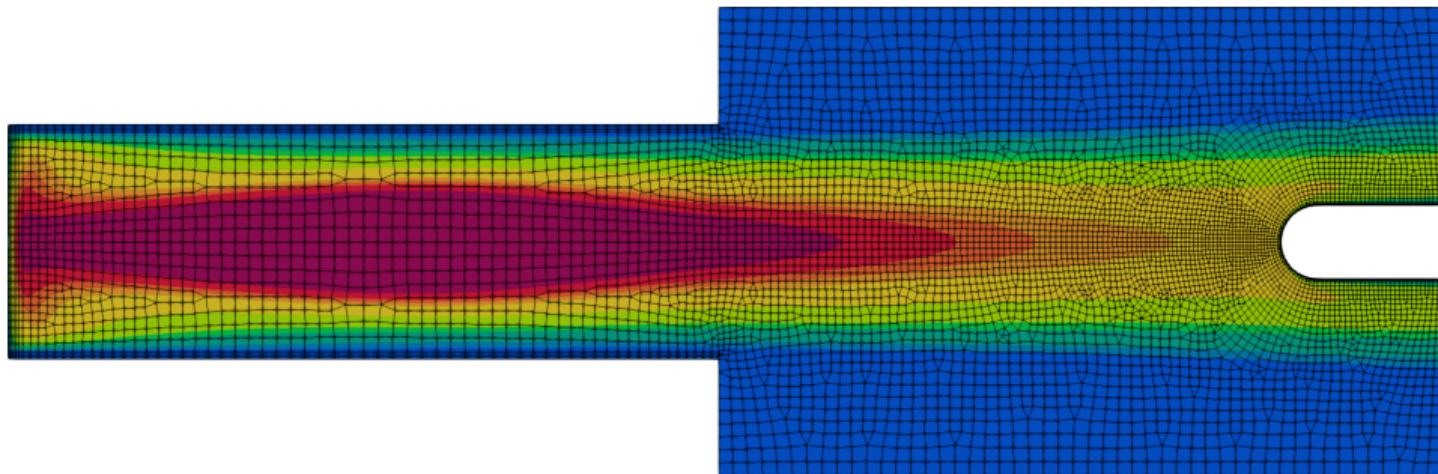


A Hybridized Discontinuous Galerkin Solver for Inductively Coupled Plasma

Nicolas Corthouts

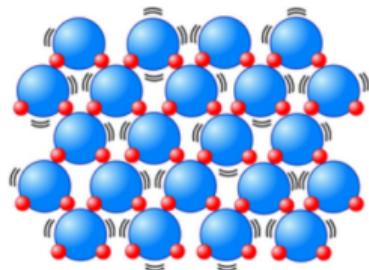


Introduction

Etats de la matière: eau à pression atmosphérique

Etats de la matière: eau à pression atmosphérique

Solide

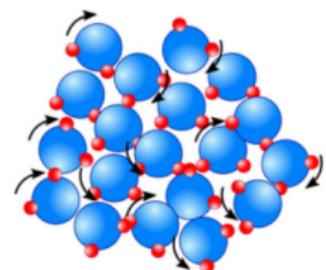
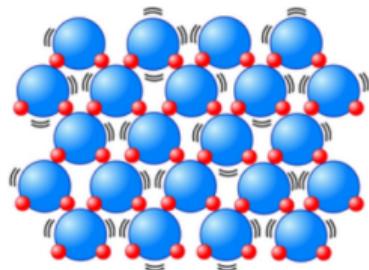


Etats de la matière: eau à pression atmosphérique

Solide

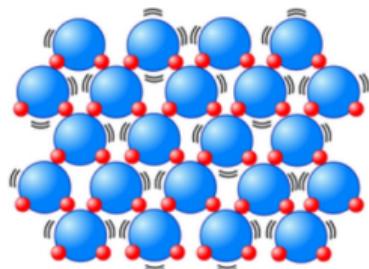


Liquide

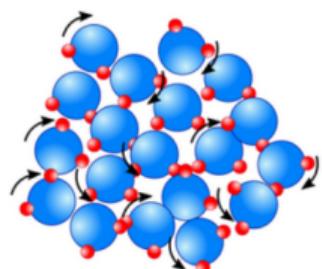


Etats de la matière: eau à pression atmosphérique

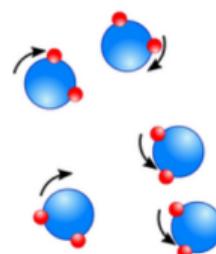
Solide



Liquide



Gaz



Etats de la matière: eau à pression atmosphérique

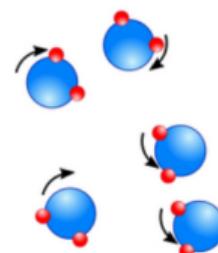
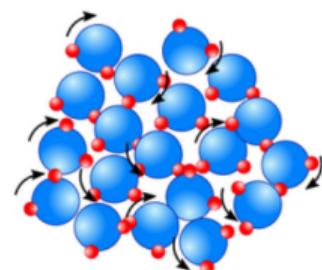
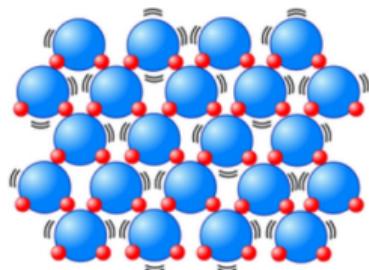
Solide



Liquide

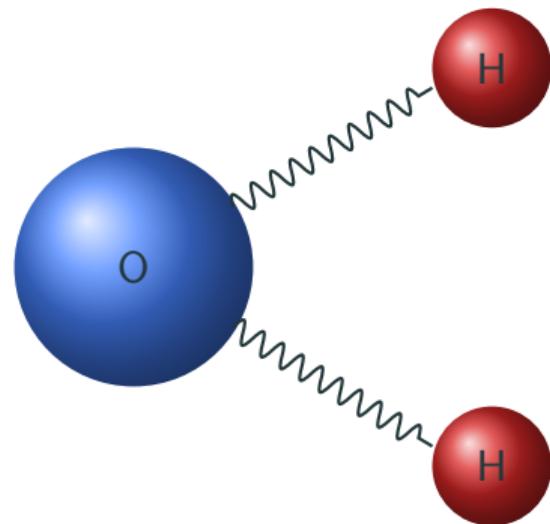


Gaz

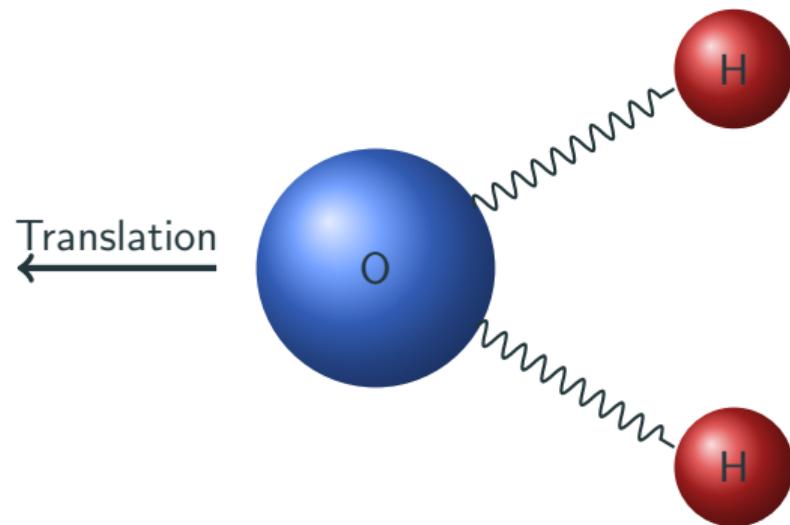


Que se passe-t-il si on chauffe encore plus?

