Correction Partiel LOG I

ING 1 2015

1% a) On écrit U_k : réels verts d'ordre k.

$U_0 = \{0; -1; 1\}$ donc vrai pour U_0

Supposons $x \in U_k \Rightarrow -x \in U_k$; k fixé (pour tout x)

alors $U_{k+1} = U_k \cup \{x+y \,;\, xy \,;\, x \in U_k, y \in U_k\}$

Si $\alpha \in U_{k+1} \setminus U_k$ alors $\alpha = x+y$ ou $\alpha = xy$

- $\alpha = x+y \Rightarrow -\alpha = -x-y = (-x)+(-y)$
- $\alpha = xy \Rightarrow -\alpha = (-x)\,y$ où $\begin{cases} x \in U_k \\ y \in U_k \end{cases}$

Or, par induction, $-x \in U_k$ et $-y \in U_k$

d'où $-\alpha \in U_{k+1}$

On prend $k := 5$

U_5 = {réels verts} valide la condition

b) $5 = \Big[\big[(\overset{U_0}{1}+1)+1\big]+1\Big]+1 \in U_5$

U_1

U_2 — U_3 — U_4

c) Par induction $U_5 \subset \mathbb{Z}$ donc ce n'est pas possible

d) par induction $\text{card}(U_k) \leq 3 \times 4^k$

donc U_5 a au plus 3×4^5 éléments

e) 0 est un réel vert par exemple.

2% a) Il n'est pas possible de décrire un quotient (par induction)

b) oui : $P \in \mathbb{Z}[X]$ signifie que P est somme ; produit d'entiers (concaténation de chiffres) ou de X (on écrit XXX... X au lieu de X^n)

c) En particulier $\Sigma^* \subset$ Mobius (n'appliquer que la règle de concaténation)

d) Tout entier relatif est obtenu syntaxiquement comme concaténation de chiffres (éventuellement avec un −).

e) Il manque "espace" (et même toute la ponctuation)

3% On applique la procédure de vérification

a)

	$\wedge$	A	$\Rightarrow$	A	$\Rightarrow$	B	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	B	B	A	C
	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
Σ	1	0	1	0	1	0	1	2	3	2	1	0	$\boxed{-1}$

OK

b) bug à A_2

c)

	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$\wedge$	Z_{42}	X_2	$\vee$	$\neg$	X_4	$\neg$	X_{42}
	1	0	1	-1	-1	1	0	-1	0	-1
Σ	1	1	2	1	0	1	1	0	0	$\boxed{-1}$

ok

d)

	$\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$	E	X	A	M	E	N
Σ	5	4	3	2	1	0	$\boxed{-1}$

ok

e) "$\forall$" on jette

4°/ a) Règle Axiome

b) incorrect pour $\clubsuit = \Rightarrow$

c) incorrect pour $\clubsuit = \Rightarrow$

d) correct

$$\dfrac{\dfrac{\bot \vdash \bot}{\bot \vdash \bot \vee (A \clubsuit B)}}{\bot \vdash A \clubsuit B}$$

AJJ.

($\bot$ neutre de $\vee$)

e) instance de d)

5°/ On réécrit en classique :

$$[\neg(W \vee T) \Rightarrow F] \wedge \neg\bot \equiv ((W \vee T) \vee F) \wedge T$$
$$\equiv W \vee F \vee T$$
$$\equiv T$$

est une tautologie
(excluant les autres cas.

6°/

A	B	C	$A \vee B$	$(A\vee B) \Rightarrow C$	$[--] \Rightarrow B$	$[--] \wedge A$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

réponse c) étant alors la seule.

7°/ On recherche un graphe dont chaque composante connexe est complète (et non orienté).
Seul Graphe 4 convient.

8°/ a) $Q = I_n$ pour la réflexivité

$(Q^{-1})^{-1} = Q$ pour la symétrie

$(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$ pour la transitivité

b) $\vec{0} \notin E$ est indispensable pour la transitivité

d'où $uRv \iff \exists k \in \mathbb{K}^* \quad u = k.v$

$\iff \exists k' \in \mathbb{K}^* \quad k'.u = v$

(en prenant $k' = k^{-1}$) pour la symétrie.

$k = 1$ (les corps sont unitaires) pour la réflexivité
et $(kk') \in \mathbb{K}^*$ pour la transitivité ; les corps étant intègres.

c) N'assure pas la transitivité :

$0 \, R \, (x \mapsto x^2)$ et $(x \mapsto x^2) \, R \, (x \mapsto 1)$

mais non$(0 \, R \, (x \mapsto 1))$

d) Pas de sens ! φ et ψ ne sont pas des formules. On ne coche pas.

e) non réflexif : $h \neq id \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \; h(x) \neq x$

d'où non$(x R x)$ pour un tel $x \in \mathbb{R}$.

