Soutien Math

Brauge_c

Matrices :

Définition : On dit que A est une matrice à m lignes et n colonnes à coefficient dans IK si A = $\begin{pmatrix} a11----a1n \\ | \quad\quad | \\ am1----amn \end{pmatrix}$

Où les a_{ij} Є IK.

IK = ℝ ou ℂ (réel ou complexe).

On note $M_{m,n}$ (IK) l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficient dans IK.

Remarque : Lorsque A Є $M_{m,n}$ (IK), on écrira A sous la forme A=(a_{ij}).

Exemple :

A = $\begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 3\ 4 \\ 5\ 6 \end{pmatrix}$ Є $M_{3,2}$ (ℝ) B = $\begin{pmatrix} 1\ 1\ 0 \end{pmatrix}$ Є $M_{1,2}$ (ℝ)

$a_{3,2}$

Vocabulaire : Lorsque m=n, on parle de <u>matrice carré d'ordre n.</u>

Lorsque m=n et i ≠ j ⇒ a_{ij} = 0 (toutes les cellules en dehors de la diagonale sont égales à 0), on parle de matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ 0\text{-----------}0 \\ 0\text{----}0\ a_{ii}\ 0\text{---}0 \\ 0\text{-----------}0\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Opérations :

1) Somme
   Somme impossible sur matrices de tailles différentes.
   A = (a_{ij}) Є $M_{m,n}$ (IK)
   B = (b_{ij}) Є $M_{m,n}$ (IK)
   A+B = (c_{ij}) Є $M_{m,n}$ (IK)
   Où c_{ij}=a_{ij} + b_{ij}

   Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 4\ 5\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1\ 4\ 2 \\ 3\ 7\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ 6\ 5 \\ 7\ 12\ 2 \end{pmatrix}$$

2) Produit externe

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ (IK)

$\lambda \in$ IK

$\lambda A = (b_{ij}) \in M_{m,n}$ (IK) où $b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$

Exemple:

$$2 * \begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 3\ 4 \\ 5\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ 4 \\ 6\ 8 \\ 10\ 12 \end{pmatrix}$$

3) Produit interne

$A = (a_{ij}) \in M_{m,\underline{n}}$ (IK)

$B = (b_{ij}) \in M_{\underline{n},p}$ (IK)

Lignes de B = Colonnes de A

$AB = (c_{ij}) \in M_{m,p}$ (IK) où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

Exemple:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

Ordre: lico (ligne, colonne)

Brouillon:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -23 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -14 & -22 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A \in M_{1,2}$ $(\mathbb{R})$ $B \in M_{2,1}$ $(\mathbb{R})$

$AB \in M_{1,1}$ $(\mathbb{R})$ $\qquad BA \in M_{2,2}$ $(\mathbb{R})$

Brouillon:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$ $\qquad BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Remarques :

$AB \neq BA$ matrice nulle

$AB = 0 \nRightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$A^2 = 0 \nRightarrow A = 0$

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition :

Soit $(A,B,C) \in M^3_n(IK)$

Alors $(AB)C = A(BC)$

Preuve :

$A = (a_{ij})$; $B=(b_{ij})$; $C=(c_{ij})$

$AB=(d_{ij})$ où $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} a_{ik'}\, b_{k'k} c_{kj}$

$BC=(f_{ij})$ où $f_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, c_{kj}$

$A(BC)=(g_{ij})$ où $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} f_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} a_{ik} b_{kk'} c_{k'j}$

Il faut changer k en k' et k' en k

Brouillon :

[

$\sum_{i=2}^{4} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = a_{21} + a_{22} + a_{23}$

$+ a_{31} + a_{32} + a_{33}$

$+ a_{41} + a_{42} + a_{43}$

$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=2}^{4} a_{ij} = a_{21} + a_{31} + a_{41}$

$+ a_{22} + a_{32} + a_{42}$

$+ a_{23} + a_{33} + a_{43}$

]

$g_{ij} = \sum_{k'=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kk'}\, c_{k'j}$ donc $g_{ij} = e_{ij}$

E_{ij} = matrice nulle sauf cellule ij.

