# Programmation linéaire.

## 1. Présentation.

*Def: Optimisation minimisation ou maximisation d'une fonction objectif en agissant sur les variables de décision $x_i$.

$$\begin{cases} \underset{x_i}{\text{MIN}}\ f\ ? \\ \quad + \text{ contraintes sur les variables } x_i \end{cases}$$

Ex: $\begin{cases} \underset{x_1, x_2}{\text{Min}}\ f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 \\ |x_1| + 5x_2^2 \geq 4 : \text{contrainte} \end{cases}$

Ex: MIN coût de fabrication d'un produit, tout en respectant des contraintes (ex: approvisionnement) économie.

Cas particulier: $f$: fonction LINEAIRE / variables $x_i$

ex: $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 12x_2$ = combinaison linéaire des variables de décision.
+ 2ème condition

Rappels sur l'algèbre linéaire.

· Déterminant.

Ex: matrice $2 \times 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 4 \times (-2) = 15 + 8 = 23.$

*Prop: factorisation. $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2k \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

On peut factoriser un déterminant en divisant une même ligne ou une même colonne par un coefficient.

Déterminant d'ordre > 2. On développe par rapport à une ligne ou à une colonne.

ex: $\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-1} \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

__Rappel utile:__ on ne change pas la valeur d'un déterminant si on remplace n'importe quelle "rangée" (ligne ou colonne) par elle-même + une combinaison linéaire des autres rangées.

__Ex:__ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - \frac{2}{3}C_1 + 0C_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7/3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 13/3 \end{vmatrix}$

## • Cofacteur.

On appelle cofacteur d'un terme d'une matrice le __sous-déterminant__ __affecté du bon signe__

__Ex:__ $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & \;\; - & \;\; + & \;\; \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad cof(a_{23}) = (-).\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

⚠ Seul le signe apparaît au final.

## • Inverse d'une matrice.

$$A^{-1} = \frac{(cof A)^t}{\det A}$$

avec $cof A$ : matrice des cofacteurs de A → matrice où tous les éléments de A sont remplacés par leur cofacteur.
t: transposition = inverse des lignes et des colonnes.

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

__Ex:__ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$cof A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad (cof A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 2 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

## • Vecteurs indépendants ou liés.

__Ex:__ $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad w_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $u_1$, $v_1$ et $w_1$ sont indépendants ssi $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

ici, $\det A = 0 \Rightarrow$ les vecteurs sont "liés", càd $\exists$ une relation linéaire pour exprimer l'un des vecteurs en fonction des 2 autres.

__Ex:__ $\boxed{w_1 = \lambda u_1 + \mu v_1}$ $\quad (\lambda, \nu)$ ?

$$\begin{cases} 8 = \lambda \times 1 + \mu \times 2 & (1) \\ -7 = \lambda \times 1 + \mu \times (-3) & (2) \\ 1 = \lambda \times (-1) + \mu \times 1 & (3) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 15 = 5\mu \Rightarrow \mu = 3$

$(1) \quad \lambda = 8 - 2\mu = 8 - 6 = 2$

$(3) \quad 1 = 2 \times (-1) + 3 \times 1 \quad$ OK

## 2. Modélisation d'un problème d'optimisation sous forme de "Programme Linéaire" (PL).

Problème concret ⇒ modélisation sous forme de P.L. :

→ Objectifs : $\begin{cases} \cdot \text{ MIN } f \text{ ou MAX } f \\ \cdot \ f = \text{combinaison linéaire de variables } x_i \\ \quad \text{conditions linéaires sur } x_i \end{cases}$

(Page 121).

Ex: Une entreprise fabrique 2 produits $P_1$ et $P_2$. La fabrication de ce produit représente un certain temps de travail, du temps de machine ainsi que des matières premières.

| | P1 | P2 |
|---|---|---|
| quantité de travail | 0,75 h | 0,5 h |
| temps-machine | 1,5 h | 0,8 h |
| matière première | 2 u | 1 u |
| prix de vente | 15 € | 8 € |

Ressources:

Chaque semaine, on peut acheter au plus 400 de matière 1ère pour 1,5 €/u

4 personnes → 40 heures / semaine
6 € / h (par heure supplémentaire).

320 heures de temps machine par semaine.

Demande hebdomadaire : P1 → 50 unités P2 → 60 unités

Chaque euro en publicité { sur P1 augmente la demande de 10 unités.
{ sur P2 augmente la demande de 15 unités.

Pas plus de 100 euros de publicité par semaine.

$x_1$ : nombre de P1 produits en 1 semaine.
$x_2$ : nombre de P2 produits en 1 semaine.

C'est un problème à 6 variables:

$x_1$
$x_2$ $\quad (x_1, x_2) \leq$ (demande $P_1$ + demande $P_2$ + pub).

HS = nombre d'heures supplémentaires / semaine
MP = quantité de matière première / semaine
PUB1 = nbre d'€ dépensés en publicité sur $P_1$.
PUB2 = nbr d'€ dépensés en publicité sur $P_2$. } par semaine.

L'entreprise cherche à optimiser son rendement, sans créer de stock.

Contraintes: main d'oeuvre : $0,75x_1 + 0,5x_2 \leq 4\times40 + HS$

temps-machine: $1,5x_1 + 0,8x_2 \leq 320$

matière première: $2x_1 + x_2 \leq MP$

approvisionnement: $MP \leq 400$

production: $x_1 \leq 50 + 10\times PUB1$

$x_2 \leq 60 + 15\times PUB2$

publicité : $PUB1 + PUB2 \leq 100$

On cherche à maximiser: $\boxed{\underbrace{15x_1 + 8x_2}_{\text{chiffres des ventes}} - \underbrace{(6\,HS + 1,5\,MP + PUB1 + PUB2)}_{\text{coûts variables}}}$

3. Principe de l'algorithme du SIMPLEXE.

- Se voit facilement sur un problème à 2 variables de décision.
- Résolution graphique du P.L. ⇒ principe de l'algo. du Simplexe.

