EPITA-ING1

RATTRAPAGE ALGEBRE LINEAIRE (durée1h30)

Les notes de cours ne sont pas autorisées
La calculatrice est autorisée

Exercice 1 :

On note $E = IR^3$. Soit φ l'application de E dans E définie par :
$\varphi(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$

1. vérifier que φ est linéaire de E dans E
2. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer les valeurs propres de A
4. Déterminer le polynôme minimal de A
5. En déduire que A est diagonalisable
6. Déterminer une base de vecteurs propres de A

Exercice 2 :

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrer que le déterminant de B est non nul
2) Calculer les normes matricielles $\|B\|_1$ et $\|B\|_\infty$
3) Utiliser l'algorithme de GAUSS pour résoudre le système linéaire :
$x + y + z = 3$
$5x + 2y - z = 5$
$-3x - 4y + 3z = 1$
4) En déduire une factorisation de la matrice B et retrouver le résultat de la première question.

Exercice3 :

Soient A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et b un vecteur de IR^n
On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$

1) Supposons que la matrice A est connue exactement, mais que le vecteur b l'est avec une certaine incertitude. Considérons alors le système perturbé :
$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ où Δb est un vecteur dont les composantes sont supposées petites devant celles de b . .
Montrer qu'il existe une constante $C(A)$ positive ne dépendant que de A telle que
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq C(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

2) On suppose maintenant que le vecteur b est connu exactement mais que A est connue avec une certaine incertitude ΔA .le système perturbé devient alors :
$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$

Montrer que $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq C(A) \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

3) Supposons que A et b sont connus exactement. Mais on calcule x par une méthode d'élimination qui donne un vecteur x_1 différent de x .
On pose $\Delta x_1 = x - x_1$ et $r_1 = b - Ax_1$, on considère alors l'algorithme :
$r_k = b - Ax_k$
$A \Delta x_k = r_k$ et $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$
Montrer que cet algorithme est convergent.

EPITA	2015	PROL	rattrapage	JUILLET 2013

EXAMEN de *Programmation linéaire (PROL)*

(cours de P. Siarry)

Durée : **1h30**.

<u>Tous les documents, ordinateurs et calculatrices non autorisés.</u>

Étant donné la généricité du sujet, la notation sera très influencée par la qualité rédactionnelle des explications des résultats qui doivent être clairs et sans ratures.

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\underline{\mathbf{MAX}}\ z = x_1 + 2x_2$$

sous les contraintes :

$$4x_1 - x_2 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

1) Résoudre le programme (P) à l'aide de la méthode du simplexe.

2) Vérifier l'optimum obtenu au moyen d'une résolution graphique.

3) Donner le programme linéaire dual de (P), que l'on nommera (D).

4) Déterminer le tableau optimal de (D), en exploitant le résultat de la question 1).

5) En revenant à la formulation de (D) donnée en 3), poser le premier tableau de (D).

6) Résoudre le programme linéaire (D) à l'aide de la méthode du simplexe.

7) Comparer les tableaux optimaux de (D) obtenus dans les questions 4) et 6).

****