas indicados por su ayudante. De esta manera podrán presentarle sus dificultades en cada resolución y el grupo podrá profundizar el análisis de los diversos planteos obtenidos. Así se enriquecerá la clase, ya que para cada enunciado se planteará no una, sino varias formas de resolverlo. Y al verlo desde diversos puntos de vista se hace más fácil la comprensión y el dominio del tema en estudio.

Cuando se encuentren serias dificultades para resolver un ejercicio, se podrán consultar los problemas tipo buscando soluciones similares dentro de los enunciados. Una vez resuelto el problema, se deberá buscar dentro de los problemas para resolver, un enunciado similar para reafirmar los conceptos aprehendidos.

Nunca *puede considerarse sabido un tema, con sólo haber leído y comprendido* ***problemas resueltos*** *por otra persona. Únicamente resolviendo una a una las dificultades que se van presentando al realizar el planteo de un problema, pueden irse incorporando los distintos conceptos de programación lineal.*

Al consultar el calendario, se verá que no todos los problemas que se incluyen en la guía están propuestos para resolver. Éstos son los que se consultan en clase (no se pueden resolver todos por falta de tiempo). Esto no quiere decir que la clase de *trabajo grupal consista en una resolución de problemas. Lo principal es que los alumnos traigan los problemas propuestos resueltos para poder aprovechar las clases. Además es importante que los alumnos se acostumbren a que la resolución de los ejercicios debe efectuarse en forma prolija, clara y, en el caso de los modelos, a identificar cada grupo de inecuaciones en forma precisa junto con sus variables correspondientes.*

Breve descripción del programa LINDO

Introducción

Los ejemplos de esta guía se realizaron con el software LINDO (Linear Interactive and Discrete Optimizer) 6.1, que permite resolver modelos de Programación Lineal Continua y/o Entera y hacer el correspondiente análisis de sensibilidad. En el sitio http://www.lindo.com puede bajarse una versión académica que permite modelos de hasta 300 variables (a lo sumo 30 enteras) y 150 restricciones.

Ingreso de un modelo simple

Vamos a ingresar el modelo de la figura en LINDO:

4 X + 3 Y £ 10
3 X + 5 Y £ 12
Z = 2 X + 3 Y ➔ Máx.

El modelo debe comenzar por la función objetivo precedida de MAX o MIN según se la quiera maximizar o minimizar respectivamente. Puede constar de una o más líneas y se separa del resto del modelo mediante la expresión SUBJECT TO (puede abreviarse como ST) que indica que la función objetivo esta "sujeta a" las restricciones que se indicarán a continuación.

```
MAX 2X + 3Y
ST
```

Seguidamente se ingresan las restricciones (aunque pueden estar separadas por espacios, se suelen ingresar en líneas separadas para mejorar la legibilidad). El modelo finaliza con la expresión END.

```
!Restricciones
MP) 4X + 3Y < 10
MO) 3X + 5Y < 12
END
```

Las reglas que tuvimos en cuenta al hacer este trabajo son:

- *Cada término, en cualquier restricción (o en la función objetivo), contiene: [+|–] [coef.] [nombre_variable], siempre en ese orden (no necesariamente separados por blancos). El signo más (+) también es opcional, así como el coeficiente, si fuera 1.*
- *El nombre de la variable debe comenzar con una letra y puede contener hasta 8 caracteres alfanuméricos.*
- *Todos los términos variables deben ir a la izquierda de la inecuación y cada término independiente a la derecha. Si el modelo no estuviera formulado de esta manera, se deberá operar y pasar de términos hasta llegar a la misma.*
- *Como no se pueden utilizar desigualdades estrictas LINDO admite el uso de estos signos en vez de los que incluyen igualdad ("<" equivale a "£" y ">" a "³").*
- *Las ecuaciones se pueden rotular con un nombre que debe seguir las reglas usadas para denominar las variables. Luego del mismo se incluye un paréntesis de cierre. Esto simplifica notablemente la comprensión de los reportes.*

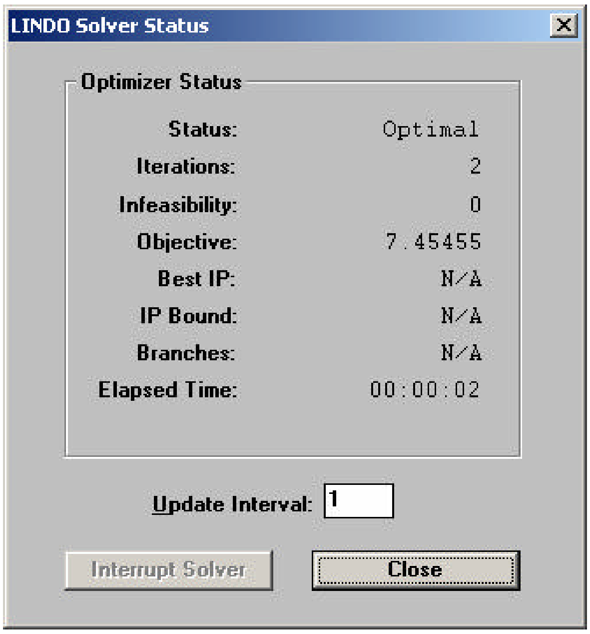
- *Pueden incluirse comentarios para mejorar la legibilidad del modelo anteponiendo un signo de admiración (cierre) a los mismos para que LINDO lo ignore al compilar el modelo.*

