TECHNISCHE MECHANIK

KOORDINATEN

Freiheitsgrad System: $f = n - b$

Summe FG aller Körper — Anzahl Bindungen

↳ starrer Körper hat FG 6

Kartesische Koordinaten:

$$\underline{r} = x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z$$
$$\underline{v} = \dot{x}\,\underline{e}_x + \dot{y}\,\underline{e}_y + \dot{z}\,\underline{e}_z$$

Zylinderkoordinaten:

$$\underline{r} = \rho\,\underline{e}_\rho + z\,\underline{e}_z$$
$$\underline{v} = \dot{\rho}\,\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + \dot{z}\,\underline{e}_z$$

Umrechnung Kartesisch ↔ Zylinderkoord.

$x = \rho \cdot \cos\varphi$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho \cdot \sin\varphi$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$

Einheitsvektoren:

$$\underline{e}_\rho = \cos\varphi\,\underline{e}_x + \sin\varphi\,\underline{e}_y$$
$$\underline{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\underline{e}_x + \cos\varphi\,\underline{e}_y$$
$$\underline{e}_x = \cos\varphi\,\underline{e}_\rho - \sin\varphi\,\underline{e}_\varphi$$
$$\underline{e}_y = \sin\varphi\,\underline{e}_\rho + \cos\varphi\,\underline{e}_\varphi$$

Winkelsumme Vieleck: $(n-2) \cdot 180°$

Umrechnung Grad ↔ Bogenmass

$$a° = \varphi/\pi \cdot 180°$$
$$\varphi = a°/180° \cdot \pi$$

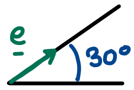
Kleinwinkelapproximation:

$\sin(\varphi) \approx \varphi$ $\cos(\varphi) \approx 1$ $\tan(\varphi) \approx \varphi$

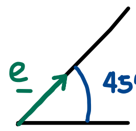
TRIGONOMETRIE

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undef.

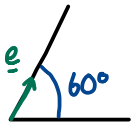
Einheitsvektoren: $|\underline{e}| = 1$



$$\underline{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

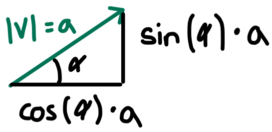


$$\underline{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\underline{e} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Komponenten aus Betrag berechnen:



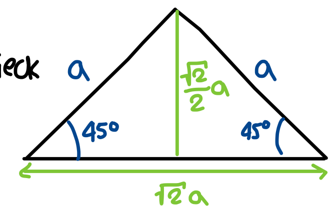
$$\rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} \pm\cos(\alpha)\cdot a \\ \pm\sin(\alpha)\cdot a \end{pmatrix}$$

Trigonometrische Identitäten

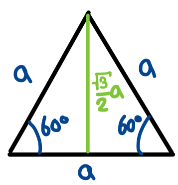
Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\sin = \frac{GK}{HY}, \quad \cos = \frac{AK}{HY}, \quad \tan = \frac{\sin}{\cos} = \frac{GK}{AK}$$

Gleichseitiges, rechtwinkliges Dreieck



Gleichseitiges Dreieck:



STARRE KÖRPER

Satz der projizierten Geschwindigkeiten:

Die Projektionen v_P', v_Q' der Geschwindigkeiten von zwei beliebigen Punkten P und Q eines starren Körpers auf ihre Verbindungsgerade sind gleich:

$$\boxed{\underline{v}_P \cdot \underline{r}_{PQ} = \underline{v}_Q \cdot \underline{r}_{PQ}}$$

SdpG $\forall P, Q$ erfüllt → starre Bewegung

(1) Translation falls $\underline{v}_P = \underline{v}$ $\forall P$

(2) Rotation (feste Rotationsachse)

Ebene Bewegung

a) alle Geschwindigkeiten // Ebene E

b) alle Punkte auf Normalen zu E gleiches $\underline{v}$

1. Translation: alle v parallel
2. Rotation: M Schnittpunkt der Senkrechten zu $\underline{v}_P, \underline{v}_Q \xrightarrow{SdpG} \underline{v}_M = 0$

Satz vom Momentanzentrum

Bei der Rotation steht die Geschwindigkeit v_P des Punktes P senkrecht auf der Verbindungsgeraden durch P und das Momentanzentrums M:

