Patrick Siarry

Option SCIA

Programmation linéaire

Promo 2007

Table des matières

Table des figures

1 Rappel d' algèbre linéaire

1.1 Déterminant d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, on peut lui associer son déterminant $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 4 \times (-2) = 23$.

Factorisation

$$\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = k(2k-4)$$

La factorisation est possible soit sur une ligne ou sur une colonne.

1.2 Déterminant d'ordre n

Exemple : $\Delta = \begin{vmatrix} 2^+ & 0^- & -1^+ \\ 3 & 0^+ & 2 \\ 4 & -3^- & 7 \end{vmatrix}$. On peut développer Δ par rapport à une ligne ou une colonne. Développons par rapport à la première ligne :

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Il vaut mieux choisir une colonne ou une ligne contenant le plus de 0 possibles afin d'éviter les calculs des déterminants d'ordre $n-1$.
On peut essayer avant de faire un développemetn de faire apparaître des 0. On peut remplacer n'importe quelle ligne (ou colonne) par elle-même + une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes).
Exemple :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

1.3 Cofacteurs

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, le cofacteur $cof(a_{2,3})$ est le sous-déterminant obtenu en supprimant la ligne et la colonne de l'élément en question précédé du signa adéquat. Ici, $cof(a_{2,3}) = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. On peut obtenir $cof(A) = cof(a_{i,j})$ la matrice des cofacteurs de A.

1.4 Inversion de matrice

$A^{-1} = \dfrac{cof(A)^t}{det(A)}$ avec $det(A) \neq 0$.
Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.5 Vecteurs (linéairement) indépendants — Vecteurs liés

Exemple :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; w_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont-ils indépendants ou liés ? On calcule le déterminant de la matrice formée en “plaçant” les vecteurs cote à cote. Si le déterminant est nul, les vecteurs sont liés.

Ici, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -1 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, donc les vecteurs sont liés. On peut donc exprimer un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

2 Introduction de l'algorithme du Simplexe à travers un exemple de dimension 2

2.1 Principe

Exemple : Soient trois produits bruts appréciés par un troupeau de bétail : l'orge, l'arachide et le sésame. Les animaux ont besoin d'un minimum de 22% de protéines et un minimum de 3,6% de graisses.

produit brut	orge (1)	arachide (2)	sésame (3)
% protéines	12	52	42
% graisses	2	2	10
coût par tonne	25	41	39

On veut déterminer la composition de l'alimentation respectant les contraintes et à coût minimal.

Variables Soit x_j, $j \in [\![1..3]\!]$ la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. On exprime le problème sous la forme d'un programme linéaire :

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \min(z = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3) \\ S.C.\left\{\begin{array}{rcl} 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 & \geq & 22 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 & \geq & 3,6 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On cherche un jeu de $x_i = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ qui rend z minimale en respectant toutes les contraintes. On peut éliminer, par exemple, x_1 en la remplaçant par $1 - x_2 - x_3$. On peut donc réécrire le problème en 2 dimensions :

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \min(z = 25 + 16x_2 + 14x_3) \iff \min(z' = 8x_2 + 7x_3) \\ S.C.\left\{\begin{array}{rcl} 4x_2 + 3x_3 & \geq & 1 \\ x_3 & \geq & 0,2 \\ x_2 & \geq & 0 \\ x_2 + x_3 & \leq & 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Soit $\mathscr{D}$ le domaine réalisable l'ensemble des points du plan qui respectent les contraintes.
Si $z' = C$, quels sont les points du plan (x_2, x_3) tels que $z' = C$? $8x_2 + 7x_3 = C$. Cette équation décrit une famille de droites qui sont parallèles entre elles. $x_3 = -\frac{8}{7}x_2 + \frac{C}{7}$ (figure 1).
L'optimum est un sommet ou, dans les cas dégénérés, une arête du simplexe. Ici, la solution optimale $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0.7, 0.1, 0.2)$ avec $z' = 2,2 \Rightarrow z = 29,4$.