Aquí tenemos el modelo terminado:

```
MAX 2X + 3Y
ST
!Restricciones
MP) 4X + 3Y < 10
MO) 3X + 5Y < 12
END
```

El resultado de la corrida

Una vez completado el modelo se compila mediante la opción Compile Model del menú Solve y se ejecuta con la opción Solve del mismo menú. Puede omitirse el paso de la compilación (Solve compila automáticamente en caso de ser necesario) aunque el mismo evita la mayoría de los "cuelgues" en los últimos sistemas Windows.



Al resolver el modelo el programa abre un cuadro con el estado de la solución y algunos datos acerca de la misma. Los posibles estados (status) son:

- ***Infeasible**: el modelo es incompatible (no tiene solución válida). Previamente se presenta un cuadro que explica la situación (NO FEASIBLE SOLUTION…).*
- ***Unbounded**: el modelo es un poliedro abierto (el funcional no está restringido). Previamente se presenta un cuadro que explica la situación (UNBOUNDED SOLUTION …).*
- ***Optimal**: se llegó a una solución óptima. Se presenta la posibilidad de realizar un análisis de sensibilidad del rango de variación de los coeficientes de la función objetivo y los términos independientes de las restricciones.*

En todos los casos, una vez que se cierran los cuadros emergentes se podrá ver el reporte de la corrida que se muestra a continuación.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      7.454545

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X         1.272727          0.000000
         Y         1.636364          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       MP)         0.000000          0.090909
       MO)         0.000000          0.545455

