Algèbre linéaire

Réduction des matrices carrées.

1. Rappels et notations.

On se donne un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On note $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ l'espace des matrices à m lignes et n colonnes, à éléments de K.

Si $m=n$, on note $\mathcal{M}_n(K)$ l'espace des matrices carrées.

$A=(a_{ij})$ $\begin{array}{l} i\in[\![1,m]\!] \\ j\in[\![1,n]\!] \end{array}$ $a_{ij}\in K$

${}^tA=(a_{ji})$: transposée de A.

$A^*=(a^*_{ij})=\overline{a_{ji}}$: adjointe de A. $\quad A^*={}^t\overline{A}$

Si $y\in\mathbb{R}^n$ $\quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\quad {}^ty=(y_1 \cdots y_n)$

Si $y\in\mathbb{C}^n$ $\quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\quad y^*=(\overline{y_1} \cdots \overline{y_n})$

*Def : Soit $A\in\mathcal{M}_n(K)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A.
On appelle rayon spectral de A : $\rho(A)=\max\limits_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$

On définit le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ $\quad (x,y)={}^ty.x=\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$

Dans $\mathbb{C}^n$: $(x,y)=y^*.x=\sum\limits_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$

$$\begin{cases}(\alpha x,y)=\alpha(x,y)\\ (x,\beta y)=\overline{\beta}(x,y)\end{cases}$$

La norme de X : $\|X\|_2=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^2}$

$\|X\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$ $\quad\forall p\geq 1$

Norme de Hölder $\qquad \|X\|_1=\sum\limits_{i=1}^n|x_i|$ et $\|X\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$

<u>Remarque</u> : $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad (Ax,y)=(x,{}^tAy)$ $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\quad (Ax,y)=(x,A^*y)$

En effet : $\left.\begin{array}{l}(Ax,y)={}^tyAx\\ (x,{}^tAy)={}^t({}^tAy)x={}^tyAx\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}(Ax,y)=y^*Ax\\ (x,A^*y)=(A^*y)^*x=y^*Ax\end{array}\right\}$

*Déf: Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Q est orthogonale ssi ${}^tQ.Q = Q.{}^tQ = I$, matrice identité.

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, U est unitaire ssi $U^*U = UU^* = I$

$U^{-1} = U^*$

*Propriétés: $\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (avec Q orthogonale)

$\|Ux\|_2 = \|x\|_2, \; \forall x \in \mathbb{C}^n$ (avec U unitaire) conservation de la norme

2. Trigonalisation des matrices carrées

*Lemme 2.1: Soit $v \in \mathbb{C}^n \mid \|v\|_2 = 1$ alors $H = I - 2vv^*$ est hermitienne et unitaire, appelée matrice unitaire élémentaire. $(H^* = H)$

⚠ $\underbrace{v.v^*}_{\text{matrice}} \neq \underbrace{v^*.v}_{\text{scalaire}}$

preuve: $H^* = (I - 2vv^*)^*$
$= I^* - 2(vv^*)^*$
$= I - 2(v^*)^*v^*$
$= I - 2vv^*$
$= H$

$H^2 = (I - 2vv^*)(I - 2vv^*)$
$= I - 4vv^* + 4v\underbrace{v^*v}_{1}v^*$
$= I - 4vv^* + 4vv^*$
$= I$

*Lemme 2.2: Soit $a \in \mathbb{C}^n$ $(a \neq \vec{0})$, il existe une matrice unitaire élémentaire H et un scalaire (nombre) α tq $Ha = \alpha e_1$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

preuve: H doit vérifier $Ha = \alpha e_1$, $\|Ha\|_2 = \|\alpha e_1\|_2$ $\quad \boxed{\|a\|_2 = |\alpha|}$ ①

On cherche H sous la forme $H = I - 2vv^*$

$(I - 2vv^*)a = \alpha e_1$
$a - 2vv^*a = \alpha e_1$
$a - \alpha e_1 = 2vv^*a \longrightarrow \boxed{v = \frac{1}{\mu}(a - \alpha e_1)}$ ③

En multipliant à gauche par $2a^*$

$2a^*a - 2\alpha a^*e_1 = 4a^*vv^*a$

$2\|a\|_2^2 - 2\alpha\bar{a}_1 = 4a^*vv^*a \quad$ soit $\mu = 2v^*a$, $\bar{\mu} = 2a^*v$

$\boxed{2|\alpha|^2 - 2\alpha\bar{a}_1 = |\mu|^2}$ ②

On obtient un système:

$$(S)\begin{cases} |\alpha| = \|a\|_2 & ① \\ |\mu|^2 = 2|\alpha|^2 - 2\alpha\bar{a}_1 & ② \\ v = \frac{1}{\mu}(a - \alpha e_1) & ③ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On peut calculer $H = I - 2vv^*$

$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$

* Théorème 2.1 (Schur) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
$U^* A U = T$ triangulaire supérieur $\quad$ ($t_{ii} = \lambda_i$ valeurs propres de A)

preuve: Par récurrence sur n :

· vrai pour $n = 1$: $\quad U = 1,\ U^* = 1 \Rightarrow U^* A U = 1$.

· On suppose le résultat vrai pour $n-1$ (H)

Soit λ valeur propre de A. $\exists x \neq \vec{0}$ (vecteur propre) $Ax = \lambda x$

D'après le lemme 2.2 $\exists H$ unitaire élémentaire / $Hx = \alpha e_1$

$$\underbrace{H^* A H e_1}_{1^{ère} \text{ colonne de } H^*AH} = HAHe_1 = \frac{1}{\alpha} HAH \underbrace{\alpha e_1}_{Hx} = \frac{1}{\alpha} HA\underbrace{HH}_{I}x = \frac{1}{\alpha} HAx = \frac{\lambda}{\alpha} Hx = \frac{\lambda}{\alpha}\alpha e_1 = \lambda e_1$$

$$HAH = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & {}^t b \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right) \quad \begin{cases} b \in \mathbb{C}^{n-1} \\ A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}) \end{cases}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\exists U_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire.

$$U_{n-1}^* A_{n-1} U_{n-1} = T_{n-1}$$

Soit $V = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1} \end{array}\right) \quad V^* = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1}^* \end{array}\right)$ V est unitaire car U_{n-1} unitaire.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1}^* \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \lambda & {}^t b \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right)}_{HAH} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & {}^t b U_{n-1} \\ \hline 0 & T_{n-1} \end{array}\right)$$

Il suffit de poser $U = H \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1} \end{array}\right)$

$U^* = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1}^* \end{array}\right) H$

donc on a bien $U^* A U = T$

* Corollaire :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit hermitienne est qu'il existe une matrice U unitaire / $U^*AU = \Lambda$ diagonale réelle $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

Λ : nabla

(Toute matrice hermitienne est diagonalisable)

preuve: Condition nécessaire

Supposons que la matrice A est hermitienne. Alors $A^* = A$.

D'après le théorème de Schur : $\exists U$ unitaire / $U^*AU = T$

$$T^* = U^* \underbrace{A^* (U^*)^* = U^* A}_{A \text{ hermitien}} U = T$$

$T = T^* \Rightarrow T$ est diagonale réelle car $t_{ii} = \bar{t}_{ii}$ $\quad T = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} = \Lambda$

condition suffisante

Supposons $\exists\, U$ unitaire / $U^*AU = \Lambda = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ diagonale réelle

$A = U\Lambda U^* \Rightarrow A^* = U^{**}\Lambda^* U^* = U\Lambda U^* = A$ donc A est hermitienne.

Rappel:
A définie positive ssi
· $(Ax,x) > 0\ \forall x \neq \vec{0}$
${}^tXAX = q(X)$ forme quadratique associée à A.
A est semi définie positive
$(AX,X) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{C}^n$

Exercice 1: Soit A hermitienne ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

1) Montrer que A est définie positive $\Leftrightarrow$ ses valeurs propres sont > 0.

2) A est supposée hermitienne définie positive. Montrer qu'il existe S hermitienne définie positive / $S^2 = A$ ($S = \sqrt{A}$).

1) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons A déf > 0

A hermitienne $\Rightarrow$ diagonalisable : $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (valeurs propres). $\exists$ une base orthonormée de vecteurs propres $B = (v_1, \dots, v_n)$.

$0 < (Ax,x)\ \forall x \neq \vec{0} \Rightarrow (Av_i, v_i) > 0 \Rightarrow (\lambda_i v_i, v_i) > 0 \qquad \lambda_i (v_i, v_i) > 0 \Rightarrow \lambda_i > 0\ \forall i$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\lambda_i > 0\quad \forall i = 1..n$

Montrons que $(Ax,x) > 0\quad \forall x \neq \vec{0}$

Rappel:
$Av_i = \lambda_i v_i$
v_i valeur propre associé à λ_i
$v_i \in \mathrm{Ker}(\quad)$

A hermitienne $\exists\, U$ unitaire / $U^*AU = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$U^*U = UU^* = I$ $\qquad (u_1, \dots, u_n)$ base de vecteurs propres $U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}$

$U^*U = I \Leftrightarrow (u_i, u_j) = u_j^* u_i = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq \vec{0}\quad x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$

$(Ax,x) = (A\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j)$

$= (\sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{Au_i}_{\lambda_i u_i}, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j) = \sum_{ij=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_j} (u_i, u_j)$

$= \sum_{ij=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \underset{>0}{\lambda_i} > 0$

$\Rightarrow (Ax,x) > 0\ \forall x \neq \vec{0} \Rightarrow A$ définie positive

2) $\begin{cases} A^* = A \\ A \text{ déf} > 0\ (\lambda_i > 0\ \forall i) \end{cases}$ $\qquad \exists?\ S$ hermitienne, déf >0 tq $S^2 = A \qquad S = A^{\frac{1}{2}}$

$U^*AU = \underset{\lambda_i > 0}{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad$ Soit $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad \Delta^2 = \Lambda \qquad \Delta = \Lambda^{1/2}$

$A = U\Lambda U^*$

soit $S = U\Delta U^* \qquad S^2 = U\Delta \underbrace{U^*U}_{I} \Delta U^* = U\Delta^2 U^* = U\Lambda U^* = A \qquad S^2 = A$

$S = U\Delta U^* \qquad S^* = U\Delta^* U^* = U\Delta U^* = S \Rightarrow S$ est hermitienne.

S et Δ sont semblables donc elles ont les mêmes valeurs propres et comme les $\sqrt{\lambda_i} > 0\ \forall i \Rightarrow S$ déf > 0

Algèbre linéaire

Réduction des matrices carrées.

Remarque: A^*A est hermitienne et semi définie positive.

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A \quad (A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

3. Normes vectorielles et matricielles.

*Def: On appelle norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ toute application sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \|x\|$

vérifiant:

(i) $\|x\| \geq 0$ $\quad (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0})$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemples: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \forall p \geq 1$

norme de Hölder

Ex: Démontrer que $\|x\|_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \max_i |x_i|$

*Def: On appelle norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $A \longmapsto \|A\|$

vérifiant:

(i) $\|A\| \geq 0$ $\quad (\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0)$

(ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|A.B\| < \|A\|.\|B\|$

*Def: Etant donnée une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$, la norme matricielle définie par $\|A\| = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)$ est dite subordonnée à la norme vectorielle.

Remarque: $\|I\| = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|x\|}{\|x\|}\right) = 1.$

Exemples: $\|A\|_2 = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)$ $\qquad \|A\|_1 = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\right)$ $\qquad \|A\|_\infty = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\right)$

*Prop: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

norme spectrale

$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ rayon spectral de A.
$\lambda_i \in Sp(A)$

Démo: A^*A hermitienne et semi-déf ≥ 0

$\underbrace{\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 \geq 0}_{\text{valeurs propre de } A^*A}$ $(v_1, \dots, v_n)$ base orthonormé de vecteurs propres.

$\|A\|_2 = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|_2} \right)$ $\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x)$ $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

$= (A^*A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{A^*Av_i}_{\sigma_i^2 v_i}, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j)$

$= (\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i^2 v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j) = \sum_{i,j}^n \alpha_i \sigma_i^2 \bar{\alpha}_j \underbrace{(v_i, v_j)}_{\delta_{i,j}}$

$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \sigma_i^2 \leq \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$

$\|Ax\|_2^2 \leq \sigma_1^2 \|x\|_2^2, \forall x \neq \vec{0}$

$\|Ax\|_2^2 \leq \sigma_1^2 = \rho(A^*A)$

$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho(A^*A)}, \forall x \neq \vec{0}$ $\sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right) \leq \sqrt{\rho(A^*A)}$

$\|A\|_2 \leq \sqrt{\rho(A^*A)}$

Soit $x = v_1$ $A^*Av_1 = \sigma_1^2 v_1$ $\|v_1\|_2 = 1$

$f(v_1) = \frac{\|Av_1\|_2}{\|v_1\|_2} = \|Av_1\|_2$

$\|Av_1\|_2^2 = (Av_1, Av_1) = (A^*Av_2, v_1) = \sigma_1^2 (v_1, v_2) = \sigma_1^2 = \rho(A^*A)$

$\|Av_1\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ $f(v_1) = \sqrt{\rho(A^*A)}$

$\rho(A^2) = \rho^2(A)$

Remarque: Si A est hermitienne $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A)$

$\|A\|_2 = \rho(A)$

*Def: Une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$ et une norme matricielle $\|A\|$ sont dites compatibles ssi $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemple: Norme subordonnée

$\|A\| = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$

*Théorème 3.1:

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a pour toute norme matricielle, $\boxed{\rho(A) \leq \|A\|}$

preuve: Soit $\lambda \in Sp(A)$ $\exists x \neq \vec{0} \,/\, Ax = \lambda x$

$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\| \; \forall \lambda \in Sp(A)$

$|\lambda| \leq \|A\|, \forall \lambda \in Sp(A)$

$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| \leq \|A\|$

Remarque: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ une norme $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Rappel: $T^* = {}^t\overline{T}$

Exercice: $\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: Norme de Hölder.

Montrer que $\|X\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \max_i |x_i|$

Soit $j \in \{1,..,n\}$ / $|X_j| = \max_i |X_i|$ alors $|X_j| \leqslant \sum_{i=1}^n |X_i|^p \leqslant n|X_j|^p$

$$|X_j| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |X_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \underbrace{n^{1/p}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 1} |X_j|$$

$$|X_j| \leqslant \lim_{p\to+\infty} \|X\|_p \leqslant |X_j|$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to+\infty} \|X\|_p = |X_j| = \max_i |X_i|$$

ex: $|1+i| = \sqrt{2}$, $|-5| = 5$, $|i| = 1$ $\quad X = \begin{pmatrix} 1+i \\ -5 \\ i \end{pmatrix}$ $\quad \|X\|_\infty = 5$ avec $j=2$.

Exercice: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A est normale: $AA^* = A^*A$.

Montrer qu'il existe U unitaire / $U^*AU = D$, où D est diagonale.

D'après le théorème de Schur : $\exists\, U$ unitaire / $U^*AU = T = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} TT^* &= U^*A\underbrace{UU^*}_{I}A^*U = U^*AA^*U \\ T^*T &= U^*A^*\underbrace{UU^*}_{I}AU = U^*A^*AU = \underbrace{U^*AA^*U}_{(A\text{ normale})} \end{aligned}\right\} \Rightarrow TT^* = T^*T$$

$$\left\{\begin{aligned} &T \text{ normale} \\ &\text{et} \\ &T = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \overset{?}{\Rightarrow} T = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} = D.$$

$[T^*T]_{ij}$ $\sum_{k=1}^n \overline{t_{ki}}\, t_{kj} = \sum_{k=1}^n t_{ik}\, \overline{t_{jk}}$ $\forall (i,j)$ $\qquad i=j \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^i |t_{ki}|^2 = \sum_{k=i}^n |t_{ik}|^2}$ $\quad (*)$

$i=1$ ($1^{\text{ère}}$ ligne)

$$\cancel{|t_{11}|^2} = \cancel{|t_{11}|^2} + |t_{12}|^2 + \ldots + |t_{1n}|^2 \Rightarrow \overbrace{|t_{12}|^2}^{\geqslant 0} + \ldots + \overbrace{|t_{1n}|^2}^{\geqslant 0} = 0 \Rightarrow t_{12} = t_{13} = \ldots = t_{1n} = 0$$

$i=2$ ($2^{\text{ème}}$ ligne)

$$|t_{12}|^2 + \cancel{|t_{22}|^2} = \cancel{|t_{22}|^2} + |t_{23}|^2 + \ldots + |t_{2n}|^2 \Rightarrow |t_{23}|^2 + \ldots + |t_{2n}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow t_{2j} = 0 \ \forall j \geqslant 3$$

par suite,

$t_{ij} = 0$ si $i > j$.

Par récurrence: (H) Hypothèse: supposons que: $\left\{ t_{lj} = 0 \quad \forall j \geqslant l+1 \text{ pour } 1 \leqslant l < i \right.$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{|t_{1\,i+1}|^2 + |t_{2\,i+1}|^2 + \ldots + |t_{i\,i+1}|^2}_{=0 \text{ d'après (H)}} + \cancel{|t_{i+1\,i+1}|^2} = \cancel{|t_{i+1\,i+1}|^2} + |t_{i+1\,i+2}|^2 + \ldots + |t_{i+1\,n}|^2$$

$$\Rightarrow |t_{i+1\,i+2}|^2 + \ldots + |t_{i+1\,n}| = 0$$

$$\Rightarrow |t_{i+1\,j}| = 0 \ \forall j \geqslant i+2.$$

Bilan: Toute matrice unitaire est diagonalisable.

*Théorème 3.2:

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\|A\| < 1$ pour une norme matricielle alors la matrice $I+A$ est inversible et vérifie $\|(I+A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}$ si $\|I\|=1$.

preuve: raisonnons par l'absurde.

Si $I+A$ est non inversible : $I+A$ admet 0 comme valeur propre.

$\exists\, X \neq \vec{0}$ (vecteur propre) / $(I+A)X = \vec{0}$.

$\Rightarrow AX = -X \Rightarrow \lambda = -1$ est valeur propre de A, or $\|A\| < 1$ et Th 3.1 $\Rightarrow \rho(A) \leqslant \|A\| < 1$

$\rho(A) = \max_i (\lambda_i) < 1$ et $\lambda = -1$ est de module 1 ce qui est absurde.

Conclusion: $I+A$ est inversible.

$(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}\underbrace{(I+A-A)}_{=I} = I - (I+A)^{-1}A$ $\quad \|(I+A)^{-1}\| \leqslant \underbrace{\|I\|}_{1} + \|(I+A)^{-1}A\|$

$\|(I+A)^{-1}\| \leqslant 1 + \|(I+A)^{-1}\|\,\|A\|$ $\quad \|(I+A)^{-1}\|\,(1-\|A\|) \leqslant 1$

$\Rightarrow \boxed{(I+A)^{-1} \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}}$

*Théorème 3.3:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$

(ii) $\rho(A) < 1$

(iii) $\exists$ une norme telle que $\|A\| < 1$

preuve:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

On suppose que: $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. Soit $\lambda \in Sp_K(A)$: spectre de $A = \{$valeurs propres$\}$

$\exists\, X = \vec{0} / AX = \lambda X$ $\quad A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$.

$\underbrace{A^k X}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0} = \lambda^k X \Rightarrow \lambda^k . X \xrightarrow[k \to +\infty]{} \vec{0} \Rightarrow \lambda^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \Rightarrow |\lambda| < 1$

$\Rightarrow \boxed{\rho(A) = \max |\lambda| < 1}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

On suppose que $\rho(A) < 1$. D'après la remarque : $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ une norme / $\|A\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$

Il suffit de choisir $0 < \varepsilon < 1 - \rho(A) \Rightarrow \boxed{\|A\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon < 1}$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

On suppose : $\|A\| < 1$ $\quad \|A^k\| \leqslant (\|A\|)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{k \to +\infty} A^k = 0}$

Algèbre linéaire

Réduction des matrices carrées.

*Théorème 3.4 :

On a pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et toute norme matricielle : $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$.

preuve :

$\rho(A) \leq \|A\|$ (Th 3.1) $\quad (\rho(A))^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k \Rightarrow \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists ? k_0 \ / \ \forall k \geq k_0 \quad \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$?

$\forall \varepsilon > 0$, soit $A(\varepsilon) = \dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}$

$\rho(A(\varepsilon)) = \dfrac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1 \Rightarrow \rho(A(\varepsilon)) < 1$

Th 3.2 $\Rightarrow (A(\varepsilon))^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\exists k_0 \ / \ \forall k \geq k_0 \quad \dfrac{\|A^k\|}{(\rho(A)+\varepsilon)^k} \leq 1 \Rightarrow \|A^k\| \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k$

$\Rightarrow \boxed{\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A)+\varepsilon \quad \forall k \geq k_0}$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \ / \ \forall k \geq k_0 \quad \rho(A) - \varepsilon \leq \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)}$

4. Diagonalisation des matrices.

Rappel :

*Théorème : A est diagonalisable ssi (i) $\mathcal{P}_A(\lambda)$ est scindé dans K.
(ii) $\dim E_{\lambda_i} = \text{mult}(\lambda_i) = \alpha_i,\ \forall i$

$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polynôme caractéristique de A.

$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda-\lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_i \in K$ et $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = n$

$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$ espace propre.

Exemple : $\mathcal{P}_A(X) = X^2 + 1$. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\quad Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.
Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ $\quad Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$

$\mathcal{P}_A(X)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. En revanche, il est scindé dans $\mathbb{C}$.

Ex : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A. $\quad \mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$

$\mathcal{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$L_2 \to L_2 - L_1$
$L_3 \to L_3 - L_1$
$$\mathcal{P}_A(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)^2 = \boxed{-(\lambda-1)(\lambda+2)^2}$$

$\mathcal{P}_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ simple $(\alpha_1 = 1)$ $\quad \lambda_2 = -2$ double $(\alpha_2 = 2)$

$0 < \dim E_{\lambda_i} \leq \alpha_i$ (Th.) $\qquad \dim E_{\lambda_1} = 1.$

$E_{-2} = \mathrm{Ker}(A + 2I) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow (A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$x + y + z = 0$ Eq. d'un plan $\quad x = -y - z \quad \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + z\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$

E_{-2} = plan engendré par (v_1, v_2)

$\dim E_{-2} = 2 = \mathrm{mult}(-2) \qquad \dim E_1 = 1 \Rightarrow A$ diagonalisable.

$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I) \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

① - ② $\Rightarrow -3x + 3y = 0 \quad y = x$
③ $\Rightarrow x = z$

$E_1 = \vec{D}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Ex2:</u> $\quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2) \qquad Sp_{\mathbb{R}}(B) = \{-2, \underbrace{1}_{\text{double}}\}$

$E_1 = \mathrm{Ker}(B - I) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (B - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 2z = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{5}z \\ 5x + y + 2z = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

$\dim E_1 = 1 \neq 2 = \mathrm{mult}(1) \Rightarrow B$ non diagonalisable. $\qquad E_1 = \vec{D}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ droite.

<u>5. Polynômes annulateurs.</u>

Soit E e.v. sur K et $Q \in K[X]$: espace des polynômes à coefficient dans K.

$Q(X) = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0$. Si $f \in \mathrm{End}_K(E)$ (espace des endomorphismes).

On note $Q(f)$ l'endomorphisme de E défini par:

$$Q(f) = a_m f^m + \ldots + a_1 f + a_0 \, Id \quad \text{où } f^k = \overbrace{f \circ f \circ f \ldots \circ f}^{k \text{ fois}}$$

Sa matrice est $Q(A) = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I$. $\qquad A^k = \underbrace{AA \ldots A}_{k \text{ fois}}$ matrice associée à f.

*Déf: Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Un polynôme $Q \in K[X]$ est dit annulateur de f ssi $Q(f) = 0$.

<u>Exemple:</u> Soit $f : E \mapsto E$ tel que $f^2 = f \circ f = f$ (f : projecteur).
Soit $Q(X) = X^2 - X$, on a $Q(f) = f^2 - f = 0$.

*Prop: Soit $Q(X)$ un polynôme annulateur de f, alors les valeurs propres de f figurent parmi les racines de $Q(X)$.

<u>Démo</u>: Soit λ valeur propre de f : $\exists v \neq \vec{0} \ / \ f(v) = \lambda v$.

$$f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v. \qquad f^k(v) = \lambda^k v.$$

Soit $Q(X) = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0 \quad (Q(f) = 0)$

$$a_m f^m + \ldots + a_1 f + a_0 Id = 0 \text{ (endo. nul)}$$

$$(a_m f^m + \ldots + a_1 f + a_0 Id)\, v = \vec{0}$$

$$a_m \lambda^m v + \ldots + a_1 \lambda v + a_0 v = \vec{0} \Rightarrow (a_m \lambda^m + \ldots + a_1 \lambda + a_0)\, v = \vec{0} \Rightarrow a_m \lambda^m + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{Q(\lambda) = 0}$$

*<u>Théorème: Cayley-Hamilton.</u>

Soit f un endomorphisme de E et $P_f(X)$ le polynôme caractéristique de f, alors $P_f(f) = 0$.

<u>Remarque:</u> $P_f(f) = 0 \Leftrightarrow P_A(A) = 0$ ($A = M(f)$ matrice de f).

<u>Preuve</u>: d'après le théorème de Schur, f est trigonalisable. Soit $(e_i)_i$ une base de E tq $M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in Sp(f)$.

$P_f(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\ldots(\lambda_m - X)$, il s'agit de montrer que :
$(\lambda_1 Id - f) \circ (\lambda_2 Id - f) \circ \ldots \circ (\lambda_m Id - f) = 0$

Soit $g_i = (\lambda_1 Id - f) \circ \ldots \circ (\lambda_i Id - f)$. Nous allons montrer par récurrence que g_i annule les vecteurs $e_1, \ldots, e_i$. (Le théorème sera démontré pour $i = n$).

$i = 1 \quad g_1(e_1) = (\lambda_1 Id - f)(e_1) = \lambda_1 e_1 - f(e_1) = \lambda_1 e_1 - \lambda_1 e_1 = \vec{0}$.

Hypothèse: supposons que $g_{i-1}(e_1) = \vec{0}, g_{i-1}(e_2) = \vec{0}, \ldots, g_{i-1}(e_{i-1}) = \vec{0}$.

$g_i = g_{i-1} \circ (\lambda_i Id - f) = (\lambda_i Id - f) \circ g_{i-1}$

$$\begin{cases} g_i(e_1) = (\lambda_i Id - f)(\underbrace{g_{i-1}(e_1)}_{\vec{0}}) = \vec{0} \\ \vdots \\ g_i(e_{i-1}) = (\lambda_i Id - f)(\underbrace{g_{i-1}(e_{i-1})}_{\vec{0}}) = \vec{0} \end{cases}$$

$g_i(e_i) = g_{i-1}((\lambda_i Id - f)(e_i)) = g_{i-1}(\lambda_i e_i - f(e_i))$ or $f(e_i) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_{i-1} e_{i-1} + \lambda_i e_i$

$g_i(e_i) = g_{i-1}(\lambda_i e_i - a_1 e_1 - a_2 e_2 \ldots - a_{i-1} e_{i-1} - \lambda_i e_i) = -a_1 \underbrace{g_{i-1}(e_1)}_{=\vec{0}} - a_2 \underbrace{g_{i-1}(e_2)}_{=\vec{0}} - \ldots - a_{i-1} \underbrace{g_{i-1}(e_{i-1})}_{\vec{0}}$
(Hypothèse de récurrence).

<u>conclusion:</u> $i = n \quad (\lambda_1 Id - f) \circ \ldots \circ (\lambda_m Id - f)$ s'annule sur la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$
$\Rightarrow P_f(f) = 0$.

*Déf: on appelle polynôme minimal de f noté $m_f(X)$ ou $m_A(X)$ $(A=M(f))$ le polynôme normalisé annulateur de f de degré le plus petit.

$M_f(f)=0 \Leftrightarrow M_A(A)=0.$ $\qquad M_f(X)=\underset{\text{normalisé}}{1}.X^r+a_{r-1}X^{r-1}+\dots+a_1X+a_0$

*Prop: Si $P(X)$ est un polynôme multiple de $M_f(X)$ alors $P(f)=0$.

preuve: $P(X)=Q(X)\,m_f(X) \Rightarrow P(f)=0$ car $M_f(f)=0$.

*Prop: $P\in K[X]$ est annulateur de f ssi il est multiple de $M_f(X)$.

preuve: La C.S. (condition suffisante) est déjà démontrée.

C.N.: supposons $P(f)=0$.

Effectuons la division euclidienne de $P(X)$ par $M_f(X)$.

$P(X)=Q(X)M_f(X)+R(X)$ avec $d°R<d°M_f$.

$P(f)=Q(f)\circ\underbrace{M_f(f)}_{=0}+R(f)=0 \Rightarrow R(f)=0$ or $d°R<d°m_f$ ce qui est absurde $\Rightarrow R(X)=0\ \forall X$

$\Rightarrow P(X)=Q(X)\,M_f(X) \Rightarrow M_f(X)\mid P(X).$

Remarque: $P_f(f)=0$ (Th. de C.-H.) donc $M_f(X)$ divise $P_f(X)$ (polynôme caractéristique de f).

$P_f(X)=(-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\dots(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ $\quad \lambda_i\neq\lambda_j$, $\sum_{i=1}\alpha_i=n$ $\qquad M_f(X)=(X-\lambda_1)^{\beta_1}\dots(X-\lambda_p)^{\beta_p}$ $\quad 1\leq\beta_i\leq\alpha_i$

*Théorème: Un endomorphisme f est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé et a toutes ses racines simples.

Ex1: $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ ① Déterminer $M_f(\lambda)$. ② A est-elle diagonalisable?

$P_f(\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda+2)^2$. Les candidats pour le polynôme minimale de f:

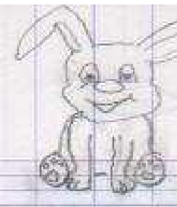
$M_f(\lambda)=\begin{cases}(\lambda-1)(\lambda+2)\\ \text{ou}\\ (\lambda-1)(\lambda+2)^2\end{cases}$

Vérifions si $(\lambda-1)(\lambda+2)$ est annulateur de f?

$(A-I)(A+2I)=0$ $\quad \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc $M_f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$

$M_f(\lambda)$ est scindé, il admet que des racines simples $\overset{Th.}{\Rightarrow}$ A est diagonalisation.

Algèbre linéaire.



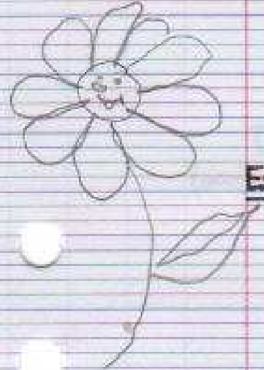
Réduction des matrices carrées.

~ exercices ~

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit la norme de Schur : $\|A\|_S = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

1) Cette norme est-elle induite par une norme vectorielle ?

2) Démontrer que $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_S \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|_2$



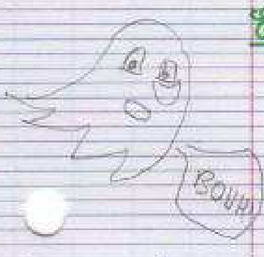
Exercice 2. Démontrer que :

(a) $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Application : calculer $\|A\|_1$ et $\|A\|_\infty$ pour $A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 0 \\ 5 & -i & 1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.



1) $\|A\| = \sup_{X \neq \vec{0}} \left(\frac{\|AX\|}{\|X\|}\right)$, $\|I\| = 1$. $\quad \|I\|_S = \sqrt{n} \neq 1 \quad \forall n \geqslant 2 \Rightarrow$ Norme de Schur n'est pas induite par une norme vectorielle.

2) $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_S \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|_2$?

Rappel : $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$[A.B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$Tr(A.B) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki}$

$$\|A\|_2 = \sup_{X \neq \vec{0}} \left(\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}\right) = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

$Tr(A^*A) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \qquad \sigma_1^2 \leqslant \|A\|_S^2 = Tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n^2} \sigma_i^2 \leqslant n\,\sigma_1^2$

$\sigma_1^2 \leqslant \|A_S\|^2 \leqslant n\,\sigma_1^2 \qquad (\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n^2 \geqslant 0)$ valeurs propres de A^*A.

$\rho(A^*A) \leqslant \|A\|_S^2 \leqslant n\,\rho(A^*A)$

$\sqrt{\rho(A^*A)} \leqslant \|A\|_S \leqslant \sqrt{n}\,\sqrt{\rho(A^*A)}$

Exercice 2.

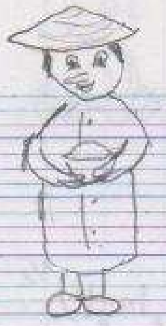
(a) $\|A\|_1$? $= \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = M \qquad \|A\|_1 = \sup_{X \neq \vec{0}} \left(\frac{\|AX\|}{\|X\|_1}\right) \qquad f(X) = \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \quad \forall X \neq \vec{0}$

$\left.\begin{array}{l} ① \ f(X) \leqslant M \\ ② \ \exists X_0 / M = f(X_0) \end{array}\right\} \Rightarrow M = \operatorname{Max} f(X)$

$$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(AX)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(|X_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|X_j|$$

$$\leqslant \left(\operatorname{Max}_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \sum_{j=1}^{n} |X_j| \leqslant \left(\operatorname{Max}_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \|X\|_1$$

$\frac{\|AX\|_1}{\|X\|} \leqslant \operatorname{Max}_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = M$ donc $\|A\|_1 = \sup_{X \neq \vec{0}} \left(\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}\right) \leqslant M$



Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ / $M = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$ $\qquad \|AX\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right.$

$f(x) = \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$.

Soit X_0 tel que $x_{0j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$, $\|X_0\|_1 = 1$ $\qquad \|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{0j} \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = M$

<u>Application:</u> $A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 0 \\ 5 & -i & 1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$

$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}|$

$$\left.\begin{array}{ll} j=1 & |1+i| + |5| + 0 = \sqrt{2} + 5 \\ j=2 & |i| + |-i| + |i| = 3 \\ j=3 & 0 + |1| + |1| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \|A\|_1 = 5 + \sqrt{2}$$

$j = 1$ (1ère colonne)

Algèbre linéaire

Réduction des matrices carrées.

Ex2 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1) Déterminer $M_P(\lambda)$. 2) A est-elle diagonalisable ?

1) $P_P(\lambda) = -(\lambda-1)^3$. Les candidats : $\begin{cases} \lambda-1 \\ \text{ou} \\ (\lambda-1)^2 \\ \text{ou} \\ (\lambda-1)^3 \end{cases}$

$M_P(\lambda) \neq \lambda-1$ car $A \neq I$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M_P(\lambda) = (\lambda-1)^2$

2) Donc $M_P(\lambda)$ admet une racine double $\lambda = 1 \overset{Th.}{\Rightarrow}$ A est non diagonalisable