3 Généralisation de l'algorithme du simplexe au cas de n variables

- L'ensemble des contraintes linéaires par rapport aux variables x_i délimite un domaine réalisable dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$.
- L'optimum est
  - dans le cas courant, un sommet du "simplexe", ce dernier étant la figure géométrique à l'intérieur de laquelle se trouve le domaine réalisable.
  - dans un cas dégénéré, une arête du simplexe.

3.1 Principe de l'algorithme du simplexe

On pourrait calculer tous les sommets du simplexe puis retenir le meilleur. Cette technique n'est pas utilisée en pratique car
- le calcul des sommets n'est pas trivial.
- le nombre de sommets croît exponentiellement lorsque n augmente.

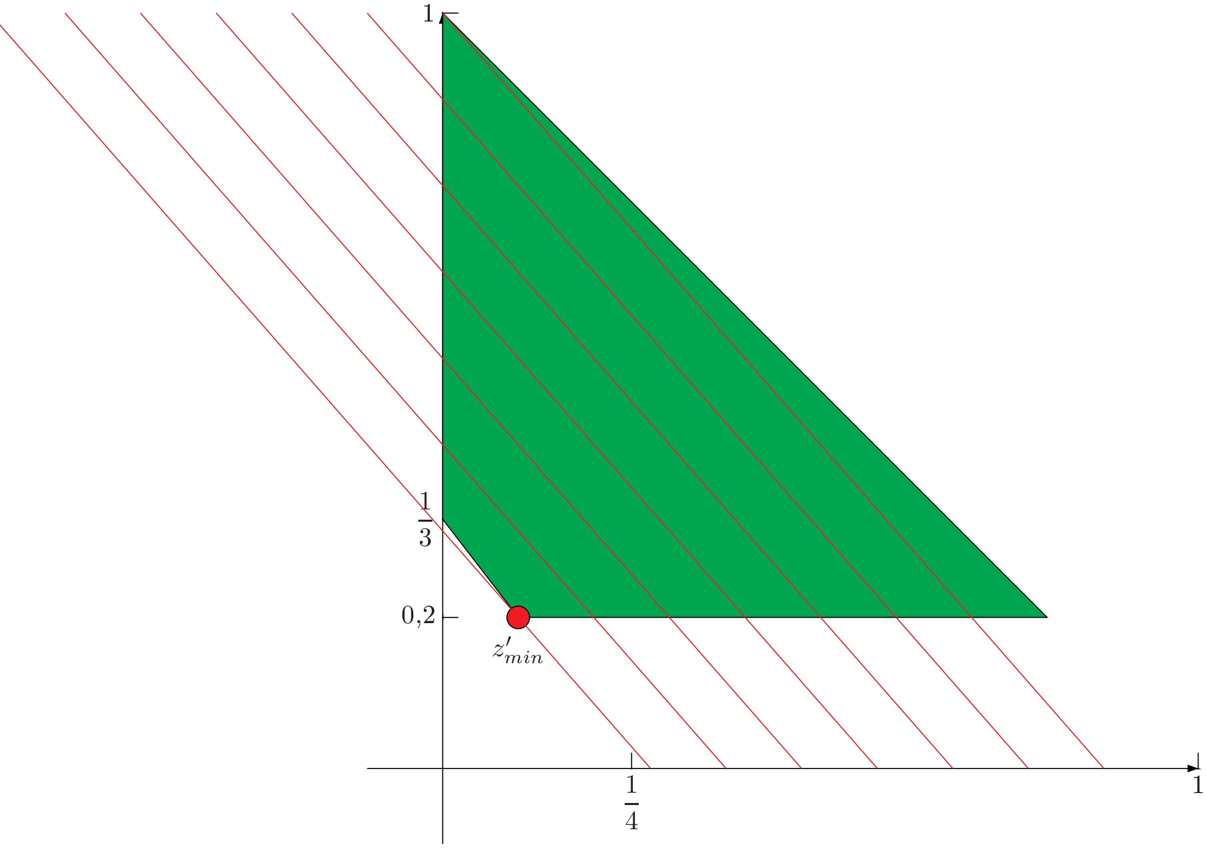

Fig. 1 – Détermination du mininum pour le problème de l'alimentation du bétail

L'algorithme se déroule en deux phases :

1. Recherche d'un sommet initial du simplexe. On essaie de trouver un sommet initial "pas trop mauvais".
2. Détermination par itérations successives du sommet optimal (ou de l'arête optimale) par une technique de déplacement le long d'une arête.