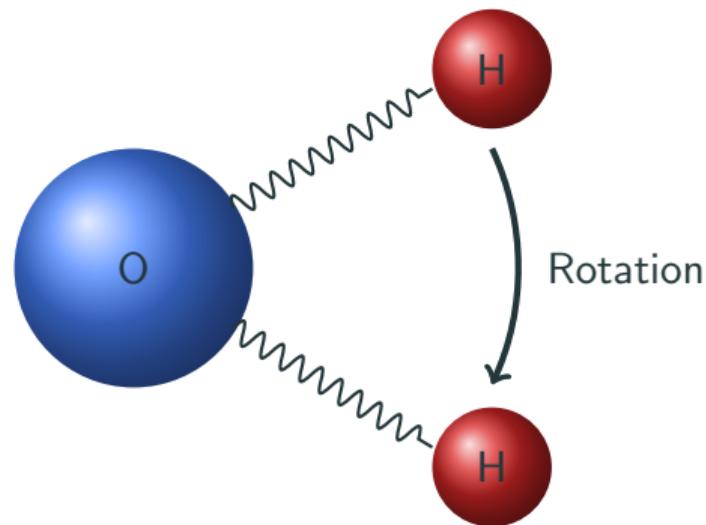
Translation, rotation et vibration



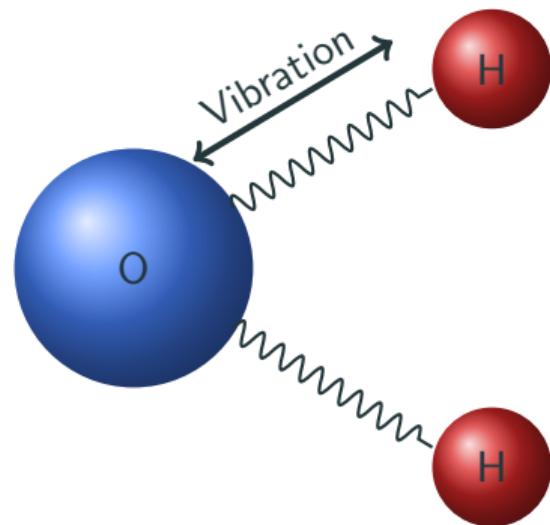
Translation, rotation et vibration



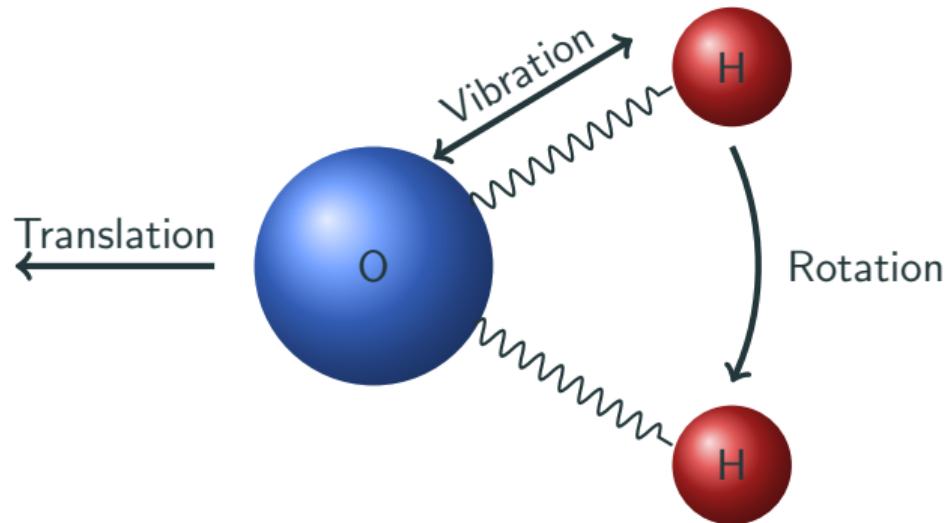
Translation, rotation et vibration



Translation, rotation et vibration



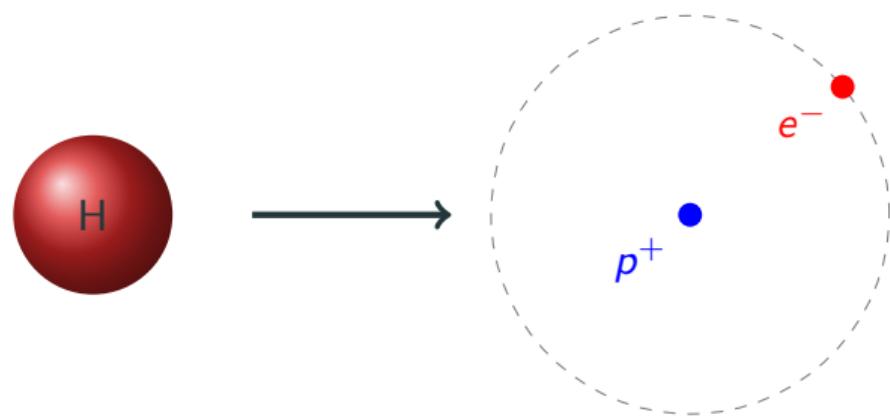
Translation, rotation et vibration



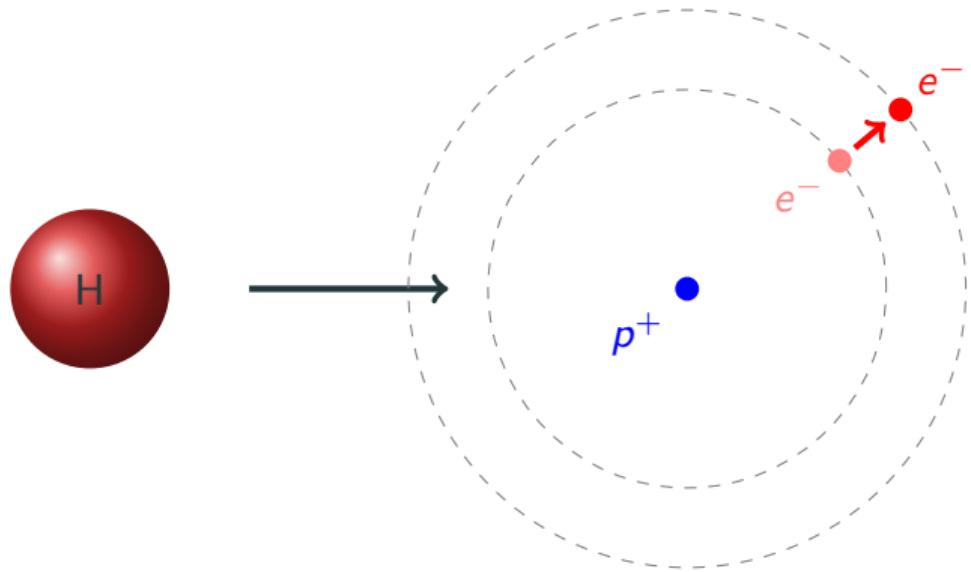
Excitation et ionization



Excitation et ionization

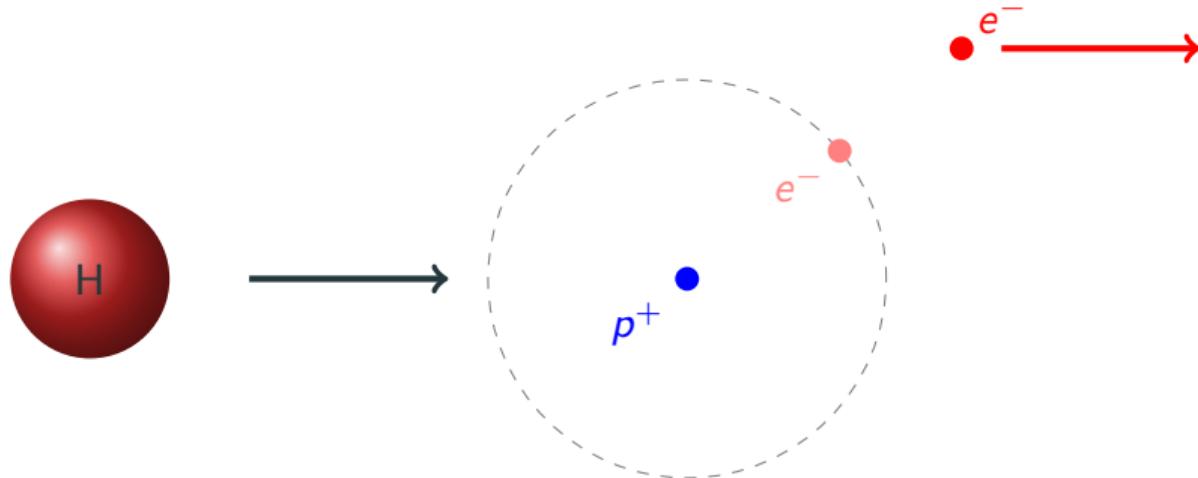


Excitation et ionization



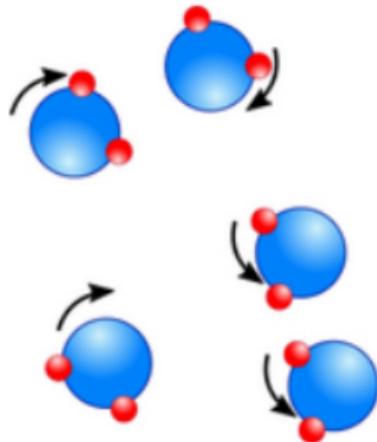
Si l'énergie reçue le permet, l'électron est dans un état **excité**. Il reviendra à son état initial en émettant de la lumière: c'est la **radiation**.

Excitation et ionization



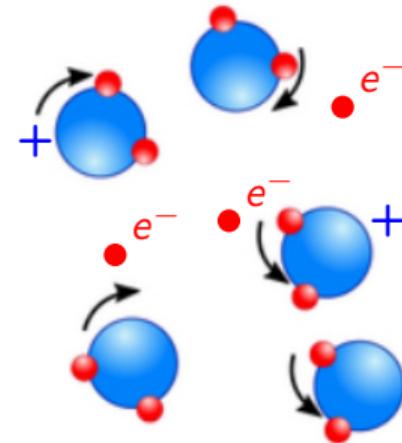
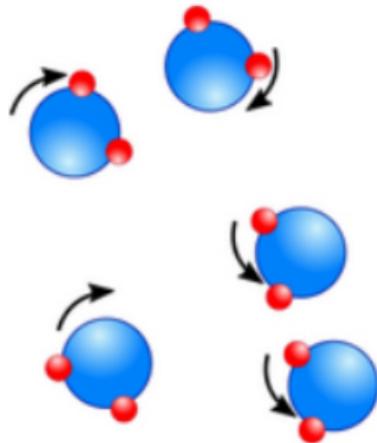
Si l'énergie reçue est trop grande, l'électron est arraché: il devient **libre**. L'atome d'hydrogène a été **ionisé**.