Ex: (page 123 du poly). Composition d'aliments pour le bétail.

- composition à coût minimal.
- 3 produits: orge, arachide, sésame.
- au moins 22% de Protéines. au moins 3,6% de graisses.

| | ORGE | ARACHIDES | SESAME | % requis |
|---|---|---|---|---|
| Pourcentage de protéines | 12% | 52% | 42% | 22% |
| Pourcentage de graisses | 2% | 2% | 10% | 3,6% |
| coût par tonne | 25 K€ | 41 K€ | 39 K€ | × |

(1) $x_j$ = fraction de tonne de produit brut $j$, contenue dans 1 tonne d'aliment.

$j=1$ ORGE $j=2$ ARACHIDES $j=3$ SESAME

Formuler le P.L.

(2) Réduire à 2D le problème et le résoudre graphiquement ⇒ ALGO du Simplexe.

Programmation linéaire. 3. Principe de l'algorithme du SIMPLEXE (suite).

En P.L. :

$\boxed{x_j \geq 0}$ $\forall j$

si ce n'est pas le cas, il faut effectuer un chgt de var.

· % de protéines requis : $12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22$.

· % de graisses : $2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 3{,}6$.

· Egalité : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

**Objectif :** MIN $z = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3$ linéaire / variables $x_j$

Résolution graphique $\Rightarrow$ on peut éliminer 1 des 3 variables. Par exemple : $x_1 = 1 - x_2 - x_3$

avec $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

on reporte les contraintes :

$$\text{contraintes} \begin{cases} 12(1-x_2-x_3) + 52x_2 + 42x_3 \geq 22 & \rightarrow (1)\quad 40x_2 + 30x_3 \geq 10 \\ 2(1-x_2-x_3) + 2x_2 + 10x_3 \geq 3{,}6 & \rightarrow (2)\quad 8x_3 \geq 1{,}6 \\ x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0 & \rightarrow (3)\quad x_2 + x_3 \leq 1 \\ 1 - x_2 - x_3 \geq 0 & \quad x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MIN } z = 25(1-x_2-x_3) + 41x_2 + 39x_3 \Rightarrow \text{MIN } z = 25 + 16x_2 + 14x_3 = 25 + 2(8x_2 + 7x_3) = 25 + 2z'$$

$$\begin{cases} 4x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_3 \geq 0{,}2 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

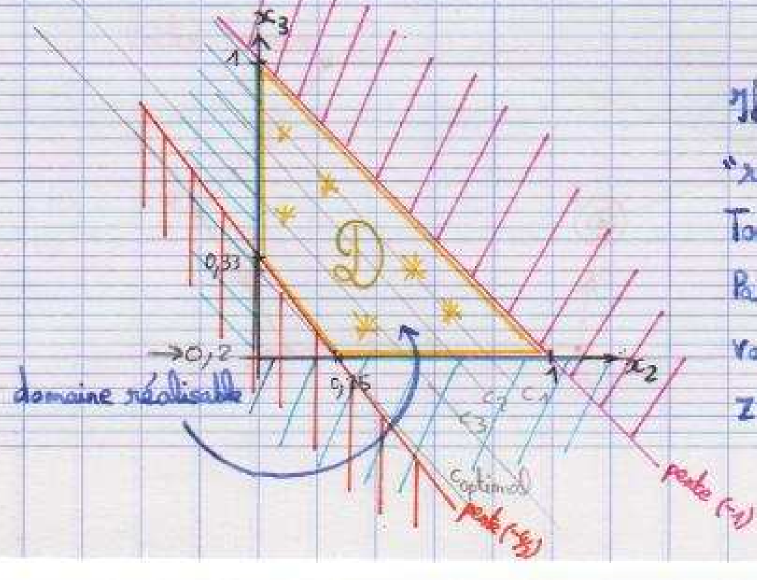
MIN $z' = 8x_2 + 7x_3$

Représentation graphique :

$4x_2 + 3x_3 = 1$ : Droite

$4x_2 + 3x_3 \geq 1$ : ½ plan délimité par la droite

$4x_2 + 3x_3 \leq 1$ : ½ plan restant.




Il existe une infinité de solutions "réalisables" :

Tous les points du domaine $\mathcal{D}$.

Parmi toutes ces solutions, on va cherche celle(s) qui rend(ent) $z'$ minimale.

$z' = 8x_2 + 7x_3$

Cherchons tous les points en lesquels $z'$ a une même valeur, soit $z' = C$.

$8x_2 + 7x_3 = C$ : droite → on peut tracer cette droite pour une valeur de C donnée.

On cherche à rendre C minimale ⇒ on fait glisser la droite de la famille de droites $\boxed{8x_2 + 7x_3 = C}$ en restant à pente constante vers le bas.

Le P.L. admet 1 solution :

$x_3 = 0{,}2$

$x_2 = \frac{1-3x_3}{4} = 0{,}1 = x_2$

$x_1 = 0{,}7$

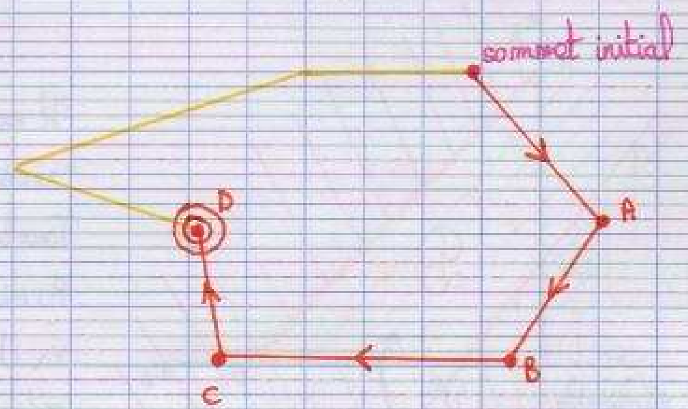
Plus généralement :

- PL → partie contrainte → délimite un domaine réalisable $\mathcal{D}$ ↳ simplexe
- PL → partie objectif
  → l'optimum se trouve sur 1 sommet du simplexe.
  ou sur 1 arête (si le pb est dégénéré).

