

<b>Introducción al procesamiento de señales</b>	<b>Practica con Utilitario 1</b>
Ingeniería en Computación Universidad Nacional de La Plata	02856/9 Colombini, Nicolás 02869/3 Tantalean Rosas, Axel Felipe

## **Introducción**

En este trabajo se presenta el uso de MATLAB como herramienta para el análisis y descripción de sistemas discretos lineales e invariantes en el desplazamiento (SLID).

Se estudian dos casos de aplicación: el procesamiento de una señal discreta mediante cuatro sistemas con distintas respuestas impulsionales y frecuenciales, y la corrección del efecto de un canal digital con dos ecos mediante filtros FIR en cascada.

Se utilizan funciones provistas por la cátedra y se implementan otras propias para resolver las consignas planteadas. Se obtienen y grafican las señales de entrada y salida de los sistemas, así como sus transformadas de Fourier en tiempo discreto (TFTD).

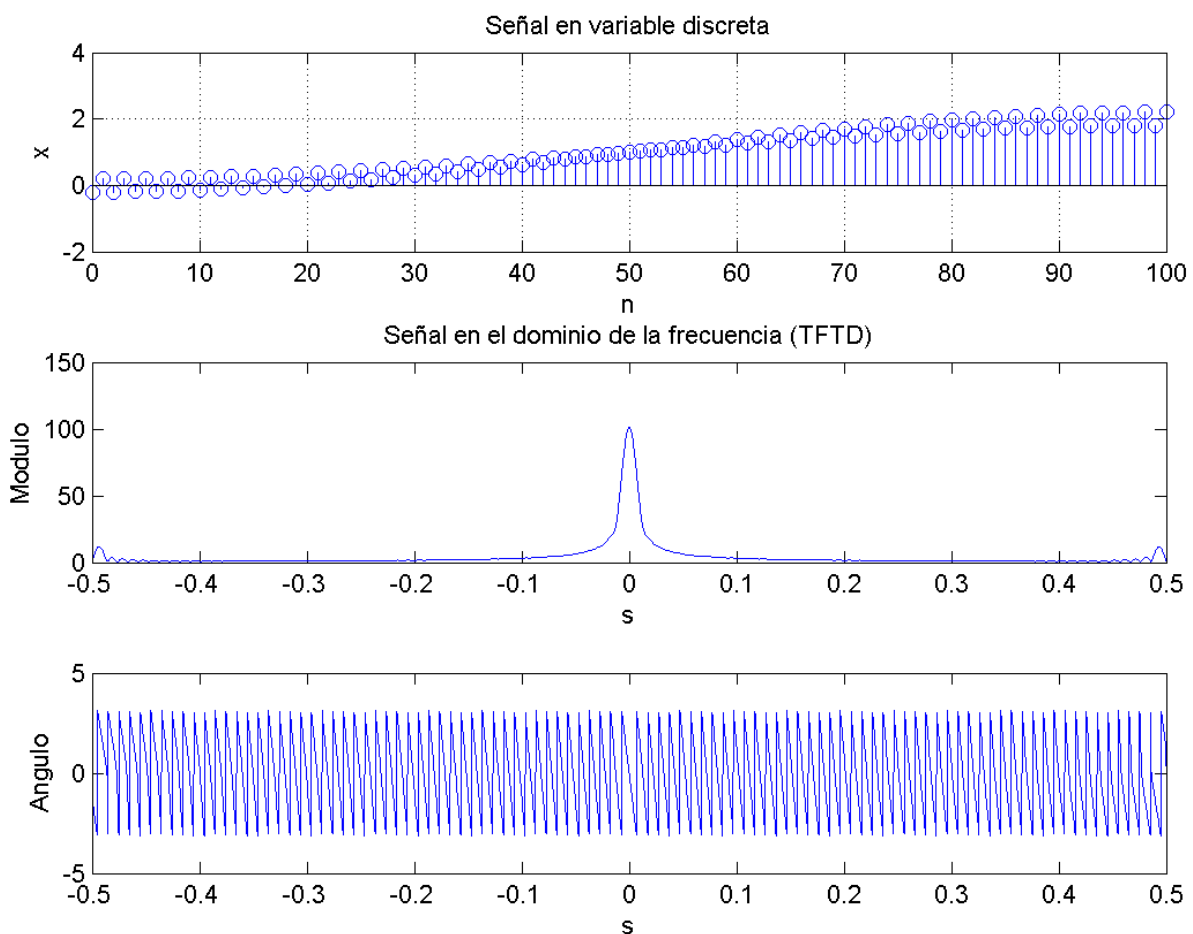
Se interpretan los resultados y se extraen conclusiones sobre el comportamiento de los sistemas y los filtros.

Finalmente, se brinda un archivo .zip adjunto a la entrega de este documento.

## Ejercicio 1:

### Analisis de una SVID

Uno de los archivos brindados por la cátedra es el script `senal.m` la cual retorna una señal  $x[n]$  y los instantes  $n$  en los que está definida la misma. Obtenemos su TFTD y la graficamos junto con la señal original.



En el análisis del gráfico de la TFTD se observa un pico distintivo en 0, lo que sugiere la presencia de componentes de baja frecuencia en la señal estudiada. Este fenómeno indica la predominancia de oscilaciones más lentas o cambios graduales en la señal.

Adicionalmente, se identifican picos **más pequeños** en  $\frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$ , estos picos muestran la existencia de componentes de alta frecuencia en la señal analizada. Esto indica la presencia de oscilaciones más rápidas o cambios abruptos en la señal.

## **Los 4 sistemas**

Por practicidad aclaramos de antemano que todos los sistemas son SLID, ya que son sistemas en diferencia con coeficientes constantes.

### **Sistema 1:**

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n - 1]$$

Este sistema es un sistema FIR, ya que vemos que no existe realimentación en el sistema, esto nos muestra que si ingresamos con una  $\delta[n]$  al sistema, aparecerán una cantidad finita de impulsos.