9°/ a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \times |x| . \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) = 0$

c) Fort heureusement oui ; c'est un corps.

d) $6 \notin \mathcal{P}$ (premiers) donc non.
on donne $3 \times 2 \equiv 0 \, [6]$

e) $a . \bar{a} = 0$ donc non.

10°/ a) Le $3^{ème}$ colonne est rejeté

b) La matrice devrait être 2×2

c) On remarque que ♠ est neutre.

On associe ◇ $\mapsto 0$

♣ $\mapsto 2$

♠ $\mapsto 3$

♡ $\mapsto 1$

On lit alors la table de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} ; +)$

d) Le 2^{nde} colonne est rejetée

e) Non...

11°/ Seuls a) et c) peuvent prétendre : les autres emploient des symboles inadéquats

a) ♡ ħ △ □ x_{12} s h

	0	2	-1	-1	-1	-1	-1
Σ	0	2	1	0	$\boxed{-1}$		

rejet

c) ħ --- ħ ⊢ u ♡ ♡ ♡ P a ----- □

	2	2	-1	-1	0	0	0	-1	-1	- - -	- - -	-1
Σ	2	14	13	12	12	12	12	11	10	- - -	- - -	$\boxed{-1}$

ok.

12°/ d) et e) contiennent des symboles inadéquats

a) y et $\forall x$ sont des termes. Aucune relation ne les lie

b) On a dit en polonais, l'implication devrait être au début.

c) $\dot{=} \, \Delta \, \Delta \, y$ est une formule atomique ;

$\dot{=} \, z \, y \, \square$ est une formule atomique donc

$\Rightarrow \exists z \; \dot{=} \, z \, y \, \square \; \top$ est une formule en polonais

La conjonction donne une formule en polonais

13°/ a) est l'axiome d'associativité de la multiplication

b) est un axiome d'ordre, non exprimable dans $\mathcal{L}$.
En effet, l'anneau $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} ; +)$ n'est pas ordonnable en tant qu'anneau.

c) La syntaxe $\circ$ n'est pas descriptible dans $\mathcal{L}$

d) Axiome de distributivité à droite

e) Axiome de ... rien du tout mais exprimable dans $\mathcal{L}$

14°/ a) $a\times 1 + 0 = a$

b) $a \times 0 + 1 = 1$ (ok)

c) $a \times \bar{a} + a = 0 + a = a$

d) $a \times a + \bar{a} = a + \bar{a} = 1$ (ok)

e) $a \times \bar{b} + b$ pas ok.

15°/ a) contre exemple $x = 0$

b) contre exemple $x = \bar{a}$

c) contre exemple $a = 1$ et $b = 1$

d) on prend $x = a$ d'où : $\overline{aa} = \bar{a} = \bar{a}\,\bar{a}$

e) $\overline{\bar{a}\;\bar{x}\;\bar{b}} = \bar{\bar{a}} + \bar{\bar{x}}\;\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{a}} + \bar{\bar{x}} + \bar{\bar{b}} = a + x + b$

16°/ e) Y a t'il quelque chose à ajouter ?

17°/ c) pas vraiment d'autre option en fait.

18°/ a) il y a "$\forall x$"

b) les occurrences de y sont dans le champ du $\exists y$

c) z n'apparait jamais après un quantificateur

d) t ? où ça ?

e) le premier x est libre

19°/ a) coupure

b) instance de coupure façon Tetris.

c) Affaiblissement

d) (presque) par l'absurde (on double φ)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \bot}{\varphi ; \varphi \vdash \bot}}{\varphi \vdash \neg\varphi}$$ car $\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$

e) Par élimination (c'est une fausse introduction)

20/ e) On a clairement transitivité ; symétrie (non orienté) et réflexif par boucles Δ_E.

21/ a) $\forall x \in \emptyset \quad P(x)$ est valide

b) on écrit A : "j'ai compris quelque chose à la logique"

on propose $\neg A \Rightarrow A$

Supposons que non. Notons que $\neg A \Rightarrow A \equiv A$

Le candidat, en ne cochant pas, réfute A.

Il est bien normal qu'il ne se voit pas attribuer de point...

S'il coche, il affirme donc A, qui est une condition nécessaire pour valider son examen a priori.

c) Soient t : trouffion 1 et u : trouffion 2

Considérons a_1 et a_2 deux adjudants.

on a $\left.\begin{matrix} t < a_1 & ; & t < a_2 \\ u < a_1 & ; & u < a_2 \end{matrix}\right\}$ a_1 et a_2 non comparables

d) Non : cela s'écrit "ou" pas "oo".

e) Ce serait préférable pour la bienséance du cours