Plasma: le quatrième état de la matière



Gaz neutre

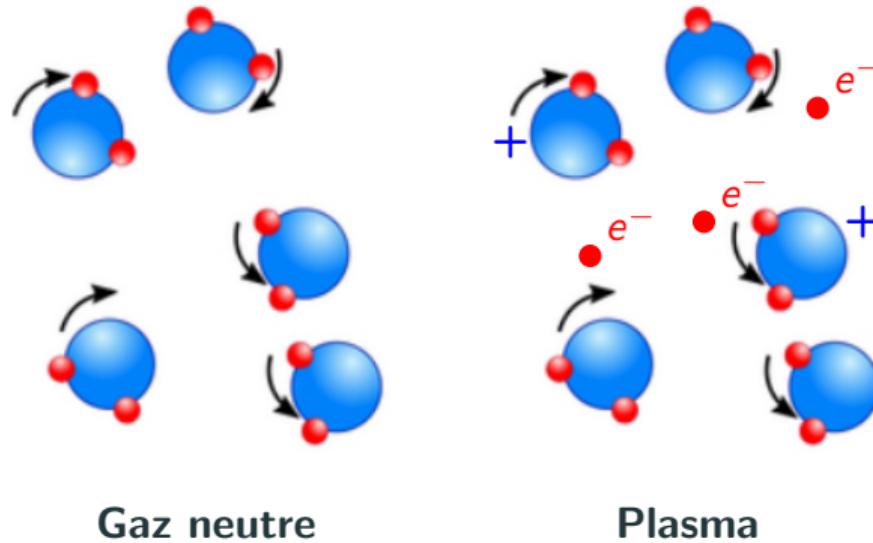
Plasma: le quatrième état de la matière



Gaz neutre

Plasma

Plasma: le quatrième état de la matière



Un plasma est un gaz quasi-neutre composé de particules chargées (ions \bullet^+ et électrons \bullet^{e^-}) et neutres (\bullet^n) démontrant un comportement collectif.¹

¹F. F. Chen. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Ed. by Springer International Publisher. 2016

Comportement collectif du plasma

Collision = interaction entre particules

Collision = interaction entre particules

Collisions de courte portée



Contact direct (local & binaire)

Collision = interaction entre particules

Collisions de courte portée



Contact direct (local & binaire)

Collisions de longue portée



Force électrique (à distance, collectif)

Comportement collectif du plasma

Collision = interaction entre particules

Collisions de courte portée



Contact direct (local & binaire)

Collisions de longue portée



Force électrique (à distance, collectif)

Si l'échelle est suffisamment grande ($> 1 \mu\text{m}$ dans notre cas), le plasma est
quasi-neutre grâce à la force électrique.

Les collisions entre les particules peuvent mener à des réactions chimiques.

Si τ_{chem} et τ_{hydro} sont les temps caractéristiques de réaction chimique et d'écoulement:

Chimie dans les plasmas

Les collisions entre les particules peuvent mener à des réactions chimiques.

Si τ_{chem} et τ_{hydro} sont les temps caractéristiques de réaction chimique et d'écoulement:

$$\tau_{chem} \gg \tau_{hydro}$$

En équilibre chimique

Chimie dans les plasmas

Les collisions entre les particules peuvent mener à des réactions chimiques.

Si τ_{chem} et τ_{hydro} sont les temps caractéristiques de réaction chimique et d'écoulement:

$$\tau_{chem} \gg \tau_{hydro}$$

En équilibre chimique

$$\tau_{chem} \simeq \tau_{hydro}$$

Hors équilibre chimique

Les collisions entre les particules peuvent mener à des réactions chimiques.

Si τ_{chem} et τ_{hydro} sont les temps caractéristiques de réaction chimique et d'écoulement:

$$\tau_{chem} \gg \tau_{hydro}$$

$$\tau_{chem} \simeq \tau_{hydro}$$

$$\tau_{chem} \ll \tau_{hydro}$$

En équilibre chimique

Hors équilibre chimique

Pas de réaction chimique

Chimie dans les plasmas

Les collisions entre les particules peuvent mener à des réactions chimiques.

Si τ_{chem} et τ_{hydro} sont les temps caractéristiques de réaction chimique et d'écoulement:

$$\tau_{chem} \gg \tau_{hydro}$$

En équilibre chimique

$$\tau_{chem} \simeq \tau_{hydro}$$

Hors équilibre chimique

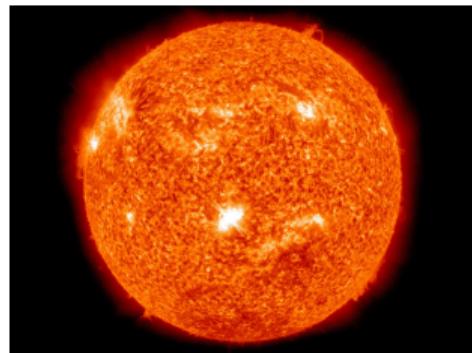
$$\tau_{chem} \ll \tau_{hydro}$$

Pas de réaction chimique

Les plasmas sont soit en équilibre, soit hors équilibre.

Plasma dans la vie de tous les jours

Les plasmas composent 90% de l'univers visible.



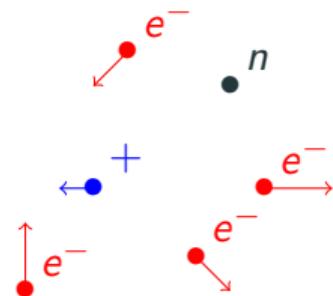
De plus en plus d'applications: fusion nucléaire, médecine, métallurgie, lasers, création de microprocesseurs, ...

Plasma froids

Pour les plasma froids, l'énergie est d'abord emmagasinée par les électrons libres et cédée lors des collisions aux ions et neutres lourds.

Pour les plasma froids, l'énergie est d'abord emmagasinée par les électrons libres et cédée lors des collisions aux ions et neutres lourds.

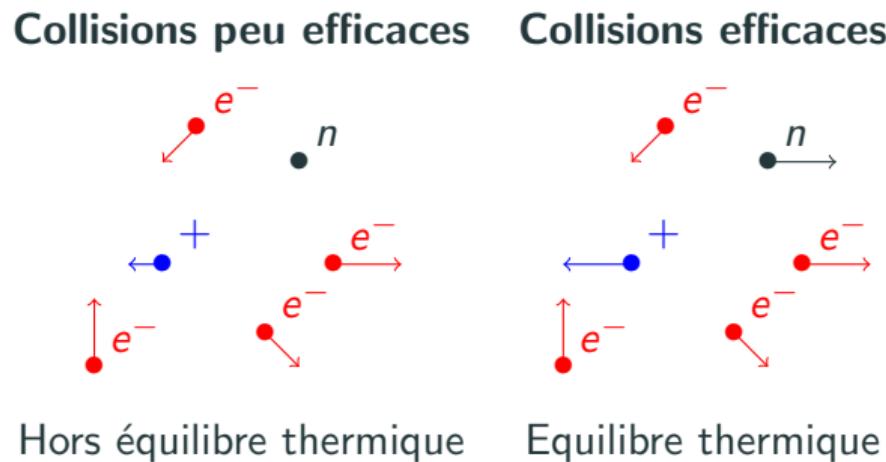
Collisions peu efficaces



Hors équilibre thermique

Plasma froids

Pour les plasma froids, l'énergie est d'abord emmagasinée par les électrons libres et cédée lors des collisions aux ions et neutres lourds.



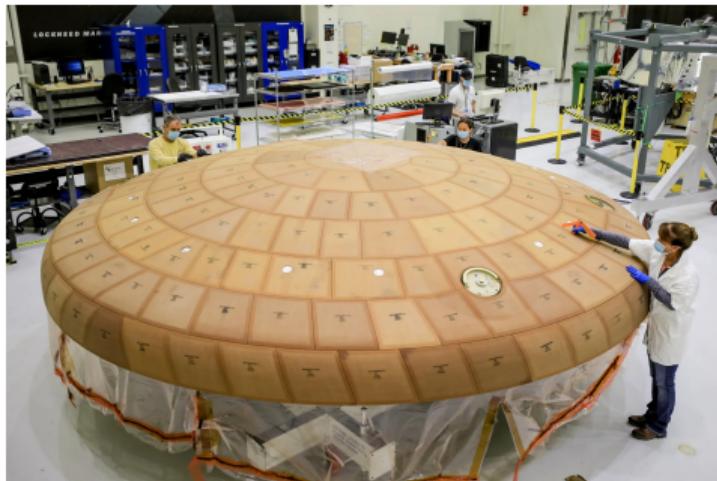
Plasma en réentrée atmosphérique



La grande vitesse de réentrée $\simeq 10 \text{ km s}^{-1}$, un choc suffisamment fort pour ioniser l'air \Rightarrow plasma.