Al estar tratando con un sistema FIR, la respuesta impulsional se puede obtener de manera directa mediante la sustitución de la entrada  $x[n]$  por un impulso discreto  $\delta[n]$ .

Por lo tanto, en este caso, al utilizar un impulso discreto como entrada, podríamos simplificar la ecuación del sistema y obtener la respuesta impulsional  $h[n]$  directamente.

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1]$$

Conociendo la propiedad de que para que un sistema sea estable, la respuesta impulsional tiene que ser absolutamente sumable y que se trata de un sistema FIR, es fácilmente deducible que una cantidad finita de  $\delta[n]$  va ser absolutamente sumable, por lo tanto va a ser estable.

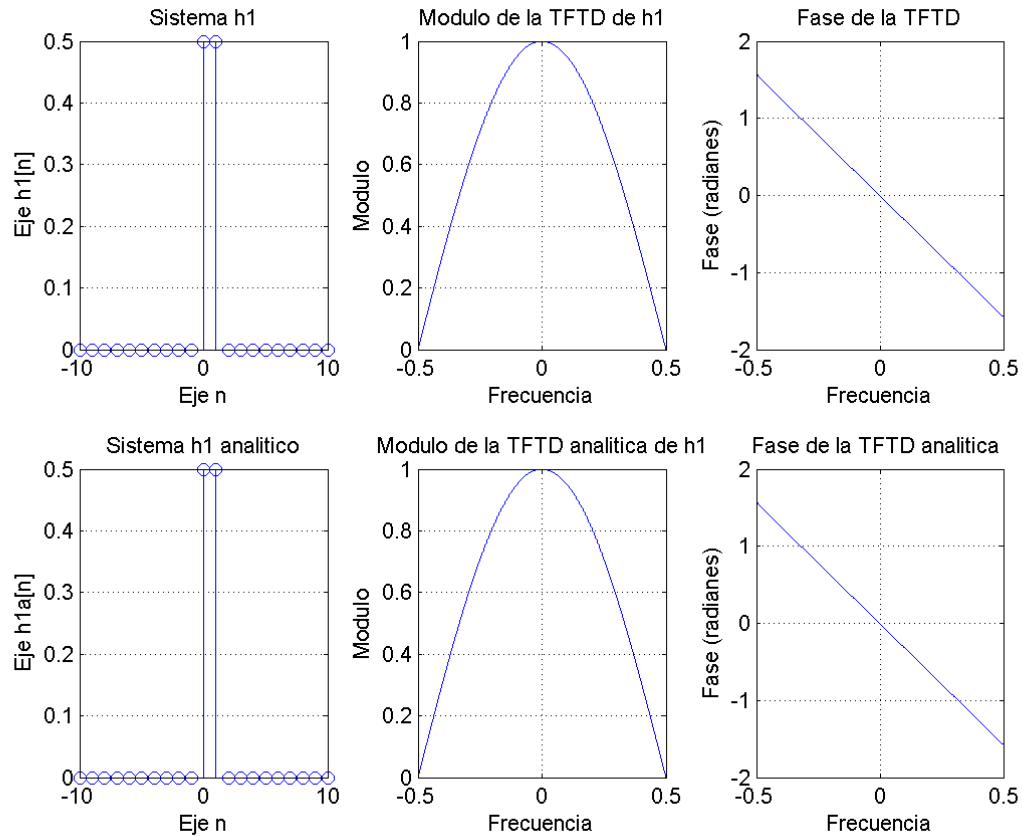
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Con esto lo demostramos analíticamente.

Hallaremos la respuesta en frecuencia transformando la respuesta impulsional mediante el par transformado de la  $\delta$  y la propiedad de desplazamiento de  $n$ .

$$H[e^{j2\pi s}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}$$

Además de obtener analíticamente estas respuestas, implementaremos la ecuación en diferencias en MATLAB y obtendremos su TFTD mediante el uso del script TFTD.m, esto mismo también se realizará con los 3 sistemas restantes.



En la imagen adjunta, se presenta una comparación entre el sistema implementado en MATLAB (parte superior) y el sistema calculado analíticamente (parte inferior). Que ambos sean iguales muestra que lo implementado en MATLAB es representativo del sistema que queremos representar. Esto sucederá en todos los sistemas posteriores a este.

## Sistema 2:

$$y[n] = \frac{1}{2} x[n] - \frac{1}{2} x[n - 1]$$

Dado que el sistema dos también es un sistema de tipo FIR (Respuesta al Impulso Finita), el procedimiento para analizar su comportamiento es idéntico al del sistema 1.

