Durée 3h. Polycopiés, notes de cours, calculatrices, ordinateurs et matériel de télécommunication interdits.
Dans chaque question, il existe toujours au moins une réponse proposée valide. De même , il existe toujours au moins une réponse invalide.

Barème

Chaque question est notée sur 1 point.
Chaque réponse cochée à tort et chaque bonne réponse oubliée retire $\frac{1}{2}$ point.
L'absence de réponse cochée à une question entraîne zéro à la question.
Une question ne peut se voir attribuer une note négative.

1. Les réels verts

On définit inductivement des *réels verts* par :
- Les réels 0, 1 et -1 sont verts.
- Si x et y sont des réels verts (d'ordre k), alors $x + y$ et $x \times y$ sont des réels verts (d'ordre $k + 1$).
- Les réels verts sont obtenus en répétant au plus 5 fois les processus de construction (ordres $k \leq 5$)

On propose (indiquer la ou les réponse(s) vraie(s)) :

a) Pour tout réel x, on a x est un réel vert implique $-x$ est un réel vert.
b) 5 est vert.
c) Il existe un réel vert α tel que $\alpha \notin \mathbb{Z}$.
d) L'ensemble des réels verts est fini.
e) Aucun réel n'est vert.

2.Bienvenu chez les moldus

On définit inductivement les *moldus* par :
- Tout chiffre, toute lettre latine minuscule (26 caractères), et X sont des moldus.
- Si $\square$ et Δ sont des moldus, alors $\square + \Delta$; $\square \times \Delta$; $-\Delta$ et $\square\Delta$ (concaténation) sont des moldus.
- On permet la répétition un nombre entier fini de fois les processus de construction.

Les moldus forment un ensemble permettant de décrire syntaxiquement :

a) L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes en X à coefficients réels.
b) L'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes en X à coefficients entiers (relatifs).
c) L'ensemble des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, \dots z, 0, 1, \dots, 9, X\}$ (star de Kleene).
d) L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
e) Les sept livres de la saga *Harry Potter*.

3. Parler en Polonais-zéro

Parmi les séquences suivantes, lesquelles sont des formules de la logique propositionnelle écrites en polonais ?

a) $\wedge A \Rightarrow A \Rightarrow B \wedge \wedge \wedge BBAC$
b) $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$
c) $\Leftrightarrow \neg \wedge Z_{42} X_2 \vee \neg X_4 \neg Z_{42}$
d) $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow EXAMEN$
e) $\forall A \Rightarrow \neg A \vee C\top$

4. Mange tes broccolis

On se donne un connecteur logique ♣ dela logique propositionnelle. On peut alors écrire en notation classique, avec certitude, que :
a) $A♣B \vdash A♣B$ b) $A \vdash A♣B$ c) $A♣B \vdash A$ d) $\bot \vdash A♣B$ e) $\bot \vdash \top♣\bot$

5. Vous dites ?

La formule de logique propositionnelle $\wedge \Rightarrow \neg \vee W \top F \neg \bot$ écrite en polonais :

a) est sémantiquement équivalente à la formule $W \Rightarrow \neg F$ écrite en notation classique.
b) est une tautologie.
c) est une f^{***} antilogie.
d) est sémantiquement équivalente à $F \vee M$ en notation classique.
e) n'est pas une formule propositionnelle de la logique classique écrite en polonais.

6. La vérité

La table de vérité de la formule φ écrite en notation classique de : $[((A \vee B) \Rightarrow C) \Rightarrow B] \wedge A$ est donnée par :

a)

A	B	C	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

b)

A	B	C	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

c)

A	B	C	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

d)

A	B	C	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

e)

A	B	C	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

7. Fais graphe

Parmi les graphes donnés en feuille annexe, lesquels sont ceux d'une relation d'équivalence ? On considérera que les arêtes d'un sommet vers lui-même sont toutes présentes (mais ne seront pas représentées par souci de légerté).
a) Graphe 1 b) Graphe 2 c) Graphe 3 d) Graphe 4 e) Graphe 5

8. Et qui vaut ?

Parmi les relations R binaires suivantes, lesquelles sont des relations d'équivalences sur l'ensemble E fourni ?

a) Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on donne ARB si, et seulement si, il existe une matrice Q inversible telle que $Q^{-1}AQ = B$
b) Sur E l'ensemble des vecteurs non nuls d'un espace, on donne uRv si, et seulement si, u et v sont colinéaires.
c) Sur E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne fRg si, et seulement si il existe un réel x tel que $f(x) = g(x)$.
d) Sur E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne $\varphi R \psi$ si, et seulement si $\varphi \Leftrightarrow \psi$.
e) Sur $E = \mathbb{R}$, pour $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction fixée, différente de id, on donne xRy si, et seulement si $\begin{cases} h(x) = y \\ h(y) = x \end{cases}$

9. Mon précieux

On dit qu'un anneau est *intègre* lorsqu'il valide la propriété “Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul".
Indiquez les anneaux intègres parmi les structures suivantes :

a) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; + ; \times)$ -matrices à coefficients réels.
b) $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) ; + ; \times)$ -fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
c) $(\mathbb{C} ; + ; \times)$ -ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ où $i^2 = -1$.

d) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\ ;\ +\ ;\ \times)$ -classes de congruences arithmétiques modulo 6
e) $(\mathbb{A}\ ;\ +\ ;\ \times)$ -anneau de Boole primitif.

10. Les tables de loi

On donne des tables (matricielles) d'opérations $*$ définies sur un ensemble G donné. Déterminez celles qui représentent un groupe :

a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & b & a \end{pmatrix}$ sur $G = \{a; b; c\}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $G = \{0; 1\}$.

c) $\begin{pmatrix} \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \heartsuit & \spadesuit \\ \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit \\ \heartsuit & \spadesuit & \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$ sur $G = \{\spadesuit; \heartsuit; \diamondsuit; \clubsuit\}$.

d) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \alpha & \delta & \beta \\ \beta & \alpha & \delta & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ sur $G = \{\alpha; \beta; \gamma; \delta\}$.

e) $\begin{pmatrix} c & e & c & i \\ e & s & t & 1 \\ b & e & a & u \\ gr & \vee & p & e \end{pmatrix}$ sur $G = \{c; e; i; s; t; 1; b; a; u; gr; \vee; p\}$.

11. Langue exotique : v1

On considère le langage du premier ordre, relationnel $\mathcal{L}$ on l'on donne :

- Les symboles de constante sont $\square$ et $\triangle$.
- Les symboles de fonctions sont $\heartsuit$ (un argment) ; $\hbar$ (trois arguments)
- Le symbole de relation $\doteq$ d'arité trois.

Dans la liste suivante, indiquez le(s) terme(s) de $\mathcal{L}$ écrits en polonais :

a) $\heartsuit\hbar\triangle\square x_{42}sh$
b) $\doteq\heartsuit\hbar aa\triangle\heartsuit x\triangle$
c) $\hbar\hbar\hbar\hbar\hbar\hbar tu\heartsuit\heartsuit\heartsuit la\triangle logique\square$
d) $+\times+110+21$
e) $\wedge\vee\neg non$

12. Langue exotique : v2

Dans le même langage que précédemment, indiquez le(s) formule(s) de $\mathcal{L}$ écrites en polonais :

a) $\forall x\exists y\ \ y\heartsuit x$
b) $[\doteq\heartsuit x\heartsuit y\square]\ \Rightarrow\ \doteq xy\square$
c) $\wedge\doteq\square\triangle y\Rightarrow\exists z\ \doteq zy\square\top$
d) $\vee\neg\forall x\forall y\ \heartsuit x\equiv\heartsuit y\ \doteq xy\triangle$
e) $\wedge\vee\neg NON$

13. Langue pas exotique

On propose un langage $\mathcal{L}$ constitué des symboles $0; 1; +; \times; \equiv$ utilisés selon leur syntaxe usuelle. Parmi les axiomes suivants, rédigés comme formules closes, indiquez ceux qui sont exprimables dans $\mathcal{L}$:

a) $\forall x\forall y\forall z\ x\times(y\times z)\equiv(x\times y)\times z$
b) $\forall a\forall b\ \ 0<a<b\ \Rightarrow\ 0<f(a)<f(b)$
c) $\forall\lambda\forall x\ \ (\lambda\times 1)\cdot y\ \equiv\ \lambda\cdot x$
d) $\forall a\forall b\forall x\ (a+b)\times x\ \equiv\ a\times x+b\times x$
e) $\forall l\forall o\forall g\forall i\forall q\forall u\forall e\exists t\exists p\ \ l+o+g+i+q+u+e\equiv t+0+p$