Exercice : j^e colonne

Notons $E_{ij} \in M_n$ (IK) = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← i^e ligne

Exemple n=3 :

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $A=(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

Calculer AE_{ij} ; $E_{ij}A$; $E_{ij}AE_{ij}$; $(E_{ij}A)^2$

AE_{ij} = $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a11 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ an1 & \cdots & ann \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a1i & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & ani & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{ij}A$ = $\begin{pmatrix} a11 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ an1 & \cdots & ann \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ aji & \cdots & ajn \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{ij}AE_{ij}$ = $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ aji & \cdots & ajn \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & aji & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$(E_{ij}A)^2$ = $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ aji & \cdots & ajn \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ aji & \cdots & ajn \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ aji * aj1 & \cdots & aji * ajn \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4)Transposée:

$A = (a_{ij}) \in M_{m,\underline{n}}$ (IK)

${}^tA = (b_{ij}) \in M_{n,m}$ (IK) où $b_{ij} = a_{ji}$

Exemple :

$t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $t\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soient $(A,B) \in M_n^2$ (IK) et $\lambda \in$ (IK)

Alors :

1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

2) ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$

3) ${}^t(AB) = {}^tB * {}^tA$

Preuve :

1-2) Evident

3) $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$

$AB = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

${}^t(AB) = (d_{ij})$ où $d_{ij}=c_{ji}$

$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}$

${}^tB = (e_{ij})$ avec $e_{ij} = b_{ji}$

${}^tA = (f_{ij})$ avec $f_{ij} = a_{ji}$

${}^tB\,{}^tA = (g_{ij})$ où $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\, f_{kj}$

$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\, a_{jk}$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}$

$= d_{ij}$ donc ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

5) Trace

Seulement pour les matrices carrées.

$A = (a_{ij}) \in M_n(IK)$

$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Exemple : $tr\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = 1 - 3 = -2$

Propriétés :

Soient $(A, B) \in M_n^2(IK)$ et $\lambda \in IK$

Alors

1) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2) $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$
3) $tr({}^tA) = tr(A)$
4) $tr(AB) = tr(BA)$

Preuve :

4)

$A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$

$AB = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} aij\ bkj$

$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} cii = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} aik\ bki$

$BA = (d_{ij})$ où $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} bik\ akj$

$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} dii = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} bik\ aki = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} aki\ bik$

$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} aki\ bik = tr(AB)$ (Changement de symbole)

6) Inverse

Définition :

On dit que $A \in M_n$ (IK) est inversible si il existe $B \in M_n$ (IK) tel que $AB = BA = I_n$

Si c'est le cas, B est notée A^{-1} est appelée inverse de A.

Comment déterminer l'inverse d'une matrice inversible ?

La méthode est basée sur la remarque suivante :

$AX = X' \Leftrightarrow X=A^{-1}X'$

Où $X=\begin{pmatrix} x1 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'1 \\ \vdots \\ x'n \end{pmatrix}$

Exemple :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$AX = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

x + y + z = x'
x + y = y'
-x –z = z'

AX = X' ⇔ (L2 <- L2 – L1 ; L3 <- L3 + L1)

x + y + z = x'
-z = y' – x'
Y = z' + x'

⇔

x = -z' + y' –z'
y = x' + z'
z = x' – y'

$AX = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Vérification :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -4\end{pmatrix}$ AX = X' ⇔ $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$

x + y + z = x'
x – z = y'
x – y – 4z = z'

AX=X' ⇔ (L2 <- L2 – L1 ; L3 <- L3 - L1)

x + y + z = x'
-y – 2z = y' – x'
–2y – 5z = z' – x'

=

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

x = -x' + 3y' –z'

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y = -5y' + 3x' + 2z'
z = -z' –x' + 2y'

7) Déterminant

Définition :

Soit A = (a_{ij}) Є M_n(IK)

On appelle déterminant de A le nombre noté det(A) ou $\begin{vmatrix}a11 & \cdots & a1n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ an1 & \cdots & ann\end{vmatrix}$

Défini pour tout j Є [I1, nI]

Det(A) = $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\ aij\ \Delta(ij)$

