2 minutes – Algèbre linéaire

Exercice 1 :

Soit A une matrice 3x3.

1. Calculer son polynôme caractéristique/Calculer les valeurs propres

Cf. cours de spé

2. Polynôme minimal de A ?

On appelle polynôme minimal de f noté mf(x) le polynôme normalisé annulateur de f et de degré plus petit.

3. La matrice est-elle diagonalisable ?

Le polynôme minimal est scindé et les racines sont simples (degré 1)

4. Déterminer les sous-espaces propres de A et donner une base de vecteurs

Cf. cours de spé

5. Montrer $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{3} |\lambda|^2\right)^{1/2}$ (Démonstration de la norme de Schur)

Aucune idée pour l'instant…

Exercice 2 :

Soit un système linéaire Ax=B. A matrice 3x3 et B vecteur.

1. Appliquer le théorème de Gauss pour résoudre le système linéaire Ax = B.

Soit $\tilde{A}^{(1)}$ une matrice qui regroupe A et B = $\begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & a & b \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$

1er pivot : $a_{11} \neq 0$

Calcul de $g_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ et $g_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$ $G^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -g_{21} & 1 & 0 \\ -g_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de $\tilde{A}^{(2)} = G^{(1)} \tilde{A}^{(1)}$

2ème pivot : $a_{22} \neq 0$

Calcul de $g_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}}$ $G^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -g_{32} & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de $\tilde{A}^{(3)} = G^{(2)} \tilde{A}^{(2)}$

$\tilde{A}^{(3)}$ permet de résoudre le système. En effet, la partie qui représente la matrice A (les 3 premières colonnes), est triangulaire, ce qui permet une résolution rapide du système linéaire.

2. Donner la factorisation de Gauss A = LU

A = LU

U = $\tilde{A}^{(3)}$ et L = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_{21} & 1 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & 1 \end{pmatrix}$

Il faut ensuite vérifier si A = LU (à la calculatrice)

3. En déduire le déterminant de A

Det(A) = det(L)*det(U) puis la calculatrice fait très bien le boulot pour vous

4. Estimer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre le système par Gauss.

Résoudre le système sur brouillon, compter le nombre d'opérations et voila

5. Soit C une matrice 3x3. Déterminer la matrice J de Jacobi associée à C et calculer le rayon spectral de J.

Pour déterminer la matrice de Jacobi d'une matrice, on se base sur une technique de décomposition de la matrice.
Ainsi, C = D - E - F avec D diagonale, E triangulaire inférieure, valeurs opposés à la matrice initiale et diagonale nulle, F triangulaire supérieure, valeurs opposés à la matrice initiale et diagonale nulle.

$J = D^{-1}(E + F)$
Pour ce qui est du rayon spectrale : $\rho(J) = \|J^n\|^{1/n}$ = max|valeur propres de la matrice J|

<u>Exercice 3 :</u>

Soit A une matrice 3x3

1. Résoudre une équation du $3^{\text{ème}}$ degré en fonction de A.
2. Trouver les racines du polynôme du 3eme degré en fonction de x (en réalité, c'est la même équation que la question 1 sauf que l'on substitue les A par des x, et la matrice identité est remplacé par 1).
3. En déduire A^n pour tout n
4. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I

<u>Exercice 4 :</u>

A carré d'ordre n à coefficient complexe. A vérifie $A^*=-A^3$. A* est la matrice adjointe de A.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que si $\lambda \neq 0$, on a $|\lambda| = 1$.
3. Que peut-on dire des valeurs propres de A