14. Anneau de Boole Primitif [1]

Dans l'algèbre de Boole primitive $(\mathbb{A}; +; \times)$, est solution de l'équation $a\times\bar{x}+x=1$:

a) 0 b) 1 c) a d) $\bar{a}$ e) b

1. même pas besoin de jeu de mot, c'est déjà drôle en soi

15. Boole est Morgan de toi

Indiquez les propriétés satisfaites dans l'algèbre de Boole primitive $(\mathbb{A}; +; \times)$ (la mutiplication est implicite) :

a) $\forall a \forall x \;\; a\bar{x} = \bar{a} + x$
b) $\forall a \forall x \;\; a + x = 1 \;\Rightarrow\; (x = 1 \;\vee\; a = 1)$
c) $\forall a \forall b \exists x \;\; \bar{a}x = b$
d) $\forall a \exists x \;\; \overline{ax} = \overline{a}\;\overline{x}$
e) $\forall a \forall x \forall b \;\; \overline{\bar{a}\bar{x}\bar{b}} = a + x + b$

16. Condition Nécessaire de Formation

Une forme normale conjonctive de la formule $D \wedge (N \vee \neg F) \wedge (D \vee F)$ est :

a) $\wedge \wedge D \vee N \neg F \vee DF$
b) $\perp$
c) $(D \wedge D \wedge N) \vee (D \wedge \neg F \wedge D) \vee (F \wedge D \wedge N) \vee (D \wedge \neg F \wedge \neg F)$
d) $N \vee \neg F \vee (D \wedge N \wedge F)$
e) elle-même (déjà en forme normale conjonctive).

17. Discipline Nationale de Formation

Une forme normale disjonctive de la formule $(C \Rightarrow N) \Leftrightarrow (F \vee \perp)$est :

a) $\Leftrightarrow \Rightarrow CN \vee F\perp$
b) $\top$
c) $[F \wedge C \wedge \neg N] \vee [\neg F \wedge \neg C] \vee [\neg F \wedge N]$
d) $[F \vee \neg C \vee N] \wedge [C \vee \neg F] \wedge N \wedge [\neg N \vee \neg F] \wedge \neg C$
e) elle-même (déjà en forme normale disjonctive).

18. Statut Quo

On donne la formule φ exprimée dans le langage des anneaux :

$$\varphi : \;\; x + 1 \equiv 0 \;\Rightarrow\; \exists y \forall x \; x \times 0 + y \times x \equiv (y + 1) \times z$$

a) La variable x est liée dans φ
b) La variable y admet une occurence libre dans φ
c) La vriable z est liée dans φ
d) La variable t admet une occurence libre dans φ
e) La formule φ est close

19. Séquent ciel !

Déterminez la règle de déduction incorrecte dans la liste suivante (promis, une et une seule bonne réponse)

a) $\dfrac{\varphi \vdash \psi \qquad \psi \vdash \phi}{\varphi \;\vdash\; \phi}$ $\quad b)$ $\dfrac{\top \vdash \perp \qquad \perp \vdash \top}{\top \;\vdash\; \top}$ $\quad$ c) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\varphi \vdash \psi \vee \perp}$ $\quad$ d) $\dfrac{\varphi \vdash \perp}{\varphi \vdash \neg\varphi}$ $\quad$ e) $\dfrac{\top \vdash \varphi \qquad \top \vdash \phi}{\top \vdash \;\; \varphi \wedge \top \;\; \vdash \phi}$

20. Gaston la graphe

On se donne un graphe non orienté G sur un ensemble E de sommets. La clôture transitive de G pour lequel toutes les boucles Δ_E sont implicitement considérées est :

a) Connexe b) Complet c) Eulérien d) celui d'une relation d'ordre e) celui d'une relation d'équivalence