Probabilités

Regragui Mohammed

ING1 2014

Sources disponibles sur `http://ing1.nemunai.re/` ou ing1@nemunai.re

Table des matières

Chapitre 1

Le modèle probabiliste et variables aléatoires

1.1 Espaces utilisables

1.1.1 Expériences aléatoires et évènements

Une expérience est qualifiée d'aléatoire, si on ne peut prévoir par avance son résultat, et, si répété dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents.

On représente le résultat de cette expérience comme un élément ω de Ω (l'univers), ensemble des résultats possibles.

Ainsi à l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dès, on peut associer l'ensemble Ω :

$$\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);...\}$$

$$Card(\Omega) = 36$$

Ω n'est pas déduit de manière unique de l'expérience mais dépend de l'usage qui doit être fait des résultats. Si l'on convient qu'on ne retiendra de cette expérience que la somme des points affichés.

Donc

$$\Omega' = 2, ..., 12$$

.

Un événement est une proposition logique relative au résultat de l'expérience.

Exemple : A « La somme des points supérieurs à 10 ».

1.1.2 Algèbre des évènements

Soit C, l'ensemble des évènements à tout élément $A \in C$, $\bar{A}$:contraire de A. Le complémentaire de A :

$$\bar{A} = C_{\Omega}^{A}$$

La classe C est définie par trois axiomes :

(i) $\forall A \in C$, $\bar{A} \in C$

(ii) Pour tout ensemble fini ou dénombrable [1] $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n \in C \cup A_i \in C$.

(iii) $\Omega \in C$

Remarque : Les trois axiomes impliquent que : $\emptyset \in C$ et $\Omega \cup A_i \in C$. $\bar{\Omega} = \emptyset \in C$.

$A_i \in C$, $\bar{A}_i \in C \cup \bar{A}_i \in C$.

Les propriétés définissant ce que l'on appelle un ealgèbre de Boole ou tribu.

Définition : On appelle espace probabilisable le couple (Ω, C), où Ω est l'univers et C est la tribu.

1.2 Espace probabilisé

1.2.1 L'axiomatique de Kolmogorov

$$A \longmapsto P(A) \in [0, 1]$$

$$A \in C$$

Définition : On appelle probabilité sur (Ω, C) (loi de probabilité) une application :

$P : C \longmapsto [0, 1]$ vérifiable

$A \longmapsto P(A)$

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles A_i, on a :

$$P(\cup_i A_i) = \Sigma_i P(A)$$

1. I dénombrable : il existe une application φ bijective et $\varphi : I \to \mathbb{N}$

Propriétés :

(i) $P(\emptyset) = 0$,

(ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

(iii) $P(A) \leq P(B)$ si $A \in B$,

(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

(v) $P(\cup_i A_i) \leq \Sigma_i P(A_i)$

1.2.2 Lois conditionnelles

Définition : Soit $B \in C / P(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionelle de A sachant B :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définition : A est indépandant de B si : $P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(i)

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

(ii)

$$P\left(B_i/A\right) = \frac{P(A/B_i) \cdot P(A_i)}{\Sigma_i P(A/B_i) \cdot P(B_i)}$$

Exemple : Dans une usine, trois machines M_1, M_2, M_3 fabriquent des boulons de même type.

– M_1 sort en moyenne $0,3\%$ boulons défectueux.
– M_2 sort en moyenne $0,8\%$ boulons défectueux.
– M_3 sort en moyenne 1% boulons défectueux.

On mélange 1000 boulons dans une caisse : 500 de M_1, 350 de M_2, 150 de M_3.

On tire un boulon au hasard dans la caisse, il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par M_1 ou M_2 ou M_3 ?

D ≪ boulon défectueux ≫. On cherche $P(M_1/D)$.
$P(M_1/D) = 0,3\%$
$P(M_2/D) = 0,8\%$
$P(M_3/D) = 1\%$

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1/D) \cdot P(M_1)}{P(D)}$$

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cup M_3)$$

$$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cup M_3)$$

$$P(D) = \Sigma_{i=1} P(D/M) \cdot P(M_i)$$

1.2.3 Variables aléatoires réelles

Le concept de variables aléatoires formalise la notion de rgandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire.

Considérons le lancé de deux dés parfaitement équilibrés.

$$\Omega = (1,1); ...; (6,6)$$

Ω est muni de la probabilité : $P(\omega) = \frac{1}{36} \forall \omega \in \Omega$

Soit l'application $S : \Omega \longmapsto E \ (i,j) \longmapsto i+j$

$$E = 2, ..., 12$$

Pour obtenir la probabilité d'une valeur quelconque de S, il suffit de dénombrer les ω qui réalisent cette valeur.