On est garanti qu'à chaque itération, l'algorithme évolue vers un sommet meilleur, et le critère d'arrêt est le minimum global : quand il n'y a plus de déplacement possible vers une solution meilleure.

3.2 Mécanisme itératif vers la solution optimale

Formalisme des tableaux :
- La solution initiale $\Longleftrightarrow$ le tableau initial.
- Chaque nouveau sommet $\Longleftrightarrow$ autre tableau.
- Dernier sommet $\Longleftrightarrow$ tableau optimal.

Exemple :
$$\left\{\begin{array}{l} \max(z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3) \\ \text{s.c.} \left\{\begin{array}{lcll} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1000 & (1) \\ 80x_1 + 95x_2 + 90x_3 & \leq & 90000 & (2) \\ x_1 - x_2 - x_3 & \leq & 100 & (3) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On suppose toujours que $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Est-on dans le cas standard ? $\rightarrow$ on teste l'origine : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. On vérifie si les contraintes sont satisfaites. Ici, on est dans le cas standard. On peut donc démarrer à partir de l'origine, ce qui nous donne tout de suite un tableau initial. On introduit pour chaque **inégalité** une variable d'écart qui doit être ≥ 0. Ici, on introduit 3 nouvelles variables x_4, x_5, x_6 respectivement associées aux 3 inégalités $(1), (2), (3)$.

La variable d'écart $\Longleftrightarrow$ différence entre les deux membres d'une inégalité :

$$\begin{array}{lllll} x_1 + x_2 + x_3 & +x_4 & & & = 1000 \\ 80x_1 + 95x_2 + 90x_3 & & +x_5 & & = 90000 \\ x_1 - x_2 - x_3 & & & +x_6 & = 100 \end{array}$$

Tableau initial associé au sommet origine $x_i - 0\forall i$. On pose $z = \sum_j c_j x_j$.

c_i	i	1	2	3	4	5	6	
0	4	1	1	1	1	0	0	1000
0	5	80	95	90	0	1	0	90000
0	6	1	-1	-1	0	0	1	100
	c_j	10	8	7	0	0	0	
	Δ_j	10	8	7	0	0	0	0

Avec Δ_j coût marginal, c'est-à-dire la capacité de chaque variable d'améliorer l'objectif.

On admettra que le déplacement le long d'une arête $\Longleftrightarrow$ séparer les variables (décision, écart) en deux groupes : les variables de base i (non-nulles) et les variables hors-base. Ici, les variables de base sont les variables d'écart qui expriment la différence entre les 2 membres et les variables hors-base sont les variables de décision.
Le déplacement le long d'une arête $\Longleftrightarrow$ une itération $\Longleftrightarrow$ passage d'un tableau à un autre $\Longleftrightarrow$ faire sortir une variable de la base et faire entrer une variable dans la base.

La variable entrante est associée au plus grand $\Delta_j \geq 0$ (si tous les $\Delta_j \leq 0$, on est à l'optimum : c'est le critère d'arrêt).
La variable de sortie est celle qui a le plus petit rapport positif entre $\frac{1000}{1}, \frac{90000}{80}, \frac{100}{1}$. C'est donc la variable x_6 qui sort. Passage du premier tableau au deuxième. Un sélectionne un pivot (ici en bleu) qui est au croisement des deux variables incriminées (ici, le pivot vaut 1 : ligne x_6, colonne x_1). On modifie le tableau ligne par ligne, en commençant par la ligne du pivot.
Pour la ligne x_4, on soustrait à l'ancienne ligne x_4 le produit de la nouvelle ligne du pivot avec le terme se situant au croisement de la ligne x_4 et la colonne du pivot. Pour la ligne des Δ_j, on **additionne** la dernière case.

c_i	i	1	2	3	4	5	6	
0	4	0	2	2	1	0	-1	900
0	5	0	175	170	0	1	-80	82000
10	1	1	-1	-1	0	0	1	100
	c_j	10	8	7	0	0	0	
	Δ_j	0	18	17	0	0	-10	+1000

