Cours de

Graphes, Réseaux, Flots

3

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Graphes, Réseaux, Flots

I - Eléments de la Théorie des Graphes

II - Problèmes de flot maximal

III - Problèmes d'affectation

IV - Problèmes de transport optimal

V - Problèmes de chemins optimaux

VI - Problèmes d'ordonnancement de projet

Processus aléatoires

VII - Chaînes de Markov

VIII - Processus de Markov

IX - Files d'attente

Programmation linéaire

X - L'algorithme du simplexe

XI - Forme matricielle de la méthode du simplexe

XII - Dualité

Exercices

CHAPITRE I

Eléments de la Théorie des Graphes

Les graphes, orientés ou non orientés, interviennent dans de nombreux problèmes ; ils permettent par exemple de modéliser des réseaux, qu'ils soient de communication ou de calculateurs. La théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre la plupart des problèmes discrets que pose la recherche opérationnelle.

Exemple de graphe :

Considérons les points A, B, C, D, E et un certain nombre de flèches joignant entre eux plusieurs couples de ces points :

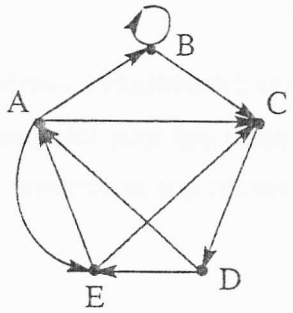


Figure 1

Un graphe orienté G est défini par l'ensemble X de ses sommets et l'ensemble U de ses arcs ; un arc u de U est défini par un couple de sommets x et y ; on dit que u admet x comme origine, y comme extrémité finale, on note $u = (x, y)$; on note $G = (X, U)$.

Un graphe simple non orienté $G = (X, E)$ est défini par deux ensembles : X ensemble des *sommets* et E ensemble des *arêtes*, un élément e de E étant défini par une paire de sommets x et y de X. On dit que x et y sont *incidents* à e, ou que x et y sont les extrémités de e ou que x et y sont *adjacents* et on écrit souvent $e = \{x, y\}$.

Dans ce chapitre et les suivants, nous ne considérons que des graphes *finis*, c'est-à-dire où l'*ordre* du graphe, ou le cardinal de X, est fini et où la *taille* du graphe, ou le cardinal de E ou de U, sont finis : on pose $n = |X|$ et $m = |E|$ ou $m = |U|$.

Le "**graphe complet**" à n sommets, noté K_n, est le graphe non orienté d'ordre n dont deux sommets quelconques sont adjacents. Il est donc de taille $\frac{n(n-1)}{2}$.

On appelle *graphe partiel* de $G = (X, E)$ un graphe ayant même ensemble de sommets X que G et ayant pour ensemble d'arêtes une partie de E.

Vocabulaire de la théorie des graphes

Dans un graphe, on appelle *chemin* une suite d'arcs dont l'extrémité terminale de chacun, sauf pour le dernier, est l'extrémité initiale du suivant.

Un chemin qui se ferme sur lui-même est un *circuit* ; de nombreux auteurs exigent qu'un circuit soit simple (voir ci-dessous).

La *longueur* d'un chemin est le nombre de ses arcs. Un circuit de longueur 1 est une *boucle*.

Un chemin est *simple* s'il ne passe qu'une fois par chacun de ses arcs ; il est *élémentaire* s'il ne rencontre pas plus d'une fois chacun de ses sommets.

Dans un graphe de n sommets, les plus longs chemins élémentaires comportent, évidemment, s'ils existent, $n-1$ arcs. Ils passent une fois et une seule par tous les sommets du graphe : on les appelle chemins *hamiltoniens*. Un chemin hamiltonien qui se referme sur lui-même est un *circuit hamiltonien*.

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté.

On appelle *chaîne* une suite d'arêtes, dont chacune a une extrémité commune avec l'arête précédente (sauf la première) et l'autre commune avec l'arête suivante (sauf la dernière).

Une chaîne qui se ferme sur elle-même (et qui est simple) est un *cycle*. Un graphe (orienté ou non) est **connexe** s'il existe au moins une chaîne entre toute paire de sommets.

Il est **fortement connexe** s'il existe au moins un chemin entre toute paire de sommets.

On définit une relation d'équivalence sur X en disant que deux sommets x et y sont équivalents si et seulement si ils sont extrémités d'une même chaîne dans G. Les classes d'équivalence de X pour cette relation s'appellent *composantes connexes* de G.

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle.

Théorème (admis)

Pour un graphe G d'ordre n, il y a équivalence entre :

a) G est un arbre

b) G est connexe, de taille $(n-1)$

c) G est sans cycle, de taille $(n-1)$

d) G est connexe et la suppression d'une arête quelconque le disconnecte

e) G est sans cycle et l'ajoût d'une arête quelconque crée un cycle

f) entre deux sommets quelconques il existe une chaîne (élémentaire) unique.

Etant donné un sommet x d'un graphe G non orienté, on appelle *degré* de x et on note $d(x)$ le nombre d'arêtes incidentes à x. Si x est un sommet d'un graphe G orienté, on distingue le degré sortant de x, ou *demi-degré extérieur* de x, et l'on note $d^+(x)$, le nombre d'arcs d'origine x. On définit similairement le degré entrant, ou *demi-degré intérieur* de x, et l'on note $d^-(x)$ le nombre d'arcs admettant x comme extrémité terminale.

Matrice d'adjacence

L'existence d'un arc entre X et Y se traduit par la présence d'un 1 à l'intersection de la ligne X et de la colonne Y ; l'absence d'arc, par la présence d'un 0.

La matrice d'adjacence M associée au graphe de la figure 1 est la suivante :

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ B & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ E & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Ses puissances successives M^k donnent les nombres de chemins de longueur k reliant les sommets 2 à 2 :

$$M^2 = \begin{array}{c|ccccc|} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ B & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ E & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad ; \quad M^3 = \begin{array}{c|ccccc|} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ B & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ D & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ E & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad ;$$

$$M^4 = \begin{array}{c|ccccc|} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 4 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ B & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ C & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ D & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ E & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Considérons la matrice booléienne $\mathcal{M}$ associée à M. Dans cette matrice, la présence d'un 1 à l'intersection de la ligne X et de la colonne Y signifie : "l'arc (X, Y) existe", on peut également en calculer les "puissances" successives, en utilisant comme loi "multiplicative" le produit logique et, comme loi "additive", la somme logique ; ainsi, $\mathcal{M}^{[k]}$ sera encore une matrice booléienne.

Dans ces conditions, la présence d'un 1 à l'intersection de la ligne X et de la colonne Y de $\mathcal{M}^{[k]}$ signifie : "il existe au moins un chemin de longueur k entre X et Y". Dans l'exemple choisi, on a les résultats suivants :

$$\mathcal{M}^{[2]} = \begin{array}{c|ccccc|} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ B & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ E & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad ; \quad \mathcal{M}^{[3]} = \begin{array}{c|ccccc|} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ D & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ E & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad ;$$

$$\mathcal{M}^{[4]} = \begin{array}{c|ccccc|} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ D & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ E & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Si l'on fait la somme booléienne :

$\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{M}^{[2]} \dot{+} \mathcal{M}^{[3]} \dot{+} \mathcal{M}^{[4]}$ et, plus généralement : $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{M}^{[2]} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{M}^{[k-1]}$, on trouve une matrice (qui, dans le cas particulier de l'exemple est entièrement formée de 1) dans laquelle la présence d'un 1 à l'intersection de la ligne X et de la colonne Y signifie : "il existe dans le graphe au moins un chemin de longueur inférieure ou égale à $k-1$ entre X et Y".

On obtient la "fermeture réflexo-transitive" de l'ensemble X des sommets du graphe en calculant la matrice

$$I \dot{+} \mathcal{M} \dot{+} \mathcal{M}^{[2]} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{M}^{[n-1]}$$

où I est la matrice booléienne unité (qui ne comporte que des 1 dans la diagonale et des 0 partout ailleurs).

* * * * * * * * *

CHAPITRE II

Problèmes de flot maximal

La recherche d'un flot de valeur maximum dans un "réseau" a des applications directes, par exemple en termes de trafic, qu'il s'agisse d'un réseau de circulation ou d'un réseau téléinformatique, mais il en a bien d'autres : par exemple, la détermination d'un couplage de cardinal maximum dans un graphe biparti, modèle de problèmes d'affectation, traités dans le chapitre suivant.

On appelle **réseau de transport** un graphe orienté sans boucle, comportant une entrée ou source s et une sortie ou puits p, dont les arcs sont valués par des nombres figurant la **capacité de transport** de chaque arc u, soit $c(u)$.

Le problème à résoudre, dans un réseau de transport, consiste, en général, étant données des quantités disponibles en s, à en acheminer le maximum jusqu'à p, compte tenu des capacités de transport.

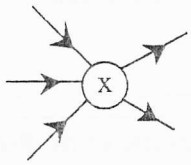
Les capacités de transport peuvent représenter des tonnages disponibles sur des bateaux, des camions, des wagons, ou encore des débits dans des oléoducs, canalisations, voies de transmissions, etc ...

Soit S un ensemble de sommets contenant s et ne contenant pas p : on dit que S **sépare s de p**. On note $\bar{S}$ le complémentaire de S dans X, et $(S, \bar{S})$ l'ensemble des arcs dont l'origine est dans S et l'extrémité dans $\bar{S}$. L'ensemble $(S, \bar{S})$ s'appelle une **coupe** séparant la source du puits.

On appelle **flot** dans le réseau une application f de U dans R qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- pour tout arc u, $0 \leq f(u) \leq c(u)$,
- pour tout sommet x autre que p et s, il y a **conservation du flot** en x, ce qui signifie que le flot total **entrant** en x (somme des valeurs de $f(u)$ pour tous les arcs u d'extrémité finale x) est égal au flot total **sortant** de x (somme des valeurs

de $f(u)$ pour tous les arcs u d'origine x). On a la même propriété pour les courants, dans un circuit électrique : c'est la loi de Kirschhoff.



On appelle **flux** d'un arc u la quantité $f(u)$ qu'il porte.

On définit la **valeur du flot** f, que l'on note $val(f)$, par l'une des trois expressions suivantes (leur égalité est une conséquence élémentaire de la conservation) :

- flot total quittant s moins **flot total entrant en** s (valeur à la source)

  souvent nuls

- flot total entrant en p moins **flot total quittant** p (valeur au puits)
- somme des flux sur les arcs de $(S, \bar{S})$ (c'est-à-dire ayant leur origine dans S et leur extrémité dans $\bar{S}$), que l'on notera $f(S, \bar{S})$, diminuée de la somme des flux sur les arcs de $(\bar{S}, S)$, que l'on notera $f(\bar{S}, S)$.

Par ailleurs, on définit la **capacité d'une coupe** $(S, \bar{S})$ séparant la source du puits par :

$$c(S, \bar{S}) = \sum_{u \in (S, \bar{S})} c(u) .$$

Résultats théoriques :

On admettra les résultats suivants :

1 Si f est un flot et $(S, \bar{S})$ une coupe séparant la source du puits, la quantité $f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$ est une constante, indépendante du choix de S, et définit donc sans ambiguïté la valeur du flot.

2 Soit f un flot dans un réseau et $(S, \bar{S})$ une coupe séparant s de p :

1°) $val(f) \leq c(S, \bar{S})$.

2°) Si $val(f) = c(S, \bar{S})$, alors f est de valeur maximum et $(S, \bar{S})$ de capacité minimum.

3°) $val(f) = c(S, \bar{S})$ si et seulement si :

- pour tout arc de $(S, \bar{S})$, $f(u) = c(u)$
- pour tout arc de $(\bar{S}, S)$, $f(u) = 0$.

3	Réciproquement, si f est de valeur maximum et $(S, \bar{S})$ de capacité minimum, alors $val(f) = c(S, \bar{S})$.
4	Conséquence : **Théorème de la coupe et du flot.** La valeur maximum d'un flot est égale à la valeur minimum d'une coupe.

Détermination d'un flot maximum, algorithme de Ford et Fulkerson

L'algorithme de Ford et Fulkerson repose sur le principe suivant : partant d'un flot dans le réseau (par exemple le flot nul), on cherche s'il existe une **chaîne augmentante** (voir définition ci-dessous) pour ce flot de s à p ; s'il n'en existe pas, le flot est maximum. S'il en existe une, on augmente le flot le long des arcs de cette chaîne, et on recommence avec le nouveau flot obtenu. Ce principe est clarifié par les explications qui suivent.

Chaîne augmentante

Supposons établi un flot f dans le réseau. On considère alors une **"chaîne"** dans le réseau, d'extrémités s et p. Par chaîne, on entend une chaîne du sous-graphe non orienté sous-jacent (obtenu en supprimant toutes les flèches du graphe). Si on veut augmenter la valeur du flot dans le réseau en modifiant $f(u)$ pour les arcs u de cette chaîne, sans modifier le flux des arcs ne faisant pas partie de la chaîne, il est facile de voir que l'on doit (pour assurer la conservation du flot) augmenter, d'une quantité constante α, $f(u)$ pour les arcs u de cette chaîne dits **à l'endroit**, c'est-à-dire ceux que l'on rencontre à l'endroit lorsqu'on parcourt la chaîne de s vers p, et diminuer, de cette même quantité α, $f(u)$ pour les arcs u **à l'envers**.

On ne peut donc augmenter le flot en utilisant la chaîne comme précisé ci-dessus que si l'on a $c(u) - f(u) \geq \alpha$ pour les arcs à l'endroit et $f(u) \geq \alpha$ pour les arcs à l'envers. S'il existe un $\alpha > 0$ vérifiant toutes ces contraintes, la chaîne est dite augmentante pour le flot f de s à p. On prendra alors :

$$\alpha = \min \left\{ \min_{u \text{ à l'endroit}} c(u) - f(u), \min_{u \text{ à l'envers}} f(u) \right\}.$$

Ayant ainsi déterminé une chaîne augmentante pour le flot et la valeur de α correspondante, on augmente $f(u)$ de α pour les arcs à l'endroit de la chaîne et on le diminue de α pour les arcs à l'envers : la valeur du flot est augmentée de α.

On admet le résultat suivant :

Soit f un flot dans un réseau. f est un flot de valeur maximum si et seulement si il n'existe pas de chaîne augmentante de s à p.

Algorithme de Ford-Fulkerson

Il peut se décomposer comme suit :

a) Faire passer un flot au jugé ;

b) Améliorer ce flot jusqu'à ce que tout chemin de l'entrée à la sortie comporte au moins un arc saturé (c'est-à-dire transportant exactement sa capacité) ; on dit alors qu'on a un "flot complet" ;

c) 1°) Marquer l'entrée du réseau (par exemple, au moyen d'un +) ;

2°) Marquer toute extrémité terminale J d'un arc non saturé (I, J), dont l'extrémité initiale I est marquée (par exemple, en écrivant + I, à côté de J) ;

3°) Marquer l'extrémité initiale K de tout arc (K, L) transportant un flot non nul, dont l'extrémité L est marquée (par exemple, en écrivant - L, à côté de K) ;

Si l'on n'arrive pas ainsi à marquer la sortie du réseau, c'est que le flot est maximal ;

d) Si l'on arrive, au contraire, à marquer la sortie du réseau, le flot n'est pas maximal ; dans ces conditions, considérer une suite de sommets marqués, constituant une chaîne augmentante, entre l'entrée et la sortie du réseau et améliorer le flot en augmentant ou diminuant (selon leur sens de parcours) d'une quantité α le flux des arcs joignant les sommets de la suite (α est choisi comme expliqué plus haut, de manière à respecter la loi de Kirschhoff) ;

e) Reprendre autant de fois qu'il sera nécessaire les opérations c et d, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus marquer la sortie du réseau.

* * * * * * * * * *

CHAPITRE III

Problèmes d'affectation

Un exemple et quelques définitions

Une agence matrimoniale a pour clients un ensemble H d'hommes et un ensemble F de femmes. Après présentation des dossiers des hommes aux femmes et réciproquement, il est apparu que certains mariages étaient tout à fait "envisageables" et les autres non. L'agence souhaite réaliser le maximum de mariages.

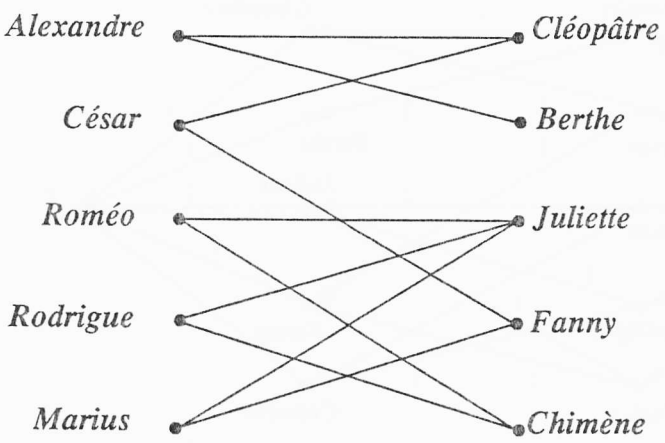
Formuler en termes de graphes le problème de la maximisation du nombre de mariages monogames envisageables (hétérosexuels), puis donner un algorithme de résolution.

Résoudre le problème avec les données suivantes, les mariages envisageables étant notés par ***.

	Cléopâtre	*Berthe*	*Juliette*	*Fanny*	*Chimène*
Alexandre	***	***			
César	***			***	
Roméo			***		***
Rodrigue			***		***
Marius			***	***	

Solution

Construisons un graphe dont les sommets représentent les hommes et les femmes, une arête lie deux sommets représentant les individus a et b si et seulement si un mariage est envisageable entre a et b.

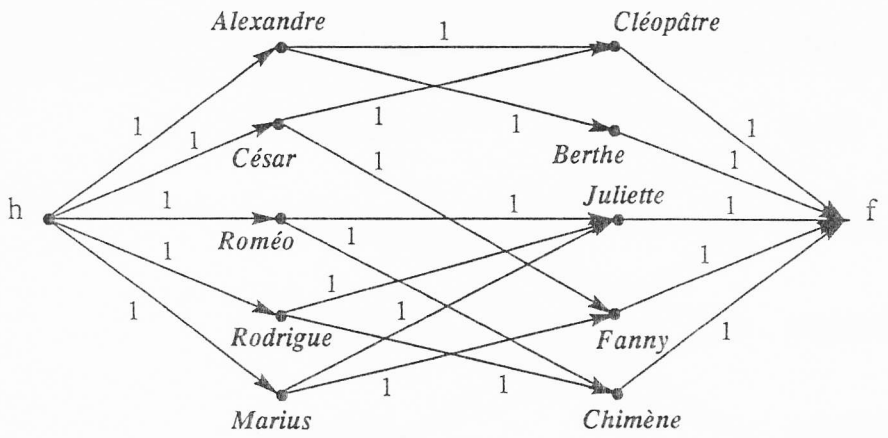


Les mariages étant hétérosexuels, aucune arête ne lie deux éléments de H ou de F. Le graphe est dit dans ce cas *biparti*, parce qu'il existe une bipartition des sommets en deux classes, sans arête entre deux sommets de la même classe. Chercher un ensemble de mariages envisageables le plus grand possible, revient à chercher parmi les arêtes de ce graphe un **couplage de cardinal maximum**. En effet, on appelle *couplage* un ensemble d'arêtes tel que deux de ces arêtes n'aient pas d'extrémité commune. Cette condition traduit le fait que les mariages correspondant à ces arêtes doivent être monogames.

Modélisation, sous forme de problème de flot maximal, d'un problème d'affectation, et solution du problème des mariages

En fait le problème ci-dessus est un exemple de **problème d'affectation**, qu'il s'agisse d'affecter des tâches à des ouvriers, ou des hommes à des femmes, lequel, sous certaines contraintes (ici monogamie) se traduit par la recherche d'un **couplage maximum dans un graphe biparti**.

Pour résoudre ce problème, nous allons nous ramener à la recherche d'un flot maximal dans un réseau que nous définissons ci-après, dans le cas de l'agence matrimoniale (ceci ayant valeur d'exemple généralisable aisément). On ajoute deux sommets, h et f, au graphe précédent, h étant relié à l'ensemble des sommets de H et f à l'ensemble des sommets de F. On oriente en arcs les arêtes de h vers H, de H vers F puis de F vers f. Enfin, on donne 1 comme capacité à tous les arcs entre h et H, comme entre F et f, et une valeur entière au moins égale à 1 aux arcs de H vers F. On obtient le réseau représenté ci-après :



La recherche par l'algorithme de Ford et Fulkerson d'un flot de valeur k dans ce réseau, à partir du flot nul, résultera en un flot dont les valeurs sur les arcs ne peuvent être que 0 ou 1. Il est facile de se convaincre que les arcs entre H et F, portant le flot 1, constitueront un couplage de cardinal k, grâce au choix des capacités et à l'hypothèse de conservation des flots. Réciproquement, à un couplage de cardinalité k, on peut associer un flot dans le réseau de valeur k, en faisant circuler le flot 1 sur les arcs de h vers H incidents aux arcs du couplage, ainsi que sur ceux du couplage, et aussi sur ceux qui vont de F à f et sont incidents aux arcs du couplage ; on donne bien entendu la valeur 0 au flot sur les autres arcs du réseau. Ainsi **un couplage de cardinalité maximum est associé à un flot de valeur maximum**.

On peut alors résoudre le problème de la maximisation du nombre de mariages (c'est-à-dire la détermination d'un flot maximal dans le graphe que l'on vient de définir) à l'aide de l'algorithme de Ford-Fulkerson. Les chaînes augmentantes de h à f sont résumées par le tableau suivant :

itération	A	Cés	Rom	Rod	M	Cléo	B	J	Fa	Chi	f
1	+ h					+ A					+ Cléo
2		+ h							+ Cés		+Fa
3			+ h					+ Rom			+ J
4				+ h						+ Rod	+ Chi
5	- Cléo	- Fa	- J		+ h	+ Cés	+ A		+ M		+ B

Chaînes augmentantes et flot trouvé pour chaque itération :

- itération 1 : h — A — Cléo — f, flot = 1
- itération 2 : h — Cés — Fa — f, flot = 1 + 1 = 2
- itération 3 : h — Rom — J — f, flot = 2 + 1 = 3
- itération 4 : h — Rod — Chi — f, flot = 3 + 1 = 4
- itération 5 : h — M — Fa — Cés — Cléo — A — B — f, flot = 4 + 1 = 5

Tout le monde peut donc se marier : ***Marius*** et ***Fanny***, ***César*** et ***Cléopâtre***, ***Alexandre*** et ***Berthe***, ***Roméo*** et ***Juliette***, ***Rodrigue*** et ***Chimène*** ! ....

* * * * * * * * *

CHAPITRE IV

Problèmes de transport optimal

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à des problèmes pratiques très répandus (peut-être les plus courants de toute la recherche opérationnelle).

Entre m origines et n destinations, constituant les sommets d'un graphe biparti, on peut tracer $m \times n$ arcs qui symbolisent les chemins (au sens vulgaire) qu'on peut employer pour transporter des marchandises de chaque origine vers chaque destination.

Dans le **problème de transport**, les capacités des arcs sont supposées illimitées, mais chaque arc est valué par le coût unitaire du transport sur la relation (ou liaison) qu'il représente et ce qu'on cherche est une solution à **coût minimal**.

Pratiquement, on se ramène toujours au cas pour lequel le total général des quantités disponibles aux origines correspond au total général des demandes aux différentes destinations. S'il n'en était pas ainsi, il suffirait de créer soit une destination fictive (cas de l'excès des disponibilités), soit une origine fictive (cas de l'excès des demandes), en affectant à ce sommet fictif la différence entre les deux totaux généraux et en valuant les relations nouvelles par un coût extrêmement élevé, de manière à ne pas troubler le processus de minimisation du coût de transport des quantités effectivement transportées.

A titre d'exemple, nous examinerons le problème suivant : assurer, au moindre coût, les transports des quantités demandées aux dépôts numérotés de 1 à 6, à partir des usines de I à IV, connaissant les disponibilités de ces usines et les coûts de transport unitaires de toute origine à toute destination.

Matrice des coûts unitaires

	1	2	3	4	5	6	Quantités disponibles (a_i)
I	12	27	61	49	83	35	18
II	23	39	78	28	65	42	32
III	67	56	92	24	53	54	14
IV	71	43	91	67	40	49	9
Quantités demandées (b_j)	9	11	28	6	14	5	73

nombre d'origines : m = 4

nombre de destinations : n = 6

On observe que la somme des demandes est égale à la somme des disponibilités.

Soient a_i les quantités disponibles, b_j les quantités demandées, c_{ij} les coûts de transport ; la solution du problème est constituée par l'ensemble des nombres non négatifs x_{ij}, tels que :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

et que la fonction économique :

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (3)$$

soit minimale.

Considérations préliminaires

Pour résoudre un tel problème, il convient tout d'abord d'obtenir une solution conforme aux relations (1) et (2) sans se préoccuper de la fonctionnelle (3). Pour qu'une telle solution soit utilisable pour la suite de l'algorithme, il convient qu'elle ne soit pas dégénérée, c'est-à-dire qu'elle comporte exactement :

$$n \cdot m - (n + m - 1)$$

variables nulles.

En effet, il y a $n \cdot m$ inconnues, liées par $n + m$ relations ; mais ces $n + m$ relations ne sont pas indépendantes, puisque la somme des seconds membres des m premières est la même que la somme des seconds membres des n autres ; il doit donc y avoir, dans une solution, au moins $n \cdot m - (n + m - 1)$ variables nulles.

Nous verrons qu'une telle solution, dénommée "solution de base", entraîne une structure d'arbre, qui sera exploitée plus loin.

La résolution pratique d'un problème de transport optimal comporte deux phases :

- 1ère phase : obtention d'une solution de base initiale ;
- 2ème phase : amélioration de la solution de base jusqu'à l'optimum.

Première phase : obtention d'une solution de base initiale ; méthode de BALAS-HAMMER

Il est bien évident que si la solution de base initiale du problème a été construite en tenant compte des faits économiques, c'est-à-dire en essayant d'obtenir un coût total peu élevé, la procédure d'optimisation ultérieure risque d'être considérablement abrégée.

Les praticiens ont proposé un très grand nombre d'heuristiques pour parvenir à "améliorer" la première solution de base.

Une procédure généralement très efficace est celle de la **différence maximale** (ou méthode de Balas-Hammer) ; si elle est un peu difficile à programmer, du moins favorise-t-elle l'obtention d'un coût total assez proche de l'optimum.

Elle consiste à calculer pour chaque rangée (ligne ou colonne), la différence entre le coût le plus petit et le coût immédiatement supérieur. Puis à affecter, à la relation de coût le plus petit correspondant à la rangée présentant la différence maximale, la quantité la plus élevée possible, ce qui a pour effet de "saturer" une ligne ou une colonne. Ensuite, de reprendre le processus jusqu'à ce que toutes les rangées soient saturées. Comme on sature à chaque fois une ligne ou une colonne, sauf au dernier pas, où deux rangées sont saturées à la fois, on utilise bien $n + m - 1$ relations, dans le cas général, et l'on obtient une solution de base.