Algorithme du Simplexe :

→ principe :

* initialisation : on cherche un sommet initial du simplexe.
* itération du simplexe : déplacement le long d'une arête du simplexe
  ⇒ sommet A. Le sommet A est tjs meilleur que le sommet initial.
* critère d'arrêt : le sommet atteint est optimal.



(1) Recherche d'un sommet de départ → 50% du travail

(2) Démarche itérative

↳ Algorithme du Simplexe : formalisme des tableaux.

Ex: p. 124 du polycopié 2.

3 types de crabe : $x_1, x_2, x_3$

3 contraintes :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1000 \quad (1) \\ 80x_1 + 95x_2 + 90x_3 &\leq 90000 \quad (2) \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leq 100 \quad (3) \end{aligned}\right\} \text{3 contraintes linéaires / variables de décision } x_1, x_2, x_3$$

+ contrainte de signe : $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

MAX : $z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3$

On transforme toutes les contraintes d'inégalité en égalités en introduisant des variables d'écart :

si égalité (1) ⇒ variable d'écart : $x_4$

si égalité (2) ⇒ variable d'écart : $x_5$

si égalité (3) ⇒ variable d'écart : $x_6$

⚠ Toutes les variables d'écart sont par définition positives

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1000 \\ 80x_1 + 95x_2 + 90x_3 + x_5 &= 90\,000 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 &= 100 \end{aligned}$$

→ Y a-t-il un problème de démarrage du Simplexe ? cad Peut-on démarrer de l'origine ?

- On annule les variables de décision : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- $x_4 = 1000$, $x_5 = 90\,000$, $x_6 = 100$ toutes les variables sont positives.

→ cas du démarrage standard du Simplexe (démarrage à partir de l'origine).

Tableau initial associé à l'origine.

variables de base

| $c_i$ | $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 100 |
| 0 | 5 | 80 | 95 | 90 | 0 | 1 | 0 | 90 000 |
| 0 | 6 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| | $c_j$ | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| coût marginal → | $\Delta_j$ | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 ← z |
| | | ↑ e | | | | | | |

→ variables nulles : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ → hors-base

→ variables non nulles : $x_4, x_5, x_6$ → variables de base

On pose : $z = \sum c_i x_i$

On démarre l'algorithme du simplexe à partir d'un sommet particulier : l'ORIGINE ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$)

$1^{ère}$ itération : (déplacement depuis le sommet initial vers 1 autre sommet meilleur, le long d'une arête).

Sommes-nous arrivés à l'optimum ? Tous les $\Delta_j \leq 0$ ? NON → il faut itérer

On calcul les rapports à partir de la colonne "d'entrée" et du tableau de valeurs (entourés en orange à la page précédente) :

$\frac{1000}{1} = 1000$

$\frac{90\,000}{80} \approx 1100$

$\frac{100}{1} = 100 \rightarrow s$

BASE $(x_4, x_5, x_6)$

NOUVELLE BASE $(x_4, x_5, x_1)$

sommet meilleur

→ ligne du pivot : on divise tous les termes par le pivot

| $c_i$ | $i$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 100 | nouvelle ligne du pivot. |

→ ligne $x_4$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ancienne ligne $x_4$ | | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1000 |
| nouvelle ligne × terme encadré | | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | -1 | 900 |
| | | 80 | 95 | 90 | 0 | 1 | 0 | 90 000 |
| + | | 80 | -80 | -80 | 0 | 0 | 80 | 8000 |
| 0 | 5 | 0 | 175 | 170 | 0 | 1 | -80 | 82 000 |

Ligne $\Delta_j$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ancienne ligne $\Delta_j$ | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| nouvelle ligne du pivot × terme encadré ⊖ | 10 | -10 | -10 | 0 | 0 | 10 ⊕ | 1000 |
| | 0 | 18 | 17 | 0 | 0 | -10 | 1000 |

Nouveau tableau après 1 itération.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | -1 | 900 |
| 0 | 5 | 0 | 175 | 170 | 0 | 1 | -80 | 82 000 |
| 10 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| | $c_j$ | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| | $\Delta_j$ | 0 | 18 | 17 | 0 | 0 | -10 | 1000 |

Est-on arrivé à l'optimum ? NON → nouvelle itération.

Programmation linéaire.

## 3. Principe de l'algorithme du SIMPLEXE (suite).

### Algorithme du Simplexe:

**Suite de l'exemple.**

**$2^{ème}$ itération:**

- Calcul des pivots: $\frac{900}{2} \rightarrow 5$ $\quad \frac{82\,000}{175}$ $\quad \cancel{\frac{100}{-1}} < 0$

$\Delta_j$ $\boxed{0 \quad 18 \quad 17 \quad 0 \quad 0 \quad -10}$

$\uparrow e$

| $c_i$ | $i$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0,5 | 0 | -0,5 | 450 |
| 0 | 5 | 0 | 0 | -5 | -87,5 | 1 | 7,5 | 3250 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | 550 |
| | $c_j$ | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| | $\Delta_j$ | 0 | 0 | -1 | -9 | 0 | -1 | 9 100 ← z |

$\Delta_j \leqslant 0 \Rightarrow$ ARRÊT

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 175 | 170 | 0 | 1 | -80 | 82 000 |
| ⊖ | 0 | 175 | 175 | 87,5 | 0 | -87,5 | 78 750 |
| | 0 | 0 | -5 | -87,5 | 1 | 7,5 | 3250 |

$z^* = 9100$

$x_1^* = 550$ $\quad x_4^* = 0$

$x_2^* = 450$ $\quad x_5^* = 3250$

$x_3^* = 0$ $\quad x_6^* = 0$

→ Problème du démarrage lorsqu'on ne peut pas démarrer à partir de l'origine.