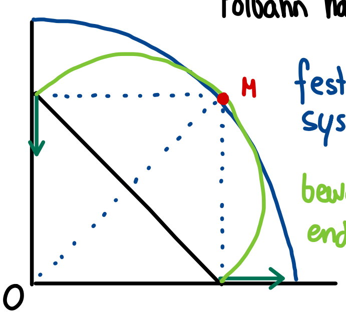
$v_P = \omega \, r_{MP}$ (ω = Rotationsschnelligkeit)

$\boxed{\underline{v}_P = \underline{\omega} \times \underline{r}_{MP}}$ ($\underline{\omega}$ = RG, → Rechte-Hand-Regel)

Komponentenweise (2D):

$v_x = -\omega \cdot r_y$ | $v_y = \omega \cdot r_x$

Polbahn



Polbahn hängt von Bezugssystem ab:

feste Polbahn: festes Bezugssystem, z.B. Wand-Boden

bewegliche Polbahn: bewegender starrer Körper als Grundlage

KINEMATIK

Räumliche Bewegungen

Eine Kreiselung (ein Punkt des Körpers bleibt fixiert) ist momentan eine Rotation:

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \times \underline{r}_P$$

Die Gerade durch O in Richtung $\underline{\omega}$ heisst Momentanachse.

Starrkörperformel

$$\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{r}_{BP}}$$

Kinemate von P $\{\underline{v}_P, \underline{\omega}\}$

Invarianten

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{\omega} \\ I_2 &= \underline{\omega} \cdot \underline{v}_P \qquad \forall P \end{aligned}}$$

$\underline{I}_1 = 0$ → Translation

$I_2 = 0$ und $\underline{I}_1 \neq 0$ → Rotation (Kreiselung)

$I_2 \neq 0$ → Schraubung (Zentralachse)

Berechnung Zentralachsentranslation $\underline{v}_\omega$

$\underline{e}_\omega = \underline{\omega} \cdot \frac{1}{|\underline{\omega}|}$ (Einheitsvektor in Richtung der Zentralachse)

$$\underline{v}_z = \underline{v}_\omega = (\underbrace{\underline{v} \cdot \underline{e}_\omega}_{\text{Projektion irgendeiner Geschw. auf Zentralachse}}) \cdot \underline{e}_\omega$$

Punkt auf Zentralachse bestimmen:

$\underline{v}_\omega = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{r}_{BZ}$

→ Punkt B wenn möglich als O wählen

→ Zusatzbedingung in r_{BZ} einsetzen → auflösen (resp. eine Koordinate frei wählbar)

KRÄFTE UND MOMENTE

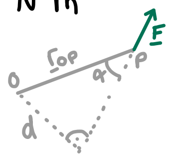
Begriffe

Kontaktkräfte: Actio & Reactio im Berührungspunkt
Fernkräfte: Actio & Reactio auf Verbindungsgerade

Äussere Kraft: Reactio ausserhalb betrachtetes System
Innere Kraft: Reactio greift innerhalb System an
↳ heben sich wegen Reaktionsprinzip auf

$[\text{Kraft}] = N = \frac{m \cdot kg}{s^2}$; $[\text{Moment}] = N \cdot m$

Moment: $\boxed{\underline{M}_0 = \underline{r}_{OP} \times \underline{F}}$



Hebelarm: $M_0 = \pm d \cdot F = |\underline{r}_{OP}| \cdot |\underline{F}| \cdot \sin(\varphi)$

$d_P^g = |\underline{r}_{PQ} \times \underline{e}_g|$
↳ Q irgendein Punkt auf Gerade

Leistung

$\boxed{\mathcal{P} = \underline{F} \cdot \underline{v}_P}$ $[\mathcal{P}] = W = \frac{J}{s} = \frac{m^2 kg}{s^3}$

Reine Rotation: $\mathcal{P} = \underline{M}_0 \cdot \underline{\omega}$

leistungslos: $\mathcal{P} = 0 \Leftrightarrow \underline{F} \perp \underline{v}$

STATIK

Kräftegruppe $\{\underline{F}_i\} = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$

Resultierende $\underline{R} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i$

Resultierendes Moment $\underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i$
(mit Bezugspunkt)

Gesamtleistung: $\boxed{\mathcal{P} = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{\omega}}$

Statische Äquivalenz: $\mathcal{P}(\{\underline{F}_i\}) = \mathcal{P}(\{\underline{G}_i\})$ ∀ Starrkörperbewegungen

Zwei Kräftegruppen sind genau dann statisch äquivalent, wenn ihre Resultierenden und ihre resultierenden Momente gleich sind.
(Einzelne Kraft: vektoriell gleich + gleiche Wirkungslinie)