Donnons les pas successifs pour la matrice proposée plus haut :

1er pas

	1	2	3	4	5	6		Δ_ℓ
I	12	27	61	49	83	35	18	15
II	23	39	78	28	65	42	32	5
III	67	56	92	24	53	54	14	29
IV	71	43	91	67	40	49	9	3
	9	11	28	6	14	5	73	
Δ_c	11	12	17	4	13	7		

La différence maximale $53 - 24 = 29$ est relative à la ligne III. A la relation (III, 4), correspondant au coût le plus petit de la ligne III, on affecte la quantité 6, ce qui sature la colonne 4.

2ème pas

	1	2	3	5	6		Δ_ℓ
I	12	27	61	83	35	18	15
II	23	39	78	65	42	32	16
III	67	56	92	53	54	8	1
IV	71	43	91	40	49	9	3
	9	11	28	14	5	67	
Δ_c	11	12	17	13	7		

Sur la matrice réduite, la différence maximale est 17, ce qui amène à affecter la quantité 18 à la relation (I, 3), saturant ainsi la ligne I.

3ème pas

	1	2	3	5	6		Δ_ℓ
II	23	39	78	65	42	32	16
III	67	56	92	53	54	8	1
IV	71	43	91	40	49	9	3
	9	11	10	14	5	49	
Δ_c	44	4	13	13	7		

Le tableau restant fait apparaître la différence maximale 44, correspondant à la relation (II, 1). On y affectera la quantité 9, ce qui sature la colonne 1.

4ème pas

	2	3	5	6		Δ_ℓ
II	39	(78)	65	42	23	3
III	56	92	53	54	8	1
IV	43	91	(40)	49	9	3
	11	10	14	5	40	
Δ_c	4	13	13	7		

Au quatrième pas, le tableau restant se présente comme il est indiqué ci-dessus. Deux colonnes fournissent la même différence maximale ; les relations (II, 3) et (IV, 5) leur correspondent, avec des affectations possibles de 10 et 9 respectivement.

Trois solutions sont ici acceptables, que nous ne discuterons pas plus à fond :

1°) affecter 10 à la relation (II, 3) ;

2°) affecter 9 à la relation (IV, 5) ;

3°) faire les deux affectations en même temps.

Tout à fait arbitrairement, décidons d'affecter 9 à la relation (IV, 5), ce qui sature la ligne IV.

5ème pas

	2	3	5	6		Δ_ℓ
II	39	78	65	42	23	3
III	56	92	53	54	8	1
	11	10	5	5	31	
Δ_c	(17)	14	12	12		

On affecte 11 en (II, 2), ce qui sature la colonne 2.

6ème pas

	3	5	6		Δ_ℓ
II	78	65	42	12	(23)
III	92	53	54	8	1
	10	5	5	20	
Δ_c	14	12	12		

On affecte 5 en (II, 6), ce qui sature la colonne 6.

7ème pas

	3	5		Δ_ℓ
II	78	65	7	23
III	92	53	8	39
	10	5	15	
Δ_c	14	12		

On affecte 5 en (III, 5), ce qui sature la colonne 5.

8ème pas

	3	
II	78	7
III	92	3
	10	10

On affecte à la fois 7 en (II, 3), et 3 en (III, 3), pour terminer.

Le plan de transport qui en résulte est le suivant :

	1	2	3	4	5	6	
I			18				18
II	9	11	7			5	32
III			3	6	5		14
IV					9		9
	9	11	28	6	14	5	

On vérifie que les sommes par ligne et par colonne respectent bien les conditions (1) et (2).

En outre, le nombre des relations inutilisées (variables x_{ij} nulles, correspondant aux cases vides) est de 15 ; il est précisément égal à :

$$n\ m - (n + m - 1) = 6 \times 4 - (6 + 4 - 1) = 24 - 9 = 15,$$

la solution obtenue n'est donc pas dégénérée.

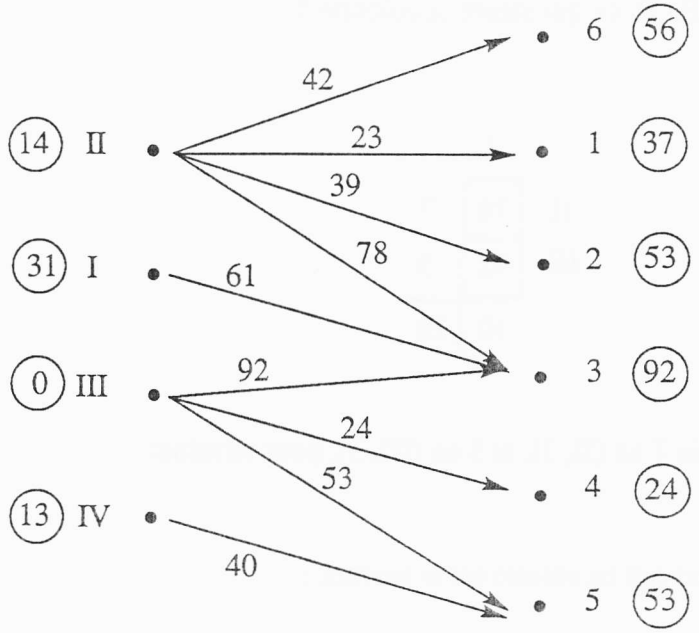
On a bien affaire à une solution de base.

On peut calculer la valeur de la fonction économique pour les affectations obtenues ; on trouve :

$$z = 61 \times 18 + 23 \times 9 + 39 \times 11 + 78 \times 7 + 42 \times 5$$
$$+ 92 \times 3 + 24 \times 6 + 53 \times 5 + 49 \times 9 = 3535.$$

Deuxième phase : amélioration de la solution de base jusqu'à l'optimum

On dessine le graphe représentatif de la solution de base :



Il possède une structure d'arbre, que nous allons exploiter pour améliorer la solution.

Un arbre constitue un graphe topologique sur lequel on peut définir, connaissant le potentiel d'un point et les différences de potentiel entre les sommets adjacents, une structure **unique** de potentiels. La propriété est triviale et résulte d'ailleurs du fait que, dans un arbre, il existe une chaîne et une seule entre deux sommets quelconques.

Considérons alors le réseau électrique formé par l'arbre de la figure ci-dessus ; entre les sommets, et dans le sens des flèches, indiquons des différences de potentiel égales aux coûts unitaires de transport sur les relations correspondantes.

De plus, fixons à 0 le potentiel du sommet III, qui est l'origine de l'arc muni du coût le plus grand. On peut ainsi, de proche en proche, calculer le potentiel de tous les autres sommets.

Les potentiels obtenus sont repérés par des cercles sur le dessin.

Pour reconnaître si la solution de base initiale est optimale, nous admettrons qu'il suffit de calculer les "**coûts marginaux**" relatifs aux relations (X, Y) **inutilisées**, selon la formule :

$$\delta_{(X,Y)} = V_x + V_{(X,Y)} - V_Y,$$

où : V_X et V_Y sont les potentiels des sommets X et Y

$V_{(X,Y)}$ est le coût unitaire de transport sur la relation (X, Y).

Par exemple :

$$\delta_{(I,1)} = 31 + 12 - 37 = 6$$
$$\delta_{(I,2)} = 31 + 27 - 53 = 5$$
$$\delta_{(II,4)} = 14 + 28 - 24 = 18$$

etc ...

Le lecteur s'exercera à calculer de cette façon tous les coûts marginaux. Il en trouvera un seul négatif, c'est-à-dire économiquement intéressant ; c'est :

$$\delta_{(III,6)} = 0 + 54 - 56 = -2$$

Il faut ensuite, pour tous les coûts marginaux négatifs, rechercher la "chaîne de substitution" permettant de réaliser le transport auquel il correspond.

Dans le cas présent, posons un signe + dans la case (III, 6) ; il nous faut un signe - en (II, 6), un signe + en (II, 3) et, enfin, un signe - en (III, 3). On contrôle d'ailleurs que $54 - 42 + 78 - 92 = -2$. La chaîne de substitution est ainsi : $III \rightarrow 6 \leftarrow II \rightarrow 3 \leftarrow III$.

Cherchons maintenant la quantité maximale déplaçable : les signes -, dans les cases (II, 6) et (III, 3), permettent de constater que, si l'on peut diminuer de 5 la quantité inscrite en (II, 6), en revanche on ne peut diminuer que de 3 celle portée en (III, 3). Finalement, il est seulement possible de déplacer trois unités. Le résultat de cette substitution sera $3 \times (-2) = -6$, c'est-à-dire un gain total de 6.

Remarque importante :

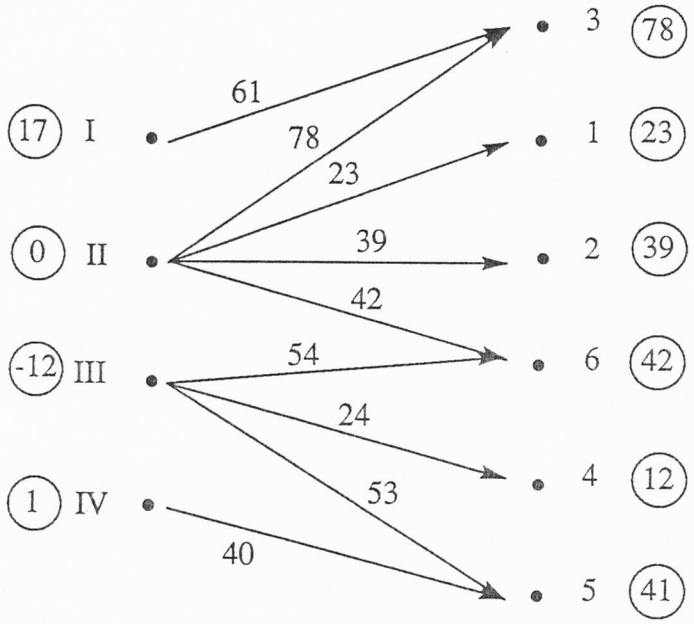
S'il y avait plusieurs $\delta_{(X,Y)}$ négatifs, on calculerait le gain relatif à chacune des substitutions possibles et l'on choisirait de réaliser celle qui apporte le gain total le plus grand.

Parfois, plusieurs substitutions sont possibles simultanément et rien n'empêche de les réaliser ensemble ; il suffit qu'elles se traduisent par des chaînes de substitution indépendantes.

Exploitons la chaîne de substitution indiquée plus haut. Nous obtenons un nouveau plan de transport, vérifiant toujours les équations (1) et (2) et réalisant une solution de base :

	1	2	3	4	5	6	
I			18				18
II	9	11	10			2	32
III				6	5	3	14
IV					9		9
	9	11	28	6	14	5	

L'arbre représentatif de cette solution est le suivant :



Après avoir établi un système de potentiels, calculons les coûts marginaux :

$$\delta_{(I,1)} = 17 + 12 - 23 = 6 \;;$$
$$\delta_{(I,2)} = 17 + 27 - 39 = 5 \;;$$
etc ...

Ils sont tous positifs et l'on a donc atteint l'optimum. Le coût de transport total est alors de 3529. En effet : 3529 = coût de la solution antérieure - gain fourni par la substitution = 3535 - 6.

L'optimum est unique du fait que tous les coûts marginaux sont strictement positifs. Si certains étaient nuls, on ferait apparaître d'autres solutions équivalentes (grâce à des substitutions de gain nul).

* * * * * * * * *

CHAPITRE V

Problèmes de chemins optimaux

Les problèmes de chemins de valeur minimale (ou maximale) se rencontrent très fréquemment en recherche opérationnelle. Nous considérerons ici des graphes finis, connexes, dont les arcs sont (sauf indication contraire) de valeur positive.

Dans ces conditions, nous devrons prendre garde que l'existence d'un circuit entraîne la valeur $+\infty$ pour les chemins de valeur maximale.

Remarque :

Un inconvénient analogue se produirait pour la recherche des chemins de valeur minimale, dans l'hypothèse où certaines valuations seraient négatives et où il existerait un circuit de valeur négative.

Exemple (chemins de valeur minimale)

Soit, par exemple, un croquis géographique, représentant les routes qui existent entre deux points A et F : les valeurs indiquées sur chaque route sont des distances kilométriques ; de plus, comme il s'agit d'un pays de montagne à routes étroites, la circulation y a lieu à sens unique : d'où les flèches portées sur le dessin (figure 1). Il existe évidemment un grand nombre de chemins conduisant de A en F, mais on voudrait trouver celui de longueur minimale.

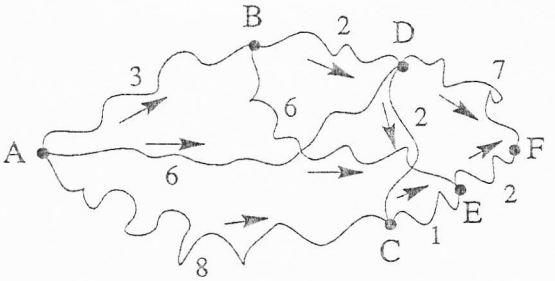


Figure 1

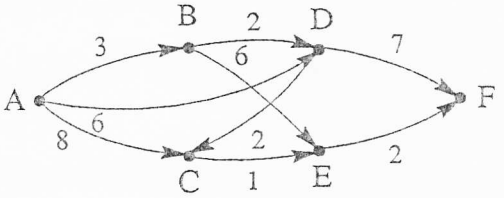


Figure 2

Employons, à cet effet, un graphe valué, dont les sommets représentent les points de passage possibles et les flèches les routes praticables (figure 2).

Nous allons examiner, pour chaque point, la longueur du plus court chemin y conduisant à partir de A.

Pour B, c'est la route AB = 3 ; pour D, la route (A, B, D) = 3 + 2 = 5 (et non l'arc (A, D)) ; pour C, la route (A, B, D, C) = 3 + 2 + 2 = 7 (et non l'arc (A, C)) ; pour E, la route (A, B, D, C, E) = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 (et non (A, B, E), ou (A, C, E) ou (A, D, C, E)). Il en résulte que, pour aller de A en F par le plus court chemin, il faut passer par B, D, C et E. On a un chemin de valeur minimale 10.

Algorithme de Ford

Pour un graphe comportant de nombreux sommets, une procédure aussi peu assurée risquerait de conduire à de longs calculs et sans doute à des oublis. Il est d'autre part évident, par exemple, que lorsque les plus courtes distances de A aux points B, C et D ont été calculées, il est inutile, pour avoir la plus courte distance entre A et E, de remonter au-delà des points qui sont directement liés par une flèche à E.

Ford a donné, parmi les nombreux algorithmes qui peuvent être employés pour faire ce calcul d'une manière systématique, une méthode extrêmement simple et qui consiste à :

1°) numéroter les sommets du graphe dans un ordre quelconque, en observant toutefois que le sommet de départ doit être marqué X_0 et celui d'arrivée X_{n-1}, si n est le nombre total de sommets du graphe ;

2°) affecter provisoirement à tout sommet X_i $(i \neq 0)$ une valeur : $\lambda_i = +\infty$ et poser : $\lambda_0 = 0$;

3°) pour tout sommet X_j, tel que $\lambda_j - \lambda_i > v(X_i, X_j)$, $v(X_i, X_j)$ représentant la valuation de l'arc (X_i, X_j), remplacer λ_j par $\lambda_i + v(X_i, X_j)$;

4°) continuer ainsi jusqu'à ce qu'aucun λ_i ne puisse plus être modifié.

En posant i = 0 et j = 1, puis en majorant, pas à pas, j d'une unité à chaque fois, jusqu'à j = 5, on est sûr d'examiner tous les arcs partant de X_0 ; en remettant j à 0 et en majorant

ensuite i de 1, c'est-à-dire en posant i = 1, on se prépare à examiner tous les arcs partant de X_1, grâce à de nouvelles majorations successives de j ; etc ... Lorsqu'on aura fait $i = 5$, on aura terminé.

Toutefois, si, à un moment donné, on a $i > j$, c'est-à-dire s'il existe un arc dont l'indice de l'extrémité terminale est inférieur à celui de l'extrémité initiale, il faut recommencer une partie des opérations, en posant $i = j$, puis en faisant $j = 0$.

Exemple

Le lecteur n'aura aucune peine à obtenir, après avoir seulement examiné les arcs partant de X_0, X_1 et X_2 : $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 5$ et $\lambda_4 = 9$. Passant alors à X_3, il aura $\lambda_2 - \lambda_3 = 8 - 5 > 2$ et remplacera donc $\lambda_2 = 8$ par $\lambda_2 = 5 + 2 = 7$. S'il continuait à ce moment sans précaution, il aurait $\lambda_5 = 12$, par (X_3, X_5) puis, passant à X_4, $\lambda_5 = 11$ et il remplacerait $\lambda_5 = 12$ par $\lambda_5 = 11$; il y aurait donc erreur (nous savons que le chemin de valeur minimale entre A et F est de valeur 10). C'est que, comme il est indiqué ci-dessus, du fait qu'un arc (X_3, X_2) existe $(3 > 2)$, il faut revenir en arrière, et examiner de nouveau les chemins qui partent de X_2, d'où remplacement de $\lambda_4 = 9$ par $\lambda_4 = 7 + 1 = 8$. Au pas suivant, on obtient alors correctement $\lambda_5 = 10$.

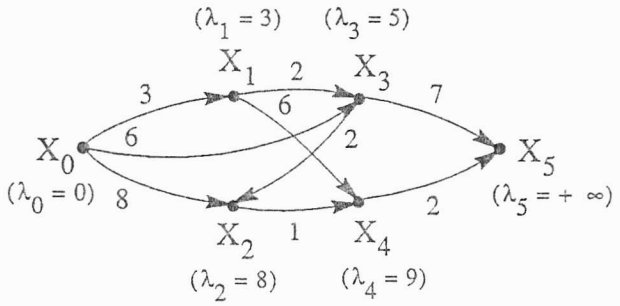


Figure 3
Premiers calculs

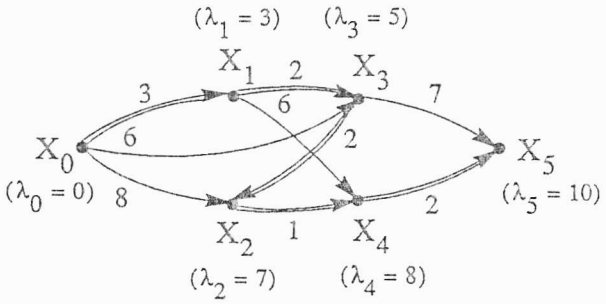


Figure 4
Calcul achevé

Sur la figure 4, le chemin de valeur minimale entre X_0 et X_5 est représenté par un trait double.

Méthode matricielle

Elle permet d'obtenir les chemins de valeur minimale **entre toute paire de sommets** du graphe.

Sa présentation détaillée est donnée pour un exemple dans le fascicule "Corrigés des Exercices de Recherche Opérationnelle".

Remarque

La méthode de Ford et la méthode matricielle permettent aussi de déterminer les chemins de valeur **maximale** dans un graphe, moyennant des modifications simples, précisées dans le fascicule précité.

* * * * * * * * *

CHAPITRE VI

Problèmes d'ordonnancement de projet

Il s'agit d'une application directe des méthodes de recherche des chemins optimaux dans un graphe. Nous verrons, plus précisément, qu'on détermine le chemin de valeur maximale.

On dit qu'on a affaire à un problème d'ordonnancement lorsque, en vue de la réalisation d'un **objectif** quelconque, il faut accomplir de multiples **tâches**, elles-mêmes soumises à un ensemble de **contraintes**.

Les contraintes auxquelles sont soumises les diverses tâches qui concourent à la réalisation de l'objectif sont de divers types. On distingue :

a) **les contraintes du type potentiel**, qui sont les contraintes de **localisation temporelle** (la tâche i ne doit pas commencer avant telle date ou, au contraire, doit être achevée à telle date), les contraintes de **succession** (la tâche j ne peut commencer avant que la tâche i ne soit terminée, ou simplement, parvenue à un certain degré d'achèvement) ;

b) **les contraintes du type disjonctif**, imposant la disjonction de deux intervalles de temps, relatifs, par exemple, à l'exécution de deux tâches i et j, qui ne peuvent être réalisées simultanément ; dans certains cas, les contraintes disjonctives peuvent être ramenées au type potentiel ;

c) **les contraintes du type cumulatif**, concernant l'évolution dans le temps du volume total des moyens humains et matériels consacrés à l'exécution des tâches. Il est très difficile de tenir compte de telles contraintes.

Quand le processus de réalisation d'un objectif est décomposable en tâches, ces tâches étant soumises à des contraintes diverses, il importe de déterminer un **ordre** d'exécution des tâches, compatible avec les contraintes. Trouver un tel ordre, c'est obtenir une solution du problème d'ordonnancement. Toutefois, parmi les diverses solutions, il en est de meilleures et de moins bonnes relativement à un critère donné.

Pour résoudre un problème d'ordonnancement simple, ne comportant que des contraintes du type potentiel, on dispose de deux méthodes, fondées sur la théorie des graphes :

- la méthode (française) potentiels-tâches, dite M.P.M.,
- la méthode (américaine) potentiels-évènements, dite P.E.R.T. ("Program Evaluation and Review Technique").

Ces méthodes permettent :

1°) d'établir un ordonnancement, dès l'instant qu'aucune contrainte n'est contradictoire avec une autre ;

2°) de déterminer le meilleur temps total nécessaire à la réalisation de l'objectif et

3°) les "tâches critiques", c'est-à-dire celles dont l'exécution ne peut être ni retardée ni ralentie, sans que la fin de l'ensemble des travaux ne soit décalée du temps correspondant.

Nous présenterons les deux méthodes sur un même exemple.

Exemple :

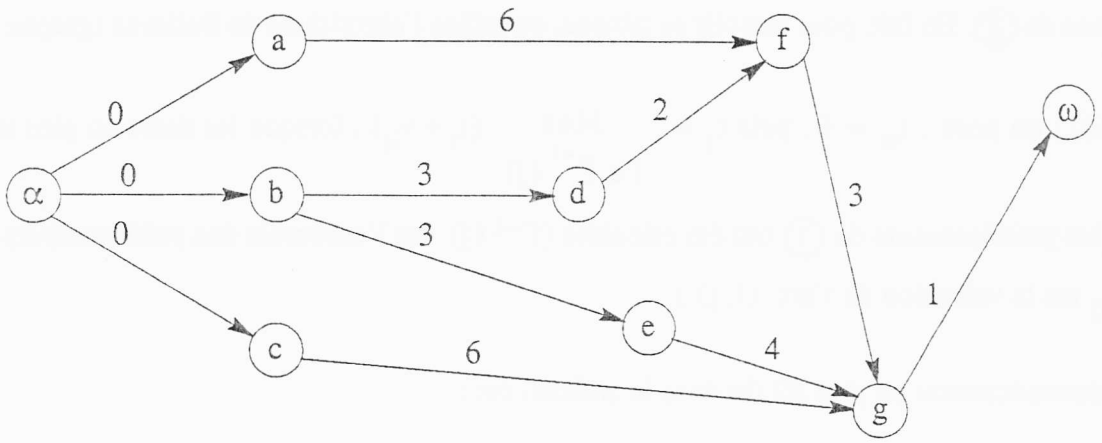
On doit exécuter sept tâches a, b, c, d, e, f, g soumises aux contraintes de succession rapportées dans le tableau ci-dessous :

Tâches	Durée	Contraintes
a	6	
b	3	
c	6	
d	2	b achevée
e	4	b achevée
f	3	d et a achevées
g	1	f, e, c achevées

Méthode potentiels - tâches

On associe au problème d'ordonnancement un graphe dont les sommets représentent les tâches et les arcs les contraintes. Chaque arc est valué par un nombre indiquant la durée minimale devant s'écouler entre le début de la tâche formant extrémité initiale et celui de la tâche formant extrémité terminale. En plus des tâches du problème, on considère deux tâches fictives, "début" et "fin", associées aux sommets α et ω.

Le graphe potentiels - tâches associé à l'exemple est le suivant :



Notons que le tracé de ce graphe n'est pas indispensable à la mise en oeuvre de la méthode, mais il en facilite la compréhension.

On remarque que le graphe ne comporte pas de circuit, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de contraintes contradictoires.

Ordonnancement au plus tôt :

Pour calculer les "dates de début au plus tôt" des différentes tâches, on dresse le tableau des prédécesseurs :

Tâches	α 0	a 0	b 0	c 0	d 3	e 3	f 6	g 9	ω 10
Prédécesseurs		0 : α : 0	0 : α : 0	0 : α : 0	0 : b : 3	0 : b : 3	3 : d : 2 0 : a : 6	6 : f : 3 3 : e : 4 0 : c : 6	9 : g : 1

Dans chacune des colonnes, on écrit les tâches qui doivent précéder celle qui est indiquée en tête de colonne ; on indique aussi la durée de ces tâches préalables. Quand une tâche n'est précédée par aucune autre, et si elle peut commencer dès le démarrage de l'ensemble, on écrit α et l'on indique alors 0, à côté de α.

Nous commentons la colonne de ce tableau correspondant à la tâche g : f e et c sont les prédécesseurs de g dans le graphe ; les arcs (f, g) , (e, g) et (c, g) sont valués par 3, 4 et 6 ; les dates au plus tôt de f e et c, calculées en cours d'algorithme, sont 6, 3 et 0 ; quand les dates au plus tôt de tous les prédécesseurs de g sont calculées, on calcule la date au

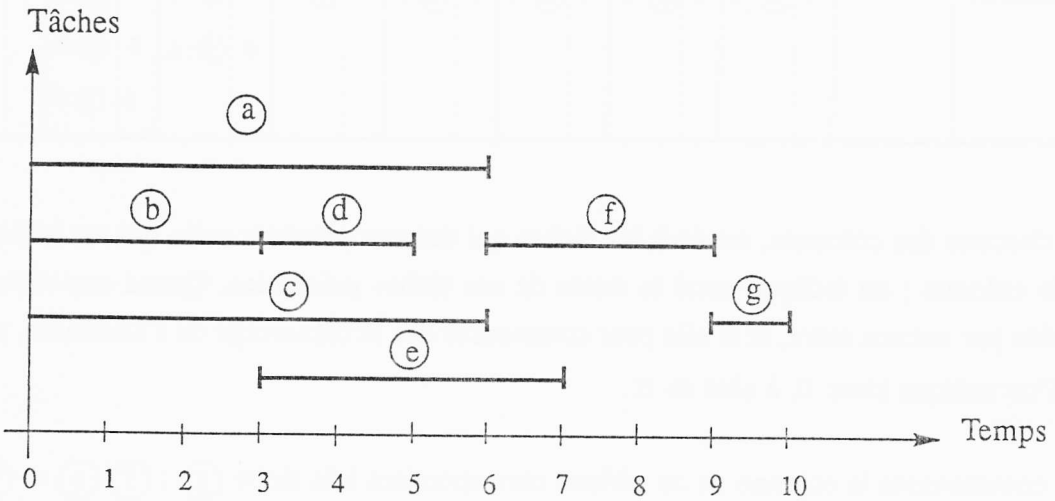
plus tôt de (g) par : $t_g = \text{Max}\ (6+3, 3+4, 0+6) = 9$ et on inscrit le résultat en tête de la colonne de (g). En fait, pour remplir ce tableau, on utilise l'algorithme de Bellman (graphe sans circuit) ; on pose : $t_\alpha = 0$, puis $t_j = \underset{i \in \Gamma^{-1}(j)}{\text{Max}} (t_i + v_{ij})$, lorsque les dates au plus tôt de tous les prédécesseurs de (j) ont été calculées ($\Gamma^{-1}(j)$ est l'ensemble des prédécesseurs de j et v_{ij} est la valuation de l'arc (i, j)).