3 ou 4 techniques ⇒ tableau initial.

Mécanisme des itérations successives ⇒ OPTIMUM.

### 1ère technique de démarrage, lorsque l'origine n'est pas réalisable.

**Ex:** p125 du poly. 2.

$$PL \begin{cases} x_1 \leqslant 40 & (1) \\ x_2 \leqslant 70 & (2) \\ x_1 + x_2 \leqslant 80 & (3) \\ x_1 + x_2 \geqslant 20 & (4) \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

**MAX:** $z = 2x_1 + 3x_2$

→ démarrage standard? Impossible

$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow$ problème avec la contrainte (4).

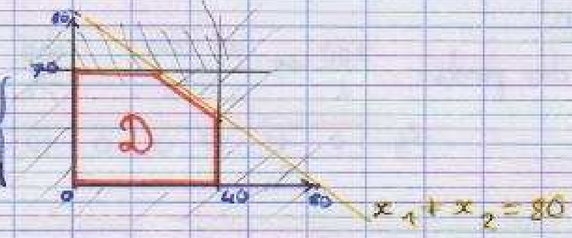
Ici 1 seule contrainte pose un Pb de démarrage ⇒ on peut tenter la technique 1 ⇒ 2 phases.

1ère phase: On s'intéresse au "PL réduit" obtenu en supprimant la contrainte gênante.

⇒ (facile) On obtient la solution optimale de (PL').

Ici, on peut résoudre la contrainte graphiquement.

famille de droite iso-coût




sommet associé à l'optimum : $x_2^* = 70$, $x_1^* = 10$

$z = 2x_1 + 3x_2$

$z^* = 2x_1^* + 3x_2^*$

$= 20 + 120 = 230.$

2ème phase: on teste la solution optimale du (PL') obtenue lors de la 1ère phase / contrainte gênante.

2 cas de figures:

(1) La solution optimale de la phase 1 respecte la contrainte gênante:

$x_1^* + x_2^* = 10 + 70 - 80 \geq 20$

→ on a gagné, l'optimum initial est (10,70)

Lorsqu'on ajoute de nouvelles contraintes à un programme linéaire on ne modifie pas l'optimum déjà existant si celui-ci respecte les nouvelles contraintes.

(2) si l'optimum du PL réduit ne respecte pas ces contraintes gênante alors ce n'est pas l'optimum du PL initial ⇒ on a perdu.

2ème technique: démarrage à partir d'un sommet quelconque.

$$(PL) \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \end{cases}$$

MAX: $z = x_1 + x_2$ $(x_1, x_2 \geq 0)$

· On peut faire le démarrage standard.
· Technique permettant de démarrer d'un sommet ≠ origine:
* on utilise cette technique si l'origine n'est pas réalisable.
* on peut aussi utiliser cette technique pour réduire le nombre d'itérations du simplexe / à l'origine.

(1°) $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 1$

- admissible
- de base

Condition d'admissibilité: toutes les variables | - de décision - d'écart | associés au point de départ candidat ≥ 0

$3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \Rightarrow x_4 = \frac{5}{3}$

$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \Rightarrow x_5 = 0$

$(7/3)$ $(1)$

Condition de base :

Parmi toutes les variables (décision ou écart), il faut qu'il y ai au moins 1 jeu de $m$ variables $> 0$.

$m$ = nombre de contraintes du Pb. ici $m = 3$.

Ici : $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 1$ et $x_4 = \frac{5}{3}$

On calcule le déterminant associé à ces $m$ variables $> 0$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det B \neq 0 \qquad \det B = -3$$

2 cas de figure qu'on aurait pu rencontrer :

- a
  - $x_3 = 0$
  - $x_4 = 0$
  - $x_5 = 0$ $\Rightarrow$ Il n'y a pas 3 variables $> 0$

    $\Rightarrow$ la solution candidate ne peut pas servir pour démarrer le simplexe.
- b
  - $x_3 = 0$
  - $x_4 = \frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ 4 triplets candidats
  - $x_5 = 2$

    $(x_1, x_2, x_4) \Rightarrow \det B_1 \neq 0$ ? ...

Quand on a trouvé une solution "admissible" et "de base", on détermine le tableau initial du Simplexe en appliquant la relation matricielle :

$$\boxed{I . x_B + B^{-1} N . x_N = B^{-1} b}$$

$x_B$ = vecteur de base $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B$ = tableau extrait du tableau central, associé à $x_B$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_N$ = vecteur hors-base $= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$ $N$ = tableau associé à $x_N$ $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b$ = vecteur des seconds membres $= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} . N = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ tableau initial associé au sommet proposé.

On aboutit à : $\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{7}{3} \\ x_2 + x_5 = 1 \\ \frac{4}{3}x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 = \frac{5}{3} \end{cases}$

Tableau initial :

| $c_i$ | $i$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 0 | 2/3 | 0 | -1/3 | | 7/3 |
| 1 | 2 | | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | | 1 |
| 0 | 4 | | 0 | 0 | 4/3 | 1 | -5/3 | | 5/3 |
| | | $c_j$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | $\Delta_j$ | 0 | 0 | 1/3 | 0 | -2/3 | | 10/3 |

Max : $z = x_1 + x_2 = \sum_i c_i x_i$ ($c_1 = 1$, $c_2 = 1$)

$\Delta_j = c_j - \sum_i c_i x_{ij}$

$0 - [1 \times (-1/3) + 1 \times 1 + 0 \times (-\frac{5}{3})]$

1ère itération :

- Comme ts les $\Delta_j$ ne sont pas $\leq 0$, on cherche le plus ~~petit~~ grand $\Delta_j$ positif.