 NO. ITERATIONS=       2


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
        X        2.000000         2.000000         0.200000
        Y        3.000000         0.333333         1.500000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
       MP     10.000000          6.000000         2.800000
       MO     12.000000          4.666667         4.500000
```

El mismo contiene en primer lugar una indicación de la cantidad de pasos efectuados hasta llegar al óptimo y el valor de la función objetivo en el mismo (OBJECTIVE FUNCTION VALUE).

Seguidamente se detallan los valores (VALUE) de las variables reales del problema y sus correspondientes costos de oportunidad (REDUCED COST).

Luego se presentan los valores de las variables "slack" (SLACK OR SURPLUS), así como el valor marginal (DUAL PRICES) correspondiente a cada uno de los recursos (o restricciones) a los que corresponden.

A continuación se muestra, en caso de haber seleccionado la opción de análisis de sensibilidad, el valor actual de los coeficientes del funcional para cada variable del problema y sus rangos de variación positiva y negativa (OBJ COEFFICIENT RANGES).

Por último se tiene un análisis similar para cada una de las restricciones del problema, con el valor actual del término independiente de la restricción y sus rangos de variación positiva y negativa (RIGHTHAND SIDE RANGES).

Otros comandos

Los siguientes comandos permiten agregar características al modelo. Se ubican luego del término END.

- *GIN: indica que la variable que lo sigue es entera (General INteger)*
- *INT: indica que la variable que lo sigue es bivalente.*
- *SUB: establece un limite superior para el valor de la variable que lo sigue. Equivale a una restricción de máximo en el modelo pero permite ahorrársela (si hay un límite en la cantidad de ecuaciones que puede manejar el programa) y trabaja en forma más eficiente.*

- *SLB: establece un límite inferior para el valor de la variable que lo sigue. Comparte todas las características de SUB.*

Herramientas para la corrección de errores

Cuando no se puede obtener un resultado óptimo se debe analizar qué es lo que provoca esta situación. La herramienta para hacer esto es el comando Debug del menú Solve. El mismo puede devolver restricciones (para los problemas incompatibles) o variables (para los que son poliedros abiertos), divididas en dos grupos:

- *Necesarias (NECESSARY SET): el submodelo formado por este conjunto es incompatible. Para corregirlo, basta con eliminar (o modificar) un solo elemento del mismo.*
- *Suficientes (SUFFICIENT SET): el modelo tiene una solución óptima eliminando (o modificando) cualquiera de ellas. Si el modelo no tiene solución por un error en una restricción, esta aparecerá listada en este conjunto.*

Una vez que se hayan corregido todos los conjuntos que se presentaron el modelo tendrá una solución óptima.

Sugerencias

☞ *Si se tiene un modelo pasado al LINDO sin rótulos para las ecuaciones y se quiere obtener en forma rápida una numeración para las mismas se puede usar el comando Formulation del menú Reports. El resultado del mismo es el planteo del modelo, en el que aparecerán rotuladas las restricciones con números sucesivos desde el 2 (ya que el 1 es la función objetivo).*

☞ *Si bien LINDO no valida que los nombres de las restricciones sean distintos entre sí o de los nombres de las variables reales (ya que solamente los usa para emitir el reporte) es una buena práctica no repetir los mismos para evitar confusiones posteriores.*

☞ *Se recomienda ser muy cuidadoso al pasar el modelo al LINDO. Es muy común cometer errores en los nombres de las variables, lo que genera 2 variables distintas. En ese sentido suele ser muy útil dar un vistazo al reporte de la solución y verificar que no se esté violando alguna de las restricciones.*