L'ordonnancement au plus tôt (lu dans le tableau) est :

$$t_\alpha = t_a = t_b = t_c = 0,\ \ t_d = t_e = 3,\ \ t_f = 6,\ \ t_g = 9,\ \ t_\omega = 10.$$

La durée minimale de l'ordonnancement est la date au plus tôt de la tâche fin, c'est-à-dire $t_\omega = 10$. Pour déterminer le "chemin critique", on utilise le tableau des prédécesseurs en "remontant" : on cherche le ou les arcs tels que $t_\omega = t_i + v_{i\omega}$, etc ... Ici : $t_\omega = t_g + 1$, $t_g = t_f + 3$, $t_f = t_a + 6$, $t_a = t_\alpha + 0$; le chemin critique est donc : $[\alpha, a, f, g, \omega]$; il est unique (il n'en est pas toujours ainsi).

L'"ordonnancement au plus tôt" (on dit aussi "calé à gauche") est celui dans lequel toute tâche est commencée à sa date de début au plus tôt. Il est représenté classiquement à l'aide du **diagramme de GANTT** (ou "planning à barres") :



Ordonnancement au plus tard :

On peut aussi s'intéresser aux "dates de début au plus tard" des tâches (non critiques), lorsque la durée de l'ordonnancement est minimale. Ces dates sont calculées en formant le tableau des successeurs :

Tâches	α 0	a 0	b 1	c 3	d 4	e 5	f 6	g 9	ω 10
Successeurs	0 : a : 0 1 : b : 0 3 : c : 0	6 : f : 6	4 : d : 3 5 : e : 3	9 : g : 6	6 : f : 2	9 : g : 4	9 : g : 3	10 : ω : 1	

On fixe la date au plus tard de la tâche ω à 10, et on calcule, en "remontant", les dates au plus tard des tâches, en appliquant la formule :

$$t_i^* = \min_{\substack{\cancel{i} \in \Gamma(i) \\ j}} (t_j^* - v_{ij}) \quad \text{(où } \Gamma(i) \text{ est l'ensemble des successeurs de i).}$$

Cette méthode, dérivée de l'algorithme de Bellman, n'est applicable qu'aux graphes sans circuit.

L'ordonnancement au plus tard est ici :

$$t_\alpha^* = t_a^* = 0, \quad t_b^* = 1, \quad t_c^* = 3, \quad t_d^* = 4, \quad t_e^* = 5, \quad t_f^* = 6, \quad t_g^* = 9, \quad t_\omega^* = 10.$$

Marges totales, marges libres :

La **marge totale** M_i d'une tâche i est le délai dont on peut retarder cette tâche sans affecter la date d'achèvement du projet : $M_i = t_i^* - t_i$; M_i est donc la différence entre la date au plus tard et la date au plus tôt. Ici, on a :

$$M_a = M_f = M_g = 0, \quad M_d = M_b = 1, \quad M_c = 3, \quad M_e = 2.$$

Les tâches critiques sont les tâches ayant une marge totale nulle.

La **marge libre** m_i d'une tâche i est le délai dont on peut retarder cette tâche sans affecter les dates de début au plus tôt des tâches postérieures :

$$m_i = \underset{j \in \Gamma(i)}{\text{Min}} \; (t_j - t_i - v_{ij}) \; .$$

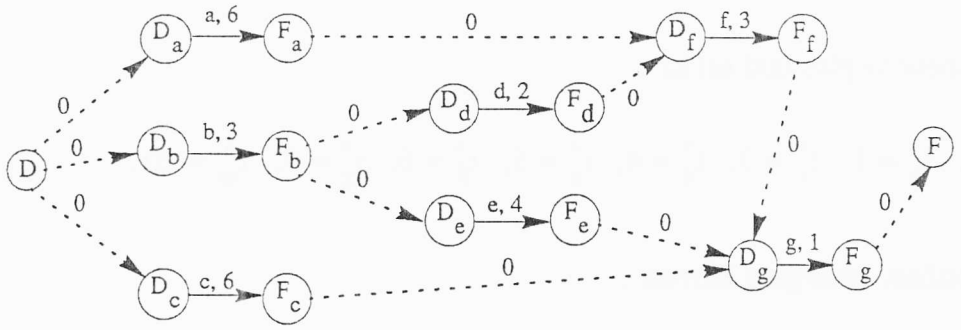
Ici, on a : $m_a = m_f = m_g = 0$, $m_d = 1$, $m_b = 0$, $m_e = 2$, $m_c = 3$.

Méthode P. E. R. T.

Pour utiliser cette méthode, on construit un graphe orienté, sans boucle, dont les sommets constituent les "**évènements**" (étapes de la réalisation ou, si l'on veut, objectifs intermédiaires) et les arcs représentent les tâches.

Les arcs sont valués par les délais d'exécution.

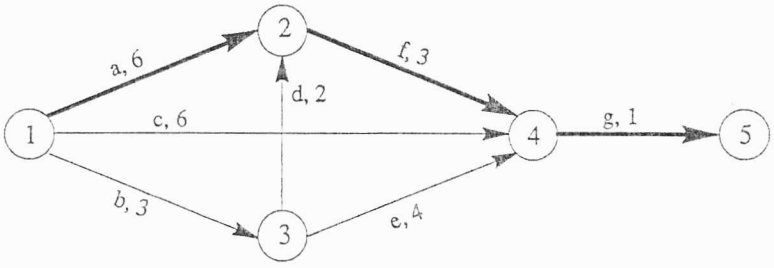
Pour l'exemple de problème d'ordonnancement précédent, on peut, **par exemple**, dessiner un graphe PERT en associant à chaque tâche i des évènements début et fin de tâche, soit D_i et F_i, et en introduisant des évènements début et fin de l'ordonnancement, soit D et F :



Ce choix des évènements n'est pas très astucieux, car il nécessite l'introduction de nombreuses "**tâches fictives**" (arcs en pointillés), qui expriment les contraintes d'antécédence : à chaque sommet symbolisant un début de tâche aboutissent des arcs fictifs issus des sommets associés aux fins de toutes ses tâches préalables ...

Un autre choix des évènements conduit au graphe PERT simplifié suivant, qui ne comporte pas

d'arc fictif :



Le **chemin critique** est obtenu en recherchant le chemin de **valeur maximale** dans le graphe : ici, le chemin critique (en gras) est (1, 2, 4, 5) ; les tâches critiques sont donc a , f et g .

Les dates au plus tôt **des évènements** de ce graphe sont :

$$t_1 = 0,\ t_2 = 6,\ t_3 = 3,\ t_4 = 9,\ t_5 = 10.$$

Les dates au plus tard **des évènements** sont :

$$t_1^* = 0,\ t_2^* = 6,\ t_3^* = 4,\ t_4^* = 9,\ t_5^* = 10.$$

Les **marges totale** M_{ij} **et libre** m_{ij} de la tâche (i, j) se calculent à l'aide des formules :

$$\boxed{M_{ij} = t_j^* - t_i - v_{ij}}$$

$$\boxed{m_{ij} = t_j - t_i - v_{ij}}$$

On retrouve les résultats obtenus avec la méthode M. P. M.

* * * * * * * * *

Cours de

Processus aléatoires

37

CHAPITRE VII

Chaînes de Markov

La retombée la plus usuelle de la "Recherche Opérationnelle contre le hasard" est la théorie des files d'attente, qui a des applications pratiques tout à fait remarquables : elle permet, par exemple, d'évaluer le temps moyen que l'on devra passer à "faire la queue" dans un bureau de poste, avant d'être servi ... Nous verrons qu'il existe un cheminement logique incontournable entre le présent chapitre, traitant des chaînes de Markov, et les deux suivants, qui concernent les processus de Markov et les files d'attente.

Le modèle de la chaîne de Markov permet de traduire l'évolution temporelle de certains "**processus stochastiques**" (i.e. régis par le hasard), supposés **sans mémoire**, dans un sens défini plus loin.

On considère un "système", susceptible de se trouver dans différents "états" ; à un instant quelconque, le système est dans un état et un seul.

On suppose connue la liste exhaustive des n états possibles, soit E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

L'état du système n'est observé qu'à des instants discrets équidistants : $t = k \cdot \tau$, où k est un nombre entier. La suite des états observés aux instants successifs $0, \tau, 2\tau, \ldots$ forme une chaîne.

Pour que cette chaîne soit une **chaîne de Markov**, il faut que les changements d'état respectent la propriété suivante, traduisant l'absence de mémoire :

> Si le système est dans l'état E_i à l'instant $k \cdot \tau$, il possède la probabilité $p_{ij}(k)$ d'être dans l'état E_j à l'instant d'observation suivant, $(k+1) \cdot \tau$.
>
> La probabilité $p_{ij}(k)$, qui est une **probabilité conditionnelle**, est indépendante du "parcours" du système avant l'instant $k \cdot \tau$: tout le passé du système se résume ainsi dans l'état présent.

On suppose que la fréquence $\left(\frac{1}{\tau}\right)$ des observations est suffisante pour qu'aucun changement d'état (on dit aussi "transition") ne puisse être occulté ; autrement dit, si le système est dans l'état E_i à l'instant $k \cdot \tau$, il n'y a que deux possibilités pour l'instant $(k+1) \cdot \tau$:

- le système est encore dans l'état E_i ;
- le système est passé dans l'un des autres états, mais il y a eu **un seul** changement d'état entre $k \cdot \tau$ et $(k+1) \cdot \tau$.

En outre, on suppose généralement que p_{ij} est constante, indépendante de k, c'est-à-dire du temps : la chaîne de Markov est dite alors **homogène**. Les probabilités de transition entre états sont consignées dans une matrice, soit M, dénommée **matrice de transition**. Par construction, M est une matrice carrée d'ordre n ; la somme des termes d'une ligne quelconque de M vaut 1.

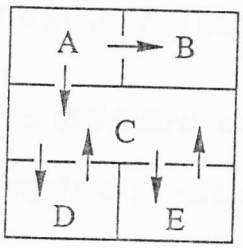
Graphe de transition

Les transitions entre états peuvent être représentées par un graphe, dénommé graphe de transition, obtenu comme suit :

- les sommets sont associés aux états ;
- les arcs sont associés aux transitions possibles entre deux instants successifs $k \cdot \tau$ et $(k+1) \cdot \tau$;
- les valuations sont les probabilités de transition correspondantes.

Exemple :

Un expérimentateur dispose d'une cage complexe (composée de cinq cases A, B, C, D et E) dans laquelle il enferme un animal afin d'étudier son comportement :



Il observe l'animal à des instants rapprochés $(0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots)$ entre lesquels le captif ne peut effectuer qu'une "transition" : aller vers une autre case ou décider de rester dans la case où il se trouve. Ainsi, entre deux instants voisins $m\tau$ et $(m+1)\tau$ $(m \in \mathbb{N})$: l'animal peut aller de A vers B avec la probabilité 0,5, de A vers C avec la probabilité 0,3, ou rester en A. De C, il peut aller en D avec la probabilité 0,4, ou vers E avec la probabilité 0,3, ou rester en C. De D, il peut aller vers C avec la probabilité 0,3, ou rester en D. Enfin de E, il peut aller vers C avec la probabilité 0,4, ou rester en E.

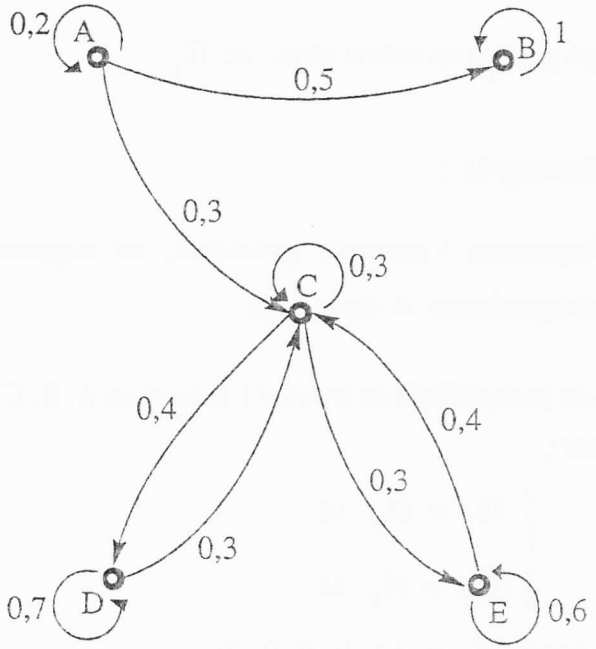
On s'intéresse à la position de l'animal à tout instant $k\tau$ $(k \in \mathbb{N})$. On peut associer à cette position aléatoire le modèle d'une chaîne de Markov.

Ici :

- le "système" est une cage à cinq compartiments, renfermant un animal ;
- les 5 "états" possibles, dénommés A, B, ..., E, correspondent à la présence de l'animal dans les compartiments de même nom.

La matrice et le graphe de transition sont les suivants :

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ B & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ D & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \end{array}$$



Régime transitoire d'une chaîne de Markov

On suppose qu'initialement (à $t = 0$), le système est abandonné dans un état donné. Du fait de la nature stochastique des transitions, il n'est évidemment pas possible de prévoir l'état précis dans lequel se trouvera le système à $t = k \cdot \tau$.

Par contre, on peut calculer la probabilité de chacun des états à $t = k \cdot \tau$; on désigne par Π_k un vecteur-ligne, de format (1, n), regroupant ces probabilités.

La somme des n composantes du vecteur Π_k est, par définition, égale à 1.

Le calcul de Π_k peut être effectué en appliquant la relation de récurrence :

$$\boxed{\Pi_k = \Pi_{k-1} \cdot M} \qquad (k \geq 1)$$

qui découle directement des définitions de Π_k et de M.

En multipliant membre à membre les relations de récurrence associées à des valeurs successives de k, on obtient la relation :

$$\boxed{\Pi_k = \Pi_0 \cdot M^k} \qquad (k \geq 1)$$

qui permet un calcul direct de Π_k.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent, en supposant qu'à $t = 0$, l'animal est placé dans le compartiment A de la cage.

Les probabilités de trouver l'animal en A, B, C, D ou E à $t = \tau$, puis à $t = 2\ \tau$, sont données par :

$$\begin{cases} \Pi_1 = \Pi_0 \cdot M \\ \Pi_2 = \Pi_1 \cdot M \end{cases}$$

avec $\Pi_0 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$.

On trouve : $\Pi_1 = (0{,}2\ \ 0{,}5\ \ 0{,}3\ \ 0\ \ 0)$

$\Pi_2 = (0{,}04\ \ 0{,}6\ \ 0{,}15\ \ 0{,}12\ \ 0{,}09)$

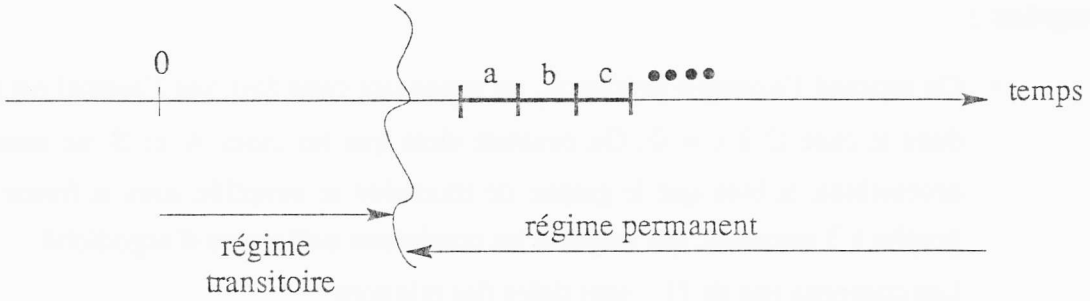
(on vérifie que la somme des composantes de chaque vecteur est bien égale à 1).

Régime permanent d'une chaîne de Markov

On se pose ici la question suivante : au bout d'un "grand" nombre d'instants d'observation, existe-t-il une limite, soit Π_∞, aux probabilités des différents états du système : $\Pi_\infty = \lim_{k \to +\infty} \Pi_k$?

Cette question est liée à l'**ergodicité** de la chaîne de Markov : on dit qu'**une chaîne de Markov est (fortement) ergodique si, lorsque k tend vers l'infini, le vecteur Π_k tend vers un vecteur constant, Π_∞, indépendant de Π_0.**

Lorsque l'ergodicité a lieu, elle traduit une sorte de "**stabilisation macroscopique**" atteinte par la chaîne de Markov "en régime permanent". On peut, en effet, lui donner l'interprétation "statistique" suivante. Considérons, en régime permanent, des périodes d'observation successives du système, soit a, b, c ... :



on suppose que ces périodes a, b, c, ... sont de même durée, et que cette durée est "suffisante" vis-à-vis de τ (par exemple $100 \cdot \tau$).

Au cours du "régime permanent", le système continue à faire l'objet de mouvements incessants. Cependant, si l'on comptabilise, pour chacune des périodes a, b, c, ..., le temps cumulé passé par le système dans chacun des états, on constate que le temps cumulé passé dans un état donné est le même au cours des périodes successives. Autrement dit, le système passe désormais une proportion constante de son temps dans chacun des n états (les proportions étant données par les n composantes du vecteur Π_∞), bien que l'"**agitation microscopique**" se poursuive sans relâche à l'échelle des instants successifs $k\tau$ d'observation.

Cette "**stabilisation macroscopique**" de la chaîne de Markov, lorsqu'elle a lieu, présente un grand intérêt, car elle confère au processus aléatoire une **prévisibilité** inespérée, qui peut être précieuse, en particulier en cas d'enjeu économique.

Il existe seulement des **conditions suffisantes d'ergodicité**, portant sur le graphe de transition :

> La chaîne de Markov est ergodique si le graphe de transition possède les 3 propriétés suivantes :
>
> 1°) graphe **fini** (i.e. nombre fini de sommets)
>
> 2°) graphe **fortement connexe** (i.e. il existe au moins un chemin entre deux sommets quelconques)
>
> 3°) graphe comportant **au moins une boucle** (arc reliant un sommet à lui-même).

Lorsqu'il existe, Π_∞ se calcule par la relation :

$$\boxed{\Pi_\infty = \Pi_\infty \cdot M}$$

qui découle immédiatement de la relation de récurrence vue plus haut, par passage à la limite. En outre, la somme des composantes de Π_∞ est, bien entendu, égale à 1.

Exemples :

- On reprend l'exemple précédent, en supposant cette fois que l'animal est placé dans la case C à $t = 0$. On constate alors que les cases A et B ne sont plus accessibles, si bien que le graphe de transition se simplifie sous la forme d'un graphe à 3 sommets, qui respecte les conditions suffisantes d'ergodicité.
  Les composantes de Π_∞ sont tirées des relations :

$$\begin{cases} (\Pi_\infty^C\ ,\ \Pi_\infty^D\ ,\ \Pi_\infty^E) = (\Pi_\infty^C\ ,\ \Pi_\infty^D\ ,\ \Pi_\infty^E) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix} \\ \Pi_\infty^C + \Pi_\infty^D + \Pi_\infty^E = 1 \end{cases}$$

  On trouve : $\Pi_\infty^C = 12/37$, $\Pi_\infty^D = 16/37$, et $\Pi_\infty^E = 9/37$.

- Un autre exemple est proposé dans le fascicule "Exercices de Recherche Opérationnelle" (deuxième problème). Il permet d'illustrer :
  - l'intérêt économique du cas de la chaîne de Markov ergodique ;
  - deux phénomènes particuliers pouvant survenir en régime permanent : l'**état permanent absorbant** et le **cycle périodique** (cf question 4).

* * * * * * * * *

CHAPITRE VIII

Processus de Markov

Ce terme est réservé à la généralisation du modèle markovien précédent au cas où **le temps est continu**, et non plus discrétisé en instants d'observation $t = k \cdot \tau$.

Pour que l'hypothèse markovienne de l'absence de mémoire soit respectée, il faut, dans le cas continu, supposer que les évènements aléatoires, qui provoquent les changements d'"état" du "système", obéissent à une **loi de Poisson.**

Par exemple, lorsqu'on veut décrire l'arrivée des clients à un arrêt d'autobus, au guichet d'une banque, l'occurrence des pannes de composants électroniques, des appels à un central téléphonique, le passage des véhicules, en circulation fluide, en un point donné, sur une route, etc ..., on a fréquemment recours à une loi statistique de Poisson.

Loi de Poisson

On suppose que les occurrences des évènements - par exemple, les arrivées des clients - sont :

- **indépendantes entre elles** ;
- **à flux stationnaire** : ce qui se produit entre t et $t+h$ ne dépend que de h ;
- **non groupées** : la probabilité de plus d'un évènement entre t et $t+h$ est très faible si h est petit : c'est un infiniment petit $0(h)$, c'est-à-dire $0(h)/h$ tend vers 0, quand h tend vers 0.

Les arrivées peuvent alors être modélisées par une loi de Poisson.

Par définition, les arrivées suivent une **loi de Poisson de taux** λ lorsque la probabilité d'observer **n arrivées pendant un temps t** est donnée par :

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$$

Parfois, l'occurrence d'un évènement marque la fin d'une période : par exemple, la panne d'un composant électronique indique la fin de la vie de celui-ci ; ou le départ d'un client d'un guichet

coïncide avec l'achèvement d'un service. Dans ce cas, on s'intéresse souvent à une autre variable aléatoire : la "durée de vie" du composant, ou la "durée de service".

Lorsque l'occurrence d'évènement de fin est régi par une loi de Poisson de taux λ, la durée de vie associée suit une **loi exponentielle** de même taux. Les deux modes de raisonnement sont donc rigoureusement équivalents.

Remarque :

Pour le composant électronique, par exemple, la loi exponentielle, dite de "non-vieillissement", est une manifestation particulière de l'hypothèse markovienne de l'absence de mémoire : elle se traduit par un taux de mortalité constant du composant. Certains composants électroniques ont cette propriété remarquable, tout au long de leur vie utile ; par contre, ils peuvent connaître un taux important de mortalité infantile, et ce taux augmente également au bout d'un temps long ; d'où une "courbe en baignoire" du taux de mortalité en fonction du temps, classiquement rencontrée en fiabilité.

Dans la suite de ce cours, la loi de Poisson, ou la loi exponentielle, de taux λ se traduit de la manière suivante :

- la probabilité d'occurrence d'un évènement, pendant le temps ("petit") dt, est égale à $\lambda \cdot dt$;
- la probabilité d'occurrence de n évènements, pendant le même temps dt, de la forme $(\lambda \cdot dt)^n$, est supposée négligeable devant la probabilité d'occurrence d'un seul évènement, quel que soit $n > 1$.

Graphe de transition

L'occurrence d'un évènement s'accompagne d'un changement d'état du système. Compte tenu des considérations précédentes sur la loi de Poisson, supposée régir les évènements, on peut énoncer la propriété suivante, voisine de celle des chaînes de Markov :

Si le système est dans l'état E_i à l'instant t, il n'y a que deux possibilités pour l'instant $t + dt$:

- le système est encore dans l'état E_i ;
- le système est passé dans l'un des autres états, mais il y a eu **un seul** changement d'état entre t et $t + dt$.

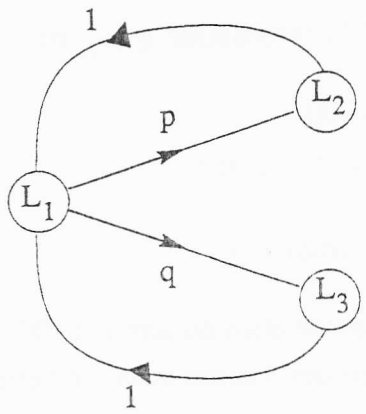
On peut alors représenter, dans le graphe de transition du processus de Markov, toutes les transitions possibles d'un état à un autre, entre t et $t + dt$ (comme on le fait pour une chaîne de Markov, entre $k\tau$ et $(k+1).\tau$).

Exemple :

Dans un magasin de stockage, des composants sont stockés en trois lieux L_1, L_2 et L_3. Deux robots identiques permettent de prélever des composants en chacun de ces lieux, selon des programmes pré-mémorisés.

La durée aléatoire nécessaire pour un prélèvement en L_i $(i = 1, 2, 3)$ est régie par une loi exponentielle de taux μ_i. Lorsque les deux robots se trouvent au même lieu, le dernier arrivé doit attendre la fin de l'opération du premier.

La circulation des robots s'effectue selon le schéma suivant :



Pour chaque robot, chaque programme commence par un prélèvement en L_1, puis le robot se dirige (en un temps négligeable par rapport à celui des prélèvements) vers L_2 avec la probabilité p, ou vers L_3 avec la probabilité q $(p + q = 1)$. Ensuite, il revient systématiquement en L_1 (aussi en un temps négligeable), pour effectuer le programme suivant.

Chaque robot est d'utilisation permanente et comporte, à tout instant, plusieurs programmes de prélèvement en mémoire (ces programmes diffèrent entre eux par le choix de L_2 ou L_3, et éventuellement par la nature du composant à prélever). Les pannes des robots, très rares en pratique, ne sont pas prises en compte ici.

Nous allons modéliser le système, constitué par les trois lieux et les deux robots, à l'aide d'un processus de Markov.

--*-*-*-*-*-*-*

On peut désigner les états par des triplets de la forme (k_1, k_2, k_3), où k_i est le nombre de robots présents au lieu L_i $(i = 1, 2, 3)$.

D'évidence, on a : $k_1 + k_2 + k_3 = 2$. Il y a six états possibles : 200, 020, 002, 110, 101 et 011.

La probabilité pour qu'un robot se trouvant en L_1, à l'instant t, effectue un prélèvement, entre t et $t + dt$, vaut $\mu_1 \cdot dt$, par définition de la loi exponentielle de taux μ_1. Ce robot a ainsi une probabilité $p \cdot \mu_1 \cdot dt$ de se trouver en L_2 à $t + dt$, et une probabilité $q \cdot \mu_1 \cdot dt$ de se trouver en L_3 à $t + dt$.

En conséquence, si l'on tient compte des deux robots, et si l'on suppose d'abord que le système se trouve dans l'état 200 à l'instant t, on voit qu'il n'y a que 3 possibilités, à l'instant $t + dt$:

- le système est passé dans l'état 110 (probabilité $p \ \mu_1 \ dt$) ;
- le système est passé dans l'état 101 (probabilité $q \ \mu_1 \ dt$) ;
- le système est encore dans l'état 200
  (probabilité $1 - p\mu_1 dt - q\mu_1 dt = 1 - \mu_1 dt$).

(un évènement au plus s'est produit pendant le temps dt).

