# DAS ELEKTROSTATISCHE FELD

Elementarladung $e = \pm 1.6022 \cdot 10^{-19}\,As$

in abgeschlossenen System Summe der Ladungen konstant

Coulomb'sches Gesetz:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$\varepsilon_0$ : elektrische Feldkonstante (Dielektrizitätskonstante Vakuum) → $\varepsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Feld: jeden Punkt des Raumes kann zu einem bestimmten Zeitpunkt eindeutige physikalische Grössen zugeordnet werden

Elektrische Feldstärke: $\vec{E}(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \frac{V}{m}$ → Richtung von $\vec{E}$ in Richtung Kraft auf positive Ladung

↳ beschreibt Wirkung (Intensitätsgrösse)

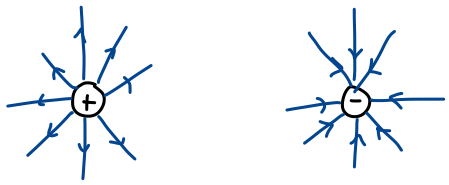
Bei einer Anordnung mehrerer Punktladungen verschwindet die vektorielle Summe der auf die Ladungen wirkenden Kräfte.

Linienladungsdichte: $\lambda(P) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} \quad \frac{As}{m}$ → $Q = \int_l \lambda \, dl$

Flächenladungsdichte: $\sigma(P) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad \frac{As}{m^2}$ → $Q = \iint_A \sigma \, dA$

Volumenladungsdichte: $\rho(P) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad \frac{As}{m^3}$ → $Q = \iiint_V \rho \, dV$

## Feldbilder



Feldlinien gehen immer von positiven Ladungen aus und <u>enden</u> in negativen. (ev. in Unendlichen)

Feldbild in unmittelbarer Umgebung von Ladung bestimmt.

Nicht verschwindende Feldstärke hat eindeutige Richtung → nicht schneiden

In grossem Abstand verhält sich Feld wie eine im Ladungsschwerpunkt angesetzte Punktladung.

Bei verschwindender Gesamtladung müssen alle von ⊕-ausgehenden Feldlinien auf ⊖ enden. (Ausnahme Verbindungslinie.)

$$W_e = -\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \xrightarrow[\text{erhaltung}]{\text{Energie-}} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

elektrostatisches Potential in V

$$W_e = Q \left[ \int_{P_0}^{P_1} (-\vec{E}) \cdot d\vec{s} \right] = Q \left[ \varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0) \right]$$

Bezugspunkt kann willkürlich gewählt werden $\rightarrow \varphi_e(P_0) = 0$

$\hookrightarrow \varphi_e(P_1) = -\int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{W_e(P_1)}{Q}$

Äquipotentialflächen-/Linien:

↳ immer senkrecht zu Feldlinien

Im elektrostatischen Feld besitzt ein leitender Körper ein konstantes Potential. Seine Oberfläche wird zur Äquipotentialfläche (el. Feldstärke senkrecht), Leiterinnere ist feldfrei.

Spannung U: Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten (unabhängig von Bezugspunkt)

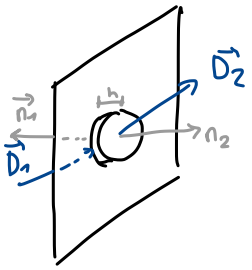
$$U_{12} = \varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Elektrische Flussdichte: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}$ (Q: eingeschlossene Ladung; $4\pi r^2$: Kugeloberfläche)

↳ Quantitätsgrösse, Ursache

↳ $\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \qquad [D] = \frac{As}{m^2}$

Elektrischer Fluss: $\Psi = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad As$

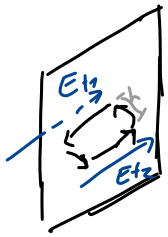



$h \rightarrow 0$, nur Deckflächen liefern Beitrag

$\Psi = \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dA = \sigma dA$

↳ $D_{n2} - D_{n1} = \sigma$, für $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow D_{n1} = D_{n2}$

↳ $\varepsilon_0 E_{n2} - \varepsilon_0 E_{n1} = \sigma$




$h \rightarrow 0: \oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0 \Rightarrow E_{t2} - E_{t1} = 0$

$E_{t2} = E_{t1} \Rightarrow D_{t1} = D_{t2}$

Beim Durchgang durch eine ladungsbesetzte Fläche erleidet Normalkomponente der elektrischen Flussdichte einen der Flächenladungsdichte am Durchgangsort proportionalen Sprung, während Tangentialkomponente der Feldstärke stetig ist.