Ainsi, $P(S=5) = P((1,4);(4,1);(2,3);(3,2)) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Généralement :

$$P(S = s) = P(S^{-1}(s))$$

Si X est une application de (Ω, C, P) dans E, il faut que E soit probabilisable c'est-à-dire muni d'une tribu F.

Définition : Une variable est une application mesurable de (Ω, C, P) de (E, F) l'image réciproque d'un élément de F est un élément de C.

Lorsque $E = R$, on utilise commme tribu la α-algèbre engendrés par les intervalles de $\mathbb{R}$. Cette tribu s'appelle la tribu Borélienne notée B.

$$P_X(B) = P(\omega / X(\omega) \in B) = P(X^{-1}(B))$$

Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est l'application.

$F : \mathbb{R} \longmapsto [0,1] \ x \longmapsto F(x) = P[X < x]$

$$\{^{Festcroissante}_{F(-\infty)=0etF(+\infty)=1x}$$

Définition : une loi de probabilité P_X admet une densité f si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $P_X(I) = \int_T f(x)dx$

$$P(a < X < b) = f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est l'application

$$F : \mathbb{R} \longmapsto [0,1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P(X, x)$$

1.2.4 Moment d'une variable aléatoire

L'espérance mathématique

Pour une variable discrète, on définit l'espérance :

$$E(X) = \sum_i x_i P[X = x_i]$$

Dans le cas continue : $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \times f(x)dx$ où $f(x)$ est la densité de X.

Proposition :

(i) $E(a) = a \forall a \in \mathbb{R}$

(ii) $E(\alpha X) = \alpha E(x) \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Définition : Soit X une variable aléatoire et φ une fonction quelconque.
Cas discret : $E[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) P[X = x_i]$
Cas continue : $E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)dx$

La variance

On appelle variance de X notée $V(X)$ ou σ la quantité.
$V\left(X\right) = E\left(\left(X - m\right)^2\right)$ où $m = E\left(X\right)$
Cas discret : $V\left(X\right) = \sum_i \left(x_i - m\right)^2 P(X = x_i)$
Cas continue : $V\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} \left(x - m\right)^2 f(x)dx$
$\sigma = \sqrt{V\left(X\right)}$ l'écart-type
La variance est une mesure de la dispersion de X autour de la moyenne $m = E\left(X\right)$.

Propriété :

(i) $V(a) = 0$

(ii) $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X) \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X, Y indépendantes.

Formule de König-Hyghans

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Soient X et Y deux variables :

$$V(X+Y) = E\left(X+Y\right) - E^2(X+Y)$$

$$V(X+Y) = E\left(X^2\right) + E\left(Y^2\right) + 2E(X/cdotY) - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + V(Y) + 2E$$

On appelle covariance de X, Y :

$$cov(X+Y) = E(X/cdotY) - E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$$

Si X, Y sont indépendantes $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$

1.3 Lois de probabilité d'usage courant

1.3.1 Lois discrètes

Loi uniforme

$$X = 1, 2, ..., n$$

$$P[X=k] = \frac{1}{n} \forall k = 1, ..., n$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP[X=k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)$$

$$E(X^2) = \sum_{1}^{n} k^2 P[X=k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Rappel :

$$\sum_{1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

Loi de Bernoulli $B(p)$

Cést la loi d'une varuable aléatoire X pouvant prednre que les deux valeurs 1 ou 0 avec les probabilités p et $1-p$.

X est la fonction indicatrice d'un évévement A de probabilité p

$$E(X) = \sum_{0}^{1} kP[X=k] = p$$

$$E(X^2) = \sum_{0}^{1} k^2 P[X=k] = p$$

$V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$ où $q = 1-p$

Loi binomiale $B(n,p)$

Supposons que l'on répète n fois dans des conditions identiques une expérience aléatoire dont l'issue se traduit par l'apparition (ou la non-apparition) d'un événement A de probabilité p. Les résultats de chaque expériences sont indépendants.

X est le nombre de réalisations de A.

Somme indépendante de variable de Bernoulli :

$$X = \sum_{i=1}^{n}$$

$$P[X=k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

X_i suit $B(p)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p) = npq$$

Loi de Poisson $P(\lambda)$

C'est la loi d'une variable aléatoire entière positive qui satisfait à $P\left[X=x\right]=e^{i\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\forall x\in\mathbb{N}$
λ_i paramètre de Poisson.