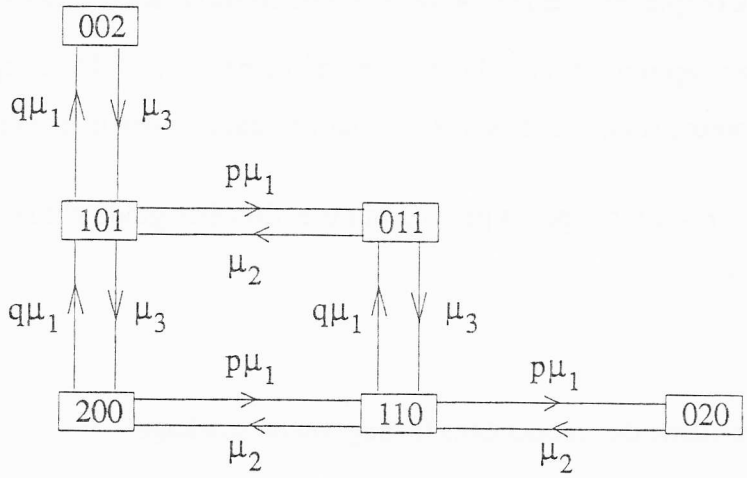
On a ainsi déterminé les arcs du graphe de transition issus du sommet 200.
En raisonnant de même, successivement, à partir des 5 autres états, on obtient les autres arcs.

Remarque :

On constate que les valuations de tous les arcs reliant deux sommets distincts sont proportionnelles à dt. En outre, les valuations des boucles, reliant chaque sommet à lui-même, n'apportent pas d'information, puisque chaque boucle est simplement valuée par le complément à 1 de la somme des valuations des autres arcs issus du sommet en question. C'est pourquoi on préfère souvent représenter le "**graphe de transition simplifié**" du processus de Markov, obtenu :

- en omettant les boucles ;
- en valuant chaque arc par son "taux de probabilité", c'est-à-dire sa probabilité de transition divisée par dt.

Dans l'exemple considéré, le graphe de transition simplifié est le suivant :



On remarque que les arcs sont de 4 types : ↑ , ↓ , → et ← , et que tous les arcs du même type sont valués par le même taux de probabilité.

Régime permanent d'un processus de Markov

Un processus de Markov est **ergodique** si la probabilité d'observer le système dans chacun des états, à un instant t quelconque, tend vers une valeur donnée, indépendante de l'état initial, lorsque t tend vers l'infini.

Les **conditions suffisantes d'ergodicité** portant sur le graphe de transition sont les mêmes que pour une chaîne de Markov.

Lorsque l'ergodicité a lieu, le vecteur π_∞, qui rassemble les probabilités de présence du système dans chacun des états en "régime permanent", peut être commodément calculé en exploitant le "**théorème des coupes**", qui s'énonce comme suit :

Etant donné un groupe quelconque de sommets du graphe de transition, isolé par une ligne fermée, dénommée "coupe", la probabilité en régime permanent de **sortir**, pendant dt, à l'extérieur de la coupe, est égale à la probabilité, pendant le même temps, d'y **entrer**.

L'image de la **sortie** de la coupe est explicite : elle correspond à l'occurrence d'une transition, depuis un état situé à l'intérieur de la coupe, vers un état situé à l'extérieur ; graphiquement, les entrées-sorties se font en empruntant les arcs du graphe de transition qui sont coupés par la coupe.

Chaque application du théorème des coupes procure une relation entre certaines composantes du vecteur π_∞. Compte tenu de la relation de normalisation (somme des n composantes de π_∞ égale à 1), il faut appliquer $(n-1)$ fois le théorème, à $(n-1)$ coupes différentes, pour disposer d'un nombre d'équations suffisant pour l'extraction des n inconnues.

Le choix de ces $(n-1)$ coupes, a priori arbitraire, doit être guidé par la simplicité du système d'équations résultant.

Exemple :

Revenons au problème des robots dans le magasin de stockage.

On constate que le graphe de transition satisfait aux 3 conditions suffisantes d'ergodicité :

- il est fini (6 sommets) ;
- il est fortement connexe ;
- il comporte au moins une boucle (il a une boucle en chaque sommet).

Pour éviter d'avoir à résoudre un système de 6 équations à 6 inconnues, nous nous intéressons au cas particulier : $p = q = \frac{1}{2}$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Dans ce cas, les lieux L_2 et L_3 sont interchangeables, ce qui entraîne : $\left| \begin{array}{l} \pi_\infty^{020} = \pi_\infty^{002} \\ \pi_\infty^{110} = \pi_\infty^{101} \end{array} \right.$

Le problème ne comporte alors plus que 4 inconnues, notées comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} a = \pi_\infty^{020} = \pi_\infty^{002} \\ b = \pi_\infty^{110} = \pi_\infty^{101} \\ c = \pi_\infty^{011} \\ d = \pi_\infty^{200} \end{array} \right.$$

Pour résoudre le problème, il faut appliquer 3 fois le théorème des coupes ; nous choisissons, par exemple, 3 coupes isolant chacune un seul sommet du graphe de transition, en l'occurrence 002, 011 et 200.

On obtient :

$$\begin{cases} \bullet \text{ théorème appliqué à la coupe 002 : } a\mu_3 dt = bq\mu_1 dt \text{, soit : } a\mu_3 = bq\mu_1 \\ \bullet \text{ théorème appliqué à la coupe 011 : } c\mu_2 + c\mu_3 = bp\mu_1 + bq\mu_1 \\ \bullet \text{ théorème appliqué à la coupe 200 : } dq\mu_1 + dp\mu_1 = b\mu_3 + b\mu_2 \\ \bullet \text{ relation de normalisation : } 2a + 2b + c + d = 1 \end{cases}$$

En tenant compte des hypothèses $p = q = \frac{1}{2}$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, le système d'équations

s'écrit : $$\begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ 2c = b \\ d = 2b \\ 2a + 2b + c + d = 1 \end{cases}$$

d'où l'on tire : $$\boxed{\begin{aligned} \pi_\infty^{020} &= \pi_\infty^{002} = a = \frac{1}{11} \\ \pi_\infty^{110} &= \pi_\infty^{101} = b = \frac{2}{11} \\ \pi_\infty^{011} &= c = \frac{1}{11} \\ \pi_\infty^{200} &= d = \frac{4}{11} \end{aligned}}$$

Comme pour les chaînes de Markov, l'ergodicité des processus de Markov leur confère une sorte de **prévisibilité**, qui présente un grand intérêt. Dans l'exemple considéré, on peut, par exemple, en tirer l'évaluation du nombre moyen n_i de robots se trouvant en L_i, en régime permanent :

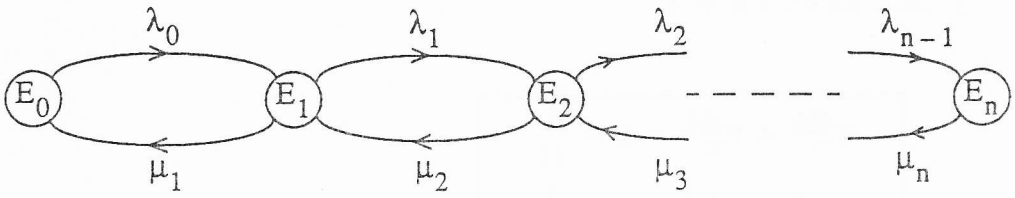
$$\begin{cases} n_1 = 2 \cdot \pi_\infty^{200} + 1 \cdot \pi_\infty^{110} + 1 \cdot \pi_\infty^{101} = \frac{12}{11} \\ n_2 = 1 \cdot \pi_\infty^{011} + 1 \cdot \pi_\infty^{110} + 2 \cdot \pi_\infty^{020} = \frac{5}{11} \\ n_3 = 1 \cdot \pi_\infty^{011} + 1 \cdot \pi_\infty^{101} + 2 \cdot \pi_\infty^{002} = \frac{5}{11} \end{cases}$$

On vérifie que l'on a : $n_1 + n_2 + n_3 = 2$, qui traduit la présence de deux robots dans le magasin.

Processus de Markov particulier : le processus de naissance et de mort

Lorsque le système considéré est un ensemble de personnes situées en un lieu (par exemple toutes celles qui se trouvent à l'intérieur d'un bureau de poste), dont les arrivées et les départs sont régis par des lois de Poisson, les différents états possibles du système, notés E_k, sont définis par la présence de k personnes dans le lieu, et la dynamique du système peut être modélisée par un processus de Markov particulier, le "**processus de naissance et de mort**". En effet, le graphe de transition **simplifié** présente, dans ce cas, une caractéristique remarquable : chaque sommet E_k, $k > 1$, n'est relié qu'à deux sommets, E_{k-1} et E_{k+1}, si bien que les sommets peuvent être disposés en ligne droite ; le premier sommet, E_0, et le dernier, E_n (qui n'existe que si le système est "**fermé**" : le lieu a une capacité d'accueil maximale fixée, soit n personnes), n'ont évidemment qu'un seul voisin.

Tous les processus de ce type ont donc un graphe de transition **simplifié** (définition donnée plus haut) de la même forme suivante :



(cas fermé : n + 1 sommets)

La transition $E_k \rightarrow E_{k+1}$, valuée par le taux λ_k, est dénommée "**naissance**", et la transition $E_k \rightarrow E_{k-1}$, valuée par le taux μ_k, est dénommée "**mort**".

On voit que les processus de naissance et de mort ne diffèrent les uns des autres que par le nombre de "maillons" du graphe de transition, et les valeurs numériques des valuations des arcs. Avec les notations ci-dessus, on peut donc établir, une fois pour toutes, des résultats généraux. La portée de ces résultats est accrue par le fait qu'un processus de naissance et de mort induit, généralement, une ou plusieurs "**files d'attente**" (dont l'étude fait l'objet du chapitre suivant).

Le principal résultat concerne l'**ergodicité**. Les conditions suffisantes classiques sont ici, visiblement, satisfaites. En notant π_∞^k la composante du vecteur π_∞ relative à l'état E_k, le calcul aboutit au résultat suivant (admis) :

$$\boxed{\pi_\infty^k = \pi_\infty^0 \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{k} \mu_j}} \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

Il en résulte que :

$$\pi_\infty^k = \pi_\infty^{k-1} \cdot \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

Ces relations permettent d'exprimer π_∞^k, $k = 1, \ldots, n$, en fonction de π_∞^0.

En écrivant ensuite : $\sum_{k=0}^{n} \pi_\infty^k = 1$, on extrait la valeur numérique de π_∞^0, d'où celles des autres composantes de π_∞.

Exemple :

On se reportera à l'exercice figurant dans le fascicule "Exercices de Recherche Opérationnelle" : étude du service comptable d'une entreprise.

L'exercice montre comment le calcul du "régime permanent" permet, en particulier, d'évaluer précisément le temps moyen perdu en attente par les comptables souhaitant accéder à un terminal informatique. En exploitant le modèle de processus de naissance et de mort proposé, le chef d'entreprise pourra ainsi déterminer, chiffres en mains, le nombre de terminaux approprié.

* * * * * * * * * *

CHAPITRE IX

Files d'attente

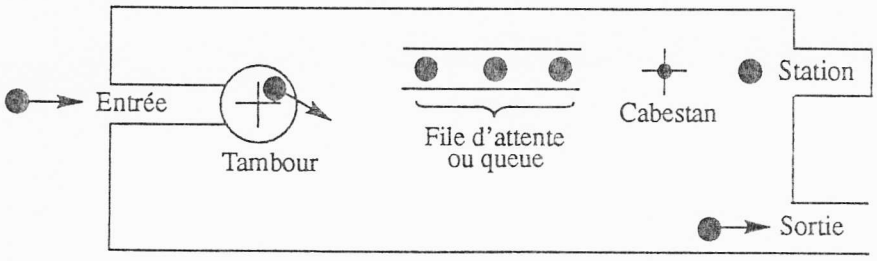
Généralités sur les phénomènes d'attente

Les phénomènes d'attente sont hélas d'observation courante dans la vie quotidienne. Quand nous nous rendons à la poste, à la gare, à la banque, bien souvent nous devons "faire la queue" pour obtenir des timbres, un billet, de l'argent. On a l'habitude d'appeler **clients** les individus qui constituent la file d'attente et **station** le guichet où un **serveur** leur procure un service déterminé.

La file d'attente ne se manifeste pas toujours d'une manière physique : par exemple, si, dans un atelier, des machines tombées en panne "attendent" la visite et les soins du mécanicien-réparateur, elles ne se constituent pas en file. De même, les personnes qui sollicitent une communication par l'intermédiaire d'un standard téléphonique. Il est néanmoins facile, à chaque fois, de déterminer quels sont les clients, la ou les station (s), le ou les serveur (s).

Remarquons qu'il s'agit de phénomènes stochastiques. En effet, les clients arrivent en général au hasard ; d'autre part, la durée d'occupation de la station par chaque client n'est en général pas constante. Il suffit d'ailleurs que l'un de ces deux caractéristiques se présente comme un phénomène aléatoire pour qu'il s'agisse déjà d'un problème stochastique.

Considérons le cas très simple (figure ci-dessous) où il n'existe qu'une station, donc qu'une file d'attente (en l'absence de priorités). Chaque client pénètre dans l'enceinte où fonctionne la station en passant par un tambour : il se dirige aussitôt vers la file d'attente et y prend la dernière place : dès qu'un client a reçu le service qu'il attendait de la station, il s'en va ; aussitôt, le premier de ceux qui attendaient dans la file fait fonctionner le cabestan qui se trouve devant lui et entre en contact avec le serveur.



Cette matérialisation du passage des clients d'un état dans un autre est simplement utile pour préciser le vocabulaire employé dans la théorie des phénomènes d'attente.

On a, en effet, coutume d'appeler **file d'attente** l'ensemble des clients qui attendent d'être servis, à l'exclusion de celui qui est en train de se faire servir. On nomme **système d'attente** l'ensemble des clients qui font la queue, y compris celui qui se fait servir. Le **phénomène d'attente** s'étend à tous les clients possibles (dans le cas de systèmes bouclés, où les mêmes clients reviennent plus tard à l'entrée - par exemple les machines qui tombent en panne dans un atelier -, le nombre des clients est, en général, fini). Ces appellations se généralisent et prennent surtout leur intérêt dans les situations où coexistent plusieurs stations et plusieurs files d'attente.

Nous distinguerons donc deux types principaux de systèmes d'attente : le système **ouvert**, dans lequel le nombre de clients potentiels est très élevé (cas des guichets publics, des grands magasins, etc ...), au point qu'on peut considérer qu'il est illimité ; le système d'attente **fermé**, dans lequel le nombre de clients est limité (cas d'un atelier dans lequel existe un service de réparation de machines) ; dans les deux cas il peut y avoir une ou plusieurs files d'attente.

Dans la fourniture de services (aéroports, gares, ...), deux catégories de problèmes se posent :

- les **problèmes de conception** : dimensionnement de locaux, nombre de guichets, capacité de réseaux, ...
- les **problèmes d'exploitation** : élaboration de règles de fonctionnement, utilisation judicieuse des personnels, ...

Dans les deux cas, les simulations reposant sur la théorie des files d'attente permettent de reproduire la réalité, et de prendre des décisions.

Loi des arrivées. Loi des services.

Revenons au phénomène d'attente le plus simple où il n'existe qu'une queue et qu'une station.

Le cas intéressant est celui où deux phénomènes aléatoires sont conjugués :

1°) les clients arrivent au hasard ;

2°) le temps passé à la station par chaque client est aléatoire.

Par exemple, les automobilistes arrivent au hasard à un parc (cela veut dire : l'heure d'arrivée de chacun est aléatoire) ; ils y stationnent un temps variable qui ne peut être prévu pour chacun d'eux (c'est encore une variable aléatoire).

Peut-on caractériser statistiquement la manière dont les clients arrivent au parc et la durée de leur stationnement ?

L'expérience montre que, dans beaucoup de phénomènes d'attente, les lois des arrivées et des services sont, respectivement, **poissonniennes** et **exponentielles**. Ce ne sont évidemment pas les seules formes que peuvent affecter ces lois, mais ce sont les plus fréquentes et aussi les plus simples à employer pour obtenir un exposé facile des principes et de la théorie des phénomènes d'attente.

Notation de Kendall d'une file d'attente

On note A/B/S (N) (discipline), une file d'attente où A est le code de la loi des arrivées, B, celui de la loi des services ; S est le nombre de guichets (tous identiques), fonctionnant en parallèle ; N désigne le nombre maximal de clients admis dans le système (il est infini si cette indication est omise) ; puis on précise la discipline du service, sauf si elle est : "Premier arrivé, Premier servi" (en anglais FIFO : "first in first out"), auquel cas on l'omet.

Les principaux codes employés pour A et B sont :

M pour des lois **m**arkoviennes, c'est-à-dire une loi de Poisson pour des arrivées et une loi exponentielle pour des services ;

D (pour **d**éterministe), pour des arrivées régulièrement espacées d'un temps $1/\lambda$ ou pour des services de durée constante $1/\mu$;

G pour une loi **g**énérale (quelconque, incluant donc les précédentes).

Dans la suite du chapitre, nous traiterons seulement le modèle M/M/S, qui correspond à des arrivées selon une loi de Poisson, des durées de service de loi exponentielle, et l'existence de S serveurs. Le système est **ouvert** dans le cas strict M/M/S et **fermé** dans le cas M/M/S/N. Ce modèle joue un rôle prédominant, du fait de sa simplicité et de l'étendue de son champ d'application.

File d'attente M/M/S

L'étude de cette file d'attente se ramène à celle du **processus de naissance et de mort** associé.

Exemple :

Un exemple est proposé dans le fascicule "Exercices de Recherche Opérationnelle" : étude d'un centre d'information comportant trois bureaux. La file d'attente analysée est une file M/M/3/5.

En appliquant les résultats du chapitre précédent, on peut calculer des grandeurs caractéristiques de la file d'attente, notamment - dans le cas ergodique - le **nombre moyen $\bar{n}$ de clients en attente** et le **temps moyen $\bar{t}_f$ d'attente d'un client** dans la file (il existe un abaque donnant $\bar{t}_f$ en fonction du nombre S de guichets, du taux λ des arrivées des clients et du taux μ de service de chaque guichet).

Cas particulier $S = 1$

Les résultats sont plus simples, puisque le processus de naissance et de mort associé n'a alors qu'un taux de naissance $(\lambda_i = \lambda, \ \forall i)$ et un taux de mort $(\mu_j = \mu, \ \forall j)$.

Il convient de distinguer deux cas :

- *cas fermé : file M/M/1/N*

On retrouve le résultat du chapitre précédent $(n = N)$. L'ergodicité a lieu **sans condition**, et l'on a :

$$\begin{cases} \pi_\infty^k = \pi_\infty^0 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k = 1, \ldots, N \\ \pi_\infty^0 = \dfrac{1 - \dfrac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \end{cases}$$

- *cas ouvert : file* M/M/1 (∞)

L'ergodicité exige une condition : **le taux λ d'arrivée des clients doit être strictement inférieur au taux μ de service**, pour éviter l'engorgement (qui se traduirait par une file d'attente de longueur infinie).

Dans le cas $\boxed{\dfrac{\lambda}{\mu} < 1}$, on obtient :

$$\begin{cases} \pi_\infty^k = \pi_\infty^0 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \\ \pi_\infty^0 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu} \end{cases}$$

Pour $\bar{n}$ et $\bar{t}_f$ - qui n'ont de sens que dans le cas $\boxed{\frac{\lambda}{\mu} < 1}$ - on trouve :

$$\begin{cases} \bar{n} = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} \\ \bar{t}_f = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \end{cases}$$

* * * * * * * * * *

Cours de

Programmation linéaire

I.1. Introduction : un petit exercice à la portée d'un élève de seconde

Sous la rubrique "Programmation linéaire", on trouve l'exercice suivant dans un livre de Mathématiques pour la classe de seconde, édité chez Hachette en 1988 :

> Une usine fabrique deux sortes de produits, p_1 et p_2, à l'aide de deux machines m_1 et m_2. Chaque unité de produit en cours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent et pendant les temps suivants (en minutes).

	p_1	p_2
m_1	30	20
m_2	40	10

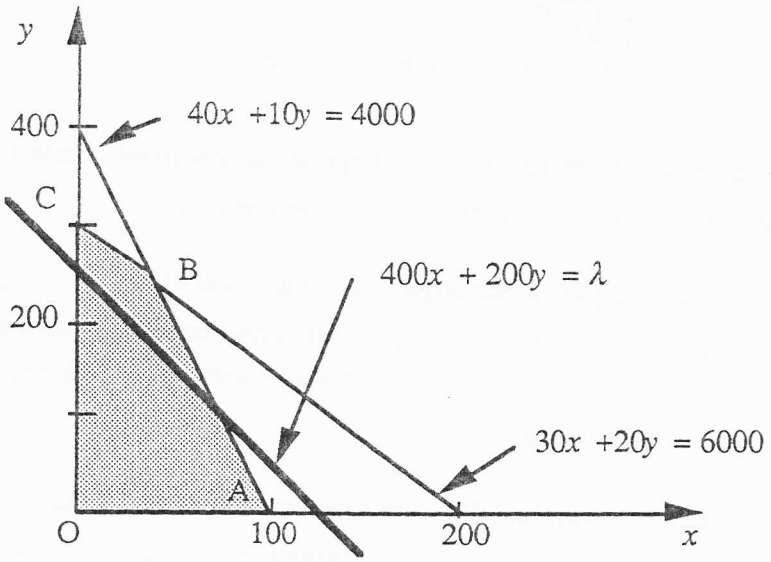
De plus, la machine m_1 est disponible 6000 mn/mois et la machine m_2 est disponible 4000 mn/mois.
Le profit réalisé sur une unité du produit p_1 est de 400 F.
Le profit réalisé sur une unité du produit p_2 est de 200 F.
Trouver le plan de fabrication mensuel qui maximise le profit.

Solution : Appelant x (resp. y) le nombre d'unités du produit p_1 (resp. p_2) à fabriquer mensuellement, on voit que ce problème peut s'exprimer sous la forme :

Maximiser $z = 400\,x + 200\,y$

Sous les contraintes : $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 30x + 20y \leq 6000 \\ 40x + 10y \leq 4000 \end{cases}$

Le problème étant en deux variables, il admet une solution graphique facile à mettre en œuvre :



Les points (x,y) qui satisfont les contraintes appartiennent au quadrilatère ABCO. La famille des droites $D_\lambda = \{x,y \,/\, 400\,x + 200\,y = \lambda\}$ est une famille de droites parallèles. Parmi celles de ces droites qui ont une intersection non vide avec le quadrilatère, c'est celle qui passe par B qui correspond à la plus grande valeur de λ : elle rencontre le quadrilatère des contraintes au point de coordonnées 40, 240. La solution optimale de notre problème est donc $x = 40$, $y = 240$.

Voici quelques questions et réponses à la suite de cet exercice.

Question 1 : Pourquoi cet exercice est-il rangé sous la rubrique "Programmation linéaire" ?

Réponse : Le problème proposé peut se formuler comme suit :

maximiser une forme linéaire de n variables $x_1, \ldots, x_n$ (ici $n = 2$), les variables étant soumises

- à m contraintes linéaires : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m$ (ici $m = 2$)
- aux n contraintes de non négativité : $x_j \geq 0$.

C'est là la *forme standard* d'un problème de programmation linéaire.

Des problèmes où il s'agit de minimisation ou pour lesquels les variables sont contraintes par exemple à être non positives peuvent facilement se mettre sous forme standard.

Question 2 : La solution proposée est-elle susceptible de généralisation ?

Réponse : Considérons l'ensemble des point de R^n, de coordonnées $x_1, ..., x_n$ (par rapport à une base déterminée) et vérifiant les $m+n$ contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, \ldots, j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

L'ensemble de ces points détermine ce qu'on appelle un polytope convexe ou, lorsque la distance de ces points à l'origine est bornée, un polyèdre convexe.

Le terme convexe est justifié par la remarque suivante : soient $M(x_1, ..., x_n)$ et $P(y_1, ..., y_n)$ deux points quelconques du polytope (ou du polyèdre) déterminé par les contraintes ; alors, quel que soit le réel λ avec $0 \leq \lambda \leq 1$, le point $\lambda M + (1-\lambda)P$ (de coordonnées $\lambda x_i + (1-\lambda)y_i$) appartient au polytope (ou au polyèdre).

Les n-uplets $(x_1, ..., x_n)$ qui satisfont les contraintes s'appellent *solutions réalisables* du problème. Ce sont les coordonnées des points intérieurs au polyèdre ou au polytope des contraintes, qui dans notre exemple était le quadrilatère OABC.

On peut prouver le théorème suivant :

Théorème. *On considère une forme linéaire des n variables $x_1, ..., x_n$, soumises à des contraintes linéaires. Son maximum, qui existe si cette forme est majorée, est atteint au moins en un sommet du polyèdre des contraintes.*

En fait, l'idée de l'algorithme du simplexe est de passer itérativement d'un sommet du polyèdre des contraintes à un sommet adjacent de façon à augmenter la valeur de la fonction à optimiser jusqu'à trouver un sommet où le maximum est atteint. C'est grâce à la convexité du polyèdre et à la concavité de la fonction dont on cherche le maximum que l'on peut se contenter de "monter suivant les arêtes du polyèdre" pour trouver le maximum.

I.2. L'algorithme du simplexe appliqué à un exemple.

Problème : Une fabrique d'objets en terre cuite peinte produit des cendriers, des cruches, des bols et des vases. La fabrication de chacun de ces objets nécessite :

- un certain nombre d'heures de moulage
- un certain nombre d'heures de cuisson
- un certain nombre d'heures de peinture.

La vente d'un de ces objet rapporte un certain profit. Ces données sont récapitulées dans le tableau suivant :

Objet	Cendrier	Bol	Cruche	Vase
Moulage	2	4	5	7
Cuisson	1	1	2	2
Peinture	1	2	3	3
Bénéfice	7	9	18	17

L'entreprise dispose, quotidiennement, de 42 heures de moulage, 17 heures de cuisson et 24 heures de peinture.

Etablir un plan de fabrication, de façon à maximiser le chiffre d'affaire (on suppose que l'on est en régime stable de fabrication et non en phase initiale où il faut mouler avant de cuire).

Solution : Appelant x_1, x_2, x_3, x_4 les nombres respectifs de cendriers, cruches, bols et vases fabriqués quotidiennement, le problème admet la modélisation suivante :

Maximiser : $7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ entières non négatives} \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 24 \end{cases}$$

On reconnaît là, aux "contraintes d'intégrité" près, un problème de programmation linéaire sous forme standard. Nous allons "relâcher les contraintes d'intégrité" et résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du simplexe que nous expliquerons donc sur cet exemple.

Introduisons trois variables dites *variables d'écart* x_5, x_6, x_7, positives ou nulles :

$$\begin{array}{l} x_5 = 42 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 \\ x_6 = 17 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_7 = 24 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 \\ \hline z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \end{array}$$

Dictionnaire I

Le problème s'écrit maintenant :

Maximiser z avec les contraintes $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Le polyèdre des contraintes est limité dans R^4 par les plans d'équation $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0$.