On peut explicitement écrire le nouveau sommet : $x_4 = 900, x_5 = 82000, x_1 = 100, x_2 = x_3 = x_6 = 0, z = 1000$.
- Le nouveau sommet est meilleur $o \rightarrow 1000$.
- Vérification : $z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3$.

c_i	i	1	2	3	4	5	6	
8	2	0	1	1	0,5	0	-0,5	450
0	5	0	0	-5	-87,5	1	7,5	3250
10	1	1	0	0	0,5	0	0,5	550
	c_j	10	8	7	0	0	0	
	Δ_j	0	0	-1	-9	0	-1	9100

3.3 Cas où le démarrage de l'algorithme à partir de l'origine n'est pas possible

3 méthodes générales qui nécessitent un effort de calcul, environ 50% de l'emsemble de la résolution + une méthode particulière qui ne marche pas à tous les coups :
Exemple Problème à 2 variables : $x_1 \leq 40, x_2 \leq 70, x_1 + x_2 \leq 80, x_1 + x_2 \geq 20, \max(z = 2x_1 + 3x_2)$. On teste l'origine, la quatrième contrainte est violée : l'origine n'est pas réalisable. Le problème est dû à un petit nombre de contraintes : on peut tenter la méthode particulière :
- Le programme linéaire réduit est obtenu en supprimant provisoirement la contrainte génante et on le résout de façon standard.

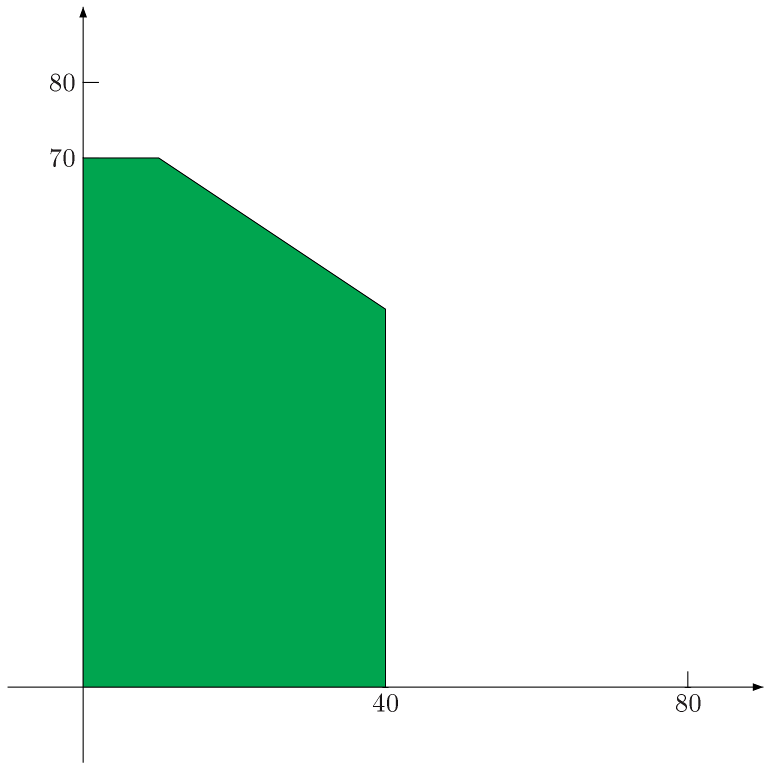

FIG. 2 – Résolution graphique

– On regarde si l'optimum du PL réduit respecte ou non la contrainte gênante. Si oui, l'optimum du PL réduit est aussi l'optimum du PL initial, si non, échec.

Dans cet exemple, on tente cette méthode. On écarte la contrainte 4 et on applique le simplexe standard. $z = C = 2x_1 + 3x_2$ est une droite. Lorsque C varie, cette équation décrit une famille de droites parallèles $\rightarrow y = ax + b \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{C}{3}$.
On obtient, avec la figure 2 la solution optimale $(x_1^*, x_2^*) = (10, 70) \Rightarrow z^* = 230$.