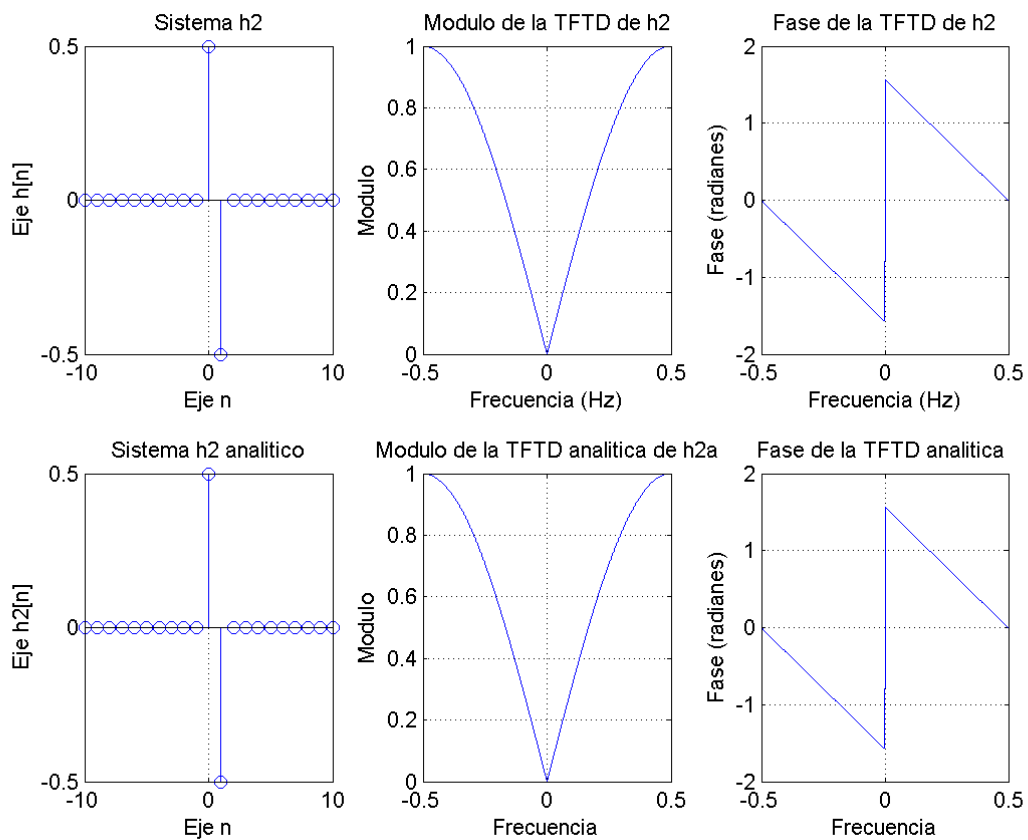
$$h[n] = \frac{1}{2} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1]$$

El análisis de la estabilidad también es el mismo que en el ejercicio uno y también coinciden sus demostraciones analíticas:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Hayamos la TFTD del sistema 2, transformando  $h[n]$ :

$$H[e^{j2\pi s}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}$$



### Sistema 3:

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

Observamos que se trata de un sistema IIR, ya que hay una realimentación, esto quiere decir que la salida está en función de ella misma con un retardo  $y[n] = y[n - n_0]$ .

El sistema 3 se caracteriza como un sistema IIR (Respuesta al Impulso Infinita). A diferencia de los sistemas FIR, en este caso, no podemos determinar directamente la respuesta impulsional  $h[n]$  mediante la sustitución de la entrada por un impulso discreto.

En sistemas IIR, la respuesta al impulso se extiende infinitamente en el tiempo. Por lo tanto, para encontrar la forma de  $h[n]$ , es necesario expresar múltiples términos de la secuencia para ver si podemos identificar patrones y tendencias.

$$h[0] = \frac{1}{4}$$

$$h[1] = \frac{1}{4} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$h[2] = \frac{3}{8} \frac{1}{2}$$

$$h[3] = \frac{3}{8} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$h[4] = \frac{3}{8} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$h[n] = \frac{1}{4} \delta[n] + u[n-1] \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

En el caso de las IIR, es más difícil demostrar estabilidad del sistema ya que habiendo infinitas  $\delta[n]$ , la sumatoria va a tener términos infinitos, así que analizaremos analíticamente.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{4} \delta[n] + u[n-1] \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right| = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^k \right|$$

Esta última sumatoria sabemos que converge ya que es una suma geométrica de radio menor a uno, por lo tanto este sistema también es estable.

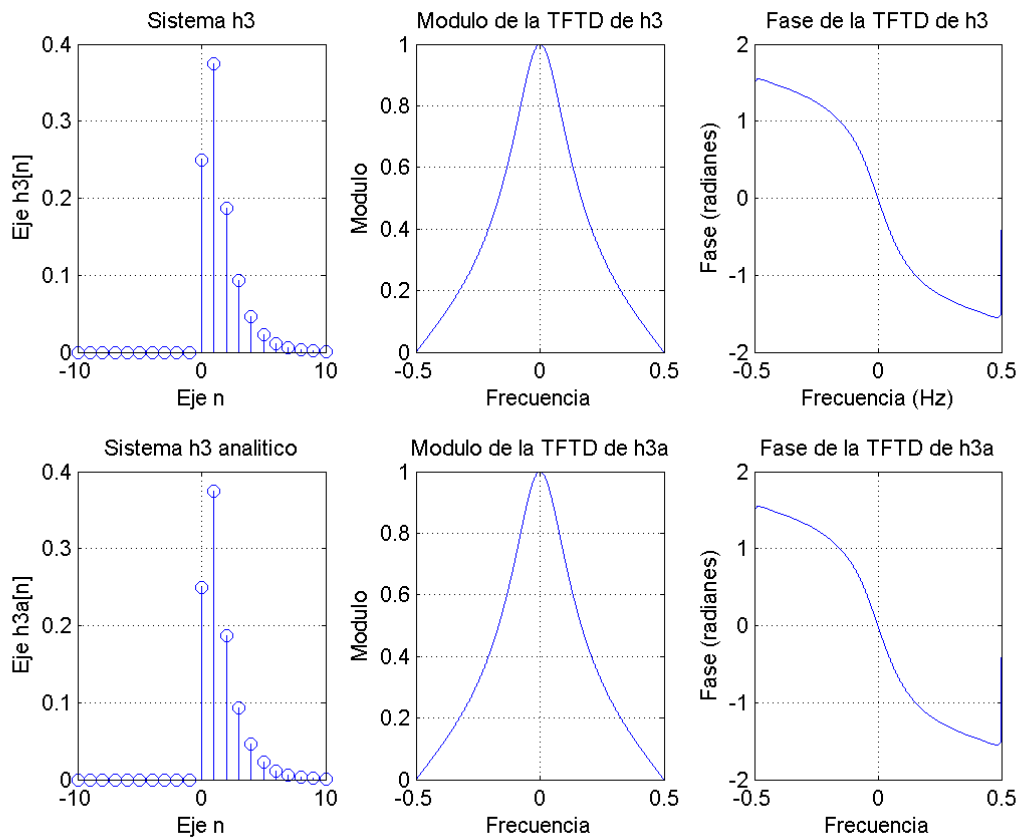
Para calcular  $H(e^{j2\pi s})$  aplicamos TFTD al sistema 3 ya que sabemos que:

