# Modèle probabiliste : variables aléatoires

## I Espace probabilisable

### 1) Expérience aléatoire et évènements :

Une expérience est qualifiée d'aléatoire si on ne peut prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents. On représente le résultat de cette expérience comme un élément $\omega$ de l'ensemble $\Omega$ de tous les résultats possibles.
$\Omega$ : univers

Ainsi, à l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dès, on peut associer l'ensemble :
$\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);...\}$ à 36 éléments.

L'ensemble $\Omega$ n'est pas déduit de manière unique de l'expérience mais dépend de l'usage qui doit être fait des résultats. Ainsi, si l'o convient qu'on ne retiendra de l'expérience des deux dès que la somme des points affichés, alors $\Omega' = \{2,3,4,...,12\}$.
Un événement c'est une proposition logique relative au résultat de l'expérience.

Exemple : « la somme des points est supérieure ou égale à 10. »

On dira qu'un événement est réalisé ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'expérience accomplie.

### 2) Algèbre des évènements :

Soit C l'ensemble des évènements A, on associe son contraire noté $\overline{A}$ tel que si A est réalisé alors $\overline{A}$ ne l'est pas.
$\overline{A}$ est donc représenté dans $\Omega$ par la partie complémentaire de A.
$\overline{A} = C_{\Omega}^{A} = ^{C} A$

Définition : La classe $\mathcal{C}$ est définie par les trois axiomes (théorie qu'on ne peut démontrer) :

- $\forall A \in \mathcal{C}, \overline{A} \in C$
- Pour tout ensemble fini ou dénombrable $A_1, A_2, ..., A_i, ...$ d'éléments de $\mathcal{C}$ $\bigcup_i A_i \in C$
- $\Omega \in C$

Les trois axiomes impliquent que $\varnothing \in C$ et que $\bigcap_i A_i \in \mathcal{C}$ (car $\overline{\Omega} = \varnothing \in C$ (d'après (1))

$\overline{\bigcup_i \overline{A_i}} = \cap A_i \in C$

$\overline{\bigcup_i \overline{B_i}} = \bigcap_i B_i$

Ces propriétés définissent ce que l'on appelle une algèbre de Boole ou une tribu.
Définition : On appelle espace probabilisable le couple $(\Omega, C)$ où C est une tribu.

## II Espace probabilisé :

### 1) L'axiomatique de KOLMOGOROV :

A chaque événement on associe un nombre positif compris entre 0 et 1 sa probabilité.

Définition : On appelle probabilité sur $(\Omega, C)$ (ou loi de probabilité) une application $\begin{aligned} P : C &\to [0,1] \\ A &\mapsto P(A) \end{aligned}$ telle que :

- $P(\Omega) \equiv 1$
- Pour tout ensemble dénombrable d'évènements incompatibles.

  $A_1, A_2, ..., A_i, ...$ $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ $i \neq j$

  $$P(\bigcup_i A) = \sum_i P(A_i)$$

Définition : On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, C, P)$

Propriétés élémentaires :

- $P(\emptyset)=0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

### 2) Loi de probabilités conditionnelles :

Définition : Soit B un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilités conditionnelle de A sachant B : $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Vérifions les axiomes de KOLMOGOROV :

- $P\left(\frac{\Omega}{B}\right) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
- Soit $(A_i)$ une famille d'évènements $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ $i \neq j$

  $P\left(\bigcup_i \frac{A_i}{B}\right) = \frac{P((\bigcup_i A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_i (A_i \cap B))}{P(B)}$ or

  $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = A_i \cap A_j \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$

  $$\Rightarrow P\left(\bigcup_i \frac{A_i}{B}\right) = \sum_i \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_i P\left(\frac{A_i}{B}\right)$$

Définition : A est indépendant de B si et seulement si $\boxed{P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)}$

Conséquence : $P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

Donc $\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$ si et seulement si A et B sont indéendants.

Remarque : $A_1,...,A_n$ sont dits mutuellement indépendants : $P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} P(A_i)}_{=produit}$

Formule de BAYES :

La première formule de Bayes :

- $$P\left(\frac{B}{A}\right) = \left(\frac{P\left(\frac{A}{B}\right).P(B)}{P(A)}\right)$$

En effet : $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P\left(\frac{A}{B}\right).P(B)}{P(A)}$

Soit $B_i$ un système complet d'évènements $\begin{cases} B_i \cap B_j = ensemblevide & i \neq j \\ \bigcup_i B_i = \Omega \end{cases}$

$P(A \cap B_i) = P\left(\frac{A}{B_i}\right)P(B_i)$ or $A = \bigcup_i (A \cap B_i) = A \cap \overbrace{\bigcup_i B_i}^{\Omega} = A$

$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P\left(\frac{A}{B_i}\right)P(B_i)$

$$\boxed{P\left(\frac{B_i}{A}\right) = \left(\frac{P\left(\frac{A}{B_i}\right).P(B_i)}{\sum_i P\left(\frac{A}{B_i}\right).P(B_i)}\right)}$$

Exemple : Dans une usine 3 machines $M_1, M_2, M_3$ fabriquent des boulons de même type. $M_1$ sort en moyenne 0,3% de boulons défectueux, $M_2$ 0,8% et $M_3$ 1%. On mélange 1000 boulons dans une caisse, 500 provenant de $M_1$, 350 de $M_2$, et 150 de $M_3$. On tire un boulon au hasard dans la caisse, ils est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par $M_1$ ou $M_2$ ou $M_3$ ?