$\Delta_j$ [ 0 0 1/3 0 -2/3 ]

e — $x_3$ entre

- On calcule les nouveaux rapports :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2/3 | 0 | -1/3 | 7/3 | $(7/3)/(2/3) \to 7/2$ |
| 2 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | $1/(-1) \to -1$ |
| 4 | 0 | 0 | 4/3 | 1 | -5/3 | 5/3 | $(5/3)/(4/3) \to 5/4 \to 5$ |

pivot : 4/3 ; e ; $x_4$ sort

On choisit alors pour sortie le plus petit rapport positif

- On calcule la nouvelle ligne du pivot :

$\underbrace{[0 \; 0 \; 4/3 \; 1 \; -5/3]}_{\text{ancienne ligne}} \; \underbrace{/ (4/3)}_{\text{divisé par le pivot}} \longrightarrow \underbrace{[0 \; 0 \; 1 \; 3/4 \; -5/4]}_{\text{nouvelle ligne}}$

- On calcule les lignes restantes :

en appliquant la formule :

nouvelle ligne = ancienne ligne − nouvelle ligne du pivot × terme encadré

(terme ∈ colonne e et à la ligne à calculer)

- On calcule la nouvelle ligne $\Delta_j$ :

nouvelle ligne $\Delta_j$ = ancienne ligne $\Delta_j$ − nouvelle ligne du pivot × terme encadré

terme intersection entre la col. e et la ligne $\Delta_j$

Programmation linéaire.

## 3. Principe de l'algorithme du SIMPLEXE (suite)

### 4ème méthode de démarrage du simplexe : méthode des variables artificielles.

(ou méthode des pénalités ou méthode du "GRAND M")

**Exemple:** p.126, I

P.L. contraintes
$$\begin{cases} x_1 \leq 1 & ① \\ x_1 + x_2 \geq 6 & ② \\ -x_1 + x_2 = 3 & ③ \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$

On remarque que le démarrage "standard" à partir de l'origine n'est pas possible : $x_1 = x_2 = 0$, l'origine n'est pas réalisable.

On introduit les variables d'écart associées aux inégalités → 2 variables d'écart $\overbrace{x_{\bar 1} \text{ et } x_{\bar 2}}^{\geq 0}$ associées à ① et ②.

$$\begin{cases} x_1 + x_{\bar 1} = 1 \\ x_1 + x_2 - x_{\bar 2} + x_{\bar{\bar 2}} = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_{\bar{\bar 3}} = 3 \end{cases}$$

On introduit en plus des variables artificielles seulement pour les contraintes non respectées par l'origine (ici $x_{\bar{\bar 2}}$ et $x_{\bar{\bar 3}}$)

Démarrage du simplexe :

- Pour les contraintes sans variable artificielle, on prend la variable d'écart comme variable de base : $x_{\bar 1} = 1$.
- Pour les contraintes avec variable artificielle, on prend la variable artificielle comme variable de base : $x_{\bar{\bar 2}} = 6 \quad x_{\bar{\bar 3}} = 3$

⇒ Base initiale : $\begin{cases} x_{\bar 1} \\ x_{\bar{\bar 2}} \\ x_{\bar{\bar 3}} \end{cases}$

Pour que les V.A. qui permettent de démarrer soient éliminées par l'algo. du simplexe, il faut pénaliser la fonction objectif : $\text{MAX} \quad z = x_1 + 2x_2 - M.x_{\bar{\bar 2}} - M.x_{\bar{\bar 3}}$

**Tableau initial:**

$\Delta_j = c_j - \sum_i c_i x_{ij}$

| $c_i$ | $i$ | 1 | 2 | $\bar 1$ | $\bar 2$ | $\bar{\bar 2}$ | $\bar{\bar 3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\bar 1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| -M | $\bar{\bar 2}$ | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 6 |
| -M | $\bar{\bar 3}$ | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| | $c_j$ | 1 | 2 | 0 | 0 | -M | -M | |
| | $\Delta_j$ | 1 | 2+2M | 0 | -M | 0 | 0 | -9M |

indication : M est un nombre positif et grand.

$1^{ère}$ itération:

| $c_i$ | $i$ | $1$ | $2$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{\bar{2}}$ | $\bar{\bar{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\bar{1}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $-M$ | $\bar{\bar{2}}$ | 2 | 0 | 0 | $-1$ | 1 | $-1$ | 3 |
| 2 | 2 | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| | $c_j$ | 1 | 2 | 0 | 0 | $-M$ | $-M$ | |
| | $\Delta_j$ | $2M+3$ | 0 | 0 | $-M$ | 0 | $-2M+2$ | $6-3M$ |

$\uparrow$ e

$2^{ème}$ itération:

| | | $1$ | $2$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{\bar{2}}$ | $\bar{\bar{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $-M$ | $\bar{\bar{2}}$ | 0 | 0 | $-2$ | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| | $c_j$ | 1 | 2 | 0 | 0 | $-M$ | $-M$ | |
| | $\Delta_j$ | 0 | 0 | $-2M-3$ | $-M$ | 0 | $-2M-2$ | $9-M$ |

$\rightarrow$ critère d'arrêt: $\Delta_j \leq 0$

$\rightarrow$ Pb: une variable artificielle n'est pas sortie de la base.