☞ *Se debe evitar utilizar coeficientes con gran diferencia de escala, ya que esto puede provocar errores de redondeo en la resolución del problema. En caso de encontrarse con un modelo que tiene algunos coeficientes muy grandes (pequeños) respecto de los demás se recomienda dividir (multiplicar) la ecuación completa por una constante para acercarlo a los valores de los demás coeficientes del problema. En este caso, aparecerá el mensaje "POORLY SCALED MODEL".*

☞ *Para referencias adicionales se recomienda consultar la ayuda del programa (comandos, mensajes, reglas, ver las tablas de simplex, etcétera).*

1. Modelización Básica y Resolución Gráfica

Temario

1- Análisis del enunciado del problema.
2- Resumen de la situación a resolver.
3- Identificación de incógnitas: su significado y unidades.
4- Planteo del sistema de inecuaciones correspondientes.
5- Disposición del sistema de ejes coordenados. Escalas.
6- Identificación de los semiplanos definidos por cada inecuación. Identificación de la recta límite.
7- Identificación del recinto de soluciones.
8- Pendiente del funcional. Rectas de isocosto e isobeneficio.
9- Solución óptima.
10- Obtención algebraica de los valores de las incógnitas para la solución óptima.
11- Significado de las variables slacks. Planteo del sistema de ecuaciones correspondiente al problema.
12- Valor de las variables slacks para la solución óptima.
13- Análisis gráfico de la variación en las restricciones existentes: aumento o disminución de disponibilidades.
14- Análisis gráfico de la inclusión de nuevas restricciones.
15- Análisis gráfico de variaciones en el funcional.

Problema Tipo Nº 1

Un fabricante de bombones entrega sus productos en cajas de un kilogramo, en dos variedades: A y B.

La caja tipo A contiene 300 gramos de bombones de licor, 500 gramos de bombones de nuez y 200 gramos de bombones de fruta. La caja tipo B contiene 400 gramos, 200 gramos y 400 gramos de cada tipo de bombón, respectivamente.

La utilidad por cada caja de bombones tipo A es de $ 120, y por cada caja de tipo B es de $ 90.

El fabricante dispone de 100 kilogramos de bombones de licor, 120 kilogramos de bombones de nuez, 100 kilogramos de bombones de fruta.

Se desea definir la cantidad de cajas de cada tipo que debe armar en esta situación para que su beneficio sea máximo.

Resolución del problema

1. *Identificación de las incógnitas con sus unidades*

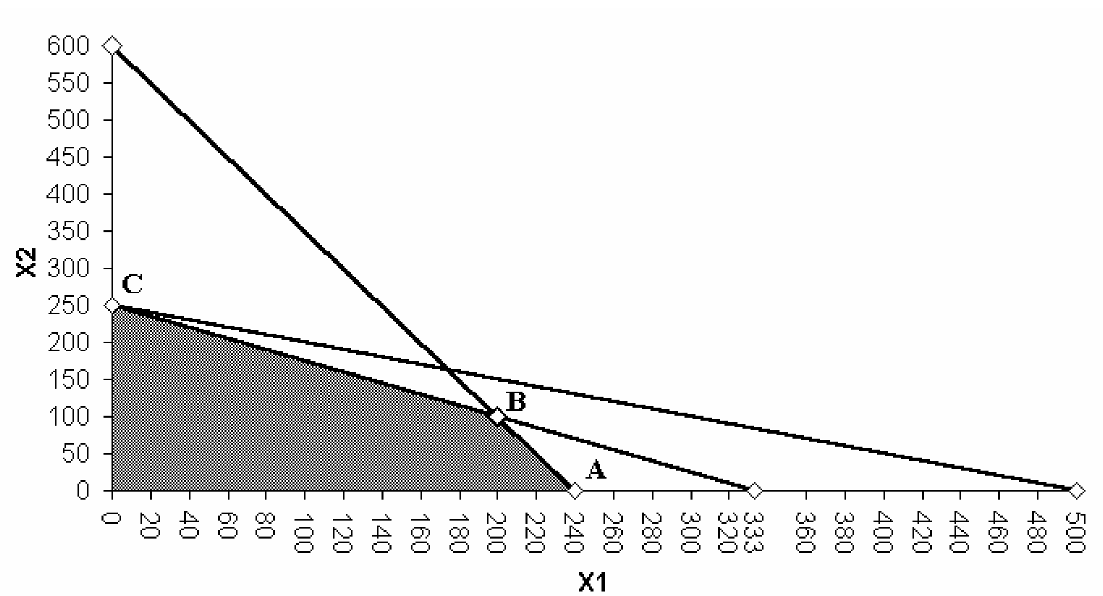
   X_1: *Producción de cajas tipo A* *un: Nº de cajas/período*

   X_2: *Producción de cajas tipo B* *un: Nº de cajas/período*

2. *Planteo de las inecuaciones y funcional*

$$0,3\,X_1 + 0,4\,X_2 \le 100 \quad \leftarrow \text{Licor}$$
$$0,5\,X_1 + 0,2\,X_2 \le 120 \quad \leftarrow \text{Nuez}$$
$$0,2\,X_1 + 0,4\,X_2 \le 100 \quad \leftarrow \text{Fruta}$$
$$\text{C.N.N.} \quad X_1, X_2 \ge 0$$
$$Z = 120\,X_1 + 90\,X_2 \rightarrow \text{Máx}$$

3. *Representación gráfica*



4. *Obtener algebraicamente los valores de X_1, X_2 y Z en vértices*

Punto 0		$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$Z = 0$
Punto A	$0,5\ X_1 + 0,2\ X_2 = 120$ $X_2 = 0$	$X_1 = 240$	$X_2 = 0$	$Z = 28800$
Punto B	$0,5\ X_1 + 0,2\ X_2 = 120$ $0,3\ X_1 + 0,4\ X_2 = 100$	$X_1 = 200$	$X_2 = 100$	$Z = 33000$
Punto C	$0,3\ X_1 + 0,4\ X_2 = 100$ $X_1 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 250$	$Z = 22500$

El punto C, por tratarse de un extremo "degenerado", puede definirse también con alguno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$0,3\ X_1 + 0,4\ X_2 = 100$ ó $0,2\ X_1 + 0,4\ X_2 = 100$

$0,2\ X_1 + 0,4\ X_2 = 100$ $X_1 = 0$

5. *Variables Slacks – Planteo de Ecuaciones*

$$
\begin{aligned}
0,3\ X_1 + 0,4\ X_2 + X_3 &= 100 \\
0,5\ X_1 + 0,2\ X_2 + X_4 &= 120 \\
0,2\ X_1 + 0,4\ X_2 + X_5 &= 100
\end{aligned}
$$

Variable Slack	**Descripción**	**Unidad**
X_3	*Sobrante de bombones de licor*	*kilogramos/período*
X_4	*Sobrante de bombones de nuez*	*kilogramos/período*