Où

1) Δ(ij) est le déterminant de la matrice en supprimant dans la matrice initiale la i[er] ligne et la j[er] colonne.
2) ∀λ ∈ IK, det(λ) = λ

Remarque :

On a aussi, ∀i ∈ [I1, nI]

Det(A) = $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\ aij\ \Delta(ij)$

Exemple :

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad - bc

1)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $=_{(j\,=\,2)}$ -2 Δ_{12} + 4Δ_{22} (on supprime la 2eme ligne et la 2eme colonne)

= -2|3| + 4 |1| = -2 * 3 + 4 * 1 = -2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $=_{(i\,=\,2)}$ -3 Δ_{21} + 4Δ_{22}

= -3|2| + 4 |1| = -2

2)

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $=_{(j=1)}$ 1* Δ_{11} -2 * Δ_{21} + 1 *Δ_{31}

$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ = -5 + 4 + 1= 0 Matrice non inversible

3)

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =_{(i=4)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$=_{(i=2)} -2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +_{(i=1)} 2*\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2*\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right)$

=-2 (-1 -2) + (2 + 1) + 2((1+3) -2 (3) + 5)

=15

Propriétés :

Soient (A, B) ∈ M^2_n (IK) et λ ∈ IK

Alors :

1) det(AB) = (det(A))(det(B))
2) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
3) A inversible ⇔ $\det(A) \neq 0$

Remarque:

$$\begin{vmatrix} a11 & \dots & a1n \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ann \end{vmatrix} = a11 * \begin{vmatrix} a22 & \dots & a2n \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ann \end{vmatrix} \dots = \prod_{i=1}^{n} aii$$

Permet d'avoir le determinant sous forme factorisé.

$$\begin{pmatrix} \lambda 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda n \end{pmatrix} \lambda i \text{ sont racines de } P_A(X) = \det(A - XIn)$$

Transformations laissant le determinant inchangé:

Toutes transformations du type :

Li <- Li + aLj avec j≠i && a ∈ ℝ

(Respectivement pour c)

EXEMPLE :

1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 1 \\ 2 & -1-x & 0 \\ -1 & -1 & -1-x \end{vmatrix} = _{(L1 \leftarrow L1 + L2 + L3)} \begin{vmatrix} -x & -x & -x \\ 2 & -1-x & 0 \\ -1 & -1 & -1-x \end{vmatrix} = _{(C3 \leftarrow C3 - C1\ ;\ C2 \leftarrow C2 - C1)}$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 2 & -3-x & -2 \\ -1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x * \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = x^2(-3-x) = -x^2(x+3)$$

$(x-2)^2 = (2-x)^2$

2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-x & 4 & -1 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 0 & 3 & 2-x \end{vmatrix} = _{(C1 \leftarrow C1 + C3)} \begin{vmatrix} 2-x & 4 & -1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 2-x & 3 & 2-x \end{vmatrix} = _{(L3 \leftarrow L3 - L1)} \begin{vmatrix} 2-x & 4 & -1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x)((1-x)(3-x)+1) = (2-x)(x^2-4x+4) = (2-x)(x-2)^2 = (2-x)^3$$

3)

$$\Delta=\begin{vmatrix}8-x & -1 & -5\\ -2 & 3-x & 1\\ 4 & -1 & -1-x\end{vmatrix} =_{(L1 \leftarrow L1+L2+L3)} \begin{vmatrix}2-x & 2-x & 2-x\\ -2 & 3-x & 1\\ 4 & -1 & -1-x\end{vmatrix} =_{(C2 \leftarrow C2-C1\,;\,C3 \leftarrow C3-C1)}$$

$$\begin{vmatrix}2-x & 0 & 0\\ -2 & 5-x & 3\\ 4 & -5 & -5-x\end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix}5-x & 3\\ -5 & -5-x\end{vmatrix} = (2-x)((5-x)(-5-x)+15) = (2-x)(4-x)^2$$

4)

$$\Delta=\begin{vmatrix}2-x & -2 & 1\\ 2 & -3-x & 2\\ -1 & 2 & -x\end{vmatrix} = (1-x)\,((-1-x)^2-4) = -x(4-x)(5+x)$$

