Sujet1:EPITA-ING1-2011-S1
M. REGRAGUI

PARTIEL ALGEBRE LINEAIRE

Notes de cours et calculatrice autorisées

Exercice 1 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de A
2. Déterminer le polynôme minimal de A
3. La matrice A est –elle diagonalisable ?
4. Déterminer les sous espaces propres de A

Exercice 2 :

Soit le système linéaire $Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Appliquer l'algorithme de Gauss pour résoudre le système linéaire $Ax = b$ (on explicitera les matrices $\widetilde{A}^{(k)}$ et $G^{(k)}$ $\forall k$)
2. Donner la factorisation de Gauss $A = LU$
3. En déduire le déterminant de A
4. Estimer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre ce système par Gauss

Exercice 3 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = 0$ où I_3 est la matrice identité
2) Trouver les racines du polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
3) En déduire A^n pour tout $n \in IN$
4) Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3