X_5	*Sobrante de bombones de fruta*	*kilogramos/período*

$$
0\begin{cases}X_1=0\\X_2=0\end{cases}\quad A\begin{cases}X_2=0\\X_4=0\end{cases}\quad B\begin{cases}X_4=0\\X_3=0\end{cases}\quad C\begin{cases}X_3=0\\X_5=0\end{cases}\quad C'\begin{cases}X_5=0\\X_1=0\end{cases}\quad C''\begin{cases}X_1=0\\X_3=0\end{cases}
$$

6. *Hallar algebraicamente el valor de las variables en el óptimo*

El punto extremo B, óptimo del problema, se define por la anulación de las variables X_3 y X_4. Por lo tanto, el valor del resto de las variables en el óptimo, surge del siguiente sistema de ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
0,3\ X_1 + 0,4X_2 &= 100 \\
0,5\ X_1 + 0,2X_2 &= 120 \\
0,2\ X_1 + 0,4X_2 + X_5 &= 100
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor de todas las variables y el funcional, en el óptimo, será:

X_1 = 200 *Cajas bombones tipo "A"/período*

X_2 = 100 *Cajas bombones tipo "B'/período*

X_3 = 0 *Kgs. Bombones de licor/período*

X_4 = 0 *Kgs. Bombones de nuez /período*

X_5 = 20 *Kgs. Bombones de fruta/período*

Z = 33.000 *\$/período*

Problema Tipo Nº 2

Una empresa automotriz está equipada para producir automóviles y camiones. Su planta fabril está organizada en cuatro departamentos: estampado, montaje de motores, línea de montaje de automotores y línea de montaje de camiones. Las capacidades de cada departamento están limitadas de la siguiente forma:

Estampado puede producir 25.000 autos ó 35.000 camiones por año.

Montaje de motores puede producir 33.333 autos ó 16.667 camiones por año

Montaje de autos: 25.000 por año.

Montaje de camiones: 15.000 por año.

Se desea producir como mínimo 12.000 autos y 8.000 camiones por año, estimándose asimismo en 18.000 unidades la cantidad demandada máxima anual de automóviles.

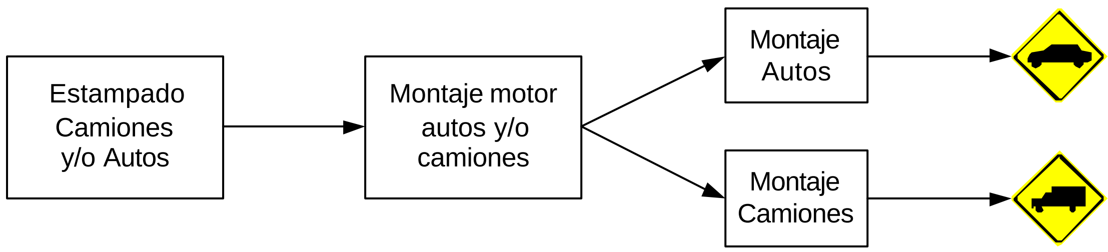
El margen de beneficios es de 150.000 $ por auto y 125.000 $ por camión.

Se desea conocer el plan de producción que haga máximo el margen total de beneficio.

Resolución del problema

1. *Representación gráfica del subsistema a modelizar*

- *Fábrica – Subsistema Producción*



2. *Objetivo del problema*

Determinar el plan de producción de autos y camiones para el próximo año, de manera de maximizar la ganancia total de la empresa.

3. *Hipótesis*

a- No hay stock ni inicial ni final. Se vende todo lo que se produce.

b- No existen costos fijos en el sistema producción.

c- Se vende al contado.

d- Se planifica a moneda constante.

e- Los excedentes de caja no se los trabaja a interés.

f- Las capacidades son prácticas, es decir, están afectadas por las paradas

g- No hay restricciones ni de Mano de Obra, ni de Producción, ni de MP.

h- No hay mermas en los procesos productivos.

i- Se produce un solo tipo de auto y un solo modelo de camión.

4. <u>Variables</u>

Variable	Descripción	Unidad
X_1	Cantidad de autos a producir	unidades/año
X_2	Cantidad de camiones a producir	unidades/año

5. <u>Restricciones que debe cumplir el modelo</u>

1- Capacidad de estampado (autos y/o camiones)
2- Capacidad de motores (autos y/o camiones)
3- Capacidad de montaje autos.
4- Capacidad de montaje camiones.
5- Demanda mínima y máxima de autos.
6- Demanda mínima camiones.

De 1, la capacidad de estampado se debe expresar entre unidades iguales, vale decir, en autos o en camiones.

Si 35.000 camiones = 25.000 autos → 1 camión = 0,71 autos.

La ecuación la podríamos expresar como

$$X_1 \frac{autos}{año} + 0,71 \frac{autos}{camión} * X_2 \frac{camiones}{año} \leq 25.000 \frac{autos}{año}$$

ó

$$X_1 \frac{autos}{año} * 1,4 \frac{camiones}{auto} + X_2 \frac{camiones}{año} \leq 35.000 \frac{camiones}{año}$$

De esta forma la ecuación es homogénea en unidades.

En la restricción 2, 33.333 autos = 16.667 camiones ➔ 1 auto = 0,5 camión, entonces sería:

$$X_1 \frac{autos}{año} + 2 \frac{autos}{camión} * X_2 \frac{camiones}{año} \leq 33.333 \frac{autos}{año}$$

ó