↳ z.B. Kugel → inneren Feldfrei, Ladung verteilt sich auf Oberfläche

↳ Sprungstelle

Influenz: Befindet sich Leiter in externem Feld, dann werden auf seiner Oberfläche Ladungen influenziert. Der Wert der influenzierten Flächenladungsdichte in einem Punkt P der Oberfläche entspricht genau der Wert der senkrecht auftreffenden Flussdichte. Die Flussdichte springt aber infolge der Randbedingung genau um den Wert der Flächenladungsdichte → Innere Feldfrei

Faraday'scher Käfig

## Die Dielektrische Polarisation

Ladungsverschiebung innerhalb der atomaren Strukturen:

- Verschiebungspolarisation (Dipolmoment: $\vec{p} = Q\vec{d}$)
- Elektronenpolarisation
- Orientierungspolarisation (permanentes Dipolmoment)

⇒ dielektrische Polarisation $\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_N$

Dielektrikum = nicht leitendes Material

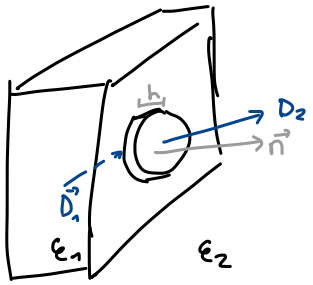
Reduzierung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ im Dielektrikum bei gleicher Flussdichte $\vec{D}$ kann durch die relative Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r$ erfasst werden.
↳ je grösser, desto schlechter leitet es

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

Erhöhung der el. Flussdichte in Dielektrikum gegenüber dem Vakuum bei konst. Feldstärke.

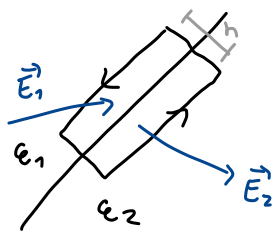
Kräfte im inhomogenen Feld: Anziehung Leiter auch bei verschwindender Gesamtladung durch Polarisation

## Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten




für $h \to 0$ und da keine freie Ladungsträger:

$$D_{n1} = D_{n2} \rightarrow \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$




für $h \to 0$:

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \rightarrow E_{t1} = E_{t2}$$

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_2}$$

$$\hookrightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$\alpha$ = Winkel zu Flächennormale

# Die Kapazität

$Q \sim U \rightarrow Q = CU$

Kapazität in Farad: $1F = 1 \frac{As}{V}$

Kapazität C beschreibt Verhältnis zwischen der aufgenommenen Ladung Q und der angelegten Spannung. Sie Mass für die Fähigkeit eines Körpers, Ladungen zu speichern und hängt nur von den geometrischen Ausmassen ab.

Kondensator: zwei leitende Beläge mit entgegengesetzten, gleich grossen Ladungen

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \text{resp.} \quad \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

Kugelkondensator: $C = 4\pi\varepsilon \frac{ba}{b-a}$

Kondensatorennetzwerke: Parallelschaltung $\rightarrow C_{ges} = \sum C_k$
↳ gleiche Spannung

Reihenschaltung $\rightarrow \frac{1}{C_{ges}} = \sum \frac{1}{C_k}$
↳ gleiche Ladung

$$dW_e = (\varphi_{ea} - \varphi_{eb})\,dq = U_{ab}\,dq = \frac{q}{C}\,dq \rightarrow W_e = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

↳ $W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 A \cdot d = \frac{1}{2}EDV$$

↳ Energiedichte $w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

# DAS STATIONÄRE ELEKTRISCHE STRÖMUNGSFELD

Richtung positiver Strom: Elektrode höheren Potentials → Elektrode niedrigeren Potentials
↳ gleiche Richtung wie Feldstärke ⇒ technische/konventionelle Stromrichtung

Stromstärke $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ → $[I] = A$ $\left( I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \right)$