Le tableau ci-dessus est appelé un *dictionnaire*. Les variables x_5, x_6 et x_7 y sont exprimées comme fonctions affines des variables x_1, x_2, x_3 et x_4 ; on traduit cette caractéristique en disant que les variables x_5, x_6 et x_7 sont actuellement les *variables de base* et les variables x_1, x_2, x_3 et x_4 les *variables hors-base*. On s'intéresse alors à ce qu'on appelle la *solution basique* associée au dictionnaire ; celle-ci est la solution obtenue en donnant la valeur 0 à toutes les variables hors-base ; les valeurs des variables de base en découlent ; ici $x_5^* = 42$, $x_6^* = 17$, $x_7^* = 24$ Les sept variables ayant des valeurs non négatives dans cette solution basique, on dit que ce dictionnaire est réalisable. On peut remarquer que le point de coordonnées (0, 0, 0, 0) est un sommet du polyèdre des contraintes. La solution basique associée au dictionnaire donne à z la valeur 0.

La remarque suivante est à la base de la méthode ; si, choisissant une variable x_j hors-base de coefficient strictement positif, on fait croître celle-ci à partir de 0, les autres variables hors-base restant nulles, la valeur correspondante de la fonction z croît. Dans notre exemple, choisissons la variable x_3 (on pourrait aussi choisir l'une quelconque des trois autres variables hors-base). Gardant x_1, x_2 et x_4 à 0 nous cherchons à augmenter x_3 au maximum, tout en conservant la propriété que le point M de R^4 de coordonnées (0, 0, x_3, 0) reste dans le polyèdre des contraintes (on se déplace sur une arête du polyèdre des contraintes issue du sommet (0, 0, 0, 0)).

Les contraintes sur l'augmentation de la variable x_3 sont :

$x_5 \geq 0$, ce qui impose $x_3 \leq 8{,}4$;
$x_6 \geq 0$, ce qui impose $x_3 \leq 8{,}5$;
$x_7 \geq 0$, ce qui impose $x_3 \leq 8$.

Le premier hyperplan que rencontre le point M est donc celui d'équation $x_7 = 0$: le point M est alors arrivé à un nouveau sommet du polyèdre des contraintes, à l'intersection des hyperplans d'équations $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_7 = 0$. Nous allons alors faire un changement de dictionnaire en échangeant les rôles de x_3 et x_7, pour itérer le procédé que nous venons d'employer. On utilise la dernière équation du dictionnaire ci-dessus pour exprimer x_3 en fonction de x_1, x_2, x_4 et x_7 ; on remplace ensuite x_3 par cette expression dans les autres équations du dictionnaire :

$$\begin{array}{rl} x_5 & = 42 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 \\ x_6 & = 17 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_7 & = 24 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 \\ \hline z & = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \end{array}$$

Dictionnaire I

On obtient ainsi :

$$\begin{array}{rl} x_3 & = 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - x_4 - \frac{1}{3}x_7 \\ x_5 & = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - 2x_4 + \frac{5}{3}x_7 \\ x_6 & = 1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_7 \\ \hline z & = 144 + x_1 - 3x_2 - x_4 - 6x_7 \end{array}$$

Dictionnaire II

On dit qu'on a fait "entrer x_3 en base" et qu'on a fait "sortir x_7 de la base". Les variables de base sont maintenant x_3, x_5 et x_6 et les variables hors-base x_1, x_2, x_4 et x_7. Dans la nouvelle solution basique, la fonction z vaut 144. On remarque qu'on a ainsi une nouvelle solution réalisable plus intéressante que celle associée au premier dictionnaire.

Dans la nouvelle expression de la fonction z, nous voyons que seule la variable x_1 a un coefficient positif : nous décidons de faire entrer x_1 en base, et ainsi de parcourir une nouvelle arête du polyèdre des contraintes ; on a les limites suivantes sur l'augmentation possible de la valeur de x_1 à partir de la valeur nulle :

$x_3 \geq 0$, ce qui impose $x_1 \leq 24$;
$x_5 \geq 0$, ce qui impose $x_1 \leq 6$;
$x_6 \geq 0$, ce qui impose $x_1 \leq 3$.

C'est la troisième limite qui est la plus contraignante ; x_6 sort de la base, ce qui conduit au dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{rl} x_1 & = 3 + x_2 - 3x_6 + 2x_7 \\ x_3 & = 7 - x_2 - x_4 + x_6 - x_7 \\ x_5 & = 1 - x_2 - 2x_4 + x_6 + x_7 \\ \hline z & = 147 - 2x_2 - x_4 - 3x_6 - 4x_7 \end{array}$$

Dictionnaire III

La solution basique associée à ce nouveau dictionnaire donne à z la valeur 147.

Or, nous voyons, sur la dernière ligne de ce dictionnaire, que les variables x_2, x_4, x_6, x_7 étant non négatives, l'optimum cherché z^* est majoré par 147.

La solution basique actuelle nous fournit donc la solution optimum du problème :

- il faut fabriquer chaque jour 3 cendriers, aucun bol, 7 cruches, aucun vase ;
- toutes les heures de cuisson et de peinture sont utilisées, alors qu'il reste une heure de moulage disponible ;
- le chiffre d'affaire est de 147.

Ayant "relâché", lors de la recherche de la solution, les contraintes d'intégrité, il se trouve que la solution obtenue est entière : ceci n'a rien de général et les problèmes de programmation linéaire en nombres entiers sont bien souvent beaucoup plus compliqués comme nous aurons l'occasion de nous en convaincre par la suite.

L'application de la méthode, en faisant à chaque étape entrer une variable en base lorsque son coefficient dans la fonction à optimiser est positif, ne permet pas toujours d'obtenir une croissance stricte de la valeur de la fonction z. Nous reviendrons sur ce phénomène dans le paragraphe suivant, en parlant de dégénérescence.

Enfin nous avons eu la chance de trouver, sans aucune difficulté, un sommet du polyèdre des contraintes, ou autrement dit un dictionnaire réalisable ; en effet, l'"origine était réalisable" car les b_i étaient tous positifs. Dans le paragraphe 4 de ce chapitre, nous étudierons des cas moins favorables.

I.3. La dégénérescence et le cyclage

Revenons tout d'abord sur quelques définitions. Un problème de programmation linéaire est mis sous *forme standard* s'il est écrit sous la forme :

$$\text{Maximiser } z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

$$\text{Sous les contraintes} \quad : \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \leq b_i & i = 1 \ldots m \\ x_j \geq 0, & j = 1 \ldots n \end{cases} .$$

Tout n-uplet de valeurs $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ satisfaisant les contraintes constitue une solution réalisable.

La fonction z est dite *fonction objectif*. Les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont appelés *variables de décision* ou aussi *variables de choix*. On distingue les fonctions et les variables des valeurs de ces fonctions et de ces variables en utilisant le signe * lorsqu'il s'agit de valeurs. Une solution réalisable qui maximise la fonction objectif est dite *solution optimale*. Si un problème de

programmation linéaire n'admet aucune solution réalisable, il est dit *infaisable*. Si un problème admet des solutions réalisables mais n'a pas de valeur optimale, il est dit non borné.

Une solution réalisable que l'on peut exprimer à l'aide d'un dictionnaire est dite solution de base réalisable. Un dictionnaire est un système d'équations linéaires liant x_1 , ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}, z et satisfaisant les deux propriétés suivantes :

- tout dictionnaire est algébriquement équivalent au dictionnaire définissant les variables d'écart et la fonction objectif c'est-à-dire :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \quad i = 1 \ldots m$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

- les équations constituant un dictionnaire quelconque doivent exprimer m des $n+m$ variables $x_1,\ldots, x_{n+m}$ et z en fonction des n autres variables.

Nous voyons que dans l'algorithme du simplexe, on ne considère que des solutions de base réalisables (ce qui revient à ne considérer que des sommets du polyèdre des contraintes).

Les solutions de base réalisables avec une ou plusieurs variables de base à la valeur 0 sont dites *dégénérées*.

Exemple : Considérons le dictionnaire :

$$\begin{array}{rcl}
x_4 &=& 1 \qquad\qquad\quad - 2x_3 \\
x_5 &=& 3 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \\
x_6 &=& 2 + x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\
\hline
z &=& 2x_1 - x_2 + 8x_3
\end{array}$$

Choisissant de faire entrer x_3 en base, nous voyons que les relation $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ imposent toutes les trois $\frac{1}{2}$ comme limite à la croissance de x_3. Chacune de trois variables x_4, x_5, x_6 est donc candidate à quitter la base. Si nous choisissons x_4 nous obtenons, comme nouveau dictionnaire :

$$\begin{array}{rcl}
x_3 &=& 0{,}5 \qquad\qquad\quad - 0{,}5x_4 \\
x_5 &=& -2x_1 + 4x_2 + 3x_4 \\
x_6 &=& x_1 - 3x_2 + 2x_4 \\
\hline
z &=& 4 + 2x_1 - x_2 - 4x_4
\end{array}$$

Dans la solution basique associée à ce dictionnaire, $x_5^* = x_6^* = 0$. Cette solution basique est dite dégénérée.

Si nous faisons une itération à partir de ce dictionnaire nous voyons que, faisant entrer x_1 en base (seule variable à avoir un coefficient positif dans z), la relation $x_5 \geq 0$ impose $x_1 \leq 0$. La valeur z^* n'augmentera donc pas au cours de cette itération. L'inconvénient de ces inévitables itérations dégénérées est qu'elles peuvent induire un phénomène désastreux pour la convergence de l'algorithme : le cyclage. On dit qu'il y a *cyclage* lorsque, au bout d'un nombre fini d'itérations, on retrouve un dictionnaire déjà rencontré. En fait, à cause de la définition des dictionnaires, et plus précisément de l'équivalence algébrique des dictionnaires, on retrouve un dictionnaire déjà rencontré dès qu'on retrouve une même partition des $m + n$ variables en variables de base et variables non en base.

On peut toujours éviter le cyclage en appliquant la règle du plus petit indice : lorsque l'on a un choix sur la variable entrante ou sur la variable sortante, on choisit toujours celle du plus petit indice. Nous allons prouver l'efficacité de cette règle (le lecteur non passionné peut éventuellement nous croire sur parole).

Théorème de Bland. *Il ne peut y avoir cyclage lorsque, à toute itération effectuée à partir d'un dictionnaire dégénéré, on choisit les variables entrante et sortante comme celles du plus petit indice parmi les candidats possibles.*

Preuve : Supposons que, appliquant la règle de Bland, l'on retrouve deux fois le même dictionnaire D_0 à l'issue d'une suite d'itérations ayant construit les dictionnaires $D_0, D_1 \ldots D_k = D_0$; tous ces dictionnaires sont nécessairement dégénérés. On appelle "variable versatile" une variable qui, au cours de ces itérations est tantôt en base, tantôt hors base ; soit t le plus grand indice des variables versatiles. Dans la suite de dictionnaires $D_0, D_1, \ldots, D_k, D_1, \ldots, D_k$, il existe nécessairement un dictionnaire D' dans laquelle x_t est sortante (de base dans D' et pas dans le dictionnaire suivant), puis un dictionnaire D'' où x_t est entrante ; nous notons x_s la variable qui entre en base lorsque, à partir de D', x_t sort (x_s n'est pas en base dans D' mais l'est dans le dictionnaire suivant) ; x_s est versatile et donc $s < t$.

En notant B l'ensemble des indices de base de D', on peut écrire D' sous la forme :

$$x_i = b_i' - \sum_{j \notin B} a_{ij}' x_j \quad \text{pour } i \in B$$

$$z = v + \sum_{j \notin B} c_j' x_j$$

$c_s' > 0$ et, la règle de Bland étant utilisée, pour $i < s$, $c_i' \geq 0$. La variable x_t étant sortante dans D', $a_{is}' > 0$.

La dernière ligne de D'' peut s'écrire :

$z = v + \sum_{i=1}^{n+m} c_i'' x_i$, où c_i'' est nul si x_i est en base, et $c_t'' > 0$.

Pour toute solution $(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ du système des contraintes, on a :

$$v + \sum_{j \notin B} c'_j x^*_j = v + \sum_{i=1}^{n+m} c''_i x^*_i$$

Si on définit une solution particulière du système des contraintes en donnant une valeur nulle à toutes les variables non dans B sauf à x_s et une valeur quelconque x^*_s à x_s (les valeurs des autres variables sont alors entièrement déterminées), l'égalité ci-dessus devient :

$$c'_s x^*_s = c''_s x^*_s + \sum_{i \in B} c''_i (b'_i - a'_{is} x^*_s)$$

ou encore :

$$(c'_s - c''_s + \sum_{i \in B} c''_i a'_{is}) x^*_s = \sum_{i \in B} c''_i b'_i$$

Cette égalité étant vraie pour toute valeur x^*_s : $c'_s - c''_s + \sum_{i \in B} c''_i a'_{is} = 0$.

Puisque c'est x_t qui est entrante dans D'', et non x_s, alors que $s < t$, c'est que nous avons $c''_s \leq 0$. Comme nous avons remarqué que $c'_s > 0$, il existe un indice r de B tel que $c''_r.a'_{rs} < 0$.
La variable x_r était en base dans D' et puisque $c''_r \neq 0$, elle n'est pas en base dans D''. Nous en déduisons que x'_r est une variable versatile et donc que $r \leq t$.
c''_t et a'_{ts} étant positifs, leur produit l'est aussi, et r ne peut donc pas être égal à t : $r < t$.
Par ailleurs, x_r n'est pas entrante dans D'', nous n'avons donc pas $c''_r > 0$, par conséquent c'est que nous avons $a'_{rs} > 0$.
Par ailleurs, si $D_k = D_0$, c'est que les valeurs des variables dans les solutions basiques ne varient pas au cours des itérations. Or, x_r est hors-base dans D'' : sa valeur dans la solution basique associée à D'' est 0. La valeur de x_r dans la solution basique associée à D' est donc aussi 0. En conséquence, $b'_r = 0$.
x_r était candidat à quitter la base de D' et en choisissant x_t, avec $t > r$ nous n'avons pas appliqué la règle du plus petit indice.

I.4. Recherche d'un dictionnaire réalisable

Nous allons ici encore nous appuyer sur un exemple.

Supposons que nous voulions résoudre le problème suivant, écrit sous forme standard.

Maximiser $x_1 - x_2 + x_3$

Avec les contraintes :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nous introduisons le problème auxiliaire suivant (que nous écrivons sous forme standard également).

Maximiser $-x_0$ (qui traduit minimiser x_0)

Avec les contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 &\leq -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 &\leq -1 \\ x_0, x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ce problème admet des solutions réalisables puisque la solution $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_0 = 5$ en est une. Nous laissons le lecteur se convaincre que le problème initial admet une solution réalisable si et seulement si le problème auxiliaire admet 0 pour valeur optimale de la fonction objectif.

Ecrivons le dictionnaire définissant les variables d'écart du nouveau problème :

$$\begin{array}{rcl} x_4 &=& 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_5 &=& -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0 \\ x_6 &=& -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0 \\ \hline w &=& -x_0 \end{array}$$

Ce dictionnaire n'est pas réalisable puisqu'en donnant les valeurs 0 aux variables non en base x_1, x_2, x_3, x_0 les variables d'écart x_5 et x_6 prennent des valeurs négatives. Cependant en une itération on peut se ramener à un dictionnaire réalisable. Il suffit de faire entrer x_0 en base et de faire sortir de la base la variable (ici x_5) qui est "la plus négative".

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} x_0 &=& 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 \\ x_4 &=& 9 - 2x_2 - x_3 + x_5 \\ x_6 &=& 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 \\ \hline w &=& -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 \end{array}$$

x_2 est variable entrante.

$x_0 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq \frac{5}{3}$;

$$x_4 \geq 0 \rightarrow \quad x_2 \leq \frac{9}{2} \ ;$$
$$x_6 \geq 0 \ \rightarrow \ x_2 \leq 1.$$

C'est x_6 qui quitte la base. Le dictionnaire suivant est alors :

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 1 + 0.75x_1 + 0.75x_3 + 0.25x_5 - 0.25x_6 \\ x_0 & = & 2 + 0.25x_1 - 1.25x_3 + 0.25x_5 + 0.75x_6 \\ x_4 & = & 7 - 1.5x_1 - 2.5x_3 + 0.5x_5 + 0.5\,x_6 \\ \hline w & = & -2 + 0.25x_1 + 1.25x_3 - 0.25x_5 - 0.75x_6 \end{array}$$

A l'étape suivante x_3 entre en base : x_0 en sort pour donner le dernier dictionnaire.

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6 - 0.8x_0 \\ x_2 & = & 2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6 - 0.6x_0 \\ x_4 & = & 3 - x_1 - x_6 + 2\,x_0 \\ \hline w & = & - x_0 \end{array}$$

Non seulement nous voyons que le problème initial avait une solution réalisable donnée par $x_1^* = 0$; $x_2^* = 2.2$; $x_3^* = 1.6$, mais encore, à cause de l'équivalence algébrique des dictionnaires, nous déduisons un dictionnaire pour le problème initial en "oubliant" x_0, et en choisissant comme variables en base x_1, x_2, x_4 exprimées ci-dessus en fonction de x_1, x_5, x_6. Il suffit d'exprimer z en fonction des mêmes variables. Nous avons alors comme dictionnaire pour z :

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6 \\ x_2 & = & 2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6 \\ x_4 & = & 3 - x_1 - x_6 \\ \hline z & = & -0.6 + 0.2x_1 - 0.2x_5 + 0.4x_6 \end{array}$$

Cette méthode est connue comme *méthode à deux phases*. Dans un chapitre suivant, nous verrons que pour certains problèmes où l'origine n'est pas réalisable (parce que certains des b_i sont négatifs), lorsque tous les coefficients c_j sont négatifs, on peut utiliser le problème dual, ce qui permet de ne résoudre qu'un problème et non pas deux. Cette classe de problèmes est dite "dual réalisable".

I.4. Appendice : la méthode du pivot

L'algorithme à l'aide du pivot n'est rien d'autre qu'un formalisme plus agréable à manipuler, mais qui cache tout à fait le sens des opérations, pour appliquer la méthode du simplexe à un

problème de programmation linéaire.

Nous allons reprendre le premier exemple de ce chapitre et traiter la première étape par la méthode du pivot.

Formalisme dictionnaire

$$
\begin{array}{l}
x_5 = 42 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 \\
x_6 = 17 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\
x_7 = 24 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 \\
\hline
z = \quad 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4
\end{array}
$$

Formalisme pivot

2	4	5	7	1	0	0	42
1	1	2	2	0	1	0	17
1	2	3	3	0	0	1	24
7	9	18	17	0	0	0	0

On choisit x_3 comme variable entrante. Pour déterminer la variable sortante, on cherche quelle est l'inégalité, parmi $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, $x_7 \geq 0$, qui contraint le plus x_4.

Ayant ainsi la variable sortante, on fait dans les variables en base et dans z le changement de variables requis.

On choisit une colonne de coefficient strictement positif dans la dernière ligne, la troisième par exemple.

La colonne de x_3 s'appelle colonne pivot. Pour tout élément positif r de la colonne pivot (sauf celui de la dernière ligne) on calcule le rapport s/r où s est l'élément de la dernière colonne sur la même ligne que r. La ligne pour laquelle ce rapport est le plus petit s'appelle ligne pivot (la 3ème). L'élément intersection de la ligne et de la colonne pivot s'appelle le pivot. On divise tout élément de la ligne pivot par le pivot. Par combinaisons linéaires de la nouvelle ligne pivot et de chaque autre ligne, on s'arrange pour que la colonne pivot comporte un seul élément non nul : le pivot .

Par la méthode du pivot, on obtient le nouveau tableau :

$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2	1	0	$-\frac{5}{3}$	2
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	8
1	-3	0	-1	0	0	-6	-144

Dans ce formalisme, la valeur prise par z quand on annule les variables hors-base est l'opposé de la valeur contenue dans la case située en bas à droite.

I.5. Exercices pour le chapitre I

Exercice 1 : Résoudre l'exercice suivant par la méthode du simplexe :

Maximiser $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

Contraintes
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 2 : Résoudre l'exercice suivant par la méthode du simplexe

1) en faisant entrer en base celle des variables dont le coefficient est le plus grand dans la fonction objectif ;

2) en faisant entrer en base celle des variables dont l'augmentation de valeur, à partir de 0, permettra au plus d'augmenter la fonction objectif.

Maximiser $z = 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_1$

Contraintes
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0,\ \ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 3 : Donner un exemple de problème de programmation linéaire, écrit sous forme standard, non borné.

Exercice 4 : Même question qu'en 3, mais ici on veut un problème infaisable.

Exercice 5 : Résoudre le problème représenté par le dictionnaire réalisable suivant :

$$\begin{array}{rcl} x_5 & = & -0{,}5x_1 + 5{,}5x_2 + 2{,}5x_3 - 9x_4 \\ x_6 & = & -0{,}5x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - x_4 \\ x_7 & = & 1 - x_1 \\ \hline z & = & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \end{array}$$

On appliquera les règles de choix suivantes, pour les variables entrantes et sortantes, en cas de choix.

- la variable entrante est toujours la variable non en base qui a le plus grand coefficient dans la fonction objectif ;
- on fait sortir, en cas de choix, de la base, la variable de plus petit indice.

Que constatez-vous ?

Exercice 6 : Résoudre les deux exercices suivants :

1) Maximiser $5x_1 + 3x_2$

Contraintes
$$\begin{array}{l} -4x_1 + 5x_2 \leq -10 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

2) Maximiser $5x_1 + 3x_2$

Contraintes
$$\begin{array}{l} -4x_1 - 5x_2 \leq -10 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

XI. FORME MATRICIELLE DE LA METHODE DU SIMPLEXE.

II.1.Généralités

On considère un problème d'optimisation linéaire à n variables et $n+m$ contraintes qui s'écrit :

Maximiser $$z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j$$

avec les contraintes : $$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n+m.$$

Notations : on pose

- $A = (a_{ij})_{i=1..m, j=1..n+m}$
- $X = (x_1, \ldots, x_{n+m})^t$
- $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+m})$
- $b = (b_1, \ldots, b_m)^t$

Notre problème s'écrit maintenant :

Maximiser $c.X$ avec $A.X = b$ et $X \geq 0$.

Remarquons que cette définition généralise celle d'un problème de programmation linéaire mis sous forme standard, après introduction des variables d'écart.

Notations : $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ étant m des $n + m$ variables et $x_{j_{m+1}}, \ldots, x_{j_{m+n}}$ les autres variables, on pose

- $X_B = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})^t$

- $X_N = (x_{j_{m+1}}, \ldots, x_{j_{m+n}})^t$
- B = la matrice formée par les m colonnes de A correspondant aux coefficients de $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ (en respectant l'ordre des variables)
- A_N = la matrice formée par les n-m colonnes de A correspondant aux coefficients de $x_{j_{m+1}}, \ldots, x_{j_{m+n}}$ (en respectant l'ordre des variables)
- c_B = matrice-ligne formée des coefficients dans z de $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ (en respectant l'ordre des variables).
- c_N = matrice-ligne formée des coefficients dans z de $x_{j_{m+1}}, \ldots, x_{j_{m+n}}$ (en respectant l'ordre des variables).

Nous avons introduit, dans le chapitre 1, les notions de variable en base et de variable hors-base ; il est temps de donner précisément la définition d'une base.

Définition. *Une base est constituée de m variables qui s'expriment de façon unique, et affine, en fonction des n autres variables, cette expression étant algébriquement équivalente aux m contraintes d'égalité initiales.*

Propriété. $x_{i_1},\ldots,x_{j_m}$ *est une base si et seulement si la matrice B correspondante est inversible.*

Preuve : $AX = b$ s'écrit : $BX_B + A_N X_N = b$

ou encore : $BX_B = b - A_N X_N$.

Si B est inversible, $AX = b$ est équivalent à $X_B = B^{-1}b - B^{-1}A_N X_N$: X_B est bien une base.

Réciproquement, si $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ est une base, alors les valeurs des variables hors-base étant fixées, les valeurs de $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ sont déterminées de manière unique par $AX = b$; pour un X_N donné, $BX_B = b - A_N X_N$ admet une solution unique. Ce qui implique que B est inversible.

Notation : Si V est une variable quelconque, V^* représente une valeur prise par cette variable.

Une base étant choisie, la solution basique associée est obtenue en donnant à toutes les variables hors-base la valeur 0, c'est-à-dire par $X_N^* = 0$. Les valeurs prises par les variables de base sont alors données par :

$$X_B^* = B^{-1}b$$

La base est dite réalisable si toutes les coordonnées de X_B^* sont positives ou nulles. Trouver une base réalisable revient à déterminer une matrice carrée B de dimension (n,n), extraite de A, inversible, et telle que $B^{-1}b$ ait tous ses coefficients positifs ou nuls. Une telle base nous permettra d'initialiser l'algorithme du simplexe.

On peut remarquer que, lorsque le problème initial est donné sous forme standard, la matrice

carrée formée des coefficients des variables d'écart est l'identité ; c'est donc une matrice inversible : on peut prendre comme base l'ensemble des variables d'écart. Cette base est réalisable si le vecteur b n'a aucune composante négative.

II.2. Version matricielle d'une itération de la méthode du simplexe

On suppose que l'on dispose d'une base réalisable $X_B = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})^t$, vecteur-colonne de variables de base, associée à une matrice B, et l'on veut effectuer une étape de la méthode du simplexe, en exploitant au maximum les propriétés algébriques du problème. Nous cherchons à échanger une variable, dite sortante, de X_B par une variable non dans X_B, dite entrante, de façon à obtenir une nouvelle base réalisable tout en augmentant la valeur de l'objectif.

Au départ de l'étape, on dispose de $X_B = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})^t$ (dont on peut déduire B, A_N, c_B, c_N) et de $X_B{}^*$.

II.2.1. Recherche d'une variable entrante

Pour rechercher une variable entrante, il faut calculer, dans le dictionnaire actuel (non explicité) et dans la ligne exprimant z, les coefficients des variables hors-base et voir si au moins un de ces coefficients est strictement positif. Si tous les coefficients sont négatifs ou nuls, la solution basique actuelle est optimale.

On a :

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}A_N x_N$$

$$\boxed{X_B = X_B{}^* - B^{-1}A_N x_N}$$

Par ailleurs : $z = c.X = c_B X_B + c_N X_N$

D'où :

$$z = c_B(X_B{}^* - B^{-1} A_N X_N) + c_N X_N$$

$$\boxed{z = c_B X_B{}^* + (c_N - c_B B^{-1} A_N) X_N}$$

Les deux formules ci-dessus encadrées forment le dictionnaire actuel.

Posons : $y = c_B B^{-1}$; y est une matrice $(1, m)$ définie aussi par $\boxed{yB = c_B}$.

Soit x_j une variable hors-base ; on cherche d'abord le coefficient de x_j dans $c_B B^{-1} A X_N$ c'est-à-dire dans $y\, A_N X_N$.

$$yA_NX_N = (y_1, ..., y_m) \begin{pmatrix} . & . & . & a_{1j} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{mj} & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ x_j \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

Posons : $a_j = (a_{1j}, ..., a_{mj})^t$. Le coefficient de x_j dans $c_B B^{-1} A_N X_N$ est $y.a_j$. Le coefficient de x_j dans z est donc égal à $c_j - y.a_j$.