$$\frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})} = H(e^{j2\pi s})$$

$$Y(e^{j2\pi s}) - \frac{1}{2} Y(e^{j2\pi s}) e^{-j2\pi s} = \frac{1}{4} X(e^{j2\pi s}) + \frac{1}{4} X(e^{j2\pi s}) e^{-j2\pi s}$$

$$Y(e^{j2\pi s}) \left(1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi s}\right) = \frac{1}{4} X(e^{j2\pi s}) (1 + e^{-j2\pi s})$$

$$\frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})} = H(e^{j2\pi s}) = \frac{(1+e^{-j2\pi s})}{4(1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi s})} = \frac{1+e^{-j2\pi s}}{4-2e^{-j2\pi s}}$$



#### Sistema 4:

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

Dado que el sistema cuatro es un sistema IIR, el procedimiento de análisis de su comportamiento será el mismo que el del sistema tres

$$h[n] = \frac{1}{4}\delta[n] + u[n-1]\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

El análisis de la estabilidad es exactamente el mismo que en el sistema 3 ya que observamos que lo único que cambia entre una respuesta impulsional o la otra son dos signos, que con el valor absoluto desaparecen para convertirse en dos expresiones completamente iguales y con el mismo análisis. Por lo tanto este sistema también es

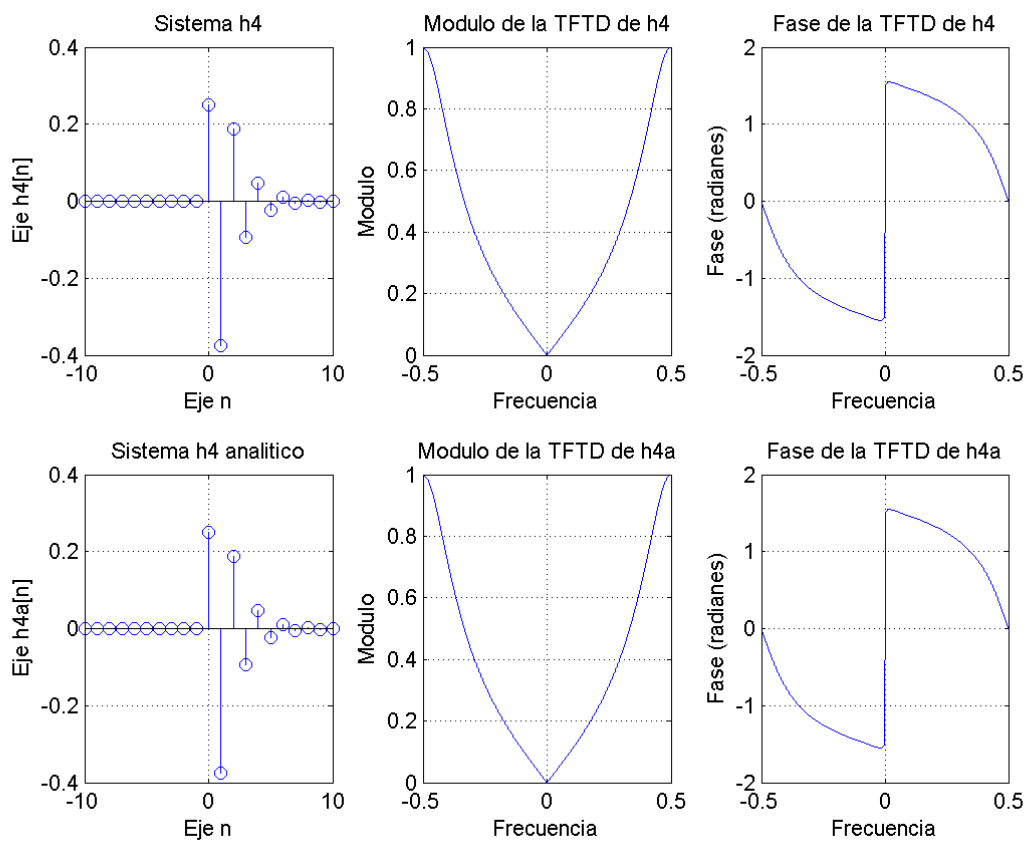
estable

Para calcular  $H(e^{j2\pi s})$  aplicamos TFTD al sistema 4

$$Y(e^{j2\pi s}) + \frac{1}{2}Y(e^{j2\pi s})e^{-j2\pi s} = \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s}) - \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s})e^{-j2\pi s}$$

$$Y(e^{j2\pi s})(1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}) = \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s})(1 - e^{-j2\pi s})$$

$$\frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})} = H(e^{j2\pi s}) = \frac{(1 - e^{-j2\pi s})}{4(1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s})} = \frac{1 - e^{-j2\pi s}}{4 + 2e^{-j2\pi s}}$$