Strom verteilt sich mit einer ortsabhängigen Dichte im ganzen Raum
↳ Stromdichte $\vec{J} = \frac{\Delta I}{\Delta A} \; \frac{A}{m^2}$

$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$ → grössere Stromdichte durch grössere Anzahl am Ladungsträgertransport beteiligten Elementarladungen oder höhere Geschwindigkeit

$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ resp. $\oiint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ beim stationären Strömungsfeld (Gleichstrom, konstant)

Leiter besitzen frei bewegliche Elektronen (ständig in Bewegung aber im Mittel 0)
↳ elektrische Feldstärke ⇒ Kraft ⇒ im Mittel entsteht Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_e$

$$\vec{v}_e = -\mu_e \vec{E}$$

frei werdende Stellen (positive Löcher) bewegen sich in Richtung technischer Strom

$\vec{J} = n \cdot e \cdot \mu_e \vec{E} = K\vec{E}$, $K$ = spezifische Leitfähigkeit in $\frac{A}{Vm} = \frac{1}{\Omega m}$

$\rho_R = \frac{1}{K}$ = spezifischer Widerstand

Temperaturabhängigkeit von $\rho_R$: $\rho_R = \rho_{R,20°C} \cdot [1 + \alpha \Delta T + \beta (\Delta T)^2]$ ↗ $\Delta T = T - 20°C$

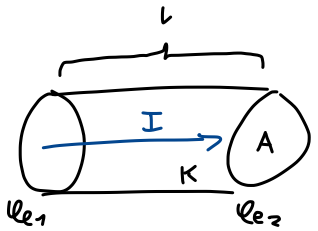
↳ Wahrscheinlichkeit für Zusammenstösse Elektronen steigt mit höherer Temperatur
↳ Halbleiter: mehr Elektronen werden frei

## Ohm'sches Gesetz

Differentielle Form: $\vec{J} = K\vec{E}$

$\vec{J} = \frac{I}{A}\vec{e}_x$ → $\vec{E} = \frac{1}{K}\frac{I}{A}\vec{e}_x$

$U_{12} = \int_0^l \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{1}{K}\frac{I}{A}\int_0^l 1\, dx = \frac{Il}{KA}$

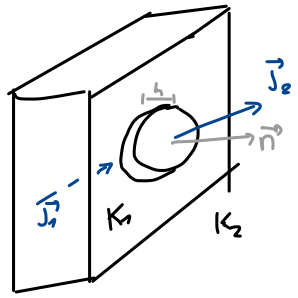



Verhältnis angelegte Spannung zu Strom

$U = R \cdot I$ mit $R = \frac{l}{KA} = \frac{\rho l}{A}$

Elektrischer Leitwert $G = \frac{1}{R}$

## Verhalten an Grenzflächen



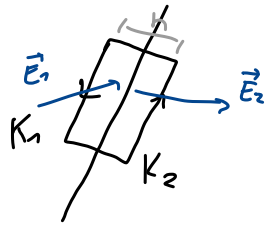

$h \to 0: \quad J_{n2} - J_{n1} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{n2} = J_{n1}$

$K_2 E_{n2} = K_1 E_{n1}$

$h \to 0: \quad E_{t2} - E_{t1} = 0$

$E_{t2} = E_{t1}$

$\frac{1}{K_2} J_{t2} = \frac{1}{K_1} J_{t1}$




Brechungsgesetz: $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{K_1}{K_2}$

Grenzfläche zu nicht-leitendem Bereich: $J_{n1}|_A = E_{n1}|_A = 0$

Trennfläche zu perfekt leitenden Material: $J_{t1}|_A = E_{t1}|_A = 0$

## Energie und Leistung

$\Delta W_e = (\varphi_{e1} - \varphi_{e2}) \cdot \Delta Q = U \Delta Q = U I \Delta t$

Leistung $P = \frac{\Delta W_e}{\Delta t} = U \cdot I \qquad \left( P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W_e}{\Delta t} = \frac{dW_e}{dt} \right)$