$x_{\bar{\bar{2}}} = 1$

Pb sans solution.

interprétation géométrique:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = x_1 + 3 \end{cases}$$

$$x_1 + (x_1+3) \geq 6$$
$$2x_1 \geq 3$$
$$x_1 \geq \frac{3}{2}$$

D domaine réalisable incompatible avec la contrainte $x_1 \leq 1$

## $5^{ème}$ méthode de démarrage du simplexe : méthode du P.L. Dual.

Ex: p. 126, II

$$\begin{cases} 3x_1 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 27 \\ 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

MAX : $z = 36x_1 + 24x_2$.

Ici, cas le plus simple $\rightarrow$ l'origine est réalisable $\Rightarrow$ "Simplexe standard" avec démarrage à partir de l'ori. ou résolution graphique.

$1^{er}$ tableau: dans le démarrage standard, ce sont les variables d'écart qui sont présentes dans la base initiale:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_{\bar{1}} = 16 \\ x_1 + x_2 + x_{\bar{2}} = 27 \\ 2x_2 + x_{\bar{3}} = 10 \end{cases}$$

| $c_i$ | $i$ | $1$ | $2$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\bar{1}$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| 0 | $\bar{2}$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 27 |
| 0 | $\bar{3}$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| | $c_j$ | 36 | 24 | 0 | 0 | 0 | |
| | $\Delta_j$ | 36 | 24 | 0 | 0 | 0 | $0 \leftarrow z$ |

2e tableau :

| $c_i$ | $i$ | 1 | 2 | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 1 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 16/3 |
| 0 | $\bar{2}$ | 0 | 1 | -1/3 | 1 | 0 | 65/3 |
| 0 | $\bar{3}$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| | $c_j$ | 36 | 24 | 0 | 0 | 0 | |
| | $\Delta_j$ | 0 | 24 | -12 | 0 | 0 | 192 |

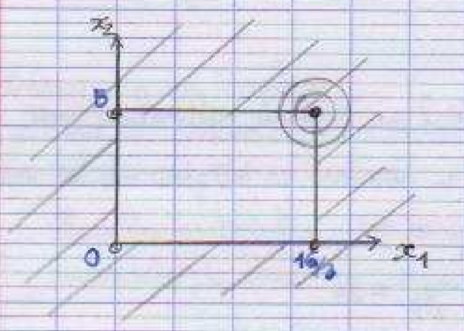
3ème tableau :

| $c_i$ | $i$ | 1 | 2 | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 1 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 16/3 |
| 0 | $\bar{2}$ | 0 | 0 | -1/3 | 1 | -1/2 | 50/3 |
| 24 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 5 |
| | $c_j$ | 36 | 24 | 0 | 0 | 0 | |
| | $\Delta_j$ | 0 | 0 | -12 | 0 | -12 | 312 |

Optimum

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{16}{3} \\ x_2^* = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_{\bar{2}}^* = 50/3 \\ x_{\bar{1}}^* = 0 \\ x_{\bar{3}}^* = 0 \end{array}$$

$$Z^* = 312 = 36 \times \frac{16}{3} + 24 \times 5$$




① $x_1 \leq \frac{16}{3}$

③ $x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq \frac{31}{3} < 27$ ② redondante

Max $z = 36x_1 + 24x_2$

(b) DUAL : c'est un P.L. "équivalent" au P.L. initial, appelé PRIMAL.

sens suivant : si on a résolu le P.L. dual, on peut en déduire la solution du primal, et inversement.

⇒ méthode de démarrage possible → P.L. primal, pb. de démarrage → P.L. dual : peut être plus facile à résoudre.

Définition du P.L. dual : Soit un P.L. primal variables $x_i$, $n$ variables, $m$ contraintes.

Le P.L. dual associé, variables $y_i$, $m$ variables, $n$ contraintes.

Le P.L. primal et le P.L. dual échangent entre eux les nbrs de variables et de contraintes.

## Règles de passage du primal au dual

1. Les coefficients des contraintes du DUAL se lisent dans les colonnes du PRIMAL.
2. Le sens des inégalités est inversé.

$$2y_1 + y_2 + 0y_3 \geq 36$$
$$0y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 24$$

3. Les seconds membres des contraintes du dual sont les coefficient de la fonction économique du primal ($z = \ldots$)

4. Les coefficients de la fonction économique du DUAL sont les seconds membres des contraintes du primal.

<u>Min</u> $w = 16y_1 + 27y_2 + 10y_3$

5. La fonction économique du DUAL est à minimiser.

Remarque : avant d'appliquer ces 5 règles, le P.L. primal doit être mis sous la "forme standard" de passage au DUAL → contraintes $\leq$ fonction z est à Maximiser.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| P.L. primal<br>2 variables<br>3 contraintes | $3x_1 \leq 16$<br>$x_1 + x_2 \leq 27$<br>$2x_2 \leq 10$<br>$x_1, x_2 \geq 0$ | $\xrightarrow[\text{au DUAL}]{\text{passage}}$ | P.L. dual<br>3 variables<br>2 contraintes | $3y_1 + y_2 + 0y_3 \geq 36$<br>$0y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 24$<br>$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ |
| forme standard de passage au dual. | MAX $z = 36x_1 + 24x_2$ | | | MIN $w = 16y_1 + 27y_2 + 10y_3$ |

<u>Passage du tableau optimal du primal au tableau optimal du DUAL.</u>

- Mettre le DUAL sous la forme standard en introduisant les variables d'écart :

$$3y_1 + y_2 \qquad - y_{\bar{1}} = 36$$

$$y_2 + 2y_3 \qquad - y_{\bar{2}} = 24$$

$$\text{MAX} \quad w' = -w = -16y_1 - 27y_2 - 10y_3$$

Remarque : l'algorithme du simplexe ne sait faire que des maximisations ⇒ tableau optimal du DUAL.