Transformationsregel

$\boxed{\underline{M}_P = \underline{M}_0 + \underline{r}_{PO} \times \underline{R}}$

Dyname

Dyname der KG bez. Punkt O $\{\underline{R}, \underline{M}_0\}$

Reduktion einer KG ⇔ Berechnung Dyname

Invarianten: $\boxed{I_1 = \underline{R}\ ,\ I_2 = \underline{R} \cdot \underline{M}_0}$

- Nullsystem: $I_1 = 0 \wedge M_0 = 0$
- Kräftepaar: $I_1 = 0 \wedge M_0 \neq 0$
- Einzelkraft: $I_1 \neq 0 \wedge I_2 = 0$
- Schraube: $I_1 \neq 0 \wedge I_2 \neq 0$

Parallele Kräftegruppe

$\underline{N} = \sum F_i \cdot \underline{r}_i \Rightarrow \underline{M} = \underline{N} \times \underline{e}$ ($\underline{R} = 0$)

Kräftemittelpunkt $\underline{r}_C = \frac{1}{R} \sum F_i \cdot \underline{r}_i$ ($\underline{R} \neq 0$)

Kräfte und Massenmittelpunkt

$G \cdot \underline{r}_C = \sum_i G_i \underline{r}_i$ (Summe aus Teilkörpern)

$\underline{r}_C = \frac{1}{m} \iiint r \, dm$ (homogene Körper V,A,L)

Dreieck: $C_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $C_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

HK: $C_x = 0$, $C_y = \frac{4}{3\pi} R$ | VK: $C_x = \frac{4}{3\pi} R$, $C_y = \frac{4}{3\pi} R$

Prinzip der virtuellen Leistungen

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren & äusseren Kräfte bei jedem $\{\tilde{\underline{v}}_0, \tilde{\underline{\omega}}\}$ verschwindet.
$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(i)} = 0 \ \forall \{\tilde{v}\}$

Hauptsatz der Statik

Ruhelage, wenn äussere Kräfte im Gleichgewicht
$\underline{R} = \underline{0}$ und $\underline{M}_0 = \underline{0}$

Statische Bestimmtheit

statisch unbestimmt: $r < n$ (klemmend)
↳ Grad: $(n - r)$-fach

kinematisch unbestimmt: $n < r < m$
↳ zulässige momentane Bwg.zustände möglich

statisch bestimmt: $r = n$
↳ nicht kinematisch unbestimmt
+ nicht statisch unbestimmt

Reibungsfreie Bindungen

Auflager (einseitig)	P	$N > 0$, P
Auflager (einseitig) *Loslager*	P	$N > 0$, P
Auflager (beidseitig) *Loslager*	P	N, P
Auflager (beidseitig) *Kurzes Querlager* *Loslager*	P P	N, P
Gelenk *Festlager*	P	B, A, P
Gelenk	P P	B, P, A
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)	P	B, P, A

Einspannung	P P	M, B, P, A
Faden / Seil	P	$S > 0$, P
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)	P	S, P
Parallelführung	P	M, P, A
Langes Querlager, Schiebehülse	P	A, P, M
Längs- und kurzes Querlager	P	A, P, $N > 0$

Stabkraft bestimmen (Pendelstütze)

1) Stab entfernen (Skizze)
   ↳ an beiden Knoten Zugskraft einführen
2) Bew.zustand des Mechanismus bestimmen
3) PdvL formulieren → Summe Leistungen = 0
4) nach Stabkraft auflösen:
   ↳ $S > 0$: Zugstab
   $S < 0$: Druckstab

Analytische Statik

1) freischneiden, Kräfte einführen
   - Gewichtskräfte greifen im Schwerpunkt an
   - Seil- & Stabkräfte als Zugkraft
   - Reibungskräfte gegen Bew.richtung
   - Normalkräfte senkrecht zur Berührungsebene
2) zwecksmässiges Koordinatensystem wählen
3) Gleichgewichtsbedingungen formalieren
   ↳ allenfalls System weiter auftrennen → Schnittkräfte
4) LGS auflösen und Resultate diskutieren
   - Seil ist gespannt, Zugkraft: $S > 0$
   - Körper kippt nicht, $|e| \leq b/2$
   - Körper hebt nicht ab: $N > 0$

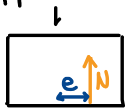
Bedingungen Standfestigkeit (Ruhe)

