EPITA-ING1

RATTRAPAGE ALGEBRE LINEAIRE

Notes de cours ne sont pas autorisées
Calculatrice est autorisée

Exercice 1 :

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de B
2. Déterminer le polynôme minimal de B
3. La matrice B est –elle diagonalisable ?
4. Déterminer les sous espaces propres de B

Exercice 2 :

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Appliquer l'algorithme de Gauss pour résoudre le système linéaire $Ax = b$ (on explicitera les matrices $\widetilde{A}^{(k)}$ et $G^{(k)}$ $\forall k = 1,2,3$)
2. Donner la factorisation de Gauss $A = LU$
3. En déduire le déterminant de A

Exercice 3 :

Soit la matrice A d'ordre n dont les coefficients sont définis par :

$a_{ij} = n + j - i + 1$ si $j < i$

$a_{ij} = 1 + j - i$ si $j \geq i$

On se propose de résoudre par la méthode de JACOBI, le système linéaire :

$(A + mI)x = b$ où m est un paramètre réel positif et I la matrice identité

1) Si l'on pose $q_k = \exp(2i\pi \frac{k}{n})$ $(k = 0,1,\ldots., n-1)$ où i est le nombre Complexe vérifiant $i^2 = -1$

   Montrer que les vecteurs propres de A sont $v_k = (1, q_k, q_k^2 \ldots., q_k^{n-1})$ $\forall k = 0,1,\ldots.., n-1$

   Donner la valeur propre λ_k associée à v_k
2) Discuter, par rapport à m, la convergence de JACOBI
3) On donne $n = 4$, $b = (1,0,0,0)$ et $m = 19$

   Donner une solution approchée du système $(A + mI)x = b$ telle que $\|b - (A + mI)x\|_\infty \leq 0,03$.