On admet que, à l'optimum, $x_i^* = -\Delta y_{\bar{i}}^*$

$$x_{\bar{i}}^* = -\Delta y_i^* \qquad \Delta x_i^* = -y_{\bar{i}}^* \qquad \Delta x_{\bar{i}}^* = -y_i^*$$

Tableau optimal du DUAL

| $c_i$ | $i$ | 1 | 2 | 3 | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -16 | 1 | 1 | 1/3 | 0 | -1/3 | 0 | 12 |
| 10 | 3 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | -1/2 | 12 |
| | $c_j$ | -16 | -27 | -10 | 0 | 0 | |
| | $\Delta_j$ | 0 | -50/3 | 0 | -16/3 | -5 | -312 |

primal :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x_{\bar{1}}^* = -12 \\ \Delta x_{\bar{2}}^* = -12\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}y_1^* = 12 \\ y_3^* = 12\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}x_1^* = \frac{16}{3} \\ x_{\bar{1}}^* = 5 \\ x_{\bar{2}}^* = 50/3\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\Delta y_{\bar{1}}^* = -16/3 \\ \Delta y_{\bar{2}}^* = -5 \\ \Delta y_2^* = -50/3\end{array}\right.$$

$$z^*_{\text{PRIMAL}} = w^*_{\text{DUAL}} = 312$$

ligne $y_1$ → colonne $x_{\bar{1}}$

$$\underbrace{\begin{array}{c|c|} 1 & 1/3 \\ \bar{2} & -1/3 \\ 2 & 0 \end{array}}_{\text{colonne}} \longrightarrow \underbrace{\begin{array}{c|ccc|} & \bar{1} & 2 & \bar{2} \\ 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \end{array}}_{\text{ligne}}$$

$$\begin{array}{c|c|} 1 & 0 \\ \bar{2} & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|ccc|} \bar{1} & 2 & \bar{2} \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}$$

Programmation linéaire.

## 4. Application.

Exercice III p. 126.

(a) L'algorithme du Simplexe ne sait faire que des maximisations.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ MAX $z' = -x_1 - 2x_2$

Pb de démarrage ?

$x_1 = x_2 = 0$, contraintes satisfaites ? $\rightarrow$ Problème avec la contrainte (1).

· 1ère méthode de démarrage : on associe une variable artificielle à chaque contrainte gênante, ici la contrainte (1).
On associe à chaque inégalité une variable d'écart.

$\Rightarrow$ écriture du P.L. sous forme d'égalités :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_{\bar{1}} + \overbrace{x_{\bar{\bar{1}}}}^{\text{sert à annuler le 3 lorsque } x_1 = x_2 = 0} = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_{\bar{2}} = 4 \end{cases}$$

MAX $z' = -x_1 - 2x_2 - Mx_{\bar{\bar{1}}}$

En résumé :
- on se ramène toujours à une maximisation quitte à changer le signe ($z \Rightarrow -z$)
- on introduit une variable d'écart pour chaque contrainte d'inégalité $\Rightarrow x_{\bar{1}}$ et $x_{\bar{2}}$
- on introduit une variable artificielle pour chaque contrainte « gênante » $\Rightarrow x_{\bar{\bar{1}}}$ [ne pas oublier $-M$]

1er tableau du Simplexe : (avec $\Delta_j = c_j - \sum_i c_i x_{ij}$)

| $c_i$ (2) | $i$ (1) | 1 | 2 | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{\bar{1}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-M$ | $\bar{\bar{1}}$ | 2 | 3 | $-1$ | 0 | 1 | 3 |
| 0 | $\bar{2}$ | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| | $c_j$ | $-1$ | $-2$ | 0 | 0 | $-M$ | |
| | $\Delta_j$ | $2M-1$ | $3M-2$ | $-M$ | 0 | 0 | $-3M$ |

(3) : coefficients ; (4) : égalités ; (5) : $\Delta_j$ ; (6) : $-3M$ ; e : $3M-2$

(1) On sélectionne la variable qui entre dans la base (variables $\neq 0$)
(2) On reporte le coefficient de la variable (1) donné par MAX
(3) On reporte les coef.
(4) On reporte les égalités.
(5) $\Delta_j = c_j - \sum_i c_i x_{ij}$
(6) $z = \sum_i c_i x_i$

2ème tableau :

(1) On choisit l'entrée : plus grand $\Delta_j$ positif. ici : $3M-2$.
(2) On calcul les nouveaux rapport : $\text{Nouveau}_{\text{rap.}} = \text{Ancien}_{\text{rap.}} / x_{\text{ligne concerné}, e}$
ici : $\frac{1}{3}$
(3) On sélectionne la sortie : plus petit rapport positif.
(4) On calcule la nouvelle ligne du pivot : Nouvelle = Ancienne / pivot
(5) On calcule les autres lignes : Nouvelle = Ancienne − Nouvelle ligne du pivot × terme encadré
(6)

Remarque : pivot $= x_{se}$
terme encadré par (5) $= x_{ie}$

| $c_i$ | $i$ | $1$ | $2$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{\bar{1}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $2/3$ | $1$ | $-1/3$ | $0$ | | $1$ |
| | | | | | | | $4$ |
| | | $-1$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $-M$ | |
| | $\Delta_j$ | | | | | | |

$3^{ème}$ tableau:

| $c_i$ | $i$ | $1$ | $2$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{\bar{1}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $2$ | $0$ | $1$ | $-3/7$ | $-2/7$ | | $1/7$ |
| $-1$ | $1$ | $1$ | $0$ | $1/7$ | $3/7$ | | $9/7$ |
| | $c_j$ | $-1$ | $-2$ | $0$ | $0$ | | |
| | $\Delta_j$ | $0$ | $0$ | $-5/7$ | $-1/7$ | | $-11/7$ |

$\Delta_j \leq 0 \Rightarrow$ cas d'arrêt.