Système de protection thermique et destruction des déchets spatiaux

Système de protection thermique et destruction des déchets spatiaux

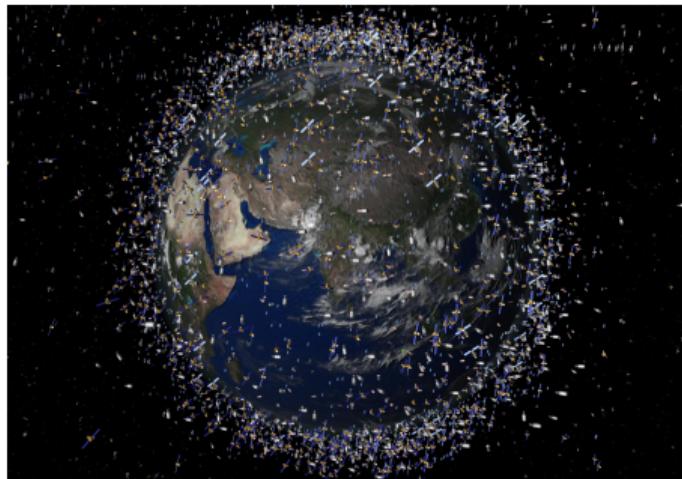


TPS

Système de protection thermique et destruction des déchets spatiaux



TPS



Déchets spatiaux

Système de protection thermique et destruction des déchets spatiaux



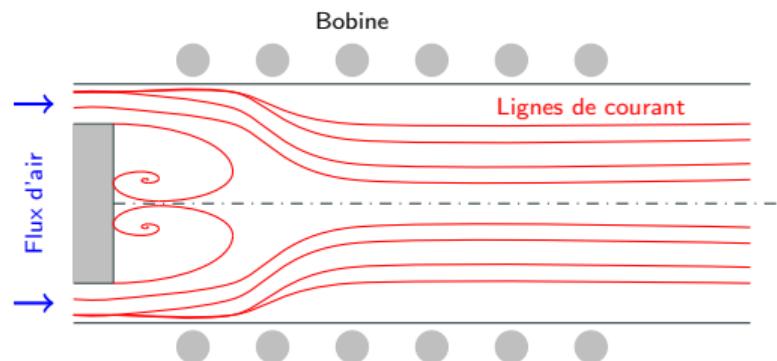
TPS



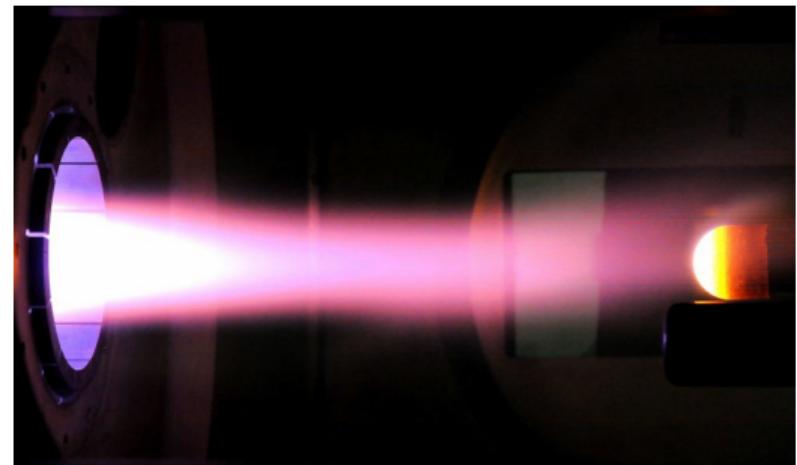
Déchets spatiaux

Nécessité de développer des machines expérimentales reproduisant les plasmas de réentrée atmosphérique pour étudier ces applications.

Plasma à induction



Torche

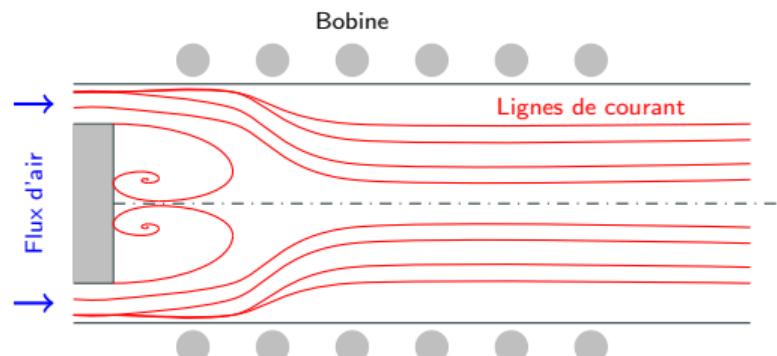


Chambre

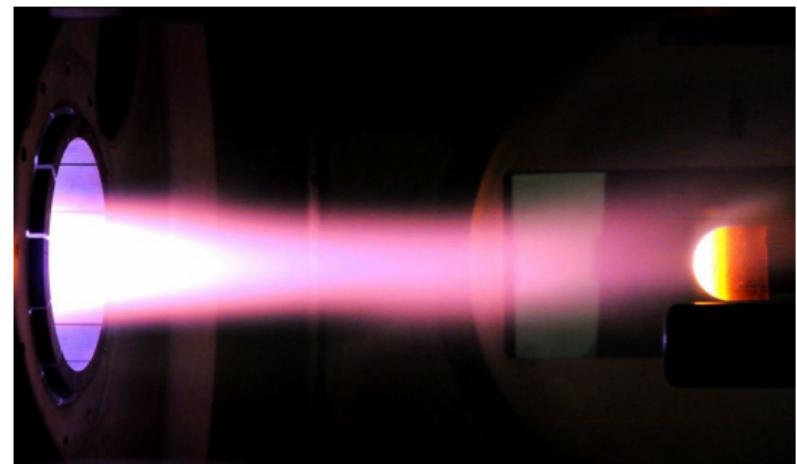
Examples: Plasmatron (VKI), Plasmatron X (Illinois), IPG (Russie), ...

Basé sur le principe de **transfer de chaleur local**.

Plasma à induction



Torche

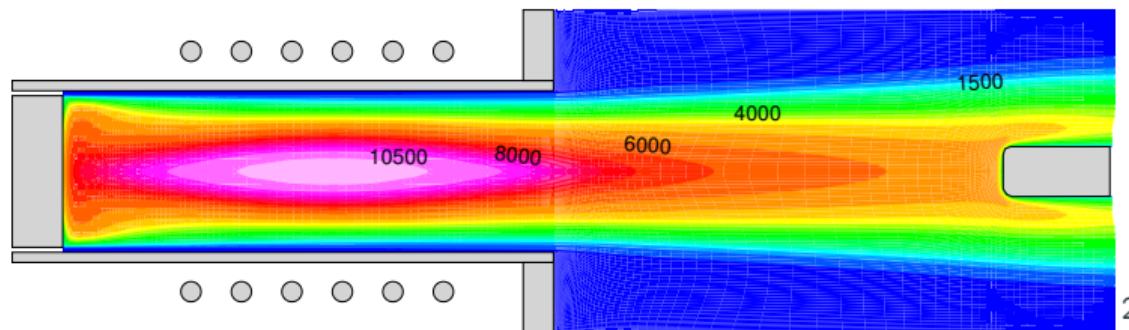


Chambre

Résoudre les équations de Maxwell, de Navier-Stokes + modèles physico-chimiques + modèle de radiation.

Plasma à induction: besoin de plus

Des solvers numériques (volumes finis) ont été développés afin de préparer au mieux les expériences dans les torches à induction.



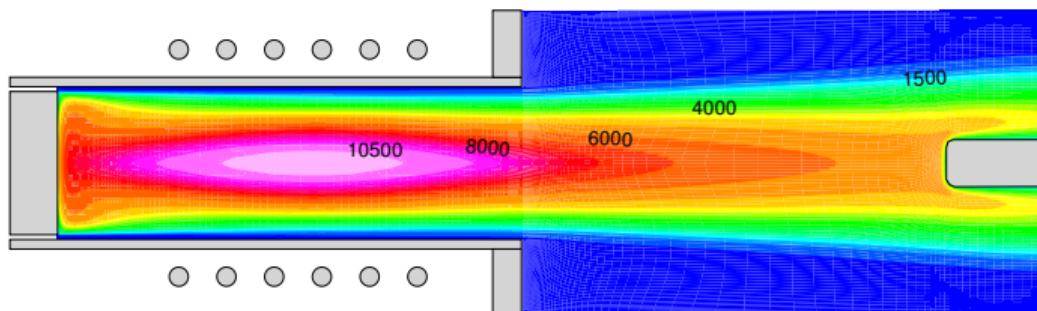
²Thierry Magin.