$$X_1 \frac{autos}{año} * 0,5 \frac{camiones}{auto} + X_2 \frac{camiones}{año} \leq 16.667 \frac{camiones}{año}$$

La 3: X_1 £ 25.000 ; *La 4:* X_2 £ 15.000

La 5: X_1 ³ 12.000 ; *La 6:* X_2 ³ 8.000

X_1 £ 18.000

☞ *Nota: Ver que la ecuación 3 no restringe el modelo, sino que es redundante ya que existe la 5:* X_1 £ 18.000.

C.N.N. X_1 ³ 0; X_2 ³ 0

6. <u>Funcional</u>

150.000 X_1 + 125.000 X_2 ➔ Máx

☞ *Nota: Observar que, como se trata de un beneficio, está expresado en \$/unidad de tiempo, en este caso \$/año.*

Observar que el problema puede tener otros funcionales acorde a otros objetivos:

Objetivo	Funcional
Maximizar ventas de camiones	X_2 ➔ Máx
Minimizar producción de autos	X_1 ➔ Mín
Minimizar capacidad ociosa de estampado	$X_1 + 0{,}71\ X_2$ ➔ Máx
etc.	etc.

7. *Análisis posterior*

¿Qué pasa si no se cumple alguna hipótesis (3.a - 3.i)?

a) Si no se vende todo lo que se produce hay que abrir las variables X_1 y X_2:

X_1' → cantidad de autos a producir
X_1'' → cantidad de autos a vender
X_2' → cantidad de camiones a producir
X_2'' → cantidad de camiones a vender

y opcionalmente, agregar:

S_{i1} → cantidad inicial de autos en stock
S_{f1} → cantidad final de autos en stock
S_{i2} → cantidad inicial de camiones en stock
S_{f2} → cantidad final de camiones stock

i- Si no es necesario considerar stocks, las ecuaciones a incorporar serían:

$$X_1' \text{ ³ } X_1''$$
$$X_2' \text{ ³ } X_2''$$

ii- Caso contrario:

$$S_{i1} + X_1' = S_{f1} + X_1''$$
$$S_{i2} + X_2' = S_{f2} + X_2''$$

donde las variables que representan stocks deben figurar también en otras restricciones o en el funcional, de lo contrario no tiene sentido para el modelo haberlas agregado.

En cualquier caso, las capacidades de línea de montaje de autos y camiones serían:

$$X_1' \text{ £ } 25.000 \text{ [autos/año]}$$
$$X_2' \text{ £ } 15.000 \text{ [camiones/año]}$$

análogamente, debería reemplazarse en las restricciones de capacidad de estampado y montaje de motores las variables X_1 y X_2 por X_1' y X_2'. Mientras que las restricciones de demanda quedarían:

$$12.000 \text{ £ } X_1'' \text{ £ } 18.000 \text{ [autos/año]}$$
$$X_2'' \text{ ³ } 8.000 \text{ [camiones/año]}$$

b) Si se consideraran los costos fijos, habría que agregarlos en el funcional

$$Z = 150.000\ X_1 + 125.000\ X_2 - \text{Costos fijos} \Rightarrow \text{Máx}$$

c) Si no se vende al contado, y se quiere el ingreso a valores actuales, hay que dividir el precio por un coeficiente mayor a 1 (pérdida por interés).

Ej: si se vende a 360 días e "i" es la tasa a 360 días.

$$Z = 150.000\ X_1/(1 + i) + 125.000\ X_2/(1 + i) \Rightarrow \text{Máx}$$

d) Si hubiera inflación habría que multiplicar los coeficientes de Z por 1a tasa anual de inflación, para obtener el valor actualizado al año.

e) *Si suponemos que cada auto que se vende genera un excedente de caja de "b" \$/u y cada camión "c" \$/u, y este excedente se trabaja a una tasa "i".*

$$Z = 150.000\ X_1 + 125.000\ X_2 + (b\ X_1)i + (c\ X_2)i \Rightarrow Máx$$

f) *Si las capacidades pudieran afectarse por 'paradas', habría que conocer un valor estimativo del porcentaje de pérdida de tiempo útil que estas provocan.*

Ej: Se usa un 10% linea montaje motor para preparar los equipos, entonces

$X_1 + 2\ X_2$ £ $0,9 * 33.333$

g) *Habría que conocer el consumo unitario por auto y camión de cada uno de estos recursos y sus disponibilidades anuales, y agregar las restricciones correspondientes al modelo.*

h) *Si hubiera mermas en la producción, se deberían afectar los coeficientes tecnológicos de los procesos que las tuvieran.*

i) *Si se consideraran más modelos de autos y/o camiones, habría que trabajar con más variables. (Probablemente una para cada modelo)*

☞ *Sugerencia: Partir del problema inicial, e ir agregando todas la restricciones que surgen del no cumplimiento de las hipótesis 3.a a 3.i.*

Problema Tipo Nº 3

