Notations asymptotiques

$$\mathrm{O}(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^{+\star}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$
$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^{+\star}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$
$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1 \in \mathbb{R}^{+\star}, \exists c_2 \in \mathbb{R}^{+\star}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \iff g(n) \in \mathrm{O}(f(n)) \text{ et } f(n) \notin \mathrm{O}(g(n)) \qquad f(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \iff g(n) \in \Omega(f(n))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \text{ et } g(n) \notin \mathrm{O}(f(n)) \qquad f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \begin{cases} f(n) \in \Omega(g(n)) \\ g(n) \in \Omega(f(n)) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \in \mathbb{R}^{+\star} \iff f(n) \in \Theta(g(n))$$

Ordres de grandeurs

constante	$\Theta(1)$	
logarithmique	$\Theta(\log n)$	
polylogarith.	$\Theta((\log n)^c)$	$c > 1$
	$\Theta(\sqrt{n})$	
linéaire	$\Theta(n)$	
	$\Theta(n \log n)$	
quadratique	$\Theta(n^2)$	
	$\Theta(n^c)$	$c > 2$
exponentielle	$\Theta(c^n)$	$c > 1$
factorielle	$\Theta(n!)$	
	$\Theta(n^n)$	

Identités utiles

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad \text{si } x \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{si } |x| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{si } |x| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

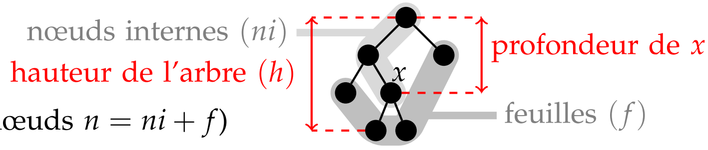
Théorème général

Soit à résoudre $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ avec $a \geq 1$, $b > 1$

- Si $f(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$, alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- Si $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
- Si $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$, et si $af(n/b) \leq cf(n)$ pour un $c < 1$ et tous les n suffisamment grands, alors $T(n) = \Theta(f(n))$.

(Note : il est possible de n'être dans aucun de ces trois cas.)

Arbres



Pour tout arbre binaire :

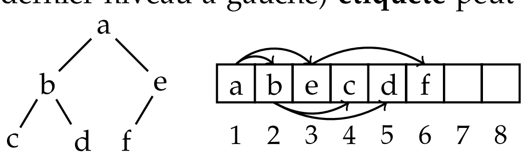
$n \leq 2^{h+1} - 1$ $\qquad h \geq \lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor$ si $n > 0$

$f \leq 2^h$ $\qquad h \geq \lceil \log_2 f \rceil$ si $f > 0$

$f = ni + 1$ (si l'arbre est *complet* = les nœud internes ont tous 2 fils)

Dans un arbre binaire équilibré une feuille est soit à la profondeur $\lfloor \log_2(n+1) - 1 \rfloor$ soit à la profondeur $\lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Pour ces arbres $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Un arbre parfait (= complet, équilibré, avec toutes les feuilles du dernier niveau à gauche) **étiqueté** peut être représenté par un tableau.



Les indices sont reliés par :

$\text{Père}(y) = \lfloor y/2 \rfloor$

$\text{FilsG}(y) = y \times 2$

$\text{FilsD}(y) = y \times 2 + 1$

Définitions diverses

La complexité d'un problème est celle de l'algorithme le plus efficace pour le résoudre.

Un tri stable préserve l'ordre relatif de deux éléments égaux (au sens de la relation de comparaison utilisée pour le tri).

Un tri en place utilise une mémoire temporaire de taille constante (indépendante de n).

Rappels de probabilités

Espérance d'une variable aléatoire X : C'est sa valeur attendue, ou moyenne. $\mathrm{E}[X] = \sum_x \Pr\{X = x\}$

Variance : $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$

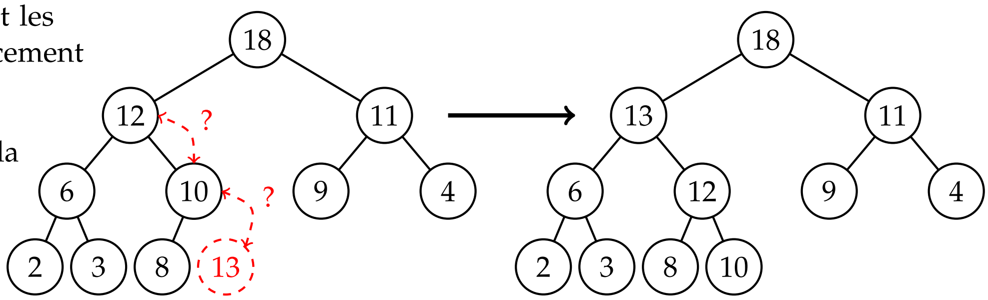
Loi binomiale : On lance n ballons dans r paniers. Les chutes dans les paniers sont équiprobables ($p = 1/r$). On note X_i le nombre de ballons dans le panier i. On a $\Pr\{X_i = k\} = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. On peut montrer $E[X_i] = np$ et $\mathrm{Var}[X_i] = np(1-p)$.