Motivations de la thèse

La plupart des solvers actuels

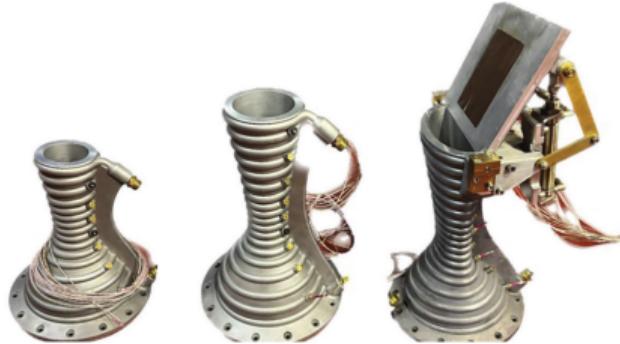
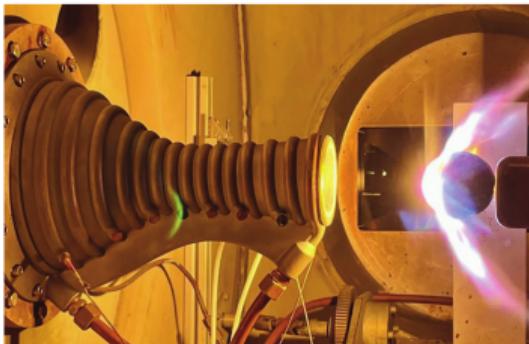
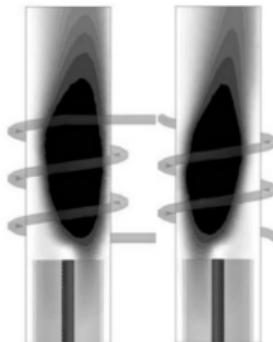
La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.



La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.



La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.

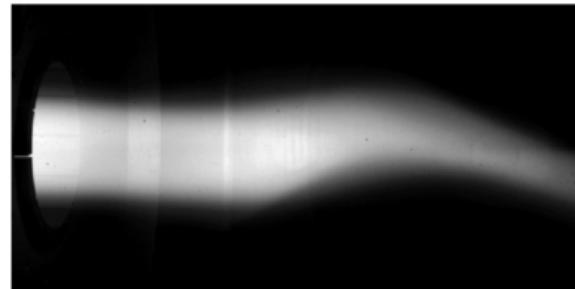
Besoin d'un solver 3D.

La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.
Besoin d'un solver 3D.
- Sont en régime établi.

La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.
Besoin d'un solver 3D.
- Sont en régime établi.



La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.

Besoin d'un solver 3D.

- Sont en régime établi.

Besoin d'un solver instationnaire.

La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.
Besoin d'un solver 3D.
- Sont en régime établi.
Besoin d'un solver instationnaire.
- Utilisent un modèle à l'équilibre chimique et thermique sans radiation.

La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.

Besoin d'un solver 3D.

- Sont en régime établi.

Besoin d'un solver instationnaire.

- Utilisent un modèle à l'équilibre chimique et thermique sans radiation.

C'est faux! Car la déséquilibre chimique et thermique ont été observés dans les plasma à induction! La radiation joue aussi un rôle important dans le transfer de chaleur.

La plupart des solvers actuels

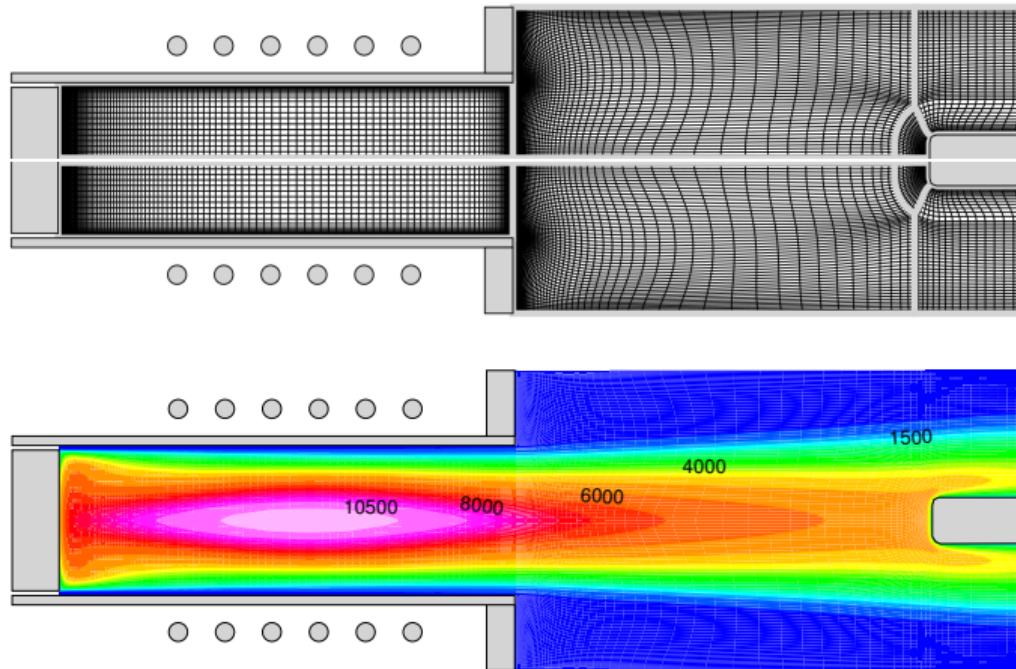
- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.
Besoin d'un solver 3D.
- Sont en régime établi.
Besoin d'un solver instationnaire.
- Utilisent un modèle à l'équilibre chimique et thermique sans radiation.
Besoin d'un solver avec une chimie plus détaillée et de la radiation.

La plupart des solvers actuels

- Ne représentent que des géométries axisymétriques et simples.
Besoin d'un solver 3D.
- Sont en régime établi.
Besoin d'un solver instationnaire.
- Utilisent un modèle à l'équilibre chimique et thermique sans radiation.
Besoin d'un solver avec une chimie plus détaillée et de la radiation.

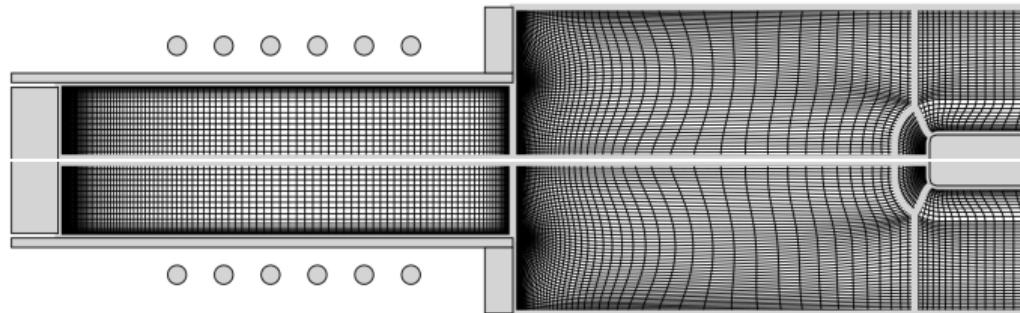
Peut-on améliorer les solvers volume finis actuels afin de pouvoir prendre en compte toute la physique?

Le problème des solvers volume finis actuels.



Pour les volumes finis, la solution est constante sur chaque éléments.

Le problème des solvers volume finis actuels.



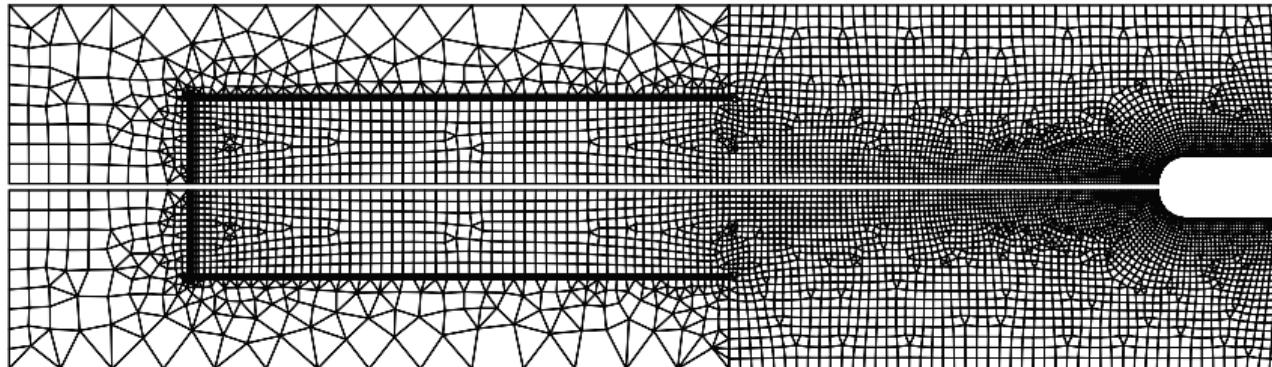
Les volumes finis nécessitent un maillage de bonne qualité, et donc très fin dans les régions de grande variation ou de géométrie complexe ⇒

- Demande beaucoup d'attention au maillage.
- Quasi impossible pour les géométries complexes.
- Demande un maillage trop fin partout pour une physique plus complexe.