Dos aditivos "1" y "2" deben ser empleados para mejorar la calidad de una nafta. Se deben cumplir las siguientes condiciones:

a- Como los aditivos no producen combustión es conveniente, para evitar la formación de depósitos en el carburador, que por cada 10 litros de gasolina no se agregue más de 1/2 litro de aditivos.

b- La cantidad de aditivo "2" más dos veces la cantidad de aditivo 1 debe ser, como mínimo, 1/2 litro por cada 10 litros de gasolina. De esta manera se logra una nafta de color óptimo.

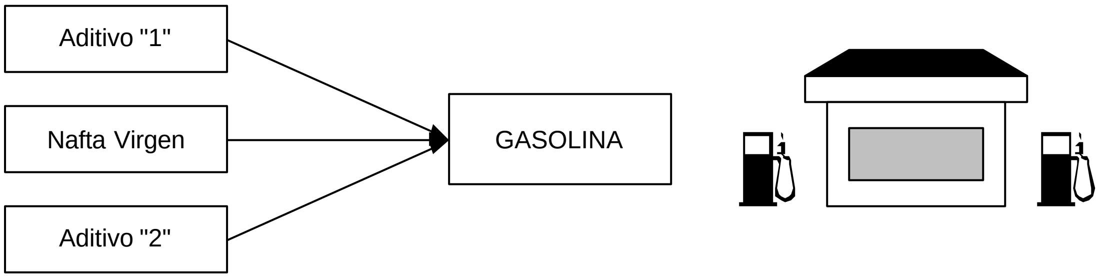
c- Agregar un litro de aditivo "1" significa que a la nafta se agregan 10 unidades de octanaje y agregar un litro de aditivo "2", 20 unidades de octanaje.

La nafta sin aditivos posee un octanaje de 84 y se quiere que, como mínimo, la gasolina obtenida posea un número de octanos superior a 90.

El costo del aditivo "1" es de 153 \$/litro y el del "2", 400 \$/litro.

Resolución del problema

1. *Representación gráfica del subsistema a modelizar*



2. *Objetivo del problema*

Determinar la cantidad de cada uno de los aditivos a agregar a la nafta virgen por cada 10 litros de gasolina de manera de minimizar los costos.

3. *Hipótesis*

- *No hay mermas en el proceso de mezcla.*
- *No hay costo en el proceso de mezcla.*
- *La relación de octanos es lineal.*
- *No hay costo de M.O.*
- *Todas las naftas vírgenes que pueda usar tienen igual costo.*
- *El aumento en unidades de octanaje de los aditivos se considera por cantidad agregada cada 10 litros de gasolina.*

4. *Variables*

X_1 = Cantidad de aditivo "1" a agregar a la nafta por c/10 lts. [litros / 10 litros]

X_2 = Cantidad de aditivo "2" a agregar a la nafta por c/10 lts. [litros / 10 litros]

5. *Restricciones que se deben cumplir*

1- No agregar más de 0,5 litros de aditivos cada 10 litros de gasolina.

2- Relación entre el aditivo "1" y "2" por el color de la gasolina.

3- Número total de octanos de la gasolina.

6. *Inecuaciones*

1- Aditivo "1" + Aditivo "2" + Nafta virgen = 10 litros de gasolina.

La restricción dice que el agregado total de aditivos no puede ser superior a 1/2 litro, entonces:

$$X_1 + X_2 \leq 0,5 \text{ [litros / 10 litros]}$$

2- Para obtener una coloración final óptima:

$$2\,X_1 + X_2 \geq 0,5 \text{ [litros / 10 litros]}$$

3- Dado que partimos de 84 octanos debemos mejorar por lo menos en 6, por lo que debemos agregar aditivos "1" y "2" para que se cumpla esto:

$$10\frac{un}{lt} * X_1 \frac{lts}{10\,lts} + 20\frac{un}{lt} * X_2 \frac{lts}{10\,lts} \geq 6\frac{lts}{10\,lts}$$

C.N.N.: X_1 ³ 0 ; X_2 ³ 0

Funcional: $Z = 153\ X_1 + 400\ X_2$ [$ / 10 lts.] ➔ *Mín*

☞ *Nota: Un planteo más general puede ser:*

X_1: *Cantidad de aditivo "1" a agregar a una producción N*

X_2: *Cantidad de aditivo "2" a agregar a una producción N*

V: *Cantidad de nafta virgen a agregar a una producción N*

$N = X_1 + X_2 + V$

N £ M (En el supuesto de demanda máxima)

N ³ m (En el supuesto de demanda mínima)

La restricción 1 sería

$$X_1 + X_2 \leq \frac{0{,}5}{10}\left[X_1 + X_2 + V\right]$$

La restricción 2 sería

$$2X_1 + X_2 \leq \frac{0{,}5}{10}\left[X_1 + X_2 + V\right]$$

La restricción 3 sería

$$10X_1 + 20X_2 \geq 6\left[X_1 + X_2 + V\right]$$

Fijarse que haciendo M → ¥
m = 0
N = 10 *obtenemos el planteo propuesto.*

Si hubiéramos definido las variables así:

X_1 = % de Aditivo "1"

X_2 = % de Aditivo "2"

La 1 sería X_1 + X_2 £ 5%

La 2 sería $2X_1$ + X_2 ³ 5%

La 3 no se puede manejar con inecuaciones de Programación Lineal

☞ *Indicar qué sucede si no se cumplen cada una de las hipótesis*

☞ *Resolver gráficamente.*

"Los errores suelen ser el puente entre la inexperiencia y la sabiduría."
Phyllis Theroux

Problemas para resolver

1.1.

Una pequeña empresa de productos químicos debe consumir más de 40 M^3/mes de un determinado alcohol, debido a que ha firmado un contrato con la municipalidad de la zona (este alcohol es producido allí mismo). En compensación recibe beneficios impositivos.