1. Nicht abheben: $N \geq 0$
2. Nicht kippen: $|e| \leq b/2$
3. Nicht gleiten: $|F_R| \leq \mu_0 \cdot |\underline{N}|$

Kippen

- punktförmiges, ebenes Auflager
  ↳ $N_i > 0$ für $i = \{1, \dots, \text{Anzahl Auflager}\}$
- nicht punktförmig → Normalkraftdichte
  → Einzelkraft N mit unbek. Angriffspunkt

Der Angriffspunkt der Einzelkraft N muss innerhalb der Standfläche liegen, sonst kippt er.
↳ konvexe Hülle der Berührungsfläche



$|e| \leq b/2$

Reibung

μ_0 Haftreibungskoeffizient
μ_1 Gleitreibungskoeffizient
μ_2 Rollwiderstandslänge

Haftreibung: $(v_B = 0)$ $\quad |\underline{F}| \leq \mu_0 \cdot |\underline{N}|$

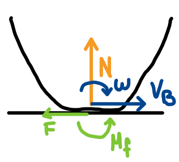
Gleitreibung: $(v_B \neq 0)$ $\quad |\underline{F}| = \mu_1 \cdot |\underline{N}|$

$$\underline{F} = -\mu_1 \cdot |\underline{N}| \cdot \frac{\underline{v_B}}{|\underline{v_B}|}$$

v_B = relative Geschwindigkeit

Rollwiderstand: $|\underline{M_f}| \leq \mu_2 \cdot |\underline{N}| \quad (\omega = 0)$

$|\underline{M_f}| = \mu_2 \cdot |\underline{N}| \quad (\omega \neq 0)$



$$|\underline{M_f}| = \mu_2 \cdot |\underline{N}| \cdot \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$$

Ideal rau: $\mu_0 = \infty, \mu_2 = 0$ ⇒ keine Verlustleistung

DYNAMIK

Beschleunigung

Kartesisch: $\underline{a} = \ddot{x}\underline{e}_x + \ddot{y}\underline{e}_y + \ddot{z}\underline{e}_z$

Zylinder: $\underline{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\underline{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi + \ddot{z}\underline{e}_z$

Polar: $\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi$

↳ Kreisbewegung (r = const) $\underline{a} = -r \cdot \dot{\varphi}^2 \underline{e}_r + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi$

↳ $r\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{r}$

Trägheitskräfte und PdvL

Spezifische Masse/Dichte: $\rho = \frac{dm}{dV}$

Trägheitskraftdichte: $\underline{f}^{(t)} = -\rho\underline{a}$

Trägheitskraft: $d\underline{F}^{(t)} = \underline{f}^{(t)} \cdot dV = -\underline{a}dm$

↳ fiktive Kräfte → verletzen Reaktionsprinzip

$$\boxed{\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = 0 \quad \forall\{\underline{\tilde{v}}\}}$$

Inertialsystem: $\underline{v}$ = konst. → $\underline{a} = 0$

Masselos modellierte Teilsysteme

↳ keinen Beitrag an $\mathcal{P}^{(t)}$

↳ mit Methoden der Statik rechnen

Newtonsches Bewegungsgesetz

Massenpunkt: - evt. Rotationen/Deformierbarkeiten des Körpers uninteressant
- Rotationen/Deformierbarkeiten haben keinen Einfluss auf Resultierende

Trägheitskraft am Massenpunkt

$$\underline{F}^{(t)} = \int d\underline{F}^{(t)} = -\int \underline{a}dm = -m \cdot \underline{a}$$

Newtonsches Bewegungsgesetz:

$$\boxed{m \cdot \underline{a} = \underline{R}}$$

Impuls $\underline{p} = m\underline{v} \leadsto \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = \dot{\underline{p}} = \underline{R}$

Bewegungsdifferentialgleichungen

$\ddot{x} = k$	$x(t) = \frac{k}{2}t^2 + At + B$
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$
$\ddot{x} + \omega^2 x = k$	$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}$
$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$	$x(t) = A \cdot e^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$

ω = Kreisfrequenz, A, B = Amplitude

$T = 2\pi/\omega$ = Periode

Freiheitsgrad

$f = n - b$ n: # Lagekoordinaten; b: # kinematische Relationen

⇒ das System hat f-Bew. Diffgleichungen

Kinematische Relation: Abhängigkeit versch. Koord.