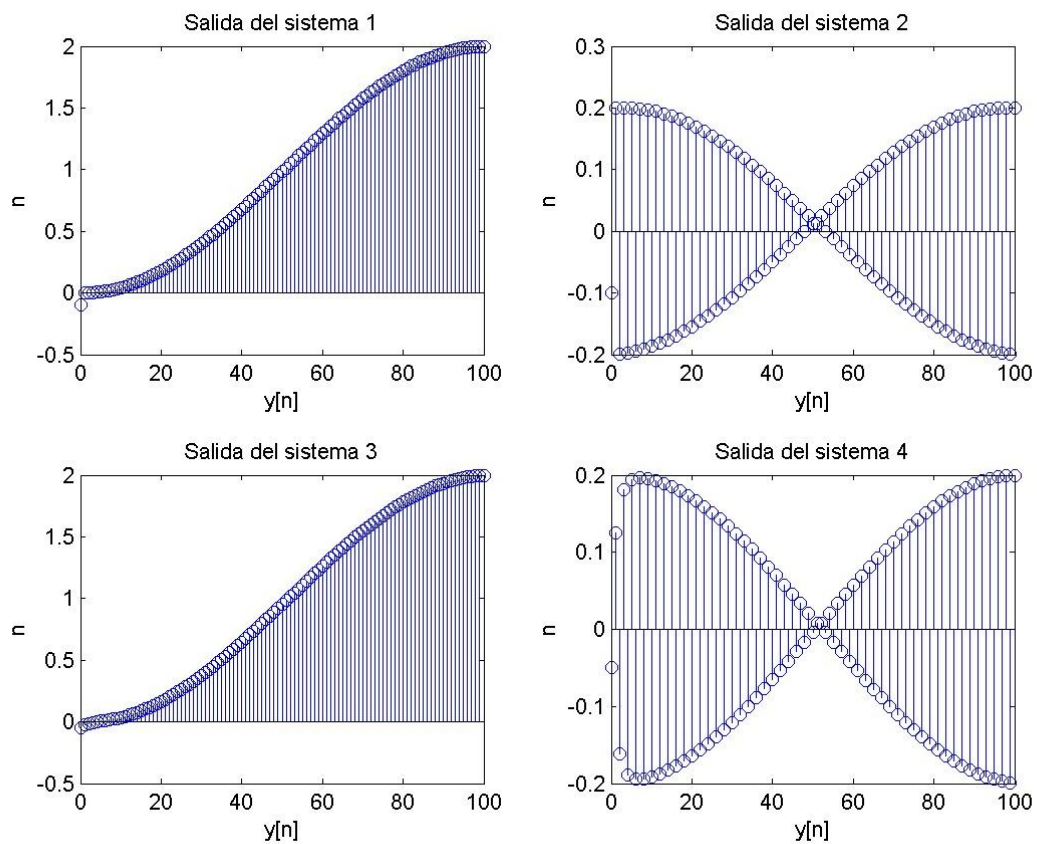


Luego del análisis, finalmente podemos concluir que los 4 sistemas vistos son estables.



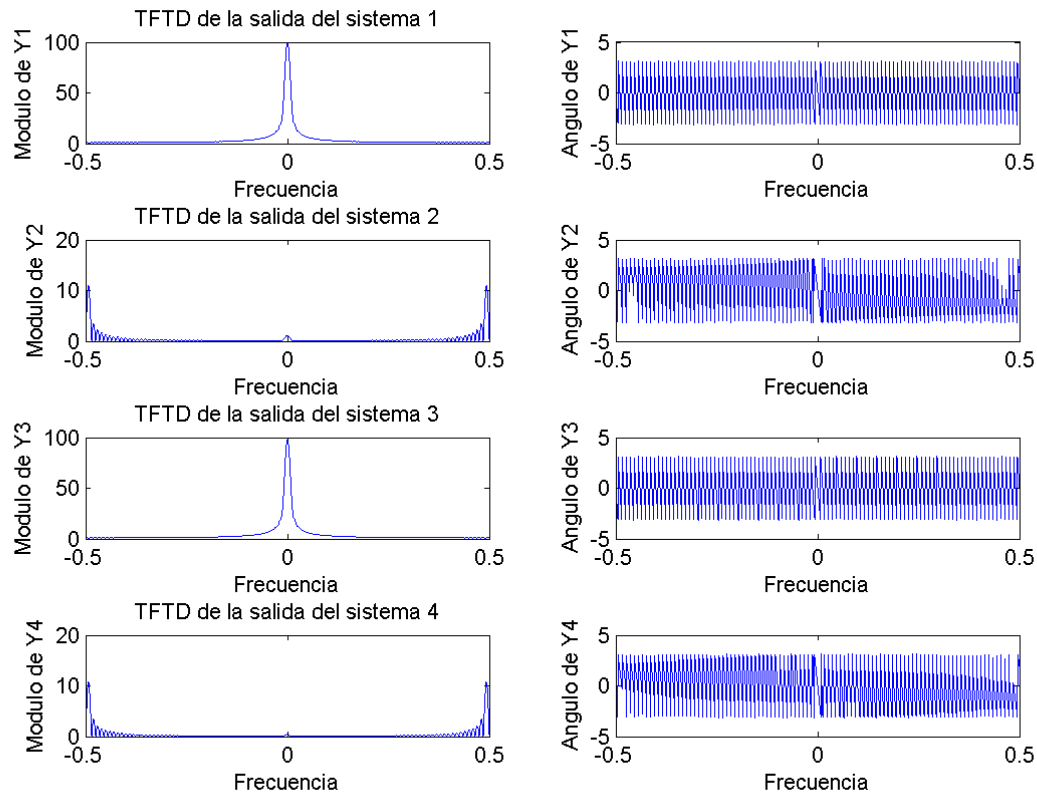
## **Análisis de la señal a través de los 4 sistemas**

Teniendo los sistemas modelados en MATLAB, lo siguiente que haremos será, utilizando estos modelos, obtener la señal de salida para cada sistema cuando se aplica a la entrada la señal del script `senal.m`.



En este gráfico se ve la salida de cada uno de los sistemas.

Ahora obtendremos la TFTD de cada salida.



Tras el análisis de los sistemas 1, 2, 3 y 4, se observa una tendencia clara en la distribución de frecuencias identificadas en sus respuestas. En los sistemas 1 y 3, se destaca la presencia de picos en frecuencias bajas, que son aquellas que se posicionan alrededor del 0, mientras que en los sistemas 2 y 4 se evidencian picos en frecuencias altas, aquellas que están en los números que están alrededor de  $\frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$ .