Optimum: $x_1^* = \frac{9}{7}$ , $x_2^* = \frac{1}{7}$

(b) forme standard du passage au DUAL:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &\leq -3 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 4 \end{aligned} \xrightarrow{\text{DUAL}} \begin{aligned} -2y_1 + 3y_2 &\geq -1 \\ -3y_1 + y_2 &\geq -2 \end{aligned}$$

MAX $z' = -x_1 - 2x_2$ MIN $w = -3y_1 + 4y_2$

$y_1, y_2 \geq 0$

DUAL forme standard

$$\begin{aligned} 2y_1 - 3y_2 &\leq 1 \\ 3y_1 - y_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

MAX $3y_1 - 4y_2$

(c) tableau optimal du DUAL?

| $c_i$ | $i$ | $1$ | $2$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $3$ | $1$ | $1$ | $0$ | $-1/7$ | $3/7$ | $5/7$ |
| $-4$ | $2$ | $0$ | $1$ | $-3/7$ | $2/7$ | $1/7$ |
| | $c_j$ | $3$ | $-4$ | $0$ | $0$ | |
| | $\Delta_j$ | $0$ | $0$ | $-9/7$ | $-1/7$ | $11/7 \leftarrow w$ |

Variables de base du DUAL?

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_{\bar{1}}^* &= -5/7 \\ \Delta x_{\bar{2}}^* &= -1/7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y_1^* &= \frac{5}{7} \\ y_2^* &= \frac{1}{7} \end{aligned}\right.$$

$x_2^* = \frac{1}{7} \Rightarrow \Delta y_{\bar{2}}^* = -1/7$

$x_1^* = 9/7 \Rightarrow \Delta y_{\bar{1}}^* = -9/7$

| | $\bar{1}$ |
|---|---|
| $2$ | $-3/7$ |
| $1$ | $1/7$ |

| $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |
|---|---|
| $3/7$ | $-1/7$ |

| | $\bar{2}$ |
|---|---|
| $2$ | $-2/7$ |
| $1$ | $3/7$ |

| $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |
|---|---|
| $2/7$ | $-3/7$ |

primal dual

(d) $z = \lambda x_1 + 2x_2$.

| $c_i$ | $i$ |
|---|---|
| $-2$ | $2$ |
| $\cancel{-1}$ $(-\lambda)$ | $1$ |

| | $1$ | $2$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\cancel{\bar{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $1$ | $-3/7$ | $-2/7$ | | $1/7$ |
| | $1$ | $0$ | $1/7$ | $3/7$ | | $9/7$ |
| $c_j$ | $\cancel{-1}$ $(-\lambda)$ | $-2$ | $0$ | $0$ | | |
| $\Delta_j$ | ~~$0$~~ | ~~$0$~~ | ~~$-5/7$~~ | ~~$-4/7$~~ | | ~~$-11/7$~~ |
| | $0$ | $0$ | $\frac{\lambda-6}{7}$ | $\frac{3\lambda-4}{7}$ | | |

Si $\Delta_j \leq 0$, l'optimum déterminé avec $\lambda=1$ est resté optimum

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\lambda-6}{7}\leq 0\\ \frac{3\lambda-4}{7}\leq 0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\lambda<6\\ \lambda<\frac{4}{3}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda<\frac{4}{3}$$

Pour $\lambda > \frac{4}{3}$, la solution examinée n'est plus optimale ⇒ il faut relancer l'algo du simplexe.

| $c_i$ | $i$ |
|---|---|
| $-2$ | $2$ |
| $0$ | $\bar{2}$ |

| | $1$ | $2$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $2/3$ | $1$ | $-1/3$ | $0$ | $1$ |
| | $7/3$ | $0$ | $1/3$ | $1$ | $3$ |
| | $-\lambda$ | $-2$ | $0$ | $0$ | |
| $\Delta_j$ | $\frac{4}{3}-\lambda$ | $0$ | $-2/3$ | $0$ | |

On est à l'optimum car $\frac{4}{3}-\lambda<0$

| $\lambda$ | $-\infty$ | $4/3$ $+\infty$ |
|---|---|---|
| solution | $x_1^*=\frac{9}{7}$, $x_2^*=\frac{1}{7}$ | $x_1^*=0$, $x_2^*=1$ |
| coût | $z^*=\frac{9\lambda+2}{7}$ | $z^*=2$ |

← $< \frac{9\lambda+2}{7}$ lorsque $\lambda > \frac{4}{3}$

MIN Z

(e) PL avec $\lambda$

$2x_1+3x_2 \geq 3$
$3x_1+x_2 \leq 4$
MIN $z=\lambda x_1+2x_2$

forme standard
$-2x_1-3x_2 \leq -3$
$3x_1+x_2 \leq 4$
Max $-\lambda x_1-2x_2$

dual
$-2y_1+3y_2 \geq -\lambda$
$-3y_1+y_2 \geq -2$
Min $-3y_1+4y_2$

forme standard DUAL

$$\left.\begin{array}{l}2y_1-3y_2\leq\lambda\\ 3y_1-y_2\leq 2\\ \text{Max } 3y_1-4y_2\end{array}\right\} PL'$$

| $\lambda$ | $-\infty$ | $4/3$ $+\infty$ |
|---|---|---|
| solution DUAL | $y_1^*=\frac{6-\lambda}{7}$, $y_2^*=\frac{4-3\lambda}{7}$ | $y_1^*=\frac{2}{3}$, $y_2^*=0$ |
| coût | $\frac{9\lambda+2}{7}$ | $2$ |
| | $3\left(\frac{6-\lambda}{7}\right)-4\left(\frac{4-3\lambda}{7}\right)$ | $3\times\frac{2}{3}-4\times 0$ |

$y_i^* = -\Delta x_{\bar{i}}^*$