En conséquence, dans le cas où on cherche un maximum, trouver une variable entrante, c'est trouver une colonne a_j de A_N telle que : $c_j - y.a_j > 0$. La variable x_j correspondante sera entrante.

II.2.2. Recherche d'une variable sortante

Nous supposons maintenant que l'on a choisi une variable entrante x_j correspondant à une colonne a_j de A. Il faut maintenant déterminer une variable sortante.

On considère que toutes les variables hors-bases sauf x_j sont nulles.

X_B vaut : $X_B = X_B^* - B^{-1} A_N\, (0,\ldots,0, x_j, 0, \ldots, 0)^t$

On pose : $d = B^{-1} a_j$; d est une matrice $(m, 1))$ que l'on détermine en pratique en résolvant $Bd = a_j$; on a :

$$X_B = X_B^* - x_j . d$$

L'accroissement de x_j (qui fait croître la valeur correspondante de la fonction objectif) est limité par la condition : $X_B \geq 0$. On cherche alors la plus grande valeur x_j * de x_j telle que :

$$X_B = X_B^* - x_j^* . d \geq 0.$$

La première coordonnée de X_B qui s'annule définit la variable sortante.

On remarque pour faciliter l'actualisation que, lorsque x_j est égal à x_j*, X_B vaut $X_B^* - x_j^* . d$.

II.2.3. Actualisation

Il faut, pour pouvoir, à l'étape suivante, recommencer dans les mêmes conditions, actualiser X_B et $X_B{}^*$. On obtient le nouveau vecteur-colonne $X_{B'}$ en remplaçant dans X_B la variable sortante par la variable entrante. Les valeurs des variables qui n'ont pas quitté la base sont calculées par la formule $X^*_{B'} = X^*_B - x^*_j . d$ et, par définition, la valeur de l'entrante est x^*_j.

II.2.4. Résumé

Nous allons maintenant résumer l'algorithme du simplexe sous sa forme révisée, tel que nous l'avons développé dans ce chapitre.

Considérons le problème :

Maximiser $c.X$ sous les contraintes $A.x = b$ et $x \geq 0$.

et supposons conne une base réalisable. On appelle c_B et B les parties de c et de A correspondant à cette base réalisable X_B . Il nous faut initialiser $X_B{}^*$ qui vaut $B^{-1}b$.

Une étape se déroule alors comme suit :

1) Résoudre le système $yB = c_B$.

2) Choisir une colonne entrante, c'est-à-dire une colonne a_j de A non dans B, telle que $y.a_j$ soit plus petit que c_j (s'il s'agissait de minimiser, on chercherait une colonne a_j, telle que $y.a_j$ soit plus grand que c_j).

3) Résoudre le système $Bd = a_j$.

4) Trouver le plus grand t tel que $X_B{}^* - td \geq 0$. S'il n'existe pas de telle valeur de t, le problème est non borné. Sinon, lorsque t atteint cette valeur maximum, une au moins des composantes de $x_B{}^* - td$ vaut 0 et la variable correspondante peut quitter la base.

5) Remplacer dans X_B la variable sortante par la variable entrante. Mettre à t dans $X_B{}^*$ la valeur de la variable entrante, et pour les autres variables remplacer leur valeur dans $X_B{}^*$ par leur valeur dans $X_B{}^* - td$.

Remarque : lorsque le problème est donné sous forme standard, la solution nulle étant réalisable, on peut initialiser l'algorithme avec $B = I, X_B{}^* = b$ et $c_B = b$, ceci correspondant au choix de l'ensemble des variables d'écart pour constituer la première base.

II.3. Un exemple d'application de la méthode

Nous reprenons l'exemple du premier chapitre.

Le problème s'écrit :

Maximiser : $z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$

avec les contraintes :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

On a ici :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 42 \\ 17 \\ 24 \end{pmatrix}, c = (7 \ \ 9 \ \ 18 \ \ 17 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0).$$

On choisit comme base de départ les variables d'écart et donc :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad X_B{}^* = \begin{pmatrix} 42 \\ 17 \\ 24 \end{pmatrix}$$

D'où : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\quad A_N = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$c_B = (0 \ \ 0 \ \ 0)$, $\qquad c_N = (7 \ \ 9 \ \ 18 \ \ 17)$.

Etape 1 :

1) On résout $y.B = c_B$: $y = (0 \ \ 0 \ \ 0)$.

2) $y.a_1 = 0 < c_1$, $y.a_2 = 0 < c_2$, $y.a_3 = 0 < c_3$, $y.a_4 = 0 < c_6$: les quatre variables sont candidates à entrer. On choisit la variable x_3 pour suivre un cheminement parallèle à celui adopté pour la résolution de ce même problème dans le premier chapitre.

3) On résout $B.d = a_3$: $d = a_3$

4) $X_B^* - t.d \geq 0$ s'écrit :

$$42 - 5t \geq 0$$
$$17 - 2t \geq 0$$
$$24 - 3t \geq 0$$

La plus grande valeur possible de t est 8 et donner cette valeur à la variable x_3 annule la troisième variable de base, c'est-à-dire x_7. Cette dernière est donc la variable sortante.

5) On actualise ; on a maintenant

$$X_B = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_B^* = \begin{pmatrix} 42 - 5?8 \\ 17 - 2?8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Etape 2 :

1) On résout $y.B = c_B$:

$$(y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 18).$$

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad &= 0 \\ y_2 \qquad &= 0 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 &= 18 \end{aligned}$$

On a : $y = (0 \ 0 \ 6)$

2) $y.a_1 = 6 < c_1$, $y.a_2 = 12 > c_2$, $y.a_4 = 18 > c_4$, $y.a_7 = 6 > c_7$: seule la variable x_1 est candidate à entrer en base : c'est donc la variable entrante.

3) On résout $B.d = a_1$:

$$\begin{aligned} d_1 \qquad + 5d_3 &= 2 \\ d_2 + 2d_3 &= 1 \\ 3d_3 &= 1 \end{aligned}$$

On obtient : $d = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

4) $X_B^* - t.d \geq 0$ s'écrit :

$$2 - \frac{1}{3}t \geq 0,\ 1 - \frac{1}{3}t \geq 0,\ 8 - \frac{1}{3}t \geq 0.$$

La plus grande valeur possible de t est 3 et donner cette valeur à la variable x_1 annule la deuxième variable de base, c'est-à-dire x_6. Cette dernière est donc la variable sortante.

5) On actualise ; on a maintenant

$$X_B = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_B{}^* = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{3}?3 \\ 3 \\ 8 - \frac{1}{3}?3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

<u>Etape 3</u> :

1) On résout $y.B = c_B$:

$$(y_1 \;\; y_2 \;\; y_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (0 \;\; 7 \;\; 18).$$

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad &= 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 &= 7 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 &= 18 \end{aligned}$$

On a : $y = (0 \;\; 3 \;\; 4)$.

2) $y.a_2 = 11 > c_2$, $y.a_4 = 18 > c_2$, $y.a_6 = 3 > c_6$, $y.a_7 = 4 > c_7$; aucune variable n'est entrante. La base actuelle est la base optimale.

La méthode du simplexe est terminée ; la conclusion sur la solution du problème se trouve dans le chapitre 1.

II.4. Application au problème de découpe

Problème : une entreprise achète du tissu par rouleaux de grandes longueurs et de 1m de largeur. Elle a besoin des bandes de tissu suivantes :

97 m en 45 cm de large
610 m en 36 cm de large
395 m en 31 cm de large
211 m en 14 cm de large.

Ces bandes peuvent être morcelées dans leur longueur mais non dans leur largeur (ainsi, pour constituer la première bande, on peut mettre bout à bout 50 m en 45 cm de large et 47 m en la même largeur, mais pas une pièce de 97 m de long et de 30 cm de large avec une pièce de même longueur et de 15 cm de large).

Il s'agit de minimiser la longueur de tissu acheté : il est clair que pour atteindre cet objectif, on s'impose de découper le tissu de façon à avoir exactement la longueur nécessaire dans chacune des largeurs.

On appelle modèle de découpe tout vecteur $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ où les a_i sont des entiers non négatifs, tel que: $45\, a_1 + 36\, a_2 + 31\, a_3 + 14\, a_4 \leq 100$.

Exemples : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On pourrait montrer, mais cela est sans intérêt, qu'il y a 37 modèles de découpe différents.

Supposons que tous les modèles de découpe soient répertoriés et numérotés ; on note : $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \end{pmatrix}$ le j^{ème} modèle.

Les variables du problème sont les longueurs x_j de rouleau que l'on découpe suivant le modèle j. Le problème s'écrit :

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{j=1}^{37} x_j$$

$$\text{avec les contraintes :} \quad \sum_{j=1}^{37} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 37$$

où $\qquad b_1 = 97,\ b_2 = 610,\ b_3 = 395,\ b_4 = 211.$

Il est difficile de traiter, en tout cas à la main, des dictionnaires aussi larges. C'est pour cela que nous allons employer la variante matricielle de la méthode du simplexe en ne calculant pas, à chaque étape, tout le dictionnaire.

Ici, la matrice A a pour colonnes les 37 modèles de découpe, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{37} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 97 \\ 610 \\ 395 \\ 211 \end{pmatrix}$,

$c = (1\ 1\ \ \ldots\ \ 1)$.

Pour déterminer une base, il suffit de trouver 4 modèles de découpe formant une matrice

inversible et la base est formée des variables x correspondantes. Il faut bien entendu s'assurer, après le calcul de $X_B{}^*$, que cette base est réalisable.

Prenons $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ car cette matrice a l'avantage d'être diagonale, inversible et la base associée réalisable.

En effet, appelons X_B le vecteur colonne formé des quatre variables de base et X_N le vecteur colonne formé par les 33 autres variables.

Nous cherchons la solution basique correspondante. $X_B{}^* = B^{-1}.b$. Ici on a :

$X_B{}^* = \begin{pmatrix} \frac{97}{2} \\ 305 \\ \frac{395}{3} \\ \frac{211}{7} \end{pmatrix}$; cette solution basique est réalisable.

Nous avons un bon point de départ pour la méthode du simplexe. La solution basique actuelle donne à z la valeur $\frac{21643}{42}$ 1 515,31.

A chaque étape, on mémorise ici B plutôt que X_B car on n'attribue pas explicitement d'indices aux différentes variables. Les éléments que l'on actualise étape après étape sont donc B et $X_B{}^*$.

Etape 1 :

1) On calcule y défini par $yB = c_B$. Ici, en posant $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, on trouve le système d'équations : $2\,y_1 = 1$, $2\,y_2 = 1$, $3\,y_3 = 1$, $7\,y_4 = 1$

On obtient donc $y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$.

2) Cherchons alors une colonne entrante, c'est-à-dire $(a_1, a_2, a_3, a_4)^t$ tels que :

$$\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{7}a_4 > 1$$

avec $45\,a_1 + 36\,a_2 + 31\,a_3 + 14\,a_4 \leq 100$

et a_1, a_2, a_3, a_4 entiers.

On ne risque pas de trouver un modèle qui soit déjà "dans la base" (variable correspondante dans la base) car, pour les modèles a "de base", par définition de y, $y.a = 1$.

Un examen exhaustif des possibilités indique que les candidats à entrer en base sont :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$y.a = \frac{8}{7} \quad y.a = \frac{9}{7} \quad y.a = \frac{8}{7} \quad y.a = \frac{15}{14} \quad y.a = \frac{7}{6} \quad y.a = \frac{47}{42}$$

N'importe laquelle des variables correspondantes est candidate à rentrer dans la base. Malgré tout, de façon à choisir la variable qui, dans le dictionnaire sous-jacent actuel a le plus petit coefficient (ce qui correspond à un des critères possibles de choix), on peut choisir a de façon à ce que $1-y.a$ soit le plus petit possible, c'est-à-dire de façon à ce que $\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\frac{1}{7}a_4$ soit le plus grand possible. Le problème général correspondant s'appelle le problème du "sac à dos", problème auquel nous nous intéresserons dans les chapitres suivants. Ici, ayant déjà établi la liste exhaustive des candidats, il est facile de constater que le "meilleur" des modèles est $(0\ \ 2\ \ 0\ 2)^t$.

3) On détermine d par $B.d = a$. Dans notre exemple, en notant d_1, d_2, d_3, d_4 les composantes de d :

$$\begin{aligned} 2\,d_1 &= 0 \\ 2\,d_2 &= 2 \\ 3\,d_3 &= 0 \\ 7\,d_4 &= 2 \end{aligned} \qquad d = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

4) on cherche la variable sortante. Lorsque toutes les variables hors-base sauf x sont nulles :

$$X_B = \begin{pmatrix}48{,}5\\305 - x\\\frac{395}{3}\\\frac{211}{7} - \frac{2}{7}x\end{pmatrix}$$

$x \leq 105{,}5$ et quand $x = 105{,}5$, c'est la quatrième variable de l'ancienne base qui est nulle, et qui donc sort de la base.

5) On actualise B et $X_B{}^*$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad X_B{}^* = \begin{pmatrix} 48{,}5 \\ 305\text{-}105{,}5 \\ \frac{395}{3} \\ 105{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48{,}5 \\ 199{,}5 \\ \frac{395}{3} \\ 105{,}5 \end{pmatrix}$$

La valeur de z correspondante vaut $\frac{2911}{6}$ 9 485,17.

Etape 2 :

1) On cherche y tel que $y.B = (1, 1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} 2\,y_1 &= 1 \\ 2\,y_2 &= 1 \\ 3\,y_3 &= 1 \\ 2\,y_2 + 2\,y_4 &= 1 \end{aligned} \qquad y = (\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{3}\ 0)$$

2) On cherche un modèle a tel que $y.a > 1$ c'est-à-dire :

$\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 > 1.$

Rappelons $45\,a_1 + 36\,a_2 + 31a_3 + 14\,a_4 \leq 100.$

Si $a_1 = 2$: $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ et $y.a = 1.$
Si $a_1 = 1$ et $a_2 = 1$: $a_3 = 0$ et $y.a = 1.$
Si $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$: $a_3 \leq 1$ et $y.a \leq 1.$
Si $a_1 = 0$ et $a_2 = 2$: $a_3 = 0$ et $y.a = 1.$
Si $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, on a un modèle pour lequel $y.a > 1$: $(0\ 1\ 2\ 0)^t$
Si $a_1 = 0$ et $a_2 = 0$: $a_3 \leq 3$ et $y.a \leq 1.$

On fait entrer dans la base la variable correspondant au modèle $a = (0\ 1\ 2\ 0)^t$.

3) On cherche d tel que $B.d = a$.

$$\begin{aligned} 2\,d_1 &= 0 \\ 2\,d_2 + 2d_4 &= 1 \\ 3\,d_3 &= 1 \\ 2\,d_4 &= 0 \end{aligned} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) On cherche la variable sortante. Quand toutes les variables hors-base sauf la variable x correspondant à a sont nulles :

$$X_B = \begin{pmatrix} 48{,}5 \\ 199{,}5 - \frac{1}{2}x \\ \frac{395}{3} - \frac{2}{3}x \\ 105{,}5 \end{pmatrix}$$

$x \leq \frac{395}{2}$ et quand $x = \frac{395}{2}$, c'est la troisième variable de base qui s'annule et donc sort de la base.

5) On réactualise :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad X_B{}^* = \begin{pmatrix} 48{,}5 \\ 100{,}75 \\ 197{,}5 \\ 105{,}5 \end{pmatrix}$$

La valeur de z correspondant à cette nouvelle solution basique est 452,25.

Etape 3 :

1) On cherche y tel que $y.B = (1, 1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} 2\,y_1 &= 1 \\ 2\,y_2 &= 1 \\ y_2 + 2\,y_3 &= 1 \\ 2y_2 + 2\,y_4 &= 1 \end{aligned} \qquad y = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, 0)$$

2) $y.a = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3$

L'étude faite à l'étape précédente montre que, pour tout modèle, $y.a \leq 1$. Dans le dictionnaire actuel, tous les coefficients des variables hors-base dans la ligne exprimant z sont positifs ou nuls ; la solution basique actuelle est optimale.

Conclusion

Il sera acheté 452,25 m de tissu.
Dans 48,5 m seront découpées deux bandes de 45 cm de large
Dans 100,75 m seront découpées deux bandes de 36 cm de large.
Dans 197,5 m seront découpées une bande de 36 cm de large et deux bandes de 31 cm de large.
Dans 105,5 m seront découpées deux bandes de 36 cm de large et deux bandes de 14 cm de large.

II.5. Exercice pour le chapitre II

Exercice 1

Résoudre, en utilisant la méthode matricielle le problème de programmation linéaire suivant

Maximiser : $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

avec les contraintes :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

III.1. Définition du problème

ATTENTION : Nous ne considérons dans ce chapitre que les problèmes de programmation linéaire écrits sous forme standard. On pourrait néanmoins définir le problème dual de tout problème de programmation linéaire.

On considère donc le problème :

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{sous les contraintes} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \text{pour } i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, n. & \end{array}$$

S'il existe des y_i, positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, alors on a :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

D'où : $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ et cette dernière quantité donne donc un majorant de la fonction objectif.

Le problème dual (D) du problème (P) s'écrit :

$$\text{Minimiser} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$(D) \qquad \text{sous les contraintes} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, n$$

$$y_i \geq 0, \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, m.$$

Le problème (P) prend alors le nom de problème primal.

On voit que, pour toute solution réalisable $y_1^* \ldots y_m^*$ du dual (c'est-à-dire satisfaisant les contraintes de (D)), $\sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i$ est un majorant de la fonction objectif du primal.

III.2.Théorème de la dualité

De la définition du problème dual, nous déduisons immédiatement la proposition suivante :

Proposition. *Soient $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ une solution réalisable du problème primal et $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ une solution réalisable du problème dual. On a :*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

De plus, si les deux quantités ci-dessus sont égales, alors $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ constituent une solution optimale du problème primal et $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ une solution optimale du problème dual.

Application : La considération du problème dual nous permet de "vérifier" que nous avons bien trouvé, par l'algorithme du simplexe, une solution optimale, pour un problème donné. Nous allons l'expliquer sur le problème traité dans le premier chapitre. Le problème est :

$$\text{Maximiser} \quad 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$$

$$(P) \qquad \text{Contraintes} \quad \begin{array}{ll} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 & \leq 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & \leq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 & \leq 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

Nous avions établi que l'optimum de ce problème vaut $z^* = 147$ et est obtenu pour $x_1^* = 3$,

$x_2^* = 0, x_3^* = 7, x_4^* = 0$. Nous voulons ici vérifier ce résultat.

Le problèlme dual s'écrit :

$$
(D) \quad \begin{array}{ll}
\text{Minimiser} & 42y_1 + 17y_2 + 24y_3 \\
\text{Contraintes} & 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 7 \\
& 4y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 9 \\
& 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 18 \\
& 7y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 17 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

Rappelons que, dans le dernier dictionnaire, la fonction objectif s'écrivait :

$$z = 147 - 2x_2 - x_4 - 3x_6 - 4x_7$$

Nous considérons les valeurs $y_1^* = 0$; $y_2^* = 3$; $y_3^* = 4$. Ces valeurs ne sont pas choisies au hasard : ce sont les opposés des coefficients respectivement de x_5, x_6, x_7 dans l'expression ci-dessus de z ; nous justifierons ce choix durant la fin de ce paragraphe.

On a : $$42y_1^* + 17y_2^* + 24y_3^* = 147$$

Par ailleurs on vérifie aisément que les y_i^* satisfont les contraintes du problème dual, donc constituent une solution réalisable du dual.

La proposition ci-dessus nous permet d'affirmer que la valeur 147 est l'optimum du problème primal : ayant trouvé une solution réalisable du dual qui donne à la fonction objectif du dual la valeur que la solution trouvée pour le primal donnait à la fonction objectif du primal, nous pouvons affirmer que nous avions trouvé le maximum de la fonction objectif du primal et que nous avons également trouvé le minimum de la fonction objectif du dual. Cette vérification constitue donc un certificat de validité de la solution trouvée pour le primal.

Théorème de la dualité. *Si le problème primal a une solution optimale $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, alors le problème dual a une solution optimale $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ et $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$.*

Nous allons prouver ce théorème fondamental en même temps que la proposition suivante :

Proposition. *Si le problème primal admet une solution optimale et si l'expression de la fonction objectif du primal dans le dernier dictionnaire obtenu par la méthode du simplexe s'écrit : $z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} d_k x_k$ (où x_{n+i} représente la $i^{\text{ème}}$ variable d'écart), alors une solution optimale du problème dual est donnée par $y_i^* = -d_{n+i}$.*

Preuve du théorème de la dualité et de la proposition : Supposons le primal résolu par la méthode du simplexe, exposée dans le chapitre 1. Aux n variables initiales du problème nous avions donc ajouté m variables d'écart $x_{n+1} \dots x_{n+m}$. A la $i^{\text{ème}}$ contrainte du primal sont associées la variable d'écart x_{n+i} et la variable y_i du dual, ce qui établit un lien canonique entre x_{n+i} et y_i. Considérons l'expression de la fonction objectif du primal dans le dernier dictionnaire du simplexe primal :

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} d_k \, x_k$$

Les d_k sont tous négatifs ou nuls (puisqu'il s'agit du dernier dictionnaire) et les d_k associés aux variables en base sont nuls.

Par ailleurs on a $z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$ et $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, par définition des variables d'écart.

Posons : $y_i^* = -d_{n+i} \geq 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

On a :

$$\begin{aligned} z &= z^* + \sum_{k=1}^{n} d_k x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \\ &= z^* - \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} \left(d_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j. \end{aligned}$$

Et par ailleurs :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

A cause de l'indépendance des variables x_j, on déduit des deux dernières égalités :

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

$$c_j = d_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad \text{pour } j = 1, \dots, n$$

Les d_j ($j = 1, \dots, n + m$) étant non positifs, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \qquad \text{pour } j = 1, \dots, n$$

$$y_i^* \geq 0 \qquad \text{pour } i = 1, \dots, m$$

$y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$ forment donc une solution réalisable qui donne à la fonction objectif du

problème dual la valeur z^*. La proposition du début de ce paragraphe permet de conclure.

Remarque : supposons que l'on applique la méthode matricielle du simplexe à un problème de programmation linéaire mis sous forme standard et reprenons les notations du chapitre précédent. Nous avons constaté que le coefficient de la variable x_j $(j = 1, ..., n+m)$ dans l'expression de la fonction objectif en fonction des variables hors-base de la dernière étape est donné par $c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i$, où y est la solution du système $y.B = c_B$. Si x_j est une variable d'écart, alors $c_j = 0$, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ *et* $a_{ii} = 1$. Le coefficient de x_{n+i} $(i = 1, ..., m)$ est donc égale à $-y_i$; la proposition ci-dessus permet d'affirmer que le vecteur y déterminé dans cette dernière étape n'est donc rien d'autre que la solution optimum du problème dual.

III.3. Le théorème des écarts complémentaires : un certificat d'optimalité

L'application exposée dans le paragraphe précédent donne une méthode pour démontrer l'optimalité d'une solution du problème primal mais nécessite la connaissance du dernier pas de la méthode du simplexe. Nous allons voir que l'on peut aussi réussir à fournir un certificat d'optimalité du primal, en connaissant seulement les valeurs $x_1^* \dots x_n^*$ qui donnent son maximum à l'objectif du primal.

Théorème des écarts complémentaires. *Une solution réalisable $x_1^* \dots x_n^*$ du primal est optimale si et seulement si il existe des nombres $y_1^* \dots y_m^*$ tels que :*

$$\cdot\ si \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* < b_i \quad alors \qquad y_i^* = 0$$

$$\cdot\ si\ x_j^* > 0 \qquad alors \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* = c_j$$

$$et\ tels\ que \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* \geq c_j \qquad pour\ j = 1 \dots n$$

$$y_i^* \geq 0 \qquad pour\ i = 1 \dots m.$$

Avant de donner la preuve de ce théorème nous allons l'appliquer à l'exemple du chapitre I.

Considérons la déclaration : "$x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 7$, $x_4^* = 0$ constituent une solution optimale du primal".

Cherchons s'il existe y_1^*, y_2^*, y_3^* vérifiant :

$y_1^* = 0$ puisque la première contrainte du problème "n'est pas saturée".

$$2y_1^* + y_2^* + y_3^* = 7 \quad \text{puisque } x_1^* > 0$$
$$5y_1^* + 2y_2^* + 3y_3^* = 18 \quad \text{puisque } x_3^* > 0$$

Utilisant la nullité de y_1^* , on a :

$$y_2^* + y_3^* = 7$$
$$2y_2^* + 3y_3^* = 18$$

La résolution de ce système donne $y_2^* = 3$, $y_3^* = 4$; ces valeurs satisfont bien les inégalités requises, en effet :

$$4y_1^* + y_2^* + 2y_3^* = 11 > 9$$
$$7y_1^* + 2y_2^* + 3y_3^* = 18 > 17$$

Les deux autres inégalités du même type résultent du système vérifié par y_1^*, y_2^* et y_3^*.

y_1^*, y_2^*, y_3^* sont non négatifs.

La solution proposée pour le primal est bien optimale.

Preuve : Elle se déduit immédiatement du résultat que nous énonçons puis prouvons ci-dessous.

Si on connaît une solution réalisable (x_j^*) du primal et une solution réalisable (y_i^*) du dual, ces solutions sont optimales si et seulement si :

$$x_j^* = 0 \text{ ou } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \qquad \text{et} \qquad y_i^* = 0 \text{ ou } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$$

En effet, d'après le théorème de dualité on sait que si on connait une solution réalisable (x_j^*) du primal et une solution réalisable (y_i^*) du dual, ces solutions sont optimales si et seulement si :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Or on a facilement la suite d'inégalités suivante (conséquence de la réalisabilité des solutions) :

$$\sum_{i=1}^{m} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

On voit donc qu'il y a égalité entre les bornes de cette suite si et seulement si :

$$\left\{x_j^* = 0 \text{ ou } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j\right\} \qquad \text{et} \qquad \left\{y_i^* = 0 \text{ ou } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i\right\}$$

En effet, si, avant sommation, une des inégalités était stricte, il en serait de même après sommation.

Par ailleurs, si l'on peut déterminer les y_i de façon unique, dès lors que l'une des inégalités requises n'est pas vérifiée, on peut en déduire que la solution n'est pas optimale.

III.4. La signification économique du dual

Nous allons montrer ici que la connaissance de la solution du problème dual peut permettre de prendre en compte des données économiques.

Nous allons considérer que :

- les b_i représentent les quantités totales de ressources
- les a_{ij} représentent le nombre d'unités de ressources consommées par unité de produit
-les x_j représentent le nombre d'unités de produit
-les c_j représentent la valeur unitaire du produit j
- la relation à l'optimum, $z^* = \sum c_j x_j^* = \sum b_i y_i^*$ induit que les y_i doivent représenter la "valeur unitaire d'une ressource". Ces variables duales y_i sont souvent appelées "prix implicite". Leur valeur donne le montant maximum que l'on serait prêt à payer pour obtenir une unité supplémentaire de la $i^{\text{ème}}$ ressource.