On regarde si l'optimum du PL réduit satisfait ou non la contrainte génante. Ici, $x_1^* + x_2^* = 80 \geq 20$, est correcte. La solution $(10, 70)$ est aussi la solution optimale du PL complet.

3 techniques de démarrage démarrer le simplexe lorsque l'origine n'est pas réalisable :

3.3.1 Première méthode

Démarrage du simplexe à partir d'un sommet quelconque que l'on se donne à l'avance. Solution initiale proposée par un expert, peut servir de point de départ si des conditions très précises sont remplies. On peut utiliser cette méthode pour réduire le nombre d'itérations / démarrage. Une telle solution doit comporter deux conditions pour pouvoir servir de solution initiale. Si elles sont respectées, technique à suivre pour obtenir le premier tableau.

Exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(z = x_1 + x_2) \\ \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 9 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

L'origine est bien réalisable ici. On peut donc faire une résolution standard, mais celle-ci risque d'être longue.

Si l'on prend la solution proposée par l'expert : $x_1 = \frac{7}{3}$ et $x_2 = 1$. Si jamais elle fonctionne, cette solution de démarrage est plus proche de l'optimum que l'origine. Il existe 2 solutions de validité pour une solution de démarrage :

1. La solution doit être réalisable.
2. La solution doit être une solution de base.

On introduit pour chaque inégalité une variable d'écart > 0.

$$\left| \begin{array}{lcl} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 8 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = & 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 & = & 9 \end{array} \right.$$

Condition de réalisabilité de la solution proposée pour démarrer : toutes les variables sont positives.
Si $x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = \frac{5}{3}, x_5 = 0$. Toutes les variables sont ≥ 0.

Pour démarrer le simplaxe, on a besoin d'une base comportant m variables > 0. m est le nombre de contraintes du PL (ici 3). Le nombre de variables > 0 doit être au moins égal au nombre de contraintes. 3 cas de figures :

1. S'il est plus petit, la solution proposée ne convient pas.
2. S'il est égal, on a une seule base candidate, qui doit vérifier la condition précédente. Ici, une seule base candidate : x_1, x_2, x_4.
3. S'il est plus grand, on a plusieurs bases candidates. Par exemple, si $x_5 = 1$, on aurait 4 bases : $(x_1, x_2, x_4), (x_1, x_4, x_5), (x_1, x_2, x_5), (x_2, x_4, x_5)$.

Ici, (x_1, x_2, x_4) seul candidat $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. On a une solution acceptable pour démarrer le simplexe.

On charche le tableau associé à la solution initiale qui respecte les conditions précédentes. On développe

$$Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

Avec x_B le vecteur de base (ici, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$), x_N vecteur hors-base (ici, $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$), $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b le vecteur des cœfficients du deuxième membre (ici, $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$) et I la matrice identité $m \times m$. On a $B^{-1} = \frac{(cof(B))^T}{det(B)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$
On a

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

On a

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Au final,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

On développe cette formule :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 & = & \frac{7}{3} \\ x_2 - x_3 + x_5 & = & 1 \\ \frac{4}{3}x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 & = & \frac{5}{3} \end{cases}$$

On admet que $\Delta_j = c_j - \sum_i c_i.x_{i,j}$.
On obtient donc le tableau initial :

c_i	i	1	2	3	4	5	
1	1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
1	2	0	1	-1	0	1	1
0	4	0	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
	c_j	1	1	0	0	0	
	Δ_j	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$

Après une itération :

c_i	i	1	2	3	4	5	
1	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	2	0	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
0	3	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$
	c_j	1	1	0	0	0	
	Δ_j	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$

Remarque : Robustesse d'une optimum par rapport à la modification des poids des variables dans la fonction objectif. $z = x_1 + x_2 \rightarrow z = 2x_1 + x_2$. L'optimum est-il moddifié ? On admet que
- le tableau central n'est pas affecté par le changement des c_j.
- la ligne Δ_j est à recalculer par la relation $\Delta_j = c_j - \sum_i c_i.x_{i,j}$.

Ici, l'optimum n'est pas robuste : il s'est déplacé.