↳ z.B. Rollbedingung: $\dot{x} = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega$

Federkraft (pro Feder +1 Freiheitsgrad)

$|F_c| = c \cdot x$ c = Federkonstante, x = Auslenkung

↳ als Zugkraft

Dämpfer: $\underline{F}_D = -\eta\dot{x}$

Dynamikprobleme lösen

1) Modellbildung, mat. System abgrenzen
2) SK sinnvoll freischneiden
3) Bindungskräfte, -momente und Lasten in allgemeiner Lage einführen
4) Freiheitsgrad f bestimmen
5) Für jeden Körper sinnvolles KOS wählen
6) Kinematische Relationen aufstellen
7) Diff.gleichungen aufstellen
8) Bindungskräfte bestimmen und Bwg.gleichungen auf Anzahl Freiheitsgrade reduzieren
9) Anfangsbedingungen formulieren

Massenmittelpunktsatz

$$\underline{R} = m \cdot \underline{a}_c = m \cdot \ddot{\underline{r}}_c$$

Impulssatz

Impuls p: $\quad \underline{p} = \iiint_B \underline{v}\, dm$

$$\dot{\underline{p}} = \underline{R} \quad (\text{für } R=0 \rightarrow \text{Impuls konstant})$$

Impulserhaltung: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Inelastischer Stoss: $v_1' = v_2' = v'$

Elastischer Stoss: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

Drallsatz

Starre Rotation um Punkt O.

Moment: $\quad M_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{a}\, dm$

Drall: $\quad \underline{L}_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{v}\, dm$

$$\underline{L}_0 = I_0 \cdot \omega$$

DS bezüglich Massenmittelpunkt:

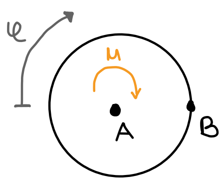
$$\boxed{\underline{\dot{L}}_c = I_c \dot{\omega} = \underline{M}_c}$$

Umrechnungsformel zw. inertialem Punkt O und Massenmittelpunkt C:

$$\underline{L}_0 = \underline{r}_c \times \underline{p} + \underline{L}_c$$

DS bzgl. Punkt A: $\boxed{M_A = I_A \cdot \dot{\underline{\omega}} = I_A \cdot \ddot{\underline{\varphi}}}$

↳ Punkt A muss inertial sein (d.h. keine Beschleunigung), ausser es handelt sich um den Massenmittelpunkt



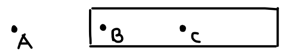
$\Rightarrow I_A \cdot \ddot{\varphi} = M$

$\Rightarrow \cancel{I_B \cdot \ddot{\varphi} = M}$ (B nicht inertial)

Massenträgheitsmoment

I_p: gibt an wie "schwer" es ist, den Körper um P zu drehen

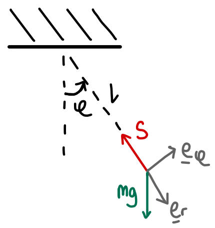
$$I_p = \iint r^2\, dm \qquad dm = \frac{m}{L}\, dx$$



$I_A > I_B > I_C$

Mathematisches Pendel

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$



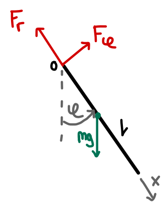
- Komponenten von $\underline{a}$:
  - $a_\varphi = l \cdot \ddot{\varphi}$
  - $a_r = -l \cdot \dot{\varphi}^2$
- Newtonsches Gesetz:
  - tangential: $ml\ddot{\varphi} = -mg \cdot \sin\varphi$
  - radial: $-ml\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - S$

Bew.diff.gleichung: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0$

Ruhelagen: $\varphi(t) = \varphi_1 = 0$; $\varphi(t) = \varphi_2 = \pi$

Physikalisches Pendel

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$



MMS: -tan: $m\frac{l}{2}\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + F_\varphi$

-rad: $-m\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - F_r$

DS in z-Richtung:

$M_{0z} = I_0\ddot{\varphi} = m\frac{l^2}{3}\ddot{\varphi} = -mg\frac{l}{2}\sin\varphi$

Bwg.diff.gleichung: $\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l}\sin\varphi = 0$

Ruhelagen: (aus $\ddot{\varphi} = 0$) $\rightarrow \varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$

Trägheitsmomente einfacher Körper

Massenpunkt mit Abstand R: $I = mR^2$

Stabmitte, Querachse: $I = \frac{ml^2}{12}$

Stabende, Querachse: $I = \frac{ml^2}{3}$

Rolle, Mittelpunkt: $I = \frac{mR^2}{2}$

Abstand Punkt-Gerade

$$d_A = |PO \times e|$$

↑ P beliebiger Punkt auf Gerade