But de la thèse

Développer un solver faisant partie des méthodes de Galerkin discontinues pour les plasma à induction.

- La solution n'est plus constante sur chaque élément.
- Beaucoup plus grande flexibilité de maillage.



Research questions

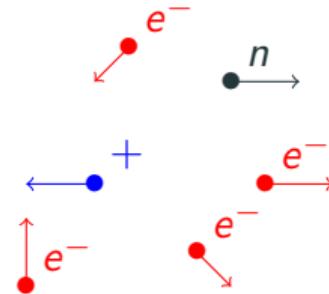
With the objective of producing a new high order solver for inductively coupled plasma, we will try to answer the following questions:

- Q1 In addition of being precise, can a high-order solver be robust for inductively coupled plasma applications?**
- Q2 Is the developed solver user-friendly?**
- Q3 Can the new solver be easily adapted to the new experiments performed in ICP facilities?**

Model for inductively coupled plasma

Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma



$$T_e \simeq T_h$$

Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

Characteristic length greater than the Debye length, *i.e.* the distance at which

$$E_{\text{thermal}} \simeq E_{\text{elec}}$$

so

$$q \simeq 0$$

Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

No displacement current

ELM waves perturb electrons, but they are assumed to return fast to equilibrium.

ELM wavelength are much greater than the plasma length scale.

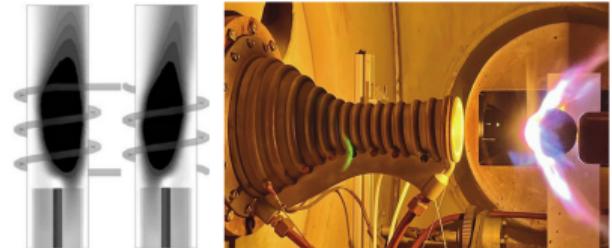
Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

No displacement current

Axisymmetry



Hypothesis on the plasma

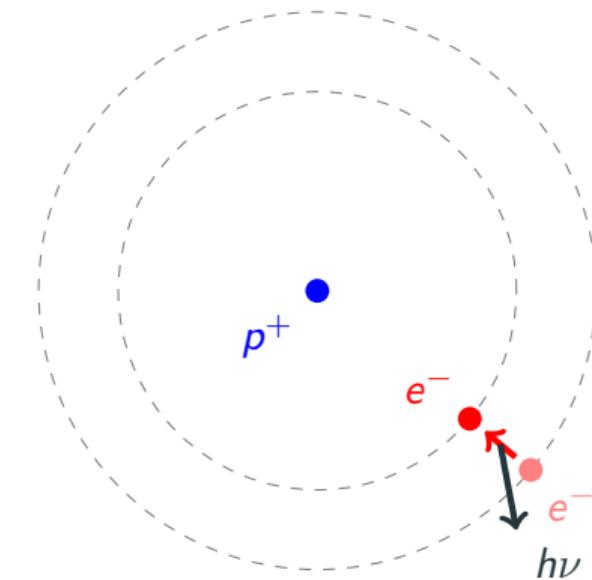
Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

No displacement current

Axisymmetry

Non-radiative plasma



Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

No displacement current

Axisymmetry

Non-radiative plasma

Local thermodynamic equilibrium

Chemical reaction return very fast to equilibrium.

In reality, non equilibrium can be observed in the torch.

Thermal + chemical equilibrium = local thermodynamic equilibrium.

Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

No displacement current

Axisymmetry

Non-radiative plasma

Local thermodynamic equilibrium

No elemental de-mixing

Elemental de-mixing accounts for the diffusion of elements. In the case of LTE, gives results closer to non-equilibrium models.

Cheaper to solve as the elements have no production rates.

Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

No displacement current

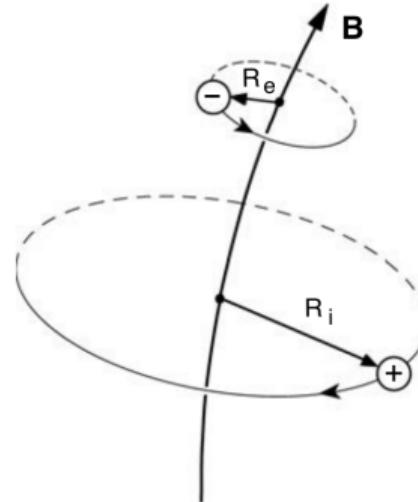
Axisymmetry

Non-radiative plasma

Local thermodynamic equilibrium

No elemental de-mixing

Unmagnetized plasma



Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

No displacement current

Axisymmetry

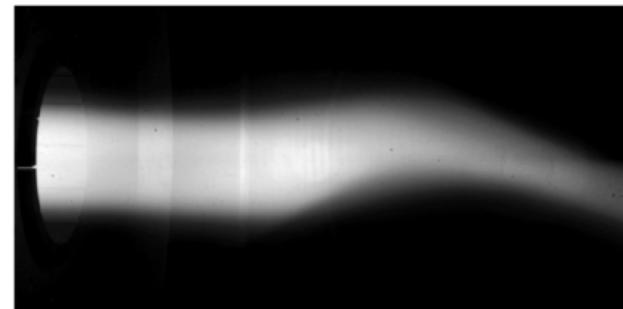
Non-radiative plasma

Local thermodynamic equilibrium

No elemental de-mixing

Unmagnetized plasma

Steady-state



We average the equations over one period of the induction current.

Hypothesis on the plasma

Collision-dominated and thermal plasma

Quasi-neutrality

No displacement current

Axisymmetry

Non-radiative plasma

Local thermodynamic equilibrium

No elemental de-mixing

Unmagnetized plasma

Steady-state

The electric field:

- It is ambipolar ($j_z = j_r = 0$).
- The coils are thin parallel wires surrounding the facility.
- Axisymmetric
- $E_{tot} = E_C + E_P$
- We use phasor notation.

Equations governing the plasma

Navier-Stokes equations

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_L$$

$$\partial_t \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{v} + p \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q} + P_J$$

Equations governing the plasma

Navier-Stokes equations

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_L$$

$$\partial_t \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{v} + p \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q} + P_J$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

$$F_z^L = \frac{\sigma_e}{4\pi f} \left[E_I^{Im} \partial_z E_I^{Re} - E_I^{Re} \partial_z E_I^{Im} \right]$$

$$F_r^L = \frac{\sigma_e}{4\pi f} \left[E_I^{Im} \frac{1}{r} \partial_r (r E_I^{Re}) - E_I^{Re} \frac{1}{r} \partial_r (r E_I^{Im}) \right]$$

$$P_J = \frac{\sigma_e}{2} \left[(E_I^{Im})^2 + (E_I^{Re})^2 \right]$$

Electric field equation

$$\partial_{zz}^2 E_P + \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r E_P) - \frac{E_P}{r^2} = i2\pi f \mu_0 \sigma_e (E_C + E_P)$$

Electric field equation

$$\partial_{zz}^2 E_P + \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r E_P) - \frac{E_P}{r^2} = i 2\pi f \mu_0 \sigma_e (E_C + E_P)$$

$$E_C = \sum_{I=1}^{N_{coil}} i f \mu_0 I_C \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left[2 \frac{E_2(k_I)}{k_I} - E_1(k_I) \left(\frac{2}{k_I} - k_I \right) \right]$$

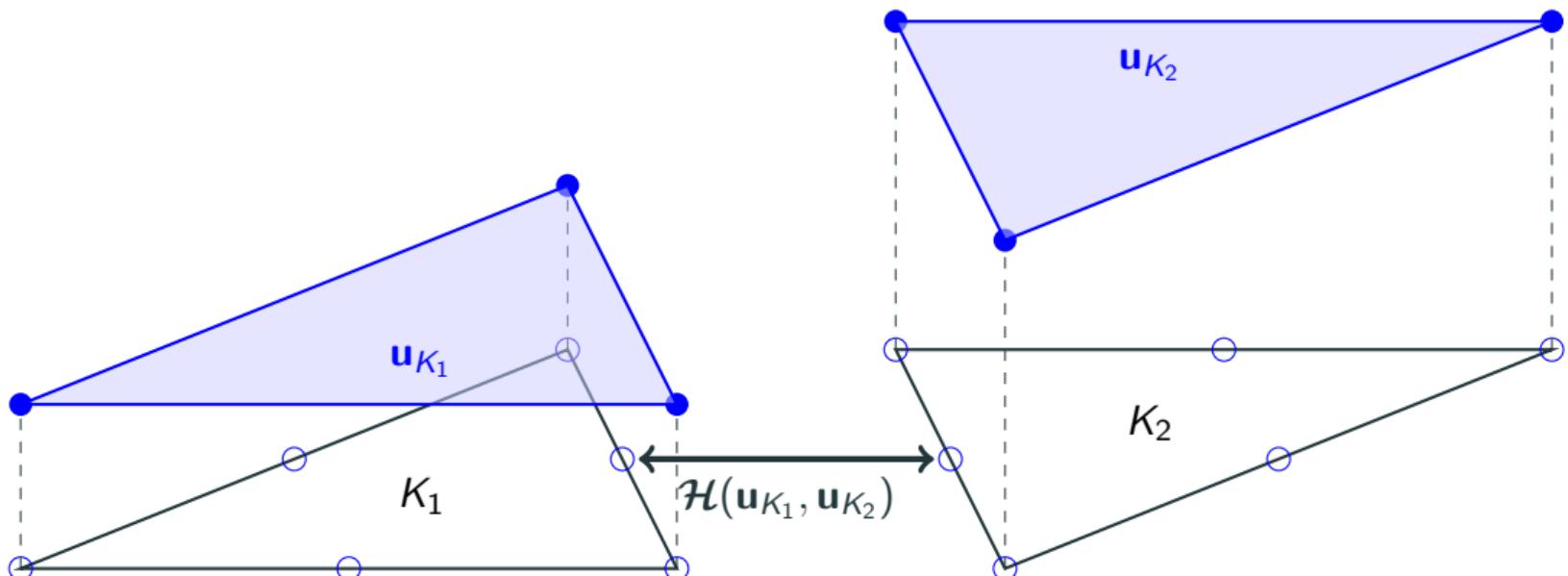
$$E_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}$$