Tas

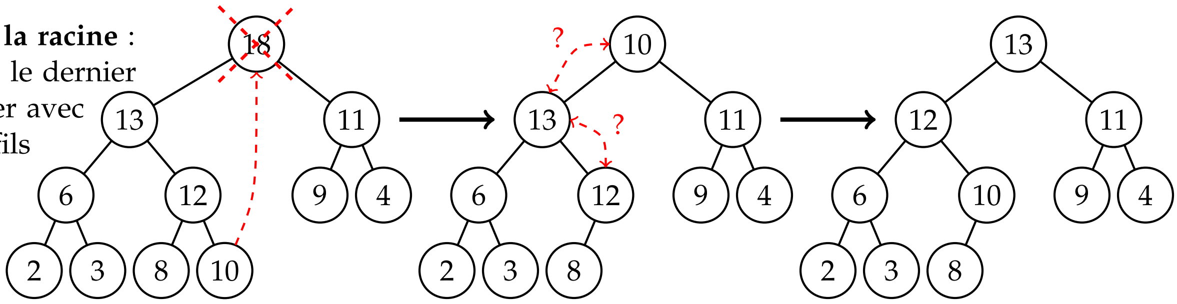
Un tas est un arbre parfait partiellement ordonné : l'étiquette d'un nœud est supérieure à celles de ses fils.

Dans les opérations qui suivent les arbres parfaits sont plus efficacement représentés par des tableaux.

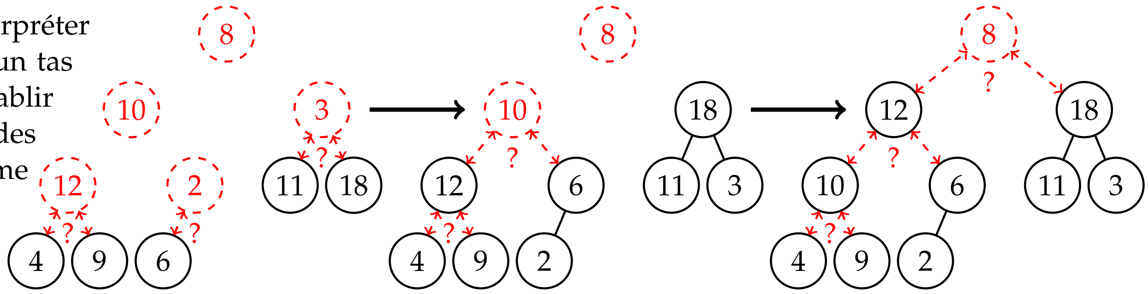
Insertion : ajouter l'élément à la fin du tas, l'échanger avec son père tant qu'il lui est inférieur (en remontant vers la racine). $T_{\text{insert}} = \mathrm{O}(\log n)$



Suppression de la racine : la remplacer par le dernier nœud ; l'échanger avec son plus grand fils tant que celui-ci est plus grand. $T_{\text{rem}} = \mathrm{O}(\log n)$



Construction : interpréter le tableau comme un tas (incorrect) puis rétablir l'ordre en partant des feuilles (vues comme des tas corrects). $T_{\text{build}} = \Theta(n)$

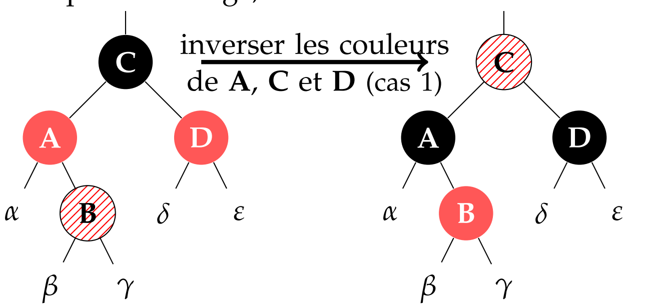


Arbres Rouge et Noir

Les ARN sont des arbres binaires de recherche dans lesquels : (1) un nœud est rouge ou noir, (2) racine et feuilles (NIL) sont noires, (3) les fils d'un nœud rouge sont noirs, et (4) tous les chemins reliant un nœud à une feuille (de ses descendants) contiennent le même nombre de nœuds noirs (= la *hauteur noire*). Ces propriétés interdisent un trop fort déséquilibre de l'arbre, sa hauteur reste en $\Theta(\log n)$.

Insertion d'une valeur : insérer le nœud avec la couleur rouge à la position qu'il aurait dans un arbre binaire de recherche classique, puis, si le père est rouge, considérer les trois cas suivants dans l'ordre.

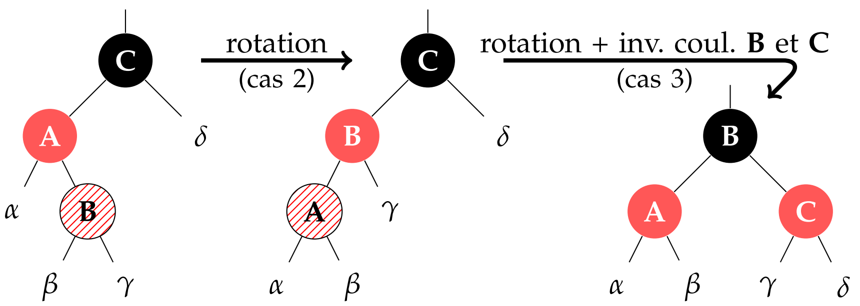
Cas 1 : Le père et l'oncle du nœud considéré sont tous les deux rouges. **Répéter** cette transformation à partir du grand-père si l'arrière grand-père est aussi rouge.



(Dans tous ces cas, les lettres grecques représentent des sous-arbres avec la même hauteur noire.)

Cas 2 : Si le père est rouge, l'oncle noir, et que le nœud courant n'est pas dans l'axe père–grand-père, une rotation permet d'aligner fils, père, et grand-père.

Cas 3 : Si le père est rouge, l'oncle noir, et que le nœud courant est dans l'axe père–grand-père, une rotation et une inversion de couleurs rétablissent les propriétés des ARN.



À suivre...