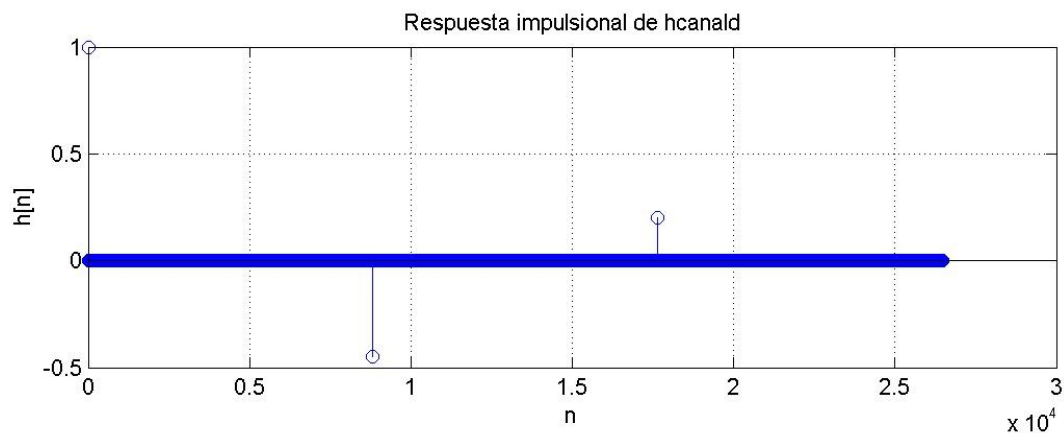
En consecuencia, es posible concluir que los sistemas 1 y 3 pueden ser clasificados como filtros pasa-bajos, dado que favorecen la transmisión de componentes de baja frecuencia mientras atenúan aquellas de alta frecuencia. Por otro lado, los sistemas 2 y 4 parecen comportarse como filtros pasa-altos, priorizando la transmisión de componentes de alta frecuencia y atenuando las de baja frecuencia.

## Ejercicio 2:

### Análisis de un sistema SLID FIR

La cátedra nos brindó un script de MATLAB llamado hcanald.m, el cual es una función que representa la respuesta impulsional de un sistema SLID FIR (de respuesta impulsional finita) que modela el comportamiento de un **canal digital con dos ecos**.

A continuación graficamos esta respuesta impulsional para analizarla e interpretarla.

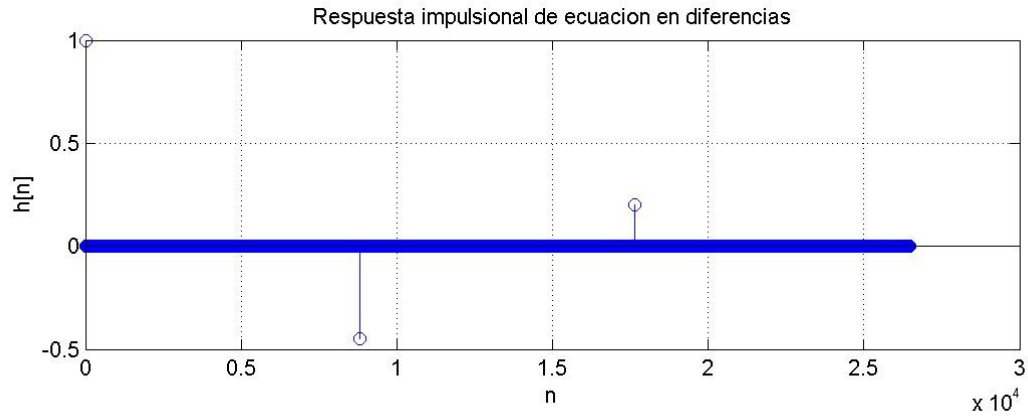


Este modelo al estar formado por 3 deltas de Kronecker lo que hará es simular una especie de ecos de la señal entrante ya que hará que esta señal aparezca replicada, aunque escalada, en la posición de las deltas.

Las posiciones donde se encuentran estas deltas de Kronecker son: en  $n=0$  con amplitud= 1, en  $n=8820$  con amplitud = -0.45 y en  $n=17640$  con amplitud=0.2025.

Esto nos puede servir para poder armar una ecuación en diferencias la cual su respuesta al impulso sean estas 3 deltas de Kronecker.