$P(M_1) = \frac{C_{500}^{1}}{1000} = \frac{500}{1000} = 0{,}5$

$P(M_2) = \frac{350}{1000} = 0{,}35$

$P(M_3) = \frac{150}{1000} = 0{,}15$

On cherche $P\left(\frac{M_1}{D}\right)$

$$P\left(\frac{D}{M_1}\right) = 0{,}003$$

$$P\left(\frac{D}{M_2}\right) = 0{,}008$$

$$P\left(\frac{D}{M_3}\right) = 0{,}01$$

La deuxième formule de Bayes :

$$P\left(\frac{M_1}{D}\right) = \frac{P\left(\frac{D}{M_1}\right)P(M_1)}{\underbrace{P\left(\frac{D}{M_1}\right)P(M_1) + P\left(\frac{D}{M_2}\right)P(M_2) + P\left(\frac{D}{M_3}\right)P(M_3)}_{P(D)}} = \frac{0{,}0003 \times 0{,}5}{0{,}003 \times 0{,}5 + 0{,}008 \times 0{,}35 + 0{,}01 \times 0{,}15} = 0{,}2$$

$$P\left(\frac{M_2}{D}\right) = 0{,}48$$

$$P\left(\frac{M_3}{D}\right) = 0{,}26$$

## 3-Moments d'une variable continue

### a) Espérance mathématique

Soit $X$ une variable aléatoire discrète, on définit l'espérance mathématique par la formule : $E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$

Pour une variable continue admettant une densité $f(x)$, on définit l'espérance par :

$E(X) = \int_{IR} x f(x) dx$ si l'intégrale est convergente

On a les propriétés suivantes :

$E(a) = a, \forall a \in IR$

$E(aX) = aE(X), \forall a \in IR$

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires

**Définition :** On définit l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire $\varphi(X)$ :

$E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i) P(X = x_i)$ dans le cas discret

$E(\varphi(X)) = \int_{IR} \varphi(x) f(x) dx$ dans le cas continu

### b) Variance mathématique

On appelle variance de $X$ notée $V(X)$ ou $\sigma^2$ la quantité définie par :

$V(X) = E((X - m)^2)$ où $m = E(X)$

Propriétés : $V(a) = 0$

$V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$

Où $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

On a aussi la formule de KONIG- HUYGHENS :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Remarque : Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$

Ce qui donne $E(XY) = E(X)E(Y)$

**4-lois de probabilités discrètes d'usage courant**

**a) Loi uniforme discrète :**

l'ensemble des valeurs de $X$ est : $X = \{1,2,3,,,,,,,,,n\}$

la loi de $X$ est : $P(X = k) = \frac{1}{n}$ $\forall k = 1,2,\ldots\ldots,n$

son espérance est $E(X) = \frac{n+1}{2}$

et sa variance est $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$

**b) Loi de Bernoulli de paramètre p :**

c'est la loi d'une variable $X$ ne pouvant prendre que les deux valeurs 1 ou 0 avec les probabilités $p$ et $1-p$

on a $E(X) = p$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p(1-p)$

**c) Loi binomiale B(n,p) :**

Supposons que l'on répète n fois dans des conditions identiques une expérience aléatoire, dont l'issue se traduit par l'apparition ou la non apparition d'un événement A de probabilité $p$ , le résultat d'une expérience étant indépendant des résultats précédents. Soit $X$ le nombre d'apparitions de l'événement A parmi ces n expériences $(0 \leq X \leq n)$

On dit alors que $X$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p$

Sa loi de probabilité est : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

La variable binomiale $X$ est une somme indépendantes de variables de Bernoulli de paramètre $p$ : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

ce qui implique que $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

et $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq$ où $q = 1 - p$

### d) Loi de Poisson de paramètre $\lambda$ :

C'est la loi d'une variable entière positive ou nulle qui satisfait à :

$$P(X=k)=\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \forall k \in IN$$

On obtient la loi de POISSON comme approximation de la loi binomiale dans Le schéma suivant : Soit un événement A de probabilité $p$ tés faible ( $p < 0{,}1$ ) que l'on essaie d'obtenir quelques fois en répétant l'expérience un grand nombre de fois ( $n > 50$ ) . Le nombre de réalisation de A suit une loi binomiale $B(n,p)$ telle qu'en pratique : $B(n,p) \approx P(\lambda = np)$ où $P(\lambda = np)$ est la loi de POSSON de paramètre $\lambda = np$

C'est -à- dire $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \exp(-np)\frac{(np)^k}{k!}$

L'espérance de la variable de poisson est :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda$$

La variance est :

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\lambda$$

Théorème : $X_n$ une suite de variables binomiales $B(n, p)$ telle que $n \to +\infty$ et $p \to 0$ de manière à ce que le produit np tende vers une limite finie $\lambda$ alors la suite $X_n$ converge vers une variable de Poisson $P(\lambda)$.