5)

$$\Delta=\begin{vmatrix}2-x & -1 & -1\\ -1 & 2-x & -1\\ -1 & -1 & 2-x\end{vmatrix} = -x(3-x)^2$$

6)

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2-x & 8 & 6\\ -4 & 10-x & 6\\ 4 & -8 & -4-x\end{vmatrix} = x(2-x)(x-2) = -x(x-2)^2$$

7)

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-x & 2 & 3\\ 2 & 1-x & 3\\ 4 & 2 & -x\end{vmatrix} = (6-x)(x+1)(x+3)$$

8)

$$\Delta=\begin{vmatrix}4-x & 1 & -1\\ 2 & 5-x & -2\\ 1 & 1 & 2-x\end{vmatrix} =(3-x)^2(5-x)$$

9)

$$\Delta=\begin{vmatrix}3-x & -1 & 1\\ 7 & -5-x & 1\\ 6 & -6 & 2-x\end{vmatrix} =(2-x)^2(-4-x)$$

10)

$$\Delta=\begin{vmatrix}3-x & -2 & -1\\ 2 & -1-x & -2\\ -2 & 2 & 4-x\end{vmatrix} =(2-x)(x-1)(x-3)$$

Diagonalisation

Si D existe, on a : $D=P^{-1}AP$

Vocabulaire :

Polynome caractéristique :

$P_A(x) = \det(A - XI_n)$ où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a11 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ an1 & \cdots & ann \end{pmatrix}$

Exemple :

$A = = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 4 & 5-x & 6 \\ 7 & 8 & 9-x \end{vmatrix}$

2)Valeur propre :

Toute racine de P_A s'appelle une valeur propre de A. L'ensemble des valeurs propres s'appellent le spectre de A. Noté $SP_{IR}(A)$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & -2 & 2-x \end{vmatrix}$

$P_A(X) =_{(C1<-C1-C3)} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ x-1 & -2 & 2-x \end{vmatrix} =_{(L3<-L3+L1)} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(-x(2-x)+1) = (1-x)(x-1)^2$

$= (1-x)^3$ SPR(A) = {1}

3)Polynome scindé dans IR

On dit qu'un polynome P, à coefficients réels est scindé dans IR si il peut s'écrire comme un produit de facteurs du 1^{er} degré à coefficient réels.

Cad :

$P(X) = k\prod_{i=1}^{n}(X - ai)$ où $k \in \mathbb{R}$ et $a_i \in \mathbb{R}$

Exemple :

$P(X) = (2-x)(x-1)^2$ P est scindé dans $\mathbb{R}$ car $P(X) = (2-X)(X-1)(X-1)$

$\wp(X) = (X-1)(X^2+1)$ $\wp$ non scindé dans $\mathbb{R}$

4)Ordre de multiplicité d'une valeur propre λ, noté $m(\lambda)$

Exemple :

$P_A(X) = (x-2)(x-3)^2(x-5)^4$ | $m(2) = 1$; $m(3)=2$; $m(5) = 4$ (4 = puissance ; 5 = x- ?)

5)Notion de dimension et notation vectorielle :

Exemple :

1)

E = $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | x = y ;z = 0} = $\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}; x$ Є $\mathbb{R}\}$

E = {x$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; x$ Є $\mathbb{R}$} Vect$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dim(E) = 1

2)

F = $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | x = y } = $\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}; (x, z)$Є $\mathbb{R}^2\}$ = $\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; (x, z)$Є $\mathbb{R}^2\}$

F = {x$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; (x, z)$Є $\mathbb{R}^2\}$ Vect{$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$} dim(F) = 2

3)

G = $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | x +y = 0 ; x + z = 0 } = |y=-x ;z=-x $\{\begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}; x$ Є $\mathbb{R}\}$

Vect$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Définition :

Soit A Є M_n ($\mathbb{R}$), on dit que A est diagonalisable s'il existe P Є M_n ($\mathbb{R}$), inversible tel que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Theoreme : Soit A Є M_n ($\mathbb{R}$) : Alors A diagonalisable ⇔ P_A scindé dans $\mathbb{R}$ et ∀λ Є $SP_{IR}(A)$,

dim(E λ) = m(λ)

où E λ = {x = $\begin{pmatrix} x1 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^n$ tel que $(A- \lambda I_n)X = 0$