Les relations $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, (j = 1...$m$) peuvent se comprendre à l'aide du schéma suivant : supposons qu'une personne étrangère à l'entreprise souhaite acquérir les ressources de l'entreprise; elle doit proposer pour les ressources un prix tel que ce soit plus intéressant pour l'entreprise de lui vendre ses ressources que de fabriquer elle-même les produit (or c_j est le profit escompté sur le $j^{\text{ème}}$ produit) et bien sûr elle désire faire cet achat des ressources à un prix minimum. Rappelons que les coefficients a_{ij} représentent la quantité de la $i^{\text{ème}}$ ressource requise pour fabriquer une unité de produit j de sorte que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ représente la somme à dépenser pour acquérir les ressources nécessaires à la fabrication d'une unité du $j^{\text{ème}}$ produit.

Nous allons donner un second éclairage à l'aide de notre exemple.

Problème : Le fabricant d'objets de terre cuite a la possibilité de faire faire à ses ouvriers spécialisés dans la peinture quelques heures supplémentaires à un prix horaire t. A-t-il ou non intérêt à utiliser cette possibilité?

Pour résoudre ce problème nous allons énoncer un théorème, que nous démontrerons après avoir résolu notre problème.

Théorème. *On considère le problème* (P)

$$(P) \qquad \begin{array}{lll} \textit{Maximiser} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \textit{Contraintes} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \textit{pour } i = 1 \ldots m \\ x_j \geq 0, & & \textit{pour } j = 1 \ldots n \end{array}$$

On suppose que la base optimale de (P) est non dégénérée. Pour des variations ∂b_i des b_i suffisamment faibles pour que la base optimale de (P) soit encore réalisable pour $(P\delta)$ on considère le problème $(P\delta)$:

$$(P\delta) \qquad \begin{array}{lll} \text{Maximiser} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{Contraintes} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + \partial b_i & \text{pour } i = 1 \ldots m \\ x_j \geq 0 & & \text{pour } j = 1 \ldots n \end{array}$$

La variation de la valeur optimum de la fonction objectif du programme linéaire est $\sum_{i=1}^{m} y_i^* . \partial b_i$ où $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ est solution optimale du dual de (P).

Notons que la non dégénérescence implique l'unicité des y_i^*.

Pour notre problème appelons u le nombre d'heures supplémentaires pour la peinture (u petit). La variation du second membre est $(0, 0, u)$. La solution optimale du dual est $(0, 3, 4)$. La variation de la fonction objectif est donc égale à 4u. C'est là la variation du chiffre d'affaires que le patron peut espérer de u heures supplémentaires, mais ce n'est pas là un bénéfice net puisqu'elles lui coûteront tu francs.

On voit qu'il a intérêt à recourir à cette solution dès que $t \leq 4$F/heure (il y a peu de chance qu'il puisse convaincre ses ouvriers de faire des heures supplémentaires à ce prix !). On retrouve là l'interprétation de y_i^* : valeur unitaire de la ressource.

Preuve du théorème : Nous reprenons pour cette preuve les notations du chapitre sur la forme matricielle de la méthode du simplexe. Nous avons remarqué plus haut que la solution du problème dual est donnée par le vecteur y vérifiant $y.B = c_B$ dans la dernière étape de la méthode matricielle. La valeur du produit scalaire $y.b$ n'est autre que $c_B.B^{-1}.b$, c'est-à-dire la valeur à l'optimum de la fonction objectif du primal.

Supposons que b soit transformé en $b + \delta b$, cette variation étant suffisamment petite pour que la base déterminée à la dernière étape reste une base réalisable. L'expression de $x_B{}^*$ où la matrice B est inchangée nous donne la limite sur les variations admissibles de b. Aucun coefficient n'étant changé dans la matrice A et dans le vecteur c, la base optimale pour (P) l'est aussi pour $(P\delta)$ et la valeur optimale de $(P\delta)$ est $c_B.B^{-1}.(b + \partial b) = c_B.B^{-1}.b + c_B.B^{-1}.\partial b$: le théorème est ainsi démontré.

III.5. Problème dual réalisable

L'utilisation du dual permet, sans utiliser l'algorithme à deux phases décrit dans le premier chapitre, de résoudre un problème de programmation linéaire où la solution nulle n'est pas réalisable, pourvu que les coefficients c_j de la fonction objectif du problème écrit sous forme standard soient tous négatifs. Un tel problème est dit dual-réalisable.

Exemple : Considérons le problème linéaire

Minimiser $z = x_1 + x_2$

Contraintes
$$3x_1 + x_2 \geq 4$$
$$-7x_1 + x_2 \geq -7$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

dont l'écriture, sous forme standard est :

Maximiser $z = -x_1 - x_2$

Contraintes
$$-3x_1 - x_2 \leq -4$$
$$7x_1 - x_2 \leq 7$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Le dual s'écrit :

Minimiser $-4y_1 + 7y_2$

$$\text{Contraintes} \quad \begin{aligned} -3y_1 + 7y_2 &\geq -1 \\ -y_1 - y_2 &\geq -1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\text{Maximiser} \quad 4y_1 - 7y_2$$

$$\text{Contraintes} \quad \begin{aligned} 3y_1 - 7y_2 &\leq 1 \\ y_1 + y_2 &\leq 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des vecteurs d'écarts constituent maintenant une base réalisable : la méthode du simplexe ne nécessite qu'une seule phase.

III.6. Exercices sur le Chapitre III

Exercice 1 : On propose la solution : $x_1^* = 0$; $x_2^* = \frac{4}{3}$; $x_3^* = \frac{2}{3}$; $x_4^* = \frac{5}{3}$; $x_5^* = 0$ pour le problème

$$\text{Maximiser} \quad 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{Contraintes} \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 &\leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &\leq 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 &\leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &\leq 1 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ x_3 \geq 0\ ;\ x_4 \geq 0\ ;\ x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Est-ce correct ?

Exercice 2 : cet exercice s'inspire d'un exercice extrait de l'ouvrage de Sakarovitch

Un constructeur de postes de télévision possède 4 modèles à son catalogue : le portatif noir et blanc (M_1), le standard noir et blanc (M_2), le standard couleur (M_3) et le couleur de luxe (M_4). L'entreprise comporte deux ateliers : montage et tests. Les durées nécessaires de passage dans chacun des deux ateliers de chacun des 4 modèles sont donnés par le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3	M_4
Montage	8	10	12	15
Tests	2	2	4	5

D'autre part la force de travail de l'atelier de montage est 6000 h/mois, celle de l'atelier de tests 1500 h/mois et les profits relatifs à la fabrication des postes sont de 400F, 600F, 800F et 1000F respectivement pour M_1, M_2, M_3, et M_4. Enfin, l'entreprise dispose chaque mois de 450 transformateurs, de 300 tubes cathodiques couleurs, alors que le nombre de tubes cathodiques noir et blanc n'est pas limité.

a)Ecrire et résoudre le problème de maximisation du profit de la firme.

b) Le profit sur le poste M_3 a été mal évalué. La solution optimale est-elle modifiée si celui-ci passe de 800 à 850 F? Même question s'il passe de 800F à 900F. Dans chaque cas, on donnera, le cas échéant, la nouvelle solution optimale.

c) On peut obtenir des transformateurs et des tubes couleurs supplémentaires aux prix respectifs de 200F et 500F. Conseilleriez-vous d'acheter l'un ou l'autre de ces éléments, ou les deux? On donnera, le cas échéant, une indication sur la quantité à acheter.

d) En fait, l'entreprise n'achète ni transformateur, ni tube couleur en supplément (le fournisseur est jugé non fiable), mais elle envisage de lancer sur le marché un nouveau modèle "sport" qui nécessiterait 10 heures de montage, 3 heures de tests et donnerait un profit de 800F. Evidemment, dans la constitution de ce nouveau modèle entreraient un transformateur et un tube couleur : pensez-vous qu'il soit intéressant de lancer ce produit? Si oui quel nouveau plan de fabrication faut-il envisager?

Exercices

THÉORIE DES GRAPHES : notions de base

PREMIER PROBLÈME :

Soit la matrice M = matrice binaire associée au graphe G

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

1°) Tracer le graphe représentatif de cette matrice.

2°) Donner la matrice d'incidence de ce graphe.

3°) Calculer M^2, M^3, M^4. Discuter la signification des coefficients non nuls de chaque matrice.

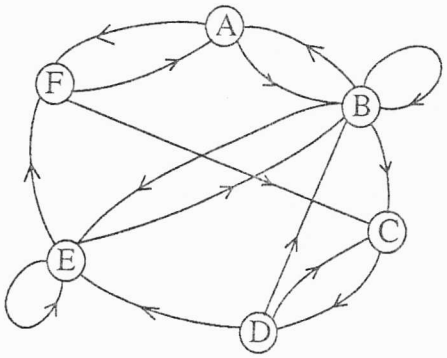
4°) Calculer $M^{[2]}$, $M^{[3]}$, $M^{[4]}$. Que pouvez-vous en dire ?

5°) Calculer : $A = I \dot{+} M \dot{+} M^{[2]} \dot{+} M^{[3]} \dot{+} M^{[4]}$. Interpréter A.

6°) Appliquer l'algorithme de ROY-WARSHALL. Que remarquez-vous ?

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans le graphe G ci-dessous :



1°) Enumérer $\Gamma^+(A)$, ..., $\Gamma^+(F)$ et $\Gamma^-(F)$.

2°) Donner les demi-degrés intérieurs et extérieurs de chaque sommet.

3°) Donner un exemple de chemin simple mais non élémentaire.

4°) Existe-t-il un circuit hamiltonien dans G ?

5°) Tracer le graphe non orienté déduit de G .

6°) G est-il connexe ? Fortement connexe ?

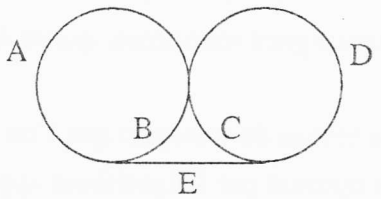
TROISIÈME PROBLÈME

Soit le schéma du circuit électrique de Laurent. Chaque aiguillage a deux positions possibles.

Laurent a remarqué qu'au bout d'un certain temps, quelle que soit la position initiale du train, il n'emprunte jamais la partie E .

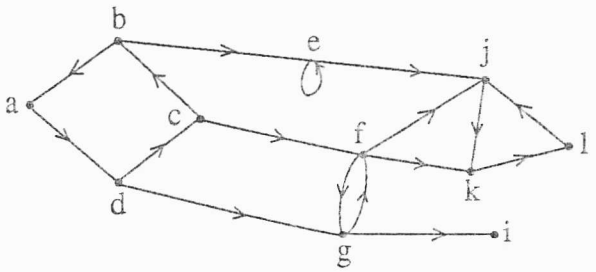
1°) Pouvez-vous, à l'aide d'un graphe à 10 sommets, expliquer pourquoi ?

2°) Qu'arrive-t-il si l'on ajoute le tronçon F symétrique de E ?



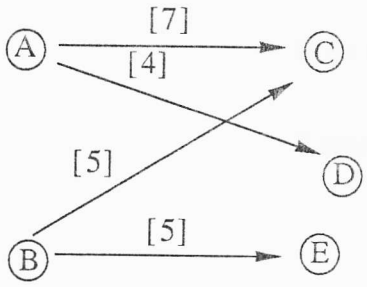
QUATRIÈME PROBLÈME

Décomposer le graphe ci-dessous en composantes fortement connexes et les ordonner.



FLOTS

Une certaine marchandise X est disponible dans deux ports A et B selon les quantités respectives 10 et 10 et est attendue dans les trois ports C, D et E selon les quantités respectives 9, 12 et 7. Les lignes maritimes existantes sont représentées par les arcs du graphe tracé ci-dessous :



Ces arcs sont affectés d'une capacité représentant la quantité totale maximale qui peut être transportée sur la ligne correspondante.

1°) Est-il possible de satisfaire toutes les demandes ?

2°) Comment organiser les expéditions de façon à livrer un maximum de marchandises ?

On commencera **obligatoirement** par expédier une quantité 7 de A vers C et on complétera pour les autres lignes maritimes, quitte à modifier ultérieurement cette décision si nécessaire.

On utilisera pour cela un réseau de transport que l'on précisera.

Rechercher alors un flot optimal par l'algorithme approprié (donner le détail de son application) et donner la coupe minimale correspondante.

AFFECTATIONS

Lors d'un bal, cinq hommes et cinq femmes désirent danser. On cherche à former le maximum de couples (homme-femme) en tenant compte du tableau suivant qui indique l'ensemble des couples possibles :

	Marie	Claire	Suzanne	Anne	Jeanne
Joseph	I	C	I	I	I
Paul	C	I	I	I	I
Luc	C	C	I	I	I
Bernard	C	C	I	I	C
François	I	I	C	C	C

C indique l'existence d'une compatibilité et I son absence.

On veut résoudre ce problème à l'aide d'un réseau de transport dans lequel la capacité de tout arc vaut 1. Pour cela :

1°) Trouver un graphe représentant les compatibilités.

2°) Transformer ce graphe en réseau de transport de manière à ce qu'un flot maximal sur ce réseau donne une réponse au problème que l'on se pose. Justifiez en détail votre réponse.

PROGRAMMES DE TRANSPORT

Une société de transport routier doit assurer le transport d'un certain type de marchandises de trois dépôts, notés D1, D2 et D3, vers quatre destinations, notées C1, C2, C3 et C4. La disponibilité de chaque dépôt est de 10 tonnes et les demandes sont respectivement de 7, 4, 14 et 5 tonnes pour les clients C1, C2, C3 et C4. La matrice ci-dessous représente le coût de transport d'une tonne de marchandise entre un dépôt donné et un client donné :

	C1	C2	C3	C4
D1	5	10	11	21
D2	6	8	11	2
D3	21	12	3	5

La société désire déterminer la plan de transport de coût minimum.

1°) Donner une solution de base de départ par la méthode de la différence maximale (heuristique de BALAS-HAMMER).

Quel est le coût de cette solution ?

2°) Déterminer le plan de transport optimal. L'optimum est-il unique ?

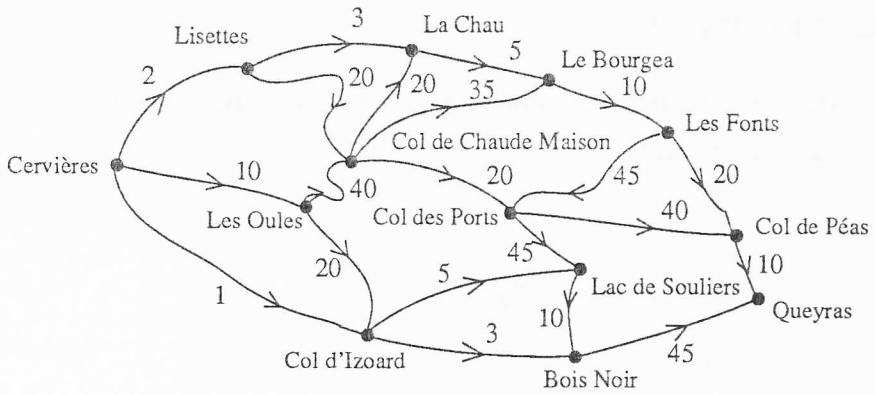
3°) Suite à une amélioration du réseau entre le dépôt D2 et le client C1, le coût de transport, par tonne, passe de 6 à 4 entre D2 et C1.

La solution précédente est-elle toujours optimale ? Sinon déterminer la nouvelle solution optimale.

CHEMINS OPTIMAUX

PREMIER PROBLÈME

En suivant le GR 58



Au chalet du Syndicat d'Initiative de Cervières (Hautes-Alpes), les guides disposent d'une carte d'état major annotée comme ci-dessus. Les valuations portées sur les sentiers indiquent le niveau de difficulté afférent à chaque tronçon.

La belle randonnée à faire (avec guide) est de gagner le Queyras où vous attend un bon chalet bien aménagé et ... un car pour rentrer.

Les guides mesurent la difficulté totale d'une randonnée par la somme des niveaux de difficulté des différents tronçons de sentiers empruntés.

Un professeur en vacances à Cervières souhaite faire la randonnée en empruntant la voie la plus facile. Vous pouvez l'aider. Pour ce faire, tracer un graphe à sommets numérotés de 1 à 13, le 1 étant attribué à Cervières, le 13 à Queyras.

1°) En utilisant l'algorithme de FORD, trouver le chemin de difficulté minimale de Cervières vers tout autre sommet ; indiquer pour chacun sa valeur de difficulté sur le graphe et préciser l'itinéraire que doit emprunter ce professeur.

2°) L'algorithme de FORD est-il le mieux adapté pour résoudre ce problème sur ce graphe ? Justifiez votre réponse et indiquez en détail comment procéder autrement.

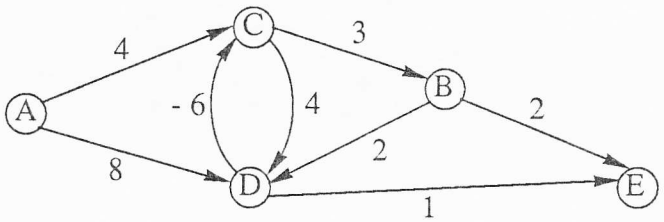
3°) Arrive à Cervières un groupe de sportifs bien entraînés qui veulent, eux, accomplir la randonnée la plus difficile.

Peut-on encore utiliser l'algorithme de FORD pour trouver leur itinéraire ? Détaillez votre réponse.

4°) Déterminez alors de manière **la plus efficace possible** ce nouvel itinéraire et donnez sa mesure de difficulté (*Conseil pratique : n'empruntez jamais seul à ski ce dernier itinéraire !*).

DEUXIÈME PROBLÈME

En utilisant la méthode matricielle, donner les chemins de valeur maximale entre tout couple de sommets du graphe suivant :



Pourrait-on chercher les chemins de valeur minimale ?

ORDONNANCEMENTS DE PROJETS

PREMIER PROBLÈME

Un projet a été décomposé en 8 tâches élémentaires. Dans le tableau ci-dessous, on a indiqué, pour chaque tâche, quelle est sa durée et quelles sont les tâches préalables :

tâches	tâches préalables	durée en jours
a	-	2
b	-	3
c	-	7
d	b, h	4
e	a	10
f	a, d	6
g	b, c	5
h	-	1

On désire trouver un ordonnancement qui minimise la durée totale du projet.

1°) Résoudre à l'aide de la méthode des potentiels.

Indiquer **en clair** la date de début **au plus tôt** de chaque tâche, le chemin critique et sa durée. Dessiner le graphe des potentiels.

2°) Dans le tableau suivant, on liste les tâches (avec leur durée) et, au-dessous de chaque tâche x, on figure les tâches suivant immédiatement x, ainsi que leur date de début au plus tard :

a : 2		b : 3						e : 10		...
	e f							13	F	...

Compléter ce tableau en donnant la valeur de la date de début **au plus tard** de chaque tâche.

3°) Tracer le graphe PERT associé au problème, en veillant à ne pas introduire de contraintes étrangères au problème (plusieurs tâches fictives sont nécessaires).

Vérifier le chemin critique **à l'aide d'un algorithme** du cours.

DEUXIÈME PROBLÈME

Montage d'un film

Un producteur de cinéma est confronté au problème du planning de son prochain film "Heroin for a hero" et vous soumet les tâches qui doivent être effectuées :

Code de la tâche	Définition	Durée	Antériorités
A	Ecriture du scénario	30	
B	Choix et recrutement des comédiens	12	ne peut commencer que 15 jours après le début de A
C	Choix du lieu du tournage	8	ne peut commencer que 20 jours après le début de A
D	Découpage technique	4	A et C doivent être terminées
E	Préparation des décors	7	C et D doivent être terminées
F	Tournage des extérieurs	10	A, B, C et D doivent être terminées
G	Tournage des intérieurs	12	D, E et F doivent être terminées
H	Synchronisation	3	F et G doivent être terminées
I	Montage	14	H doit être terminée
J	Accompagnement sonore	7	ne peut commencer que {3 jours après le début de I} et {après la fin de H}
K	Mixage	6	I et J doivent être terminées
L	Tirage de la copie zéro	1	ne peut commencer que 2 jours après la fin de K

1°) Déterminer par la méthode potentiels-tâches l'ordonnancement au plus tôt des tâches. Donner le chemin critique.

2°) Supprimer les contraintes d'antériorité obtenues par transitivité.

3°) Découper les tâches A et I en sous-tâches et ajouter une tâche fictive K' de durée 2 (par exemple, A donne : A_1 de durée 15 ; A_2 de durée 5 précédée par A_1 ; A_3 de durée 10 précédée par A_2).

4°) Tracer un graphe PERT. Quel inconvénient a cette méthode par rapport à la méthode potentiels-tâches ?

5°) Les arcs fictifs introduits dans votre graphe PERT sont-ils indispensables ? Justifier votre réponse pour chacun de ces arcs.

RAPPEL DE CALCUL DES PROBABILITÉS

PREMIER PROBLÈME

Soit une main au bridge, c'est-à-dire 13 cartes tirées au hasard parmi 52 cartes.

1°) Quelle est la probabilité q_k d'avoir exactement k as $(0 \leq k \leq 4)$.

Vérifier que $\sum_{k=0}^{4} q_k = 1$.

2°) Quelle est la probabilité d'avoir **au moins un as** (la calculer numériquement).

3°) Quelle est la probabilité d'avoir une main rouge ?

DEUXIÈME PROBLÈME

Un lot de 12 pièces contient 4 pièces défectueuses. On tire au hasard 3 pièces, l'une après l'autre (sans remise après tirage).

Calculer la probabilité qu'aucune des pièces ne soit défectueuse.

TROISIÈME PROBLÈME

Dans un lot de coton d'une quantité donnée, 75 % des fibres en moyenne ont moins de 45 mm de longueur et 25 % sont de longueur égale ou supérieure à 45 mm.

Quelle est la probabilité pour que, sur 3 fibres tirées au hasard, 2 soient plus longues et une plus courte que 45 mm ?

QUATRIÈME PROBLÈME

On considère deux urnes :

- U_1 contenant 4 boules blanches
- U_2 contenant 3 boules blanches et 1 noire.

Un individu choisit une urne au hasard et tire deux boules successivement dans cette urne.

1°) a) Sachant qu'il remet la boule après le 1er tirage, calculer la probabilité de tirer deux boules blanches.

b) Sachant que la 1ère boule est blanche, calculer la probabilité que la 2ème le soit.

2°) Mêmes questions avec un tirage sans remise.

CINQUIÈME PROBLÈME

Un atelier usine des boulons ; il utilise trois machines A, B et C qui produisent respectivement 25, 35 et 40 % du nombre total de boulons fabriqués. Ces machines produisent respectivement 5 %, 4 % et 2 % de boulons défectueux.

On tire un boulon au hasard dans un lot de fabrication et on trouve qu'il est défectueux.

Quelles sont les probabilités qu'il ait été produit par A ? par B ? par C ?

SIXIÈME PROBLÈME

Un laboratoire a mis au point un premier test sur des composants électroniques. On sait que 2 % des composants contrôlés sont défectueux.

Les premiers résultats du test sont les suivants :

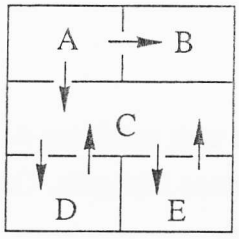
- 98 fois sur 100, le test s'est révélé négatif (composant déclaré "non défectueux"), alors que le composant n'était pas défectueux ;
- 95 fois sur 100, le test s'est révélé positif, alors que le composant était défectueux.

Quelle est la probabilité qu'un composant soit réellement défectueux lorsque son test se révèle positif ? Est-ce un bon test ?

CHAINES DE MARKOV

PREMIER PROBLÈME

Un expérimentateur dispose d'une cage complexe (composée de cinq cases A, B, C, D et E) dans laquelle il enferme un animal afin d'étudier son comportement :



Il observe l'animal à des instants rapprochés $(0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots)$ entre lesquels le captif ne peut effectuer qu'une "transition" : aller vers une autre case ou décider de rester dans la case où il se trouve. Ainsi entre deux instants voisins $m\tau$ et $(m+1)\tau$ $(m \in \mathbb{N})$: l'animal peut aller de A vers B avec la probabilité 0,5, de A vers C avec la probabilité 0,3, ou rester en A. De C, il peut aller en D avec la probabilité 0,4 ou vers E avec la probabilité 0,3 ou rester en C. De D, il peut aller vers C avec la probabilité 0,3 ou rester en D. Enfin de E, il peut aller vers C avec la probabilité 0,4 ou rester en E.

1°) On s'intéresse à la position de l'animal à tout instant $k\tau$ $(k \in \mathbb{N})$: associer à cette position aléatoire le modèle convenable étudié en cours.

2°) A $t = 0$, l'animal est mis dans la case A. Que peut-il se passer ?

Evaluer les probabilités de le trouver en A, B, C, D ou E à $t = \tau$, puis à $t = 2\tau$.

Les explications et le calcul demandés sont à fournir dans le cadre du modèle établi à la question précédente.

3°) a) On met l'animal en case C, à $t = 0$. Que peut-il se passer ?

On simplifiera le modèle en supprimant les cases inutiles.

b) A $t = 0$, on met l'animal en E ; quelle est la probabilité de le trouver dans chacune des cases au bout d'un temps très long ?

Justifier **en détail** la validité de ce calcul.

DEUXIÈME PROBLÈME

Un garagiste parisien dispose d'un parc de quatre camionnettes qu'il loue à la journée. Chaque véhicule, pour chaque jour où il est loué, peut subir une panne avec la probabilité p ou -au contraire- fonctionner sans problème avec la probabilité $q = 1 - p$.

Le garagiste effectue les réparations nécessaires **uniquement en soirée**. La réparation d'une camionnette nécessite exactement une soirée de travail. Si plusieurs véhicules sont en panne à la fin d'une journée, une seule sera donc réparée le soir même.

Ainsi le parc, au début de chaque journée, comporte-t-il au moins une camionnette en état de marche.

Cependant, le garagiste a pour habitude de louer, un jour donné, des véhicules seulement **si deux camionnettes au moins** sont en état de marche au début de cette journée.

La demande de location de véhicules étant chaque jour supérieure à l'offre, le nombre de camionnettes en location pour un jour donné est égal au nombre c de camionnettes en état de marche au début de cette journée si $c \geq 2$; il est égal à zéro sinon (c'est-à-dire si $c = 1$).

Le nombre X de camionnettes en panne à la fin d'une journée lors de laquelle m véhicules ont été loués $(2 \leq m \leq 4)$ est une variable aléatoire suivant une loi binomiale dont on rappelle la loi de probabilité :

$$P[X = k] = C_m^k \; p^k \; q^{m-k} \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, m$$

1°) a) Quels sont les quatre états du parc possibles en début de chaque journée ?

Quelles sont les transitions possibles à partir de chacun de ces états, entre le début de la journée $\mathbf{n}$ et celui de la journée $\mathbf{n+1}$?

b) Donner la matrice des probabilités de transition et le graphe associé (pour $0 < p < 1$). Quel modèle classique reconnaissez-vous ?

