EPITA-ING1
M. REGRAGUI

PARTIEL ALGEBRE LINEAIRE

Notes de cours ne sont pas autorisées
Calculatrice autorisée

Exercice 1 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de A
2. Déterminer le polynôme minimal de A
3. La matrice A est –elle diagonalisable ?
4. Déterminer les sous espaces propres de A

Exercice2 :

Soit le système linéaire $Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 21 & 6 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$

1. Résoudre le système linéaire $Ax = b$ par l'algorithme de Gauss (on explicitera les matrices $\widetilde{A}^{(k)}$ et $G^{(k)}$ $\forall k = 1,2,3$)
2. Donner la factorisation de Gauss $A = LU$
3. En déduire le déterminant de A

Exercice 3 :

On considère la méthode itérative : $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \theta(Ax^{(k)} - b)$

Où θ est un paramètre réel strictement positive.

On suppose que A est une matrice symétrique définie positive.

Le vecteur $x^{(k)}$ est une approximation de la solution x du système $Ax = b$

On note λ_1 la plus grande valeur propre de A et λ_n la plus petite valeur propre de A

1. Montrer que la méthode itérative est convergente si $0 < \theta < \dfrac{2}{\lambda_1}$
2. Montrer que le rayon spectral $\rho(I - \theta A) = \max(|1 - \theta\lambda_1|, |1 - \theta\lambda_n|)$
3. On pose $Y(\theta) = |1 - \theta\lambda_1|$ et $Z(\theta) = |1 - \theta\lambda_n|$

   Tracer les graphes les fonctions $Y(\theta)$ et $Z(\theta)$
4. Montrer que le coefficient θ qui assure la convergence la plus rapide est donné par :

   $$\theta_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$