λ : sous espace vectorielle propre associé à X

Remarque :

1) 1<= dim (E λ) <= m(λ)
2) Ainsi si m(λ) = 1 alors dim(E λ) = 1

EXEMPLE :

1)

A = $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $P_A(X)$ = $\begin{vmatrix} 8-x & -1 & -5 \\ -2 & 3-x & 1 \\ 4 & -1 & -1-x \end{vmatrix}$ = $(2-x)(4-x)^2$ P_A scindé dans $\mathbb{R}$.

SPR(A) = {2,4} avec | m(2) =1 ; m(4)=2

Comme m(2) = 1 => dim(E2) = 1

A diagonalisable ⇔ dim (E4) = m(4) = 2

E4 = { $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que (A – 4I) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ }

E4 = { $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | 4x –y -5z=0 ; -2x –y + z =0 ; 4x –y -5z = 0}

E4 = { $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | 4x –y -5z=0 ; 6x – 6z = 0 ; y = -x}

E4 = { $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix}$ x Є $\mathbb{R}$ } = Vect $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour vérifier :

$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dim(E4) = 1 ≠ m(4) Donc A n'est pas diagonalisable.

2)

A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $P_A(X)$ = $\begin{vmatrix} 3-x & -1 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$ = $(2-x)^2(4-x)$ P_A scindé dans $\mathbb{R}$.

SPR(A) = {2,4} avec | m(2) =2 ; m(4)=1

E2 = { $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que (A – 2I) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ }

E2 = { $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | x-y+z=0 ; 0=0 ; x-y+z=0}

E4 = {$\begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix}$ x Є $\mathbb{R}^2$ } = Vect {$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$}

Dim(E2) = m(2)=2

De plus m(4) = 1 => dim(E4) = 1

Donc A est diagonalisable.

Pour obtenir P il faut calculer E4

E4 = {$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | -x-y+z=0 ; -2y=0 ;x-y-z=0} = {$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ x Є ℝ} = Vect$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc D=P^{-1}AP où D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3)

A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ P_A(X) = $\begin{vmatrix} 2-x & -2 & 1 \\ 2 & -3-x & 2 \\ -1 & 2 & -x \end{vmatrix}$ =-(1-x)²(x+3) P_A scindé dans ℝ.

SPR(A) = {1, -3} m(1)=2 et m(-3) = 1

E1 = {$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que (A – I) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ }

E1 = {$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | x-2y+z=0 ; 2x-4y+2z=0 ; -x+2y-z=0}

E1 = {$\begin{pmatrix} 2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (y, z) Є $\mathbb{R}^2$ } = Vect {$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$}

Dim(E1) = 2 = m(1)

m(-3)=1 => dim(E-3) = 1 donc A est diagonalisable.

E-3 = {$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que (A + 3I) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ }

E-3 = {$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Є $\mathbb{R}^3$ tel que | 5x-2y+z=0 ; 2x+2z=0 ; -x+2y-3z=0}

E-3 = {$\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix}$ x Є ℝ } = Vect {$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$}

Donc D=$P^{-1}AP$ où D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ P = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Préparation QCM :

Rappel :

z = a + ib

$\bar{z}$ = a – ib

$|z|$= $\sqrt{a^2 + b^2}$

Définition :

Soit A Є $M_{m,n}$ (ℂ) A* = ${}^t\overline{A}$ =$\overline{t}$A

EXEMPLE

A = $\begin{pmatrix} 1 & i & -2 \\ -3 & 1-i & 4 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ A* = t $\begin{pmatrix} 1 & -i & -2 \\ -3 & 1+i & 4 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -i & 1+i & -1 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Remarque :

(AB)* = B* A*

Définition :

A hermicienne si A*=A (on dit symetrique dans le cas d'une matrice réel cad : A symétrique si tA = A)

A normale si A*A=AA*

A unitaire si A*A=AA*=In

A orthogonal si tAA = AtA = In

Remarque :