$$E_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} d\theta$$

Transport properties

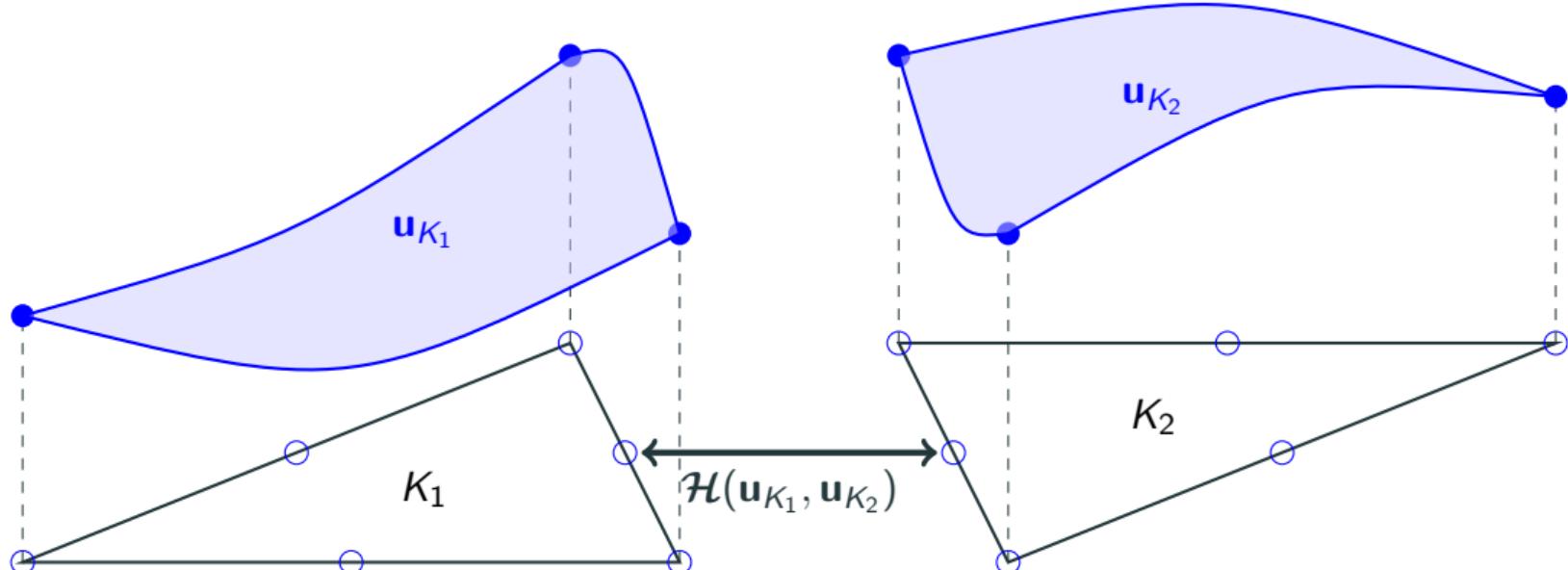
Hybridized discontinuous Galerkin method

Finite volume and (hybridized) discontinuous Galerkin



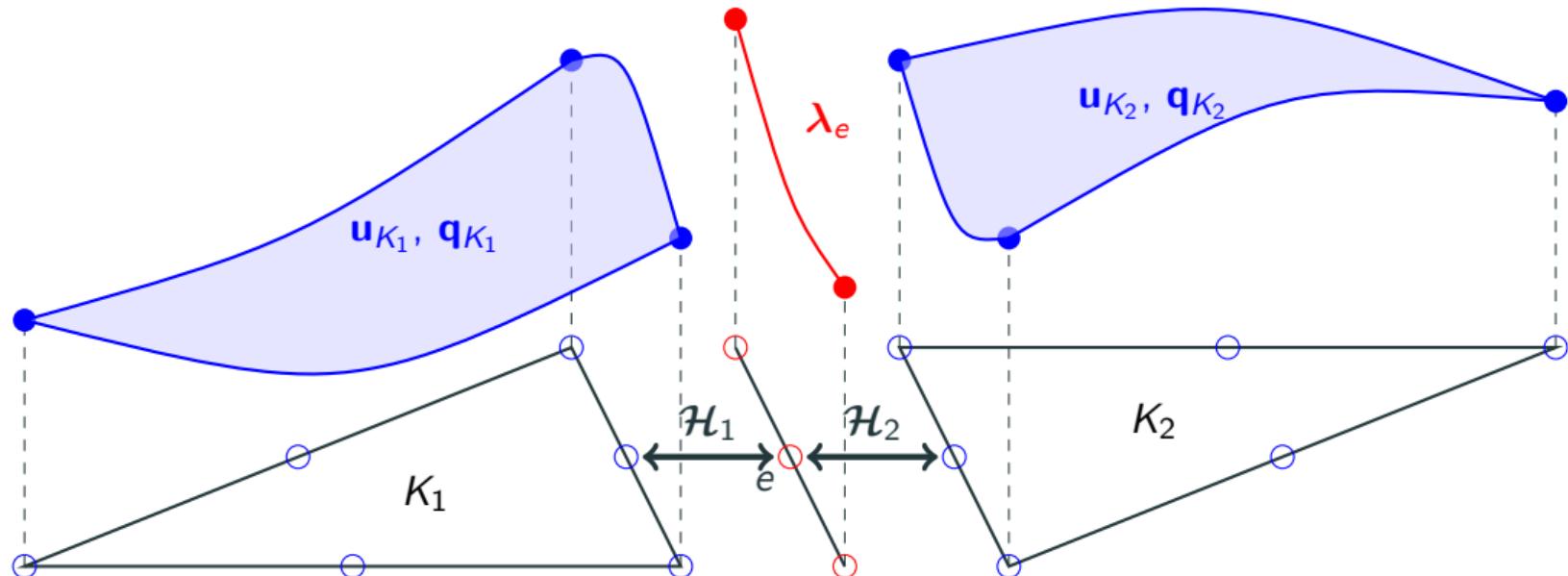
Finite volumes

Finite volume and (hybridized) discontinuous Galerkin



Discontinuous Galerkin

Finite volume and (hybridized) discontinuous Galerkin



Hybridized discontinuous Galerkin

Model problem

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{w}(\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{F}_c(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_v(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})) &= \mathbf{S}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) && \text{on } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{bc} & && \text{on } \partial\Omega_D \\ \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_{v,n,bc} & && \text{on } \partial\Omega_N \\ \mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{U} & && \text{on } \Omega\end{aligned}$$

$\mathbf{F}_{c,v}$: convective and diffusive fluxes.

Ω : domain of the problem.

\mathbf{S} : source terms.

$\partial\Omega_{D,N}$: domain boundary for Dirichlet and

w : conservative variables.

Neumann BC.

$\mathbf{u}, \mathbf{u}_{bc}$: solution and boundary condition. \mathbf{U} : initial data.

Model problem

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{w}(\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{F}_c(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_v(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})) &= \mathbf{S}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) && \text{on } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{bc} & && \text{on } \partial\Omega_D \\ \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_{v,n,bc} & && \text{on } \partial\Omega_N \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{U} & && \text{on } \Omega\end{aligned}$$

Before going further, some notation:

$$\begin{aligned}(a, b)_K &= \int_K ab \, dV, \\ \langle a, b \rangle_{\partial K} &= \int_{\partial K} ab \, dS.\end{aligned}$$

From weak form to discrete DG problem

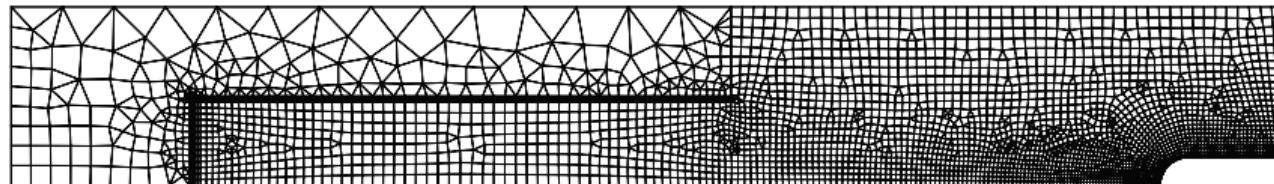
$$(\partial_t \mathbf{w} - \mathbf{S}, w)_\Omega - (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v, \nabla w)_\Omega + \langle (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v) \cdot \mathbf{n}, w \rangle_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall w \in L_2(\Omega)$$

Multiplying by a function $w \in L_2(\Omega)$ and integrating over the domain gives the **weak form**.