Produce dos tipos de fertilizantes: A y B. En la tabla siguiente se da la información básica:

	Producto A	**Producto B**
Consumo de alcohol	3 M^3/unidad	2/3 M^3/unidad
Consumo de ciclohexano	1 tn/unidad	2 tn/unidad

Disponibilidad de ciclohexano: 20 tn. por mes.

Con estas restricciones, y sabiendo que la contribución marginal es 1.200 $/u para el producto A y 400 $/u para el producto B, ¿cuál es el plan óptimo de producción?

1.2.

Hay tres máquinas disponibles para la producción de dos productos. Cada uno de ellos requiere los tiempos de proceso que se indican en la tabla siguiente (expresados en horas/unidad).

Producto	**Máq. A**	**Máq. B**	**Máq. C**
1	2	3	4
2	4	2	2
Disponibilidad (hs/mes)	80	60	100

El esquema del proceso productivo es el siguiente:

- Ambos productos deben pasar sucesivamente por las tres máquinas (en el orden "A→B→C") para quedar totalmente terminados. Una máquina puede procesar un solo producto por vez.
- El precio de venta de 1 es de 60 $/u y el de 2 es de 50 $/u. Se planea la operación para el mes que viene.

¿Cuál es el uso óptimo de estos recursos frente al objetivo de maximizar las ventas?

☞ *Pregunta adicional: ¿Es conveniente conseguir 20 horas/mes más de equipo B?*

1.3.

Se desea definir las cantidades a fabricar de dos productos, A y B cuyo procesamiento se realiza en dos centros de máquinas, conociéndose los datos referentes a los tiempos de proceso y disponibilidades en los centros. Se sabe además que debe cumplirse con un pedido mínimo de 50 unidades de A. Al mismo tiempo, la producción de B debe ser por lo menos cuatro veces superior a la producción de A.

Se conocen los márgenes brutos de beneficio de cada producto.

		Producto		Disponibilidad
		A	B	
Tiempos unitarios	Máquina I	1	0,4	200
	Máquina II	0,5	1	200
Margen bruto unitario		12	8	

1.4.

La empresa Seventeen SRL se dedica a la fabricación de manteles de mesa. Fabrica dos modelos que se adaptan al 90% de las mesas argentinas: el redondo y el rectangular. Cada uno de estos modelos consume 2 y 3 m^2 de tela, respectivamente. Además deben ser cortados y cosidos a mano, tarea que lleva una hora para los manteles rectangulares y dos para los redondos (es más complejo el corte). Por último, a los manteles rectangulares se les deben colocar cuatro esquineros de refuerzo.

Semanalmente se pueden conseguir 600 m^2 de tela, 600 esquineros y 500 horas de corte y costura. Los márgenes de ganancias son de \$8 para los manteles redondos y \$10 para los rectangulares.

¿Qué es lo mejor que puede hacer Seventeen con esta información?

1.5.

Es necesario alimentar racionalmente un rebaño de cabezas de ganado.

Los alimentos deben contener imprescindiblemente, cuatro componentes nutritivos: A, B, C y D.

Se encuentran disponibles en el mercado dos alimentos M y N cuyas propiedades son:

- Un kilogramo de alimento M contiene 100 gr. de nutriente A, 100 gr. de C, y 200 gr. de D.
- Un kilogramo de alimento N contiene 100 gr. de nutriente B, 200 gr. de C y 100 gr. de D.

Cada animal debe consumir como mínimo, por día, 400 gr. de nutriente A, 600 gr. de B, 2.000 gr. de C y 1.700 gr. de D.

El alimento M cuesta 10 \$/kg, y el N cuesta 4 \$/kg.

¿Qué cantidad de alimentos M y N debe suministrarse a cada animal diariamente para que la ración sea la más económica?

1.6.

Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} 4\,X_1 & - & 2\,X_2 & \leq & 4 \\ 4\,X_1 & + & 2\,X_2 & \leq & 8 \\ X_1 & + & X_2 & \geq & 1 \end{array}$$

Y el funcional:

$$Z = 8\,X_1 + 4\,X_2 \rightarrow \text{Máx}$$

Se pide:

a- Encontrar un enunciado compatible con el mismo.

b- Resolverlo gráficamente.

c- Indicar la o las soluciones del problema que optimicen el funcional.

d- Dar el valor de las variables débiles o slacks, sus unidades y significado en cada uno de los vértices del poliedro.