$W_e = \int_t P(t)\, dt \rightarrow$ elektrische Arbeit in Ws

P beschreibt am Widerstand R entstehende Verlustleistung

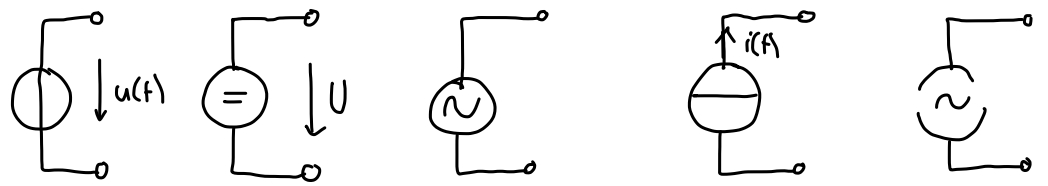
$\Delta P = \vec{E} \cdot \vec{J}\, \Delta V \rightarrow$ Verlustleistungsdichte $p_v = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \vec{E} \cdot \vec{J}$

# EINFACHE ELEKTRISCHE NETZWERKE

Zweipol: Bauelement mit zwei Anschlussklemmen → Klemmenverhalten (Zsh. $U \leftrightarrow I$)

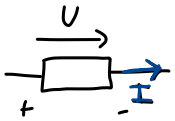
ideale Spannungsquelle: - Ausgangsspannung unabhängig von angehängten Netzwerk
- Strom hängt von Netzwerk ab

ideale Stromquelle: - Ausgangsstrom unabhängig von Netzwerk



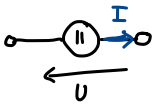

Spannungsquelle allg. | Gleichspannungsquelle | Wechselspannung | Stromquelle allgemein | Wechselstrom

Verbraucherzählsystem: am ohmschen Widerstand




U und I gleiche Richt.

Generatorzählpfeilsystem: bei Quellen




U und I entgegengesetzt

Maschenregel: $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0 \Rightarrow \sum_{\text{Masche}} U = 0$ (im Maschensinn positiv)

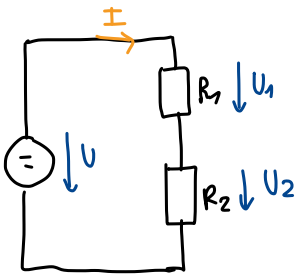
Knotenregel: $\oiint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow \sum_{\text{Knoten}} I = 0$ (in Knoten rein → positiv
aus Knoten raus → negativ)

Widerstandsnetzwerke vereinfachen → zusammengefasste Teilbereiche müssen gleiches Klemmenverhalten

Reihenschaltung: $R_{ges} = \sum R_K$

Parallelschaltung: $\frac{1}{R_{ges}} = \sum \frac{1}{R_K}$ oder $G_{ges} = \sum G_K$

## Spannungsteiler




$U_1 = R_1 I$

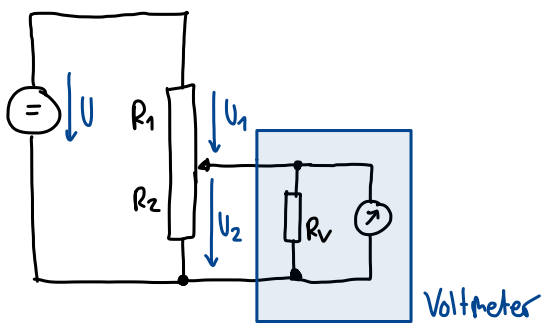
$U_2 = R_2 I$

$U = U_1 + U_2 = I(R_1 + R_2)$

$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 I}{R_2 I} = \frac{R_1}{R_2}$ $\quad \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$ , $\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$

⇒ Teilspannungen stehen im gleichen Verhältnis wie Teilwiderstände

## Belasteter Spannungsteiler

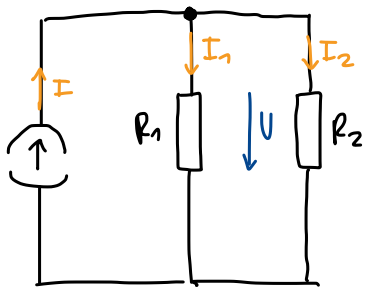



$$R_{par} = \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}$$

$$U_2 = \frac{R_{par}}{R_{par} + R_1} \cdot U = \frac{R_2 R_V}{R_1(R_2+R_V)+R_2 R_V} \cdot U$$