A hermitienne => A normale

A unitaire ⇔ A^{-1}= A*

A orthogonale ⇔ A^{-1} = tA

Normes matricielles :

$\|a\|_1$ = $\text{Max}_j \sum_i |aij|$

$\|a\|_\infty$ = $\text{Max}_i \sum_j |aij|$ 1 : ressemble a une barre verticale : colonne; ∞ ressemble a une barre horizontale : ligne

$|i|$ = 1

$|z|$ = $|\bar{z}|$

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ i & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$||A||_1$ = Max(|1|+|i|+|0| ;|0|+|-1|+|0| ;|1|+|-2|+|5|) = Max(2,1,8) = 8

$||A||_\infty$ = Max(|1|+|0|+|1| ;|i|+|-1|+|-2| ;|0|+|0|+|5|) = Max(2,4,5) = 5

Rayon spectral :

P(A) = Max |λ| λ Є SP_C(A)

P(A) : Max des modules de valeur propres

Exemple :

A tel que P_A(X) = (x-5i)(x-i)(x-1) SPR(A) = {5i ;i ;1}

P(A) = Max(|5i|;|i|;|1|) = Max(5,1,1)=5

A savoir :

1) Si A hermitienne, alors $||A||_{z(ou2\ ?)}$ = P(A)
   Sinon $||A||_{z(ou2\ ?)} = \sqrt{P(A^*A)}$
2) $||A^*||_{z(ou2\ ?)} = ||A||_{z(ou2\ ?)}$
3) $||A||_S$ (norme de Schur) on a $||A||_S = \sqrt{tr(A^*A)}$
   $= \sqrt{\sum_i \sum_j |aij|^2} = \sqrt{\sum_{ij} |aij|^2}$
4) Dim(E λ) = m(λ)

A Savoir QCM2:

Soit A, une matrice care d'ordre 4 et don't le spectre est S =

- P(A) = -4
- P(A) = 1 + i
- P(A) = $\sqrt{2}$
- P(A) = 4

Laquelle des propriétés est vraie :

- tr(AB) = $\sum_{i=1}^{n} aii\ bii$
- tr(AB) ≠ tr(A) + tr(B)
- tr(AB) = tr(BA)
- tr(AB) = tr(A) * tr(B)

Une matrice A est hermitienne si :

- A est inversible
- $A^* = A$
- $A^*A = I$
- $A^2 = A$

$B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ on a :

- B hermitienne
- B unitaire ⇒ ($BB^* = B^*B = I_n$)
- B orthogonal ⇒ (${}^tBB = B{}^tB = I_n$)
- B normale ⇒ ($B^*B = BB^*$)

$BB^* = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ $B^*B = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$

Définition matrice normale.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 3i & 2 \end{pmatrix}$ on a :

- A unitaire
- A hermitienne
- $A^* = -A$
- A non diagonalisable

$A \in M_n(\mathbb{C})$

- $\|A\|_2 = \sqrt{P(A)}$
- $\|A\|_2 = P(A)$ (vrai si A hermitienne)
- $\|A\|_2 = \sqrt{P(A* \quad A)}$
- $\|A\|_2 = \sqrt{P(A* \quad A)}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & i \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix}$:

- $\|A\|_\infty = 4$
- $\|A\|_\infty = 6$
- $\|A\|_\infty = 7$ Max(1 + -5 + 1 ; 0 + 2 + 3; 1 + 1 + 2)
- $\|A\|_\infty = 1$

$\|A\|_S = \sqrt{\sum_{ij} |aij|^2}$:

- $\|A\|_S = \sqrt{tr(A^2)}$
- $\|A\|_S = \sqrt{tr(A)}$
- $\|A\|_S = \sqrt{tr(A * \quad A)}$
- $\|A\|_S = \sqrt{p(A)}$

A diagonalisable ssi:

- PA est scindé
- A triangulaire
- $\text{Dim}(E\lambda_i) = \alpha_i$ où $\alpha_i = m(\lambda_i)$
- PA scindé et $\dim(E\lambda_i) = \alpha_i$

Rappel : $\|A\|_\infty = \|A *\|_1 \qquad \|A *\|_\infty = \|A\|_1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

- $\|A\|_2 = 9$
- $\|A\|_2 = P(A)$
- $P(A) = 3$
- $\|A\|_\infty = 1$

Toute matrice hermitienne est diagonalisable.