From weak form to discrete DG problem

$$(\partial_t \mathbf{w} - \mathbf{S}, w)_{\mathcal{T}} - (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v, \nabla w)_{\mathcal{T}} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \langle (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v) \cdot \mathbf{n}, w \rangle_{\partial K} = 0, \quad \forall w \in L_2(\Omega)$$

The DG discretization consists in first dividing the domain Ω in a collection of non-overlapping elements \mathcal{T} .



From weak form to discrete DG problem

$$(\partial_t \mathbf{w} - \mathbf{S}, w)_{\mathcal{T}} - (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v, \nabla w)_{\mathcal{T}} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \langle (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v) \cdot \mathbf{n}, w \rangle_{\partial K} = 0, \quad \forall w \in W_h$$

We restrict the functions to a subset of $L_2(\Omega)$ which is finite dimensional. A common choice is

$$W_h = \{ w \in L^2(\Omega) : w|_K \in \mathcal{P}^p(K), \forall K \in \mathcal{T} \} \subset L_2(\Omega)$$

From weak form to discrete DG problem

$$(\partial_t \mathbf{w} - \mathbf{S}, w)_T - (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v, \nabla w)_T + \sum_{K \in \mathcal{T}} \langle \mathcal{H}, w \rangle_{\partial K} = 0, \quad \forall w \in W_h$$

For stabilizing the method, the convective and diffusive fluxes on the interface are approximated

$$(\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v) \cdot \mathbf{n}_K \simeq \mathcal{H}$$

From weak form to discrete DG problem

$$(\partial_t \mathbf{w}_h - \mathbf{S}_h, w)_T - (\mathbf{F}_{c,h} - \mathbf{F}_{v,h}, \nabla w)_T + \sum_{K \in \mathcal{T}} \langle \mathcal{H}, w \rangle_{\partial K} = 0, \quad \forall w \in W_h$$

The solution is also approximated by

$$\mathbf{u} \simeq \mathbf{u}_h \in W_h$$

From weak form to discrete DG problem

$$(\partial_t \mathbf{w}_h - \mathbf{S}_h, \varphi_{K,i})_K - (\mathbf{F}_{c,h} - \mathbf{F}_{v,h}, \nabla \varphi_{K,i})_K + \langle \mathcal{H}, \varphi_{K,i} \rangle_{\partial K} = 0, \quad \forall \varphi_{K,i} \in W_h$$

Finally, if the $\varphi_{K,i}$ form a local basis of W_h on K , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, then it suffices to verify the equation for each $\varphi_{K,i}$ on each element, and

$$\mathbf{u} \simeq \mathbf{u}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_{K,i} \varphi_{K,i}$$

The \mathbf{u}_i are the degrees of freedom.

From weak form to discrete DG problem

$$(\partial_t \mathbf{w}_h - \mathbf{S}_h, \varphi_{K,i})_K - (\mathbf{F}_{c,h} - \mathbf{F}_{v,h}, \nabla \varphi_{K,i})_K + \langle \mathcal{H}, \varphi_{K,i} \rangle_{\partial K} = 0, \quad \forall \varphi_{K,i} \in W_h$$

- Because the $\varphi_{K,i}$ are in general not continuous across elements, discontinuous solutions can be represented.
- If $\varphi_K = 1$ everywhere, the finite volume method is retrieved.
- The art of designing DG is contained in the numerical fluxes (*cfr. later*).

From DG to HDG

$$(\partial_t \mathbf{w}_h - \mathbf{S}_h, \varphi_{K,i})_K - (\mathbf{F}_{c,h} - \mathbf{F}_{v,h}, \nabla \varphi_{K,i})_K + \langle \mathcal{H}, \varphi_{K,i} \rangle_{\partial K} = 0, \quad \forall \varphi_{K,i} \in W_h$$

$$(\mathbf{q}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K - (\mathbf{u}_h, \nabla \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K + \langle \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_0} + \langle \mathbf{u}_{bc}, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_{bc}} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_{K,i} \in V_h$$

We solve now for the solution gradient

$$\mathbf{q} = \nabla \mathbf{u}$$

with the subset

$$V_h = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega) : \mathbf{v}|_K \in (\mathcal{P}^p(K))^D, \forall K \in \mathcal{T} \right\}$$

and local basis $\boldsymbol{\tau}_{K,i}$

$$\mathbf{q}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^p \mathbf{q}_{K,i} \boldsymbol{\tau}_{K,i}$$

From DG to HDG

$$\begin{aligned}(\partial_t \mathbf{w}_h - \mathbf{S}_h, \varphi_{K,i})_K - (\mathbf{F}_{c,h} - \mathbf{F}_{v,h}, \nabla \varphi_{K,i})_K + \langle \mathcal{H}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \lambda_h), \varphi_{K,i} \rangle_{\partial K} &= 0, \quad \forall \varphi_{K,i} \in W_h \\(\mathbf{q}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K - (\mathbf{u}_h, \nabla \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K + \langle \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_0} + \langle \mathbf{u}_{bc}, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_{bc}} &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_{K,i} \in V_h\end{aligned}$$

We first introduce Γ , the set of traces between elements

$$\Gamma = \{e : e = K_i \cap K_j; \forall K_i, K_j \in \mathcal{T}, K_i \neq K_j\}. \quad (1)$$

We introduce the hybrid unknown on the element trace λ with the function subset

$$M_h = \{\mu \in L^2(\Gamma) : \mu|_e \in \mathcal{P}^p(e), \forall e \in \Gamma\}$$

and local basis $\mu_{e,i}$

$$\lambda_h = \sum_{e \in \Gamma} \sum_{i=1}^p \lambda_{e,i} \mu_{e,i}$$

From DG to HDG

$$(\partial_t \mathbf{w}_h - \mathbf{S}_h, \varphi_{K,i})_K - (\mathbf{F}_{c,h} - \mathbf{F}_{v,h}, \nabla \varphi_{K,i})_K + \langle \mathcal{H}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h), \varphi_{K,i} \rangle_{\partial K} = 0, \quad \forall \varphi_{K,i} \in W_h$$

$$(\mathbf{q}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K - (\mathbf{u}_h, \nabla \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K + \langle \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_0} + \langle \mathbf{u}_{bc}, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_{bc}} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_{K,i} \in V_h$$

$$\langle [[\mathcal{H}]], \mu_{e,i} \rangle_e = 0, \quad \forall \mu_{e,i} \in M_h$$

Equation for $\boldsymbol{\lambda}$: continuity of the normal numerical flux across the interfaces.

The jump operator is given by

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}_+ + \mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n}_-$$

From DG to HDG

$$\begin{aligned}(\partial_t \mathbf{w}_h - \mathbf{S}_h, \varphi_{K,i})_K - (\mathbf{F}_{c,h} - \mathbf{F}_{v,h}, \nabla \varphi_{K,i})_K + \langle \mathcal{H}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h), \varphi_{K,i} \rangle_{\partial K} &= 0, \quad \forall \varphi_{K,i} \in W_h \\(\mathbf{q}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K - (\mathbf{u}_h, \nabla \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K + \langle \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_0} + \langle \mathbf{u}_{bc}, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_{bc}} &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_{K,i} \in V_h \\ \langle [[\mathcal{H}]], \mu_{e,i} \rangle_e &= 0, \quad \forall \mu_{e,i} \in M_h\end{aligned}$$

But why HDG over DG?

From DG to HDG

$$\begin{aligned}(\partial_t \mathbf{w}_h - \mathbf{S}_h, \varphi_{K,i})_K - (\mathbf{F}_{c,h} - \mathbf{F}_{v,h}, \nabla \varphi_{K,i})_K + \langle \mathcal{H}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h), \varphi_{K,i} \rangle_{\partial K} &= 0, \quad \forall \varphi_{K,i} \in W_h \\(\mathbf{q}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K - (\mathbf{u}_h, \nabla \boldsymbol{\tau}_{K,i})_K + \langle \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_0} + \langle \mathbf{u}_{bc}, \boldsymbol{\tau}_{K,i} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K_{bc}} &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_{K,i} \in V_h \\\langle [[\mathcal{H}]], \mu_{e,i} \rangle_e &= 0, \quad \forall \mu_{e,i} \in M_h\end{aligned}$$

But why HDG over DG?

As will be seen later, HDG allows for static condensation, effectively reducing the number of DOFs when using a Newton solver.

ICP: a multi-domain problem

Results

Conclusions and future work