Ideales Voltmeter: $R_V \to \infty$

## Stromteiler




$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

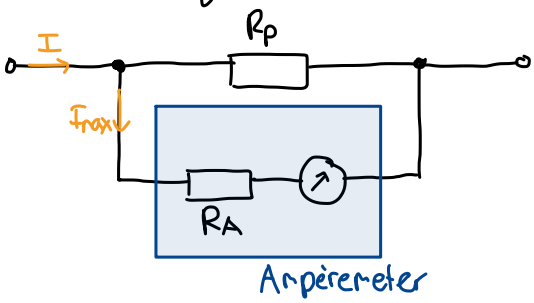
$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I = I_1 + I_2 = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = U \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2} \qquad \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_2 + R_1} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

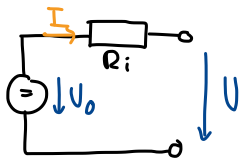
$\Rightarrow$ Ströme im gleichen Verhältnis wie Leitwerte

Messbereichserweiterung:



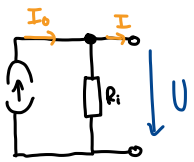

$$\frac{I_{max}}{I} = \frac{R_P}{R_A + R_P} \to R_P = \frac{I_{max}}{I - I_{max}} R_A$$

## Reale Spannungs- und Stromquellen




$U_L = U = U_0$

$I_K = \frac{U_0}{R_i}$ → im Kurzschluss komplette Energie als Wärme an Innenwiderstand abgesetzt




$I_K = I = I_0$

$U_L = I_0 R_i$ → in Leerlauf komplett Energie an $R_i$

Umrechnung Spannungs-/Stromquelle: $U_0 = I_0 R_i$

↳ internes Verhalten verschieden, Leistung an $R_L$ gleich

## Leistungsanpassung

Gleichspannungsquelle gibt maximale Leistung bei $R_i = R_L$ ab.

$$P_{L\,max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

↳ Widerstandsanpassung

Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_L}{P_{ges}} \cdot 100\% = \frac{I^2 R_L}{I^2 (R_i + R_L)} \cdot 100\% = \frac{R_L / R_i}{1 + R_L / R_i} \cdot 100\%$

↳ Wirkungsgrad steigern: Strom möglichst klein → Spannung möglichst gross

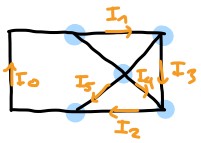
## Überlagerungsprinzip

1. Nullsetzen der Quellen:
   - Spannungsquelle Kurzschluss
   - Stromquelle Leerlauf
2. Netzwerkanalyse durchführen, Ströme in Zweigen berechnen etc.
3. Gesamtstrom in Zweig = Summe der berechneten Teilströme

## Analyse umfangreicher Netzwerke

1. Reduzierung Anzahl Unbekannte n auf Anzahl Zweipole mit Ohmschen Gesetz
2. Netzwerk aus z Zweigen → z linear unabhängige Gleichungen benötigt
3. Aufstellen der Gleichungen mithilfe Knoten-/Maschenregel

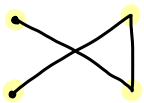
1. Schritt: Darstellung des Netzwerkgraphen (ohne Komponenten)




2. Schritt: Festlegung der Zählrichtungen für Zweige ohne Quellen (Strom & Spannung gleich)
3. Schritt: Aufstellung Knotengleichungen → k-1 linear unabhängige Gleichungen
4. Schritt: Aufstellung der Maschengleichungen → $m = z - (k-1)$

**vollständiger Baum**

alle Netzwerkknoten verbinden, ohne dass geschlossene Masche

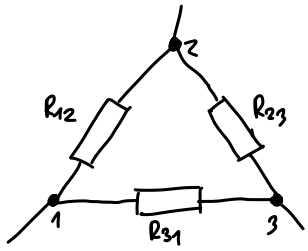


mit jedem Verbindungszweig Masche bilden

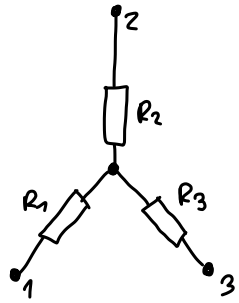
**Auftrennung der Maschen**

beliebige Masche bilden → Zweig "entfernen"
→ wiederholen

## Dreieck-Stern-Umwandlung




Dreieckschaltung




Sternschaltung

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \qquad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