Définition :

Soit A Є M_n (IK) et p Є IK[x]

On dit que p est un polynome annulateur de A si P(A) = 0

Explication :

$P(x) = x^2 - x + 1$

$P(A) = A^2 - A + I$

EXEMPLE :

1)

$A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = 0$

Donc x^2-x est un polynome annulateur de A.

2)

$A^2=I \Rightarrow A^2-I=0$

Donc x^2-1 est un polynome annulateur de A.

Théoreme : (Cayley – Hamilton)

Soit A Є M_n(IK) (le polynome caractéristique de A est un polynome annulateur de A)

Alors $P_A(A) = 0$

Exemple :

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $P_A(X) = (x-1)^2(x-2)$.

CH => $P_A(A)^3=0$

- ⇨ $(A-I)^2 (A-2I) = 0$ $(A^2 - 2A + I)(A-2I) = 0$
- ⇨ $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I$ $A((A^2-4A + 5I)/2) = I$ $A^{-1} = ((A^2-4A + 5I)/2)$
- ⇨ Donc $A^{-1} = ½ (A^2 - 4A + 5I)$

Définition :

Soit $A \in M_n(IK)$

On appelle polynome minimal de A le polynome unitaire (coefficient de tête = 1) de degré minimal qui annule A.

Il se note mA.

Propriétés :

1) mA | (divise) P_A ie $P(X) = Q(X)$ mA (X)
2) {racines de mA} = {racines de P_A}
3) A diagonalisable dans $M_n(IK)$ ⇔ mA est scindé dans IK et à racines simple (ie d'ordre de multiplicité égale à 1).

Décompostition LU

Théoreme :

Soit A € Mn(K)

Alors A = LU où

L = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x & \cdots & x & 1 \end{pmatrix}$ (1 sur la diagonale et 0 au dessus)

U = $\begin{pmatrix} x & \cdots & x \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (0 en dessous)

Remarque :

Det(A) = det(LU) = det(L) * det(U) = 1 * det(U) = det(U)

Det(A) = det(U)

Comment déterminer L et U ?

A = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (A11 est le pivot -> 4)

$A^1 = A$

On commence toujours par L1

On vire x

4x + y + 2z = ?

X + 5y + 2z = L2 <- L2 – (L1/4)

2x +2y + 4z = L3 <- L3 – (L1/2)

$G^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ce qui change

$A^2 = G^1 A^1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 19/4 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$

L3 = L3 – ((3/2)/(19/4)) * L2

$G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6/19 & 1 \end{pmatrix}$

$= 19/4 * -6/19 + 3/2$

$= -6/19 * 3/2 + 3$

$= -9/19 + 3$

$= 48/19$

$A^3 = G^2 A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 19/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 48/19 \end{pmatrix}$

$A^3 = G^2 A^2$

$A^3 = G^2 G^1 A^1$

$A^3 = G^2 G^1 A$

Donc $A = (G^2 G^1)^{-1} A^3$

$= (G^1)^{-1} \ (G^2)^{-1} A^3$

A SAVOIR :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v & w & 1 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 6/19 & 1 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 19/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 48/19 \end{pmatrix}$

A = LU

Det(U) = 4 * 19/4 * 48/19 = 48

(Si pas de fraction à la fin on est sur la bonne voie)

Si = det(A) on est bon.

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = G^1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5/7 & 1 \end{pmatrix}$$

-5/7 * -14 – 5 = 5

$A^3 = G^2 A^2$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$A = (G^1)^{-1}\ (G^2)^{-1} A^3$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

GAUSS

$Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$G^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^2 = G1\ \tilde{A}1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^3 = G2\ \tilde{A}2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -11/3 & -11 \end{pmatrix}$$

Donc le système est équivalent à

$U - 2v + w = 7$

$3v + 2w = 3$

$-11/3\ w = -11$

$U = 2$

$V = -1$

$W = 3$

Donc $S = \{(2\ ;-1\ ;3)\}$