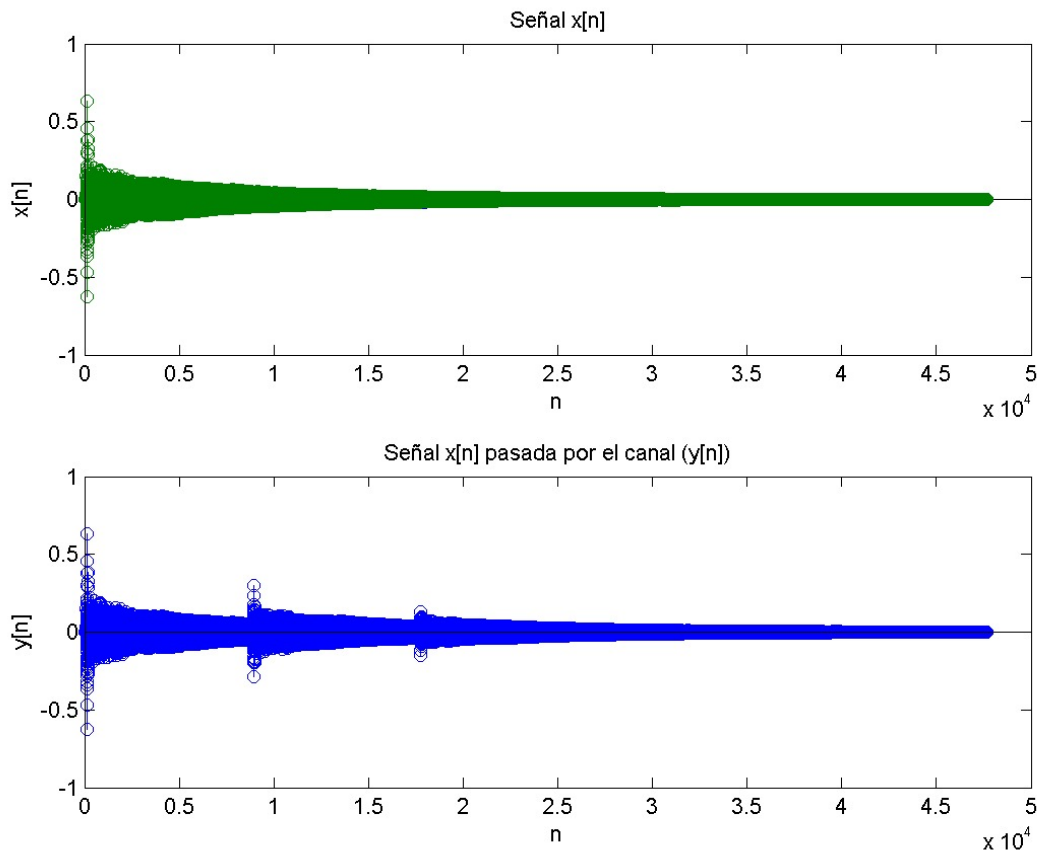
La ecuación en diferencias es:  $y[n] = x[n] - 0.45x[n - 8820] + 0.45^2x[n - 2 \cdot 8820]$



Respuesta impulsional del sistema modelado en MATLAB el cual coincide con la respuesta impulsional obtenida en el inciso 1.

## **Análisis de una señal de audio**

Para esta parte se usa un archivo de audio, llamado “audio.wav”, brindado por la cátedra. Se carga este audio en MATLAB a través del comando `audioread` en una variable  $x[n]$  para su análisis.



En MATLAB mediante el comando `sound` es posible escuchar una señal que tengamos guardada, utilizamos esto para poder escuchar la señal  $x[n]$  y lo que oímos es un sonido similar al de una campana.

Al ejecutar el mismo comando para escuchar la misma señal  $x[n]$  esta vez pasada a través del canal digital que genera 2 ecos se escucha la misma campanada que en la señal original solo que esta vez acompañada casi al final del audio por otras 2 campanadas un poco menos audibles.

## **Filtrado de la señal de audio $x[n]$**

En esta parte del informe, partimos del supuesto de que, mediante el uso de filtros, buscamos determinar la posibilidad de obtener o identificar filtros capaces de recuperar la señal original.

Para encontrar los filtros empezamos por un filtro de una rama ( $y[n] = x[n] - \alpha_1 x[n - n_0]$ ), para comprender su funcionamiento. Sabiendo que lo que necesitamos es que en la convolución entre la respuesta impulsional del canal y la del filtro permanezca una delta de Kronecker de amplitud uno y sin retardo entendimos que debíamos anular los otros dos términos de la respuesta impulsional, observamos que si en la respuesta impulsional del

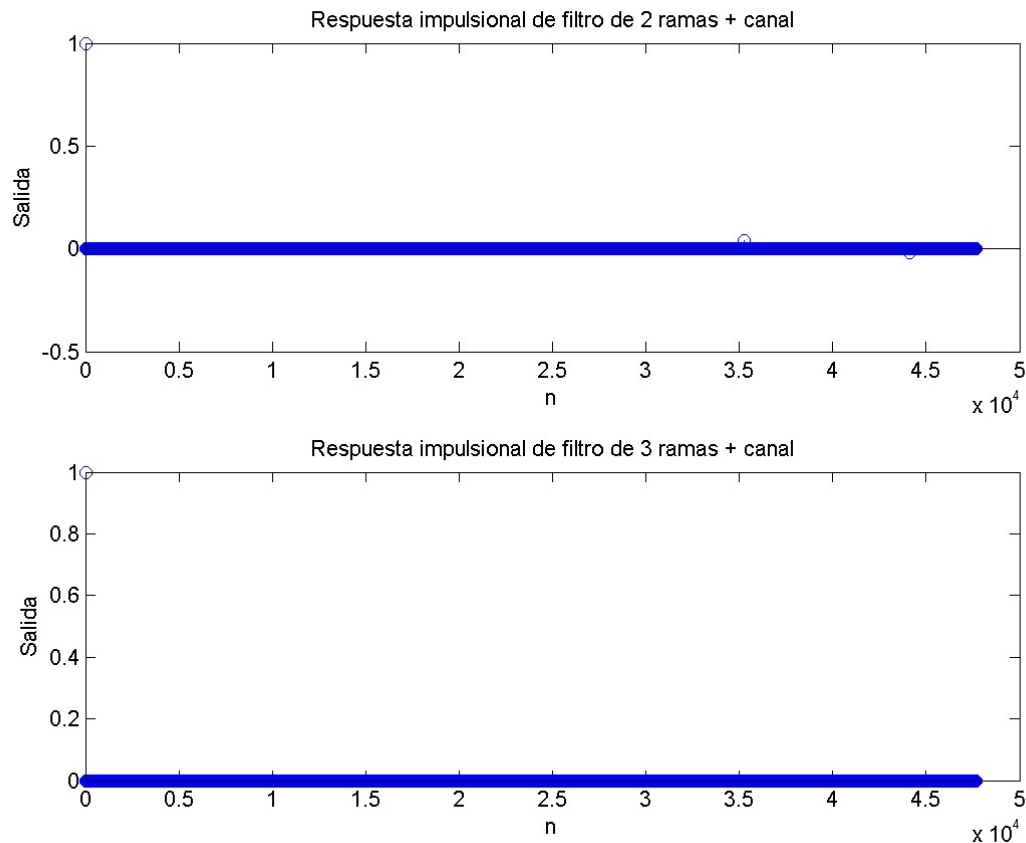
filtro aparecía un retardo igual al del primer retardo de la respuesta impulsional del canal, podíamos modificar su amplitud y lograr que se anulen. Por lo que por inducción llegamos a que el coeficiente debía ser el mismo pero con el signo opuesto, llegando a un filtro de  $y[n] = x[n] + x[n - 8820]$ . Al hacer la convolución notamos que también se anula el segundo término que contiene retardo, el de  $n = 17640$  y aparecía un término en  $n = 26460$  con una amplitud de 0,091125. Con la misma idea que en el filtro de una rama pusimos un segundo retardo que coincidiera con esta nueva delta que nos acababa de aparecer, con la misma amplitud y el signo cambiado. Esto haría que en la convolución se anule la delta situada en  $n = 26460$  y aparezcan nuevas deltas en  $n = 35280$  y  $n = 44100$ , pero de una amplitud mucho menor ( $0.45^3$  y  $0.45^4$  respectivamente). Con el próximo filtro seguimos la misma idea, viendo que es imposible generar un filtro que desaparezca por completo los ecos, sino que se genera un filtro que los retarde y atenúa lo suficiente como para que parezca que los eliminó.