Herleitung: Anordnungen sind gleichwertig, wenn Widerstände zwischen zwei Punkten gleich sind

z.B. $1 \leftrightarrow 2$: $$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot (R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1)$$

$2 \leftrightarrow 3$: $$R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot (R_{12} + R_{31})}{R_{23} + R_{12} + R_{31}} \quad (2)$$

$3 \leftrightarrow 1$: $$R_1 + R_3 = \frac{R_{31} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{31} + R_{12} + R_{23}} \quad (3)$$

(1) - (2) $$R_1 - R_3 = \frac{R_{12} R_{31} - R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (4)$$

(4) + (3) $$2 R_1 = \frac{2 R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

## Ersatzquellen

(1) Leerlaufspannung $U_L$ der vorgegebenen Quelle bestimmen $U \rightarrow U_L \rightarrow U_q$

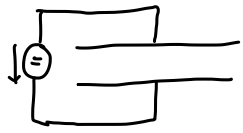
(2) Innenwiderstand bestimmen → alle Quellen auf Null setzen (Spannungsquelle kurzschliessen, Stromquelle Leerlauf)

→ $R_i$ von Klemmen aus berechnen

(3) Anschlussklemmen kurzschliessen und $I_K$ bestimmen (oder $I_K = \frac{U_q}{R_i}$)

# STROMLEITUNGSMECHANISMEN

## Stromleitung im Vakuum



$$\vec{E} = -\vec{e}_y \cdot \frac{U}{d} \rightarrow \vec{F} = -\vec{e}_y \cdot \frac{eU}{d} = m_0 a$$

$$a = \frac{eU}{m_0 d} \rightarrow v = \frac{eU}{m_0 d} t \rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{eU}{m_0 d} t^2$$

$$\hookrightarrow t = \sqrt{\frac{2 m_0 d y}{eU}}$$

$$v(y) = \frac{eU}{m_0 d} \cdot \sqrt{\frac{2 m_0 d y}{eU}} = \sqrt{\frac{2eU}{m_0} \frac{y}{d}}$$

Beschleunigung Elektron aus Ruhelage: $W = \frac{1}{2} m_0 v^2 = eU$ (Elektronenvolt)

↳ bis Anode erreicht

Katode: negativ geladene Platte, Kation = negativ geladenes Teilchen

Anode: positiv geladene Platte Anion = positiv geladenes Teilchen

Geschwindigkeit in Vakuum sehr gross → ab 30kV Massenzunahme Relativitätstheorie

$$\rightarrow m = m_0 / \sqrt{1-(v/c)^2}$$

Raumladungsgesetz $I = \frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0 A}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} U^{3/2}$

Austritt Elektronen aus Katode (Austrittsarbeit):
- Fotoemission (Bestrahlung)
- Feldemission (hohe Feldstärke)
- Glühemission (hohe Temperatur)

## Stromleitung in Gasen

freie Beweglichkeit der Elektronen eingeschränkt, ionisierte Gasmoleküle nehmen am Ladungstransport teil

Ladungsträgerinjektion → selbstständige Leitung → kinetische Energie vorhandener Ionen reicht beim Zusammenstoss aus, andere Moleküle zu ionisieren

↓

unselbständige Leitung → Erzeugung Ladungsträger durch äussere Einflüsse (z.B. Temperatur, Bestrahlung)

Sowohl Elektronen, positive und negative Ionen beteiligt

# Stromleitung in Flüssigkeiten

Dissoziation: Aufspaltung Moleküle (z.B. $NaCl \rightarrow Na^+, Cl^-$)

Elektrolyt: Flüssigkeit (mit Ionen)

Wertigkeit z: Anzahl an Ladungstransport eines Ions beteiligten Elementarladungen

Galvanisieren: Metalle mit dünner Schicht eines anderen Metalls überziehen

$$m = N \cdot A_r \cdot u \qquad Q = N \cdot z \cdot e$$

$$m = \frac{A_r u}{ze} = \frac{A_r u}{ze} I \cdot t = \frac{A_r I t}{z \cdot 96.47} \frac{mg}{As}$$

$$\frac{m_1}{A_{r_1}/z_1} = \frac{m_2}{A_{r_2}/z_2} = \dots$$

Zusammenhang Spannung $\leftrightarrow$ Stromstärke (Ohm'sches Gesetz allgemein gültig):

$$I_+ = J_+ A = \eta z e v_+ \cdot A$$

Anzahl Kationen pro Volumen

$$I_- = J_- A = \eta z e v_- \cdot A$$

$$I = \eta z e A (|v_+| + |v_-|)$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{U}{I} = \frac{El}{I} = \frac{l}{\eta z e (\mu_+ + \mu_-) A}$$