On obtient la loi de Poisson comme approximation de la loi binomiale $B(n,p)$ avec $n\mapsto\infty$, $p\mapsto 0$ et $np\mapsto\lambda$

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\simeq e^{-np}\times\frac{(np)^k}{k!}\qquad\lambda=np$$

Théorème Soit X_n une suite de valeurs aléatoires $B(n,p)$ telles que $n\mapsto+\infty$ et $p\mapsto 0$ de manière à ce que le produit $n\times p\mapsto\lambda$ (finie), alors X_n converge en loi vers une variuable de Posiion $P(\lambda)$.

Démonstration

$$P[X_n=k]=C_k^n p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k!)}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$P[X_n=k]=\frac{n(n-1)(n-1)...(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^n-k$$

$$P[X_n=k]=\frac{(np)^k}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n})(1-p)^{n-k}$$

$$(1-p)^{n-k}=(1-p)^n\times(1-p)^{-k}$$

$$(1-p)^{-k}\longrightarrow_{p\to 0}1$$

$$np\sim\lambda\Leftrightarrow\frac{\lambda}{n}$$

$$(1-p)^n\sim(1-\frac{\lambda}{n})^n$$

Rappel : $lim_{n/mapsto+\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x$

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\longrightarrow_{n\mapsto+\infty;p\to 0}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-k+}$$

Espèrance Soit X suit $P(\lambda)$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP[X = k] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot e^{-k} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = e^{-k} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

Rappel :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!} = e^x$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2} \frac{\lambda^2}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \lambda^2 e^2 + e^{-k} \lambda e^k = \lambda^2 + \lambda$$
$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Loi hypergéométrique $H(N, n, p)$

Soit une population de N individus parmis lesquelles, une proportion p ($n \cdot p$ individus) possèdent un certain caractère.

On prélève un échantillon de n individus parmis cette population (tirage sans remise).

Soit X la variable aléatoire : le nombre d'individus de l'échantillon possédant la propriété. On dit que X suit la loi hypergéométrique.

La probabilité de X : $P[X = x] = \frac{C^x_{N \cdot p} \cdot C^{n-x}_{N - N \cdot p}}{C^n_N}$

Remarque $H(N, n, p) \to B(n, p)$ quand $N \to +\infty$ (loi binomiale).

En pratique, ce résultat est vrai lorsque $\frac{n}{N} < 10\%$ ($\frac{n}{N}$ est le taux de sondage).

$$E(X) = n \cdot p$$

$$V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$$

Loi géométrique et loi de Pascal

C'est la loi du nombre d'essais nécessaire pour faire apparaître un événement A de probabilité p.

$$P[X = x] = (1-p)^{x-1} \cdot p \qquad \forall x \geq 1$$

$$1 - p = q \qquad P[X = x] = q^{x-1} \cdot p$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x(1-p)^{x-1} \cdot p = p \cdot \sum_{x=1}^{+\infty} x \cdot q^{x-1}$$

Rappel : $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad q > 1$

$$f(q) = \sum_{x=0}^{+\infty} q^x = \frac{1}{1-q}$$

En dérivant :

$$\sum_{x=1}^{+\infty} x \cdot q^{x-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$E\left(X\right) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2(1-p)^{x-1} \cdot p = p \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 \cdot (1-p)^{x-1}$$

En utilisant la dérivée seconde de $f(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^x$, on obtient :

$$V(X) = \frac{q}{p^2} \qquad (q = 1 - p)$$

La loi de Pascal d'ordre n est la loi du nombre d'essais nécessaires pour observer n fois un évènement A de probabilité P. L'expérience devant se terminer par A.

$$P[X = x] = p \cdot C_{x-1}^{n-1} p^{n-1} \cdot q^{x-n}$$

$$P[X = x] = C_{x-1}^{n-1} p^n \cdot q^{x-n} \qquad \forall x \geq n$$

Donc $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ somme indépendante de lois géométriques de paramètre p.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n}{p}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} = \frac{n \cdot p}{p^2}$$

Exercice Le nombre d'appel que reçoit un standard téléphonique par minute obéït à la loi de Poisson $P(3)$.

1. Calculer le nombre moyen d'appels par minutes ainsi que la variance.
2. Quelle est la probabilité d'avoir reçu un appel au cours d'une minute.
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins trois appels dans une minute.

Exercice Un individu décide de jouer à un jeu de loto jusqu'à ce qu'il gagne à un rang minimum qu'il s'est fixé. La probabilité de gain pour ce rang à chaque tirage est p. On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirage auquels il doit participer pour atteindre son objectif.

1. Quelle est la loi de probabilité de X et donner sa fonction de répartition.
2. Donner le nombre moyen de tirage nécessaires ainsi que la variance.
3. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne après n tirages.
4. N'ayant toujours pas gagné à l'issue du $n$ième tirage, calculer la probabilité pour qu'il gagne au $(n + k)$ième tirage.