Démo :

$$\underbrace{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{loi binomiale}} = \underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(1-p)^{n-k}$$

$$\frac{(np)^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 1$$

$$(1-p)^{n-k} = (1-p)^n \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\xrightarrow[p\to 0]{} 1}$$

$$(1-p)^n \approx \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n car\left(np \xrightarrow[\substack{n\mapsto+\infty \\ p\to 0}]{} \lambda\right) or\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} e^x$$

$$\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \approx n\frac{n}{x} = x\left(n+\frac{x}{n}\right)^n \approx e^x\right)$$

$$(1-p)^n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} e^{-\lambda}$$

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow[\substack{n\mapsto+\infty \\ p\to 0}]{} \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}_{\text{Loi de poisson}}$$

Remarque : En pratique $\boxed{p < 0{,}1}$

e) <u>Loi hypergéométrique H(N,n,p) :</u>

Soit une population de N individus parmi lesquels une proportion p (Np individus) possèdent un certain caractère. On prélève un échantillon de n individus parmi cette population. Le tirage pouvant s'effectuer d'un seul coup mais sans remise. Soit X le nombre aléatoire d'individus possédant la propriété envisagée.

$C_N^n$ :Nombre d'échantillons possibles

$C_{Np}^x$ :Nombre de groupes de x individus possédant la propriété

$C_{N-Np}^{n-x}$ :Nombre de groupes de n-x individus ne possédant pas la propriété

$\frac{n}{N}$ :taux de sondage

$$\boxed{P[X = n] = \frac{C_{Np}^x . C_{n-Np}^{n-x}}{C_N^n}}$$

Propriété :

$$\boxed{\begin{array}{l} E(X) = np \\ V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)np(1-p) \end{array}}$$

Remarque :

$$H(N,n,p) \xrightarrow[N \to +\infty]{} N(n,p)$$

En pratique ce résultat est vrai dès que $\dfrac{n}{N} < 10\%$ c'est à dire dès que la population est dix fois plus grande que l'échantillon (sondages).

f) Loi géométriques de pascal :

la loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître un événement de probabilité p.

$$P[X = x] = p(1-p)^{x-1} \; \forall x \geq 1$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} \qquad V(X) = \frac{q}{p^2} \quad où \; q = 1-p}$$

La loi de pascal est la loi du nombre d'essais nécessaires pour observer n fois un événement a de probabilité p.

L'expérience devant se terminer par A.

$$P[X = x] = pC_{x-1}^{n-1} p^{n-1} q^{(x-1)-(n-1)} \qquad q = 1-p$$

$$\boxed{P[X = x] = C_{x-1}^{n-1} p^n q^{x-n}}$$

La loi de Pascal est la somme de n lois géométriques indépendantes : apparition de A pour la 1ère fois, puis la deuxième fois, …

$$E(X) = \frac{n}{p}$$

$$V(X) = \frac{nq}{p^2} \qquad (q = 1-p)$$

$\dfrac{nq}{p^2}$

5- Distributions continues usuelles :

a) Loi uniforme sur $[0,a]$ :

Sa densité est $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{a} \; \forall x \in [0,a] \\ f(x) = 0 \;\; ailleurs \end{cases}$

$$\boxed{\text{Remarque : sur } [a,b] : f(x) = \frac{1}{b-a} \; \forall x \in [a,b]}$$

Sa f.d.r : $F(x) = \begin{cases} 0 \forall x < 0 \\ \dfrac{x}{a} \forall x \in [0, a] \\ 1 \forall x > a \end{cases}$

$$E(X) = \int_{IR} xf(x)dx = \int_0^a \frac{1}{a}dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a}{2} \qquad \boxed{E(X) = \frac{a}{2}}$$

$$V(X) = \int_0^a \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{a}dx = \boxed{\frac{a^2}{12}}$$

b) Loi de Laplace – Gauss :

Cette loi joue un rôle fondamental en probabilité statistiques. X suit une loi normale K.G$(n, \sigma)$ si sa densité est : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$.

$$\begin{cases} m = E(X) \ \ moyenne \\ \sigma = \sqrt{V(X)} \ \ écart - type \end{cases}$$

Avec le changement de variable : $U = \dfrac{X - m}{\sigma}$ (loi normale centrée et réduite)

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$\begin{cases} E(U) = 0 \\ \sigma(U) = 1 \end{cases}$ normale centrée réduite

$$F(u) = P[U < u] = \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$