Proportionalitätsfaktor $\vec{E} \sim v_\pm$

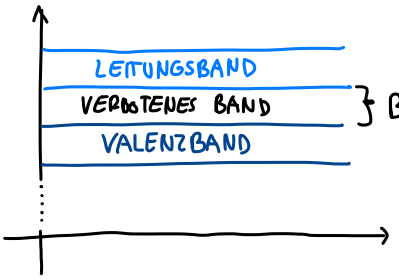
$$K = \eta z e (\mu_+ + \mu_-)$$

$\hookrightarrow$ Temperaturkoeffizient negativ

# Ladungstransport in Halbleitern

Halbleitermaterialien: Germanium, Silizium (vier Valenzelektronen)
↳ Anordnung in Kristallgitter

Energieinhalt eines Valenzelektrons schwankt innerhalb Valenzband




} Breite bestimmt Leitfähigkeit Material

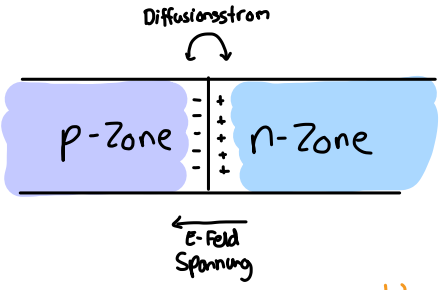
Supraleitung bei Metallen → Widerstand verschwindet komplett in Nähe absoluter Nullpunkt

Steigerung Leitfähigkeit → Fremdatome in Kristallgitter eingebaut (Dotierung)
↳ Donatoren (5 Valenzelektronen)
↳ Akzeptoren (3 Valenzelektronen)

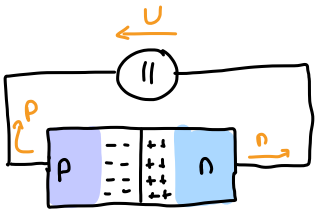
Donator → mehr freie Elektronen als Löcher → Stromleitung fast ausschliesslich durch Elektronen → n-Leiter, Elektronen = Majoritätsträger

Akzeptor → weniger Elektronen als Löcher → Stromleitung fast ausschliesslich durch Löcher → p-Leiter, Elektronen = Minoritätsträger

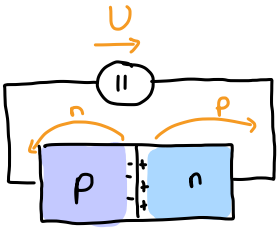
## pn-Übergang



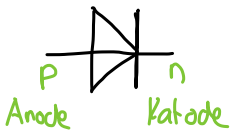

⇒ Gleichgewicht zwischen Diffusionsstrom und Spannung entsteht




Sperrschicht

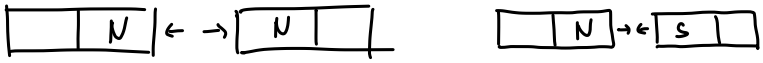


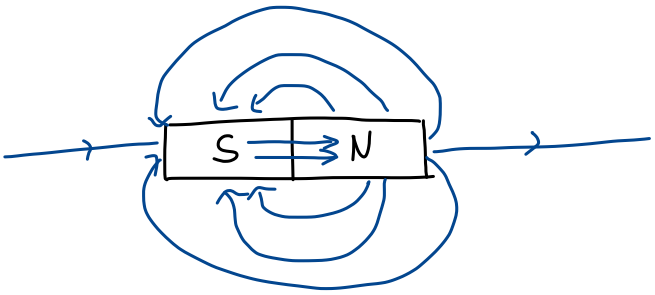

Sperrschicht wird abgebaut, Spannung unterstützt Diffusionsvorgang



# DAS STATIONÄRE MAGNETFELD