Filtro de 2 ramas:

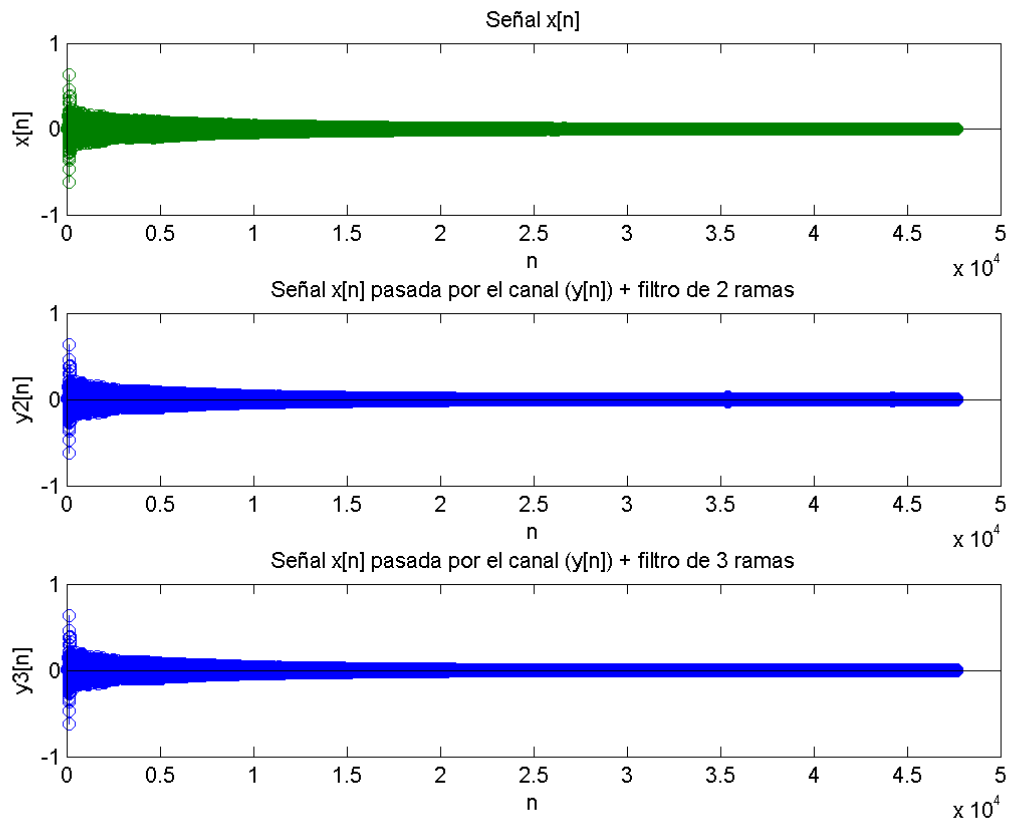
$$y[n] = x[n] + 0.45x[n - 8820] - 0.45^3x[n - 3 \cdot 8820]$$

Filtro de 3 ramas:

$$y[n] = x[n] + 0.45x[n - 8820] - 0.45^3x[n - 3 \cdot 8820] - 0.45^4x[n - 4 \cdot 8820]$$



En la respuesta impulsional del filtro de 2 ramas se puede ver una delta de Kronecker en  $n = 0$  con amplitud 1, que es la delta que nosotros deseamos que permanezca, otra en  $n = (8820 * 4) = 35280$  y una última delta que aparecería en  $n = (8820 * 5) = 44100$ , esto lo que generará son dos ecos con la amplitud de las deltas, que vemos que son mucho menos significativas que la amplitud de las deltas de las distorsiones que genera el canal. Por el contrario en el filtro de 3 ramas, vemos que ya sólo aparece una delta en  $n = 0$  (Si nos fijamos en un  $n$  mucho mayor debería de aparecer otra delta con una amplitud prácticamente despreciable) esto va a generar una señal que a efectos prácticos es igual a la señal de entrada.



Al reproducir el sonido de la señal filtrada  $y_2[n]$  lo que se escucha es la campana y casi al final del audio se escuchan 2 ecos muy poco audibles, al contrario que cuando se reproduce la señal filtrada, por el filtro de 3 ramas, que se escucha casi de manera idéntica que la original, sin ecos.

Esto coincide con lo que se ve gráficamente, ya que en la señal  $y_2[n]$  se ve casi al final 2 pequeñas perturbaciones, mientras que en el gráfico de  $y_3[n]$  estas perturbaciones ya no se perciben y también con lo analizado anteriormente en los gráficos de las respuestas impulsionales.