On vérifiera que la matrice **(4 x 4)** trouvée comporte quatre termes nuls et un terme égal à 1, un terme égal à $4pq^3 + q^4$, alors que les autres termes s'expriment à l'aide de la loi binomiale.

(*Rappel* : $C_m^m = C_m^0 = 1$).

2°) Initialement les quatre camionnettes sont en état de marche. Evaluer les probabilités des états du parc au bout d'une journée, puis de deux jours avec :

$$p = q = \frac{1}{2}$$

3°) Au bout d'un grand nombre de jours de location, existe-t-il une limite aux probabilités des états du parc ? Justifier **en détail**.

Vérifier que cette limite pour $p = q = \frac{1}{2}$ est :

$$\left[\frac{61}{361}, \frac{196}{361}, \frac{88}{361}, \frac{16}{361}\right]$$

4°) a) Reprendre la modélisation lorsque $\mathbf{p = 0}$.

b) Même question avec $\mathbf{p = 1}$

Caractériser la nature des états dans chacun de ces deux cas.

PROCESSUS DE MARKOV

Le service comptable d'une entreprise comporte 5 personnes ; celles-ci utilisent deux terminaux informatiques situés dans une salle voisine de leur bureau. Chaque comptable accède en moyenne 5 fois par heure (selon une loi de Poisson) à un terminal pour une transaction dont la durée moyenne est de 4 minutes (régie par une loi exponentielle). Lorsque les deux terminaux sont occupés, tout nouvel arrivant fait la queue.

1°) Quelle est la valeur du taux α de traitement de chaque terminal (prendre l'heure comme unité de temps) ? Celle du taux β d'accès à la salle des terminaux, **pour un comptable donné** ?

2°) a) Modéliser le fonctionnement de la salle des terminaux à l'aide d'un processus stochastique approprié. On notera E_k l'état pour lequel k comptables sont présents dans la salle des terminaux. Quel est le nombre total d'états ?

b) Dans l'état E_k, combien de comptables sont-ils susceptibles de se rendre à la salle des terminaux ?
Combien de terminaux sont-ils occupés ?

c) Tracer le graphe simplifié des transitions entre t et $t + dt$ et valuer ses arcs **avec soin** par les taux de transition correspondants en vous aidant du 2°) b).
Quel processus classique reconnaissez-vous ?

3°) Justifier **en détail** l'existence d'un régime permanent. Calculer alors les probabilités des états (sous forme de fraction simplifiée) ; montrer que $\pi_0^* = \dfrac{162}{737}$.

Quelle est la probabilité d'une attente nulle ? Calculer sa valeur numérique.

4°) Quel est le nombre moyen de terminaux utilisés ?
Prouver que le temps moyen total (exprimé en heures) qui est perdu en attente par heure de fonctionnement pour l'ensemble du personnel du service comptable est :

$$1 \cdot \pi_3^* + 2 \cdot \pi_4^* + 3 \cdot \pi_5^*.$$

Evaluer numériquement.

5°) Une nouvelle procédure de contrôle budgétaire fait passer la durée moyenne d'une transaction à 5 mn. On décide alors l'acquisition d'un troisième terminal : compense-t-elle l'allongement de la durée moyenne des transactions (au sens du temps perdu en attente par les comptables) ?

FILES D'ATTENTE

Un centre d'information comporte **trois bureaux** travaillant indépendamment en parallèle.

Des usagers de ce centre se présentent aléatoirement pour obtenir des informations, selon une loi de Poisson de taux λ : lorsqu'un bureau est libre, ils sont immédiatement reçus, sinon ils passent dans la salle d'attente qui (on le suppose pour simplifier les calculs) ne peut contenir que **deux** personnes.

Lorsqu'un client se présente et que cette salle d'attente est complète, il remet à plus tard sa visite : on suppose que ceci ne perturbe pas le caractère poissonnien de la loi des arrivées des usagers.

La durée aléatoire passée par un usager dans un bureau d'information suit une loi exponentielle de taux μ.

1°) a) Quel est le nombre maximal N d'usagers pouvant se trouver simultanément dans le centre ?

b) Modéliser le système à l'aide d'un processus de MARKOV particulier, à reconnaître.

Décrire en détail chacun des $N + 1$ états possibles du système.

Tracer et valuer le graphe des transitions entre t et $t + dt$.

Donner la notation de KENDALL de cette file d'attente.

2°) Ce processus est-il ergodique ? Justifier **en détail**.

3°) Sachant que $\lambda = 2\mu$:

a) Calculer numériquement les probabilités de chaque état en régime permanent.

b) Sachant que $\lambda = 10$ arrivées/heure, évaluer le nombre moyen de clients qui arrivent et renoncent à attendre pour une tranche d'une heure.

* * * * * * *

EPITA Ingénierie

Cours de R.O. contre le hasard
(P. SIARRY)

T.D. sur les files d'attente

(1) ÉTUDE DE L'ATTENTE DANS UN ORGANISME PUBLIC :

Un organisme publique est ouvert, chaque jour ouvrable, de 9 h à 17 h sans interruption.

Il accueille, en moyenne, 64 usagers par jour ; un guichet unique sert à traiter le dossier de chaque usager, ceci en un temps moyen de deux minutes et demie. Les usagers, si nécessaire, font la queue dans l'ordre de leur arrivée ; même si la queue est importante, on ne refuse aucun usager.

Une étude statistique a permis de conclure que la durée aléatoire des services suit une loi exponentielle et que les arrivées des usagers forment un processus de Poisson. On suppose que le régime permanent est rapidement atteint.

1. Donner la notation de Kendall de cette file d'attente ; le temps moyen $\overline{t}_f$ passé à attendre ; le temps moyen passé dans l'organisme par chaque usager, $\overline{t}$.
2. Quelles sont les probabilités qu'il n'arrive aucun client entre 15 h et 16 h ? que six clients arrivent entre 16 h et 17 h.?
3. Quelle est, en moyenne et par heure, la durée pendant laquelle l'employé du guichet ne s'occupe pas des usagers ?
4. Quelle est la probabilité d'observer une file d'attente de quatre usagers, derrière celui en cours de service ?

(2) ORGANISATION D'UN MAGASIN D'OUTILLAGE

L'usine Laveblanc fabrique des machines à laver. Située dans la région parisienne, elle occupe un millier d'ouvriers et produit six types différents de machines. La production s'effectue en séries de taille moyenne et nécessite un outillage très diversifié ne permettant donc pas de laisser en permanence aux ouvriers tous les outils qui leur seraient nécessaires: ces nombreux outils sont rangés dans un magasin d'outillage situé dans le hall de montage de l'usine. De ce fait on constate malheureusement la formation de queues d'ouvriers devant les guichets-comptoirs du magasin. Le nombre de magasiniers assurant la distribution des outils influence, naturellement, le temps d'attente ; s'ils sont trop nombreux, les attentes seront réduites, voire nulles : il semble bien inutile alors de payer des magasiniers la plupart du temps inactifs ; si, au contraire, ils sont en nombre insuffisant, les attentes deviendront fréquentes, longues et coûteuses (en manque à gagner sur la production non effectuée)...

Ainsi apparaît un problème économique : combien doit-on prévoir de magasiniers, pour distribuer les outils de manière que le coût du temps perdu à attendre par les ouvriers, d'une part, augmenté du coût du temps d'inactivité des magasiniers soit minimal ? Le prix de revient horaire d'un magasinier à été évalué à 30 francs/h, celui du manque à gagner sur production non effectuée par un ouvrier en attente : 60 francs/h.

Précisons l'organisation du magasin : la file d'attente est unique : dès qu'un magasinier a servi un ouvrier, celui qui est en tête de la file d'attente le remplace immédiatement (ou, si la file est vide, le magasinier devient inactif). Les ouvriers

../..

se rangent dans la file dans l'ordre d'arrivée. La direction de Laveblanc a fait procéder à des mesures, exploitées ensuite par un statisticien : en moyenne 96 ouvriers se rendent au magasin chaque heure ; en outre il a observé que : a) l'arrivée d'un ouvrier est indépendante de celle d'un autre ; b) il n'arrive jamais deux ouvriers (ou plus) simultanément ; c) le taux moyen des arrivées ne fluctue pas dans le temps. Ces trois propriétés permettent de conclure que les arrivées aléatoires des ouvriers suivent une loi de Poisson (de taux : λ = 96 arrivées/h).

Par ailleurs, l'étude des temps passés par les magasiniers à servir les ouvriers a permis de conclure que la loi de durée des services est une loi exponentielle de taux : μ = 54 services/h (pour un magasinier donné).

---

1. Donner la notation de Kendall de ce phénomène d'attente ; on notera S le nombre de magasiniers.

   Quelle est la plus petite valeur de S telle que la file d'attente ne s'allonge pas indéfiniment ?

2. La durée de la journée de travail est de 8 heures : combien d'ouvriers se présentent-ils, en moyenne, au magasin d'outillage par jour ?

   Quel est le temps total passé par les magasiniers à les servir (le convertir en secondes) ?

   En supposant qu'il y a deux, puis trois, puis quatre, puis cinq magasiniers, évaluer dans chacun de ces quatre cas, la durée journalière globale d'inactivité des magasiniers en secondes, puis son coût.

3. En utilisant l'abaque jointe, trouver l'attente moyenne par ouvrier selon que S = 2, 3, 4 ou 5. Déterminer la durée totale d'attente journalière puis son coût pour chacun de ces cas.

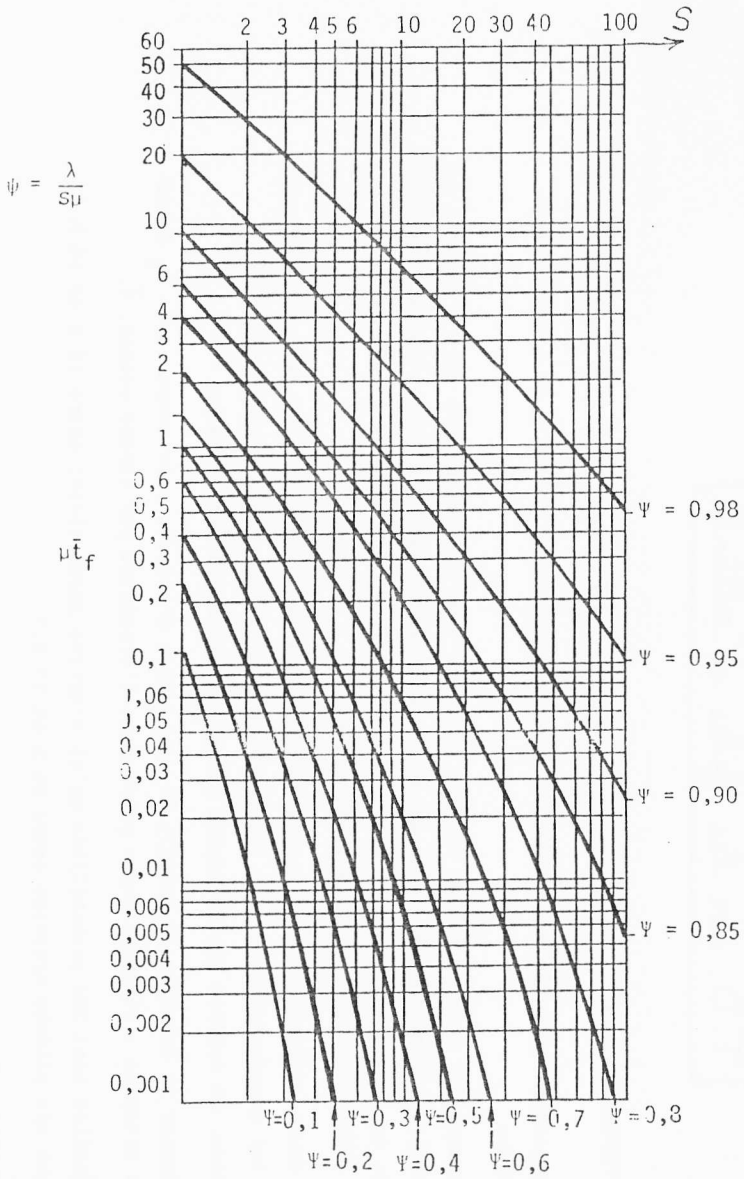
4. Déterminer le nombre de magasiniers qui minimise la somme du coût d'attente totale journalière et du coût de l'inactivité totale journalière.

   Prouver qu'alors, en moyenne, l'un au moins des magasiniers est inactif ...

5. On suppose désormais que l'absentéisme des magasiniers fait que, sur un effectif de S, dans 90% des cas il y a S présents et dans 10% des cas, S - 1 ; l'absentéisme est négligeable au plan de la demande d'outils par les ouvriers.

   Montrer alors qu'il vaut mieux embaucher quatre magasiniers, les absents percevant leur salaire.

ABAQUE donnant le temps d'attente moyen dans la file pour la file M/M/S



UTILISATION : connaissant le nombre de guichets S, le taux des arrivées λ, le taux de service de chaque guichet μ, calculer d'abord $\psi = \frac{\lambda}{S\mu}$ (< 1). Se placer alors sur la courbe de paramètre ψ si elle est tracée, ou sinon la tracer par interpolation. Connaissant l'abscisse S, lire alors sur cette courbe l'ordonnée $\mu\bar{t}_f$, puis en déduire $\bar{t}_f$ par division par μ.

RAPPEL D'ALGEBRE LINEAIRE ET DE GEOMETRIE

1) Déterminer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$

2) Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ en développant par rapport à la 2ème colonne

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ en calculant directement

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ par combinaison linéaire en faisant apparaître une ligne ne contenant qu'un 1 puis des zéros, puis en décomposant selon cette ligne.

3) Trouvez le cofacteur de 7 dans la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, calculer A^{-1}

5) Dire si les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$.

a) $u_1^T = (1, 1, -1)$ $v_1^T = (2, -3, 1)$ $w_1^T = (8, -7, 1)$

b) $u_2^T = (1, -2, -3)$ $v_2^T = (2, 3, -1)$ $w_2^T = (3, 2, 1)$

quand les vecteurs sont liés, exprimer l'un des vecteurs en fonction des 2 autres

Dire si les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants sont linéairement indépendants :

$u^T = (a_1, a_2)$ $v^T = (b_1, b_2)$ $w^T = (c_1, c_2)$.

PROGRAMMATION LINEAIRE : MODELISATION

I/ Une entreprise fabrique deux produits P1 et P2. La fabrication de ces produits nécessite du temps de travail (main d'oeuvre), du temps-machine et de la matière première.

Les coefficients techniques de production ainsi que les prix de vente par unité de produit sont fournis dans le tableau suivant :

	P1	P2
quantité de "travail" (exprimée en heures) nécessaire à la fabrication d'une unité	0,75 h	0,5 h
quantité de "temps-machine" (en h.) nécessaire à la fabrication d'une unité	1,5 h	0,8 h
quantité de matière première (exprimée en nombre d'unités u) nécessaire à la fabrication d'une unité de produit	2 u	1 u
prix de vente par unité (exprimé en unités monétaires : u.m.)	15 u.m.	8 u.m.

Chaque semaine 400 unités de matière première au plus, peuvent être achetées à un prix de 1,5 u.m. par unité.

L'entreprise emploie 4 personnes qui travaillent chacune 40 heures par semaine. La nature de leur travail est la main d'oeuvre.

Ces personnes peuvent effectuer des heures supplémentaires qui sont payées à 6 u.m. l'unité.

Chaque semaine, la disponibilité en temps-machine est de 320h.

En absence de publicité, la demande hebdomadaire du produit P1 serait de 50 unités, celle de P2 de 60 unités ; mais on peut réaliser de la publicité pour développer les ventes : chaque unité monétaire dépensée en publicité sur P1 (repectivement sur P2) augmente la demande hebdomadaire de P1 (resp. de P2) de 10 unités (resp. de 15 unités). Les frais de publicité ne doivent pas dépasser 100 u.m. par semaine. Les quantités de P1 et P2 fabriquées doivent rester inférieures ou égales à la demande réelle (compte-tenu de la publicité).

On définit les 6 variables suivantes :

X1 : nombre d'unités du produit 1 fabriquées par semaine

X2 : nombre d'unités du produit 2 fabriquées par semaine

HS : nombre total d'heures supplémentaires effectuées par semaine

MP : nombre d'unités de matière première achetées par semaine

PUB 1 : nombre d'unités monétaires dépensées en publicité sur P1

PUB 2 : nombre d'unités monétaires dépensées en publicité sur P2

L'entreprise désire fixer la valeur de chacune de ces variables de manière à maximiser son bénéfice : Bénéfice = Chiffre de vente - Somme des coûts variables. Le salaire (coût des heures normales) des quatre personnes est un coût fixe pour l'entreprise.

Question : modéliser le problème à l'aide des six variables qui sont proposées, sous forme de programme linéaire. La résolution n'est pas demandée.

II/-

Une compagnie fabrique deux types de sauces : la sauce à la viande et la sauce aux champignons. Chacune est obtenue en mélangeant les trois ingrédients : boeuf haché, champignons et concentré de tomate. La composition de ces sauces doit respecter les spécifications suivantes :

INGREDIENTS	SAUCE A LA VIANDE	SAUCE AUX CHAMPIGNONS
Boeuf haché	pas moins de 40% du poids total	aucune spécification
Champignons	aucune spécification	pas moins de 30% du poids total
Concentré de tomate	pas plus de 35% du poids total	pas plus de 50% du poids total

La compagnie peut acheter chaque jour jusqu'à :

- 4 000 kg de boeuf haché à 42 F le kg
- 3 200 kg de champignons à 16 F le kg
- 6 000 kg de concentré de tomate à 14 F le kg

Le prix de vente de la sauce à la viande est 84 F le kg, celui de la sauce aux champignons, 72 F le kg

La capacité d'absorption du marché est illimitée.

On note x_{ij} la quantité en kilogrammes d'ingrédients i (boeuf $i = 1$, champignons $i = 2$, concentré $i = 3$) dans le produit j (sauce à la viande $j = 1$, sauce aux champignons $j = 2$).

1) Ecrire les 7 inéquations linéaires traduisant les contraintes de disponibilités et les contraintes concernant les spécifications.

2) Ecrire la fonction bénéfice. On rappelle que le bénéfice est égal au coût de vente moins le coût d'achat.

N.B. : il n'est pas demandé de réduire les expressions algébriques que vous trouverez pour les contraintes et la fonction bénéfice.

III

COMPOSITION D'ALIMENTS POUR LE BÉTAIL

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22 % de protéines et 3,6 % de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

produit brut	1 ORGE	2 ARACHIDES	3 SESAME	pourcentage requis
pourcentage de protéines	12%	52%	42%	22%
pourcentage de graisses	2%	2%	10%	3,6%
coût par tonne	25	41	39	

1. On notera x_j ($j = 1,2,3$) la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème algébriquement.

2. Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème. Le résoudre géométriquement.

Trois espèces de crabes sont pêchées dans les eaux côtières de l'Alaska : le crabe royal (King crab), le crabe des neiges (Snow crab), le crabe "Dungeness", en des lieux différents, mais proches.

Des bateaux sont aménagés pour pouvoir pêcher indifféremment les trois sortes de crabes ; pour un mois donné, dans la zone de "Cook Inlet", la capacité totale de pêche des bateaux est de 1 000 tonnes de crabes.

A l'arrivée des bateaux au port, un tri doit être effectué sur la cargaison : ce tri tient compte, suivant la période, de la taille des carapaces des crabes, de leur qualité, etc... Aussi, après ce tri, ne peut-on utiliser en moyenne que 80% de la quantité totale de crabe royal pêchée, 95% de celle de crabe des neiges et 90% de celle du crabe Dungeness. Les crabes éliminés sont perdus.

Intervient alors un conditionnement : différents points sont situés sur la côte, celui attribué à la zone "Cook Inlet" pouvant conditionner au maximum 900 tonnes de crabe au total pour le mois considéré.

Le crabe royal est le plus demandé, mais, afin de respecter un certain équilibre entre les espèces, il a été établi que la différence entre la quantité pêchée de crabe royal et le tonnage global des deux autres espèces doit être inférieure à 100 tonnes.

On désire établir le plan de pêche qui maximise le bénéfice sachant que l'on gagne 12,5 unités monétaires par tonne de crabe royal pêchée et conditionnée, 8,42 u.m. par tonne pour la seconde espèce et 7,78 u.m. par tonne pour la troisième.

Les pêcheurs connaissent les sites où ils peuvent attraper telle ou telle sorte de crabe (qui ne se mélangent pas : en un lieu donné, on ne rencontre pas simultanément des espèces différentes).

1°) a) Formuler le problème en terme de programme linéaire. On arrondira à l'entier le plus proche chacun des coefficients calculés de la fonction économique.
On multipliera par 100 chaque membre de la contrainte issue de limitation de la capacité de conditionnement.

b) après avoir obligatoirement pratiqué ces modifications, résoudre le P.L. par la méthode algébrique du simplexe.

2°) La solution consistant à pêcher 500 t de crabe royal et 500 t de crabe Dungeness est-elle admissible ? de base ? mêmes questions avec respectivement 550 et 450 tonnes.

I

Soit le P.L. suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \end{cases}$$

$$(MAX)\ Z = x_1 + x_2$$

1°) Montrer que :

$$x_1 = \frac{7}{3}, \quad x_2 = 1$$

est une solution admissible et de base.

2°) Dresser le tableau du simplexe associé à cette solution.

3°) la solution proposée est-elle optimale ? Sinon déterminer la solution optimale.

4°) Que devient la solution optimale de (P) si le coefficient de la variable x_1 dans la fonction économique passe de 1 à 2 ?

II/-

Soit le programme linéaire :

$$\begin{array}{lcl} x_1 \leq 40 & & (1) \\ x_2 \leq 70 & & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 80 & & (3) \\ x_1 + x_2 \geq 20 & & (4) \\ x_1 , x_2 \geq 0 & & \\ \text{Max } 2x_1 + 3x_2 & & \end{array}$$

1) On supprime provisoirement la contrainte (4). résoudre alors à l'aide de l'algorithme du simplexe.

L'optimum trouvé satisfait-il la contrainte (4) ? Qu'en déduisez-vous ?

2) On reprend maintenant le problème avec les quatre contraintes. Quelle est la difficulté initiale de sa résolution ? poser le premier tableau, faire une itération.

Cet exercice suppose assimilé l'emploi des variables artificielles

I

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le problème à l'aide de la méthode des pénalités. Conclusion.
2. Faire une résolution graphique.

II

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 3x_1 &\leq 16 \\ x_1 + x_2 &\leq 27 \\ 2x_2 &\leq 10 \end{aligned} \qquad x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0$$

$$\text{MAX } Z = 36x_1 + 24x_2$$

a) En utilisant obligatoirement la méthode des tableaux, résoudre ce programme. Vérifier graphiquement.

b) Ecrire le programme dual, puis donner le tableau correspondant à l'optimum du dual.

III

Soit le programme linéaire suivant :

PL $\quad \text{Min } z = x_1 + 2x_2$

avec

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Résoudre le PL par l'algorithme du simplexe.
b) Ecrire le programme dual PL* de PL.
c) Donner le tableau optimal de PL*
d) On paramètre la fonction économique de PL qui devient : $z = \lambda x_1 + 2x_2$ ou λ est un réel quelconque.
Donner, selon les valeurs de λ, les différentes solutions possibles.
On résumera l'étude par un tableau.

e) Soit PL' $\quad \text{Max } 3y_1 - 4y_2$

avec

$$\begin{aligned} 2y_1 - 3y_2 &\leq \lambda \\ 3y_1 - y_2 &\leq 2 \\ y_1 \geq 0 \text{ et } y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

où λ est un paramètre réel quelconque.
Donner, selon les valeurs de λ, les différentes solutions possibles.

Problèmes de révision

- I -

Soit le programme linéaire suivant : (P) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 8x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \\ \text{MAX } Z = 2x_1 + x_2 \end{cases}$

1)- On désire résoudre (P) par la méthode des tableaux du simplexe.

a) Quelles sont les difficultés de sa résolution ?

b) Poser le premier tableau du simplexe.

c) Faire une seule itération de la méthode du simplexe

(il n'est pas demandé de poursuivre jusqu'à l'optimum).

2)- Le tableau optimal de (P) est le suivant :

c_i		x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	
0	$\bar{2}$	0	$33/5$	$8/5$	1	36
2	1	1	$6/5$	$1/5$	0	6
	c_j	2	1	0	0	
		0	$-7/5$	$-2/5$	0	Z=12

a) Donner la solution optimale de (P).

b) On suppose que la fonction économique Z varie et devient $Z' = x_1 + 3x_2$. La solution optimale trouvée à la question 2-a est-elle toujours optimale pour la fonction Z'?

3)- Donner le programme linéaire dual de (P).

****

- II -

Un atelier peut produire deux types d'articles A_1 et A_2. Le processus de fabrication de ces deux articles utilise la même matière première précieuse et nécessite l'utilisation de la même machine qui est disponible 10 heures par jour. Les quantités de matière première et le temps machine nécessaires pour la fabrication d'unité de chaque article sont données ci-dessous :

Articles	matière première	temps machine
A_1	2 kg	2 heures
A_2	3 kg	1 heure

Vu le contrat d'approvisionnement en matière première, la production journalière doit consommer au moins 6 kg de celle-ci par jour. D'autre part, pour des raisons de capacité d'absorption du marché, l'atelier ne doit pas fabriquer plus de 4 articles de type A_2 par jour.

Le bénéfice net par unité des produits A_1 et A_2 est le même et est égal à une unité monétaire.
On note x_1 (respectivement x_2) la quantité d'articles de type A_1 (respectivement A_2) produite par jour.
Le programme linéaire qui permet de déterminer le plan de production optimale est le suivant :

$$(P)\quad \begin{cases} x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \\ \text{MAX } Z = x_1 + x_2 \end{cases}$$

1)- On désire résoudre (P) par la méthode des tableaux du simplexe.

a) Poser le premier tableau du simplexe.

b) Faire une seule itération de la méthode du simplexe

2)- Le tableau optimal de (P) est le suivant :

c_i	i	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	1	12
1	2	0	1	1	0	0	4
1	1	1	0	$-1/2$	0	$1/2$	3
	c_i	1	1	0	0	0	
	Δ_i	0	0	$-1/2$	0	$-1/2$	$Z = 7$

a) Donner en clair la solution optimale de (P). Vérifier graphiquement.

b) En réalité, le bénéfice sur l'article A_1 n'est pas constant mais varie suivant les périodes. On note alors par λ ($\lambda \geq 0$) le bénéfice sur cet article. Déterminer alors, en fonction de λ, le plan de production hebdomadaire optimal.

3)- Donner le programme linéaire (D) dual de (P).

4)- Écrire en utilisant les formules de transformation, le tableau optimal (D) (attention pour (D) on maximise -Z'). Quelle est la solution optimale de (D) ?

5)- L'entreprise a décidé de modifier certaines données techniques. En effet, elle décide de faire fonctionner la machine 12 heures par jour (au lieu de 10) et de produire au moins 6 articles de type A_2 par jour (au lieu de 4). Sachant que le bénéfice par chaque article de type A_1 ou A_2 est toujours d'une unité montaire, quel est le nouveau plan de production optimal ?