3.3.2 Méthode des variables artificielles

Exemple :

$$\begin{cases} \max(z = x_1 + 2x_2) \\ \begin{cases} x_1 & \leq & 1 \\ x_1 + x_2 & \geq & 6 \\ -x_1 + x_2 & = & 3 \end{cases} \end{cases}$$

L'origine viole les contraintes (2) et (3). On introduit une variable artificielle pour chaque contrainte "gênante" vis-à-vis de la réalisabilité de l'origine : $x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}}$. On écrit le PL sous forme d'égalités en utilisant les variables d'écart (associée aux inégalités) : $x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}$.
On a donc une variable d'écart pour chaque inégalité, et une variable artificielle pour chaque contrainte "gênante".

$$\begin{cases} x_1 + \bar{x_1} & = & 1 \\ x_1 + x_2 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} & = & 6 \\ -x_1 + x_2 + x_{\bar{\bar{3}}} & = & 3 \end{cases}$$

On obtient : $\max(z = x_1 + 2x_2 - Mx_{\bar{\bar{2}}} - Mx_{\bar{\bar{3}}})$. M est un nombre positif plus grand que tous les nombres auxquels on le compare. Au démarrage :

$$\begin{array}{lcl} x_1 = x_2 & = & 0 \\ x_{\bar{1}} & = & 1 \\ x_{\bar{\bar{2}}} & = & 6 \\ x_{\bar{\bar{3}}} & = & 3 \end{array}$$

$z = -9M \Rightarrow$ force l'annulation des variables artificielles. Tableau initial :

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	1
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	1	1	0	-1	1	0	6
$-M$	$\bar{\bar{3}}$	-1	1	0	0	0	1	3
	c_j	1	2	0	0	$-M$	$-M$	
	Δ_j	1	$2+2M$	0	$-M$	0	0	$-9M$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	1
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	2	0	0	-1	1	-1	3
2	2	-1	1	0	0	0	1	3
	c_j	1	2	0	0	$-M$	$-M$	
	Δ_j	$2M+3$	0	0	$-M$	0	$-2M-2$	$-3M+6$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	
1	1	1	0	1	0	0	0	1
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	0	0	-2	-1	1	-1	1
2	2	0	1	1	0	0	1	4
	c_j	1	2	0	0	$-M$	$-M$	
	Δ_j	0	0	$-2M-3$	$-M$	0	$-2M-2$	$-M+9$

On constate que la variable $x_{\bar{\bar{2}}}$ est restée dans la base. On ne peut bâtir une solution qu'avec l'aide d'une variable artificielle$\Rightarrow$ le PL est sans solution.

3.3.3 Méthode du dual

C'est un PL qui est équivalent au PL initial, dans le sens suivant : si on connaît la solution de dual, alors on en déduit la solution du primal et inversement.

Intérêt : l'un des 2 peut être plus facile à résoudre. En particulier, le démarrage à partir de l'origine peut être possible pour le dual (et non pour le primal).

On a un PL primal à N variables et P contraintes, on passe à un PL dual à P variables et N contraintes.

Exemple :

$$\begin{cases} \max(z = 36x_1 + 24x_2) \\ \begin{cases} 3x_1 & \leq & 16 & \to x_{\bar{1}} \\ x_1 + x_2 & \leq & 27 & \to x_{\bar{2}} \\ 2x_2 & \leq & 10 & \to x_{\bar{3}} \end{cases} \end{cases}$$

L'origine est réalisable : on utilise le simplexe standard.

$$\begin{cases} \max(z = 36x_1 + 24x_2) \\ \begin{cases} 3x_1 & +x_{\bar{1}} & = & 16 \\ x_1 + x_2 & +x_{\bar{2}} & = & 27 \\ 2x_2 & +x_{\bar{3}} & = & 10 \end{cases} \end{cases}$$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	
0	$\bar{1}$	3	0	1	0	0	16
0	$\bar{2}$	1	1	0	1	0	27
0	$\bar{3}$	0	2	0	0	1	10
	c_j	36	24	0	0	0	
	Δ_j	36	24	0	0	0	0

$\Rightarrow$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	
36	1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{16}{3}$
0	$\bar{2}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{65}{3}$
0	$\bar{3}$	0	2	0	0	1	10
	c_j	36	24	0	0	0	
	Δ_j	0	24	-12	0	0	192

$\Rightarrow$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	
36	1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{16}{3}$
0	$\bar{2}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{50}{3}$
24	2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	5
	c_j	36	24	0	0	0	
	Δ_j	0	0	-12	0	-12	312

Les Δ_j sont négatifs, l'optimal est atteint. Solution : $z^* = 312, x_1^* = \frac{16}{3}$ et $x_2^* = 5$.

Le dual de ce PL primal comporte 3 variables et 2 contraintes. Il faut mettre le primal sous la forme standard de passage au dual. C'est-à-dire toutes les inégalités sont des inférieurs larges $\leq$ et l'objectif est à maximiser.

– Les cœfficients des contraintes du dual se lisent sur les colonnes du primal : $2y_1+y_2+0y_3$ et $0y_1+y_2+2y_3$.
– Les contraintes du dual sont $\geq$.
– Les seconds membres des contraintes du dual sont les cœfficients de la fonction économique du primal :
$$\left\{\begin{array}{lcl} 3y_1+y_2 & \geq & 36 \\ y_2+2y_3 & \geq & 24 \end{array}\right.$$
– Les cœfficients de la fonction canonique du dual sont les seconds membres des contraintes du primal : $\min(w = 16y_1 + 27y_2 + 10y_3)$.
– La fonction économique du dual est à minimiser.

Passage du tableau optimal du primal au tableau optimal du dual

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_j^* & = & -\Delta x_{\bar{j}}^* \\ \Delta y_j^* & = & -x_{\bar{j}}^* \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y_{\bar{j}}^* & = & -\Delta x_j^* \\ \Delta y_{\bar{j}}^* & = & -x_j^* \end{array}\right.$$

Résolution du dual par le simplexe $\rightarrow$ 2 variables d'écart $y_{\bar{1}}$ et $y_{\bar{2}}$:
$$\left\{\begin{array}{l} \max(w' = -w = -16y_1 + 27y_2 - 10y_3) \\ \left\{\begin{array}{lcl} 3y_1+y_2-y_{\bar{1}} & = & 36 \\ y_2+2y_3-y_{\bar{2}} & = & 24 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

c_i	i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
-16	1	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	12
-10	3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	12
	c_j	-16	-27	-10	0	0	
	Δ_j	0	$-\frac{50}{3}$	0	$-\frac{16}{3}$	-5	-312

$$\Rightarrow \begin{array}{lcl|lcl} \Delta x_1^* = 0 & \Rightarrow & y_{\bar{1}}^* = 0 & x_1^* = \frac{16}{3} & \Rightarrow & \Delta y_{\bar{1}}^* = -\frac{16}{3} \\ \Delta x_2^* = 0 & \Rightarrow & y_{\bar{2}}^* = 0 & x_2^* = \frac{50}{3} & \Rightarrow & \Delta y_{\bar{2}}^* = -\frac{50}{3} \\ \Delta x_{\bar{1}}^* = -12 & \Rightarrow & y_1^* = 12 & x_{\bar{2}}^* = 5 & \Rightarrow & \Delta y_2^* = -5 \\ \Delta x_{\bar{2}}^* = 0 & \Rightarrow & y_2^* = 0 & x_{\bar{1}}^* = 0 & \Rightarrow & \Delta y_1^* = 0 \\ \Delta x_3 = -12 & \Rightarrow & y_3^* = 12 & x_{\bar{3}}^* = 0 & \Rightarrow & \Delta y_3^* = 0 \end{array}$$

On a z^* primal $=$ w^* dual.
Pour le tableau central :
– intersection entre ligne et colonne variables de base $=$ 1. Les autres cœfficients de la colonne sont nuls.
– pour compléter la ligne y_1, on se sert de la colonne $x_{\bar{1}}$.

	$\bar{1}$
1	$\frac{1}{3}$
$\bar{2}$	$-\frac{1}{3}$
2	0

$\Rightarrow$

	$\bar{1}$	2	$\bar{2}$
1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

Application P.126 III Soit le PL suivant : $\left\{\begin{array}{l} \min(z = x_1 + 2x_2) \\ \left\{\begin{array}{lcl} 2x_1+3x_2 & \geq & 3 \\ 3x_1+x_2 & \leq & 4 \end{array}\right. \end{array}\right.$

1. Résoudre le PL par l'algorithme du simplexe.

   Le simplexe ne sait pas minimiser $\Rightarrow \max(z' = -x_1 - 2x_2)$. L'origine n'est pas réalisable, on utilise une variable artificielle $x_{\bar{\bar{1}}}$ pour la première inéquation et 2 variables d'écart $x_{\bar{1}}$ et $x_{\bar{2}}$:
   $$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1+3x_2-x_{\bar{1}}+x_{\bar{\bar{1}}} & = & 3 \\ 3x_1+x_2+x_{\bar{2}} & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow \max(z' = -x_1 - 2x_2 - Mx_{\bar{\bar{1}}}).$$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	
$-M$	$\bar{1}$	2	3	-1	0	1	3
0	$\bar{2}$	3	1	0	1	0	4
	c_j	-1	-2	0	0	$-M$	
	Δ_j	$-1+2M$	$-2+3M$	$-M$	0	0	$-3M$

$\Rightarrow$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	
-2	2	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	X	1
0	$\bar{2}$	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	X	3
	c_j	-1	-2	0	0	$-M$	
	Δ_j	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	X	-2

$\Rightarrow$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	
-2	2	0	1	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	X	$\frac{1}{7}$
-1_*	1	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	X	$\frac{9}{7}$
	c_j	-1_*	-2	0	0	$-M$	
	Δ_j	0	0	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	X	$-\frac{11}{7}$

Solution : $z = \frac{11}{7}$ avec $x_1^* = \frac{9}{7}$ et $x_2^* = \frac{1}{7}$.

2. Écrire le PL dual (D).

$$\begin{array}{lrcl} & -2x_1 - 3x_2 & \leq & -3 \\ & 3x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ \max & -x_1 - 2x_2 & & \end{array} \Rightarrow (D) \left\{ \begin{array}{l} \min(w = -3y_1 + 4y_2) \\ \left\{ \begin{array}{rcl} -2y_1 + 3y_2 & \geq & -1 \\ -3y_1 + y_2 & \geq & -2 \end{array} \right. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \max(w' = 3y_1 - 4y_2) \\ \left\{ \begin{array}{rcl} 2y_1 - 3y_2 & \leq & 1 \\ 3y_1 - y_2 & \leq & 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3. Déduire de la question 1) le tableau optimal de (D)

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
3	1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$
-4	2	0	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
	c_j	3	-4	0	0	
	Δ_j	0	0	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{11}{7}$

4. La fonction z est paramétrée : $z = \lambda x_2 + 2x_2$. Discuter, en fonction de λ, ce que devient la solution optimale du PL obtenu en 1). Les nombres marqués x_* dans le tableau 1) sont remplacés par $-\lambda$.

On recalcule alors les Δ_j :

c_j	$-\lambda$	-2	0	0
Δ_j	0	0	$\frac{\lambda-6}{7}$	$\frac{3\lambda-4}{7}$

L'optimum reste où il était ssi $\Delta_j \leq 0, \forall j$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\lambda-6}{7} & \leq & 0 \\ \frac{3\lambda-4}{7} & \leq & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & \leq & 6 \\ \lambda & \leq & \frac{4}{3} \end{array} \right. \iff \lambda \leq \frac{4}{3}$$

Si $\lambda > \frac{4}{3}$, l'optimum se déplace et on réalise alors encore une itération du simplexe.

λ	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
solution	$x_1 = \frac{9}{7}, x_2 = \frac{1}{7}$		$x_1 = 0, x_2 = 1$
coût	$z^* = \frac{9\lambda+2}{7}$		$z^* = 2 < \frac{9\lambda+2}{7}$ si $\lambda > \frac{4}{3}$

Après une itération du simplexe $\left(\lambda > \dfrac{4}{3}\right)$:

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
-2	2	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
0	$\bar{2}$	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	3
	c_j	$-\lambda$	-2	0	0	
	Δ_j	$\frac{-3\lambda+4}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	2