Le formalisme des tableaux

Comment itérer l'algorithme du Simplexe jusqu'à l'optimum ?

1- Initialisation : Passer du problème linéaire au premier tableau

a- Le problème linéaire dans sa forme la plus basique

- des variables de décisions
- des contraintes linéaires sur ces variables
- une fonction linéaire de ces variables à maximiser

Pour l'exemple :

Maximiser z = c1.x1 + c2.x2 + c3.x3

Avec : aa.x1 + ab.x2 + ac.x3 <= L

ba.x1 + bb.x2 + bc.x3 <= M

ca.x1 + cb.x2 + cc.x3 <= N

b- Ajout des variables d'écart

- une par contrainte
- permet de transformer en égalités

Pour l'exemple :

aa.x1 + ab.x2 + ac.x3 + x4 = L

ba.x1 + bb.x2 + bc.x3 + x5 = M

ca.x1 + cb.x2 + cc.x3 + x6 = N

c- Le tableau correspondant

ci	i		1	2	3	4	5	6	
0	4		aa	ab	ac	1	0	0	L
0	5		ba	bb	bc	0	1	0	M
0	6		ca	cb	cc	0	0	1	N
		Δ j	c1	c2	c3	0	0	0	0

- ci : constantes correspondant aux variables xi dans la fonction à maximiser
- i : identifie a quelles variables xi sont associées les lignes
- le reste se comprend facilement grâce aux noms et couleurs

A chaque tableau correspond un « résultat » associé...

- Les variables qui ne sont pas dans la colonne i sont dites hors-base et sont nulles.
- Les valeurs des variables de base se lisent dans la colonne de droite
- La valeur de la fonction correspondante se lit tout en bas à droite

2- Itérations : Changer le tableau pour se rapprocher de la solution optimale

a- Cas d'arrêt

Lorsque tous les Δ j sont négatifs ou nuls, on ne peut plus progresser.
Dans ce cas, on est à l'optimum !

b- Variable entrante

La variable correspondant au plus grand Δj est la variable entrante.
Pour notre exemple, on fera comme si c1 était positif et plus grand que les autres.
x1 est donc notre variable entrante !

c- Variable sortante

On étudie les rapports [colonne de droite] / [colonne de la variable entrante] :

1		
aa		L
ba	(...)	M
ca		N
c1		0

Le plus petit rapport positif (parmis L / aa, M / ba et N / ca) détermine la variable sortante.
On considère que N / ca est positif et plus petit que les deux autres rapports pour notre exemple,
x6 est donc notre variable sortante !

Le but maintenant est de faire rentrer x1 « à la place de » x6.
Pour rappel, voici le tableau duquel on part :

ci	i		1	2	3	4	5	6	
0	4		aa	ab	ac	1	0	0	L
0	5		ba	bb	bc	0	1	0	M
0	6		ca	cb	cc	0	0	1	N
		Δj	c1	c2	c3	0	0	0	0

La colonne bleue est celle de la variable entrante, la jaune est celle de la sortante.
L'intersection correspond au pivot, et on appelle la ligne jaune « ligne de pivot » également.

d- Nouvelle ligne du pivot

On remplace ci et i par les valeurs correspondantes à notre variable entrante.
On met donc 1 à la place de 6 car x1 remplace x6. ci vient de la ligne Δj...
Pour toute les autres valeurs de la ligne, on divise juste par la valeur du pivot.
On obtient donc :

c1	1		1	cb/ ca	cc/ca	0	0	1/ca	N/ca

(avec mes notations générales, ça a l'air horrible, mais avec des chiffres en pratique ça va...)

e- Autres lignes

Pour toutes les autres lignes on applique la formule suivante :

[nouvelle ligne] =

[ancienne ligne] – [terme de la colonne entrante correspondant] x [**nouvelle** ligne du pivot]

Ainsi, pour la première ligne par exemple :

	aa	ab	ac	1	0	0		L
-	aa * 1	aa * cb/ca	aa * cc/ca	aa * 0	aa * 0	aa * 1/ca		aa * N/ca
	0	ab - aa * cb/ca	ac - aa * cc/ca	1	0	- aa * 1/ca		L – aa * N/ca

(là ça devient vraiment horrible avec ces notations, mais vous comprenez le principe... j'espère !)

ATTENTION : La formule est la même pour toutes les lignes,
sauf **LA** case en bas à droite, où on fait **+** à la place du **-** !!!

f- Résultat

On applique ces formules à toutes les lignes, et on réitère jusqu'à atteindre l'optimum.
Une fois qu'il est atteint, on lis les valeurs nécessaires dans le tableau :

ci	i		1	2	3	4	5	6	
c3	3			peu					LL
0	5				imp	orte			MM
c1	1						!		NN
		Δ j	neg	ati	fs	ou	n	uls	ZZ

Les valeurs hors-base sont nulles : dans l'exemple, x*2 = x*4 = x*6 = 0
On peut lire les autres valeurs :

x*1 = NN
x*3 = LL
x*5 == MM

Et la valeur de la fonction à l'optimum est ZZ !

3- Remarques : j'ai fait de mon mieux

Je ne suis pas rentré dans les détails de l'initialisation, en fonction des formes étranges que peuvent prendre les problèmes linéaires de départ... Je ne les comprends pas encore complètement.

J'ai essayé de faire simple et clair, mais c'est pas si simple...

Donc que ce soit pour...
… m'aider à améliorer/compléter/corriger cette fiche
… m'applaudir, m'acclamer et m'acheter des strokes positifs
… me cracher dessus virtuellement, m'insulter et critiquer cette fiche
… ou m'envoyer des blagues marrantes ou des spams « Enlarge your penis »
N'hésitez surtout pas à me contacter à l'adresse qui s'affiche en bas de votre écran !

--
Julien « Snooze92 » Lehuen <lehuen_j@epita.fr>
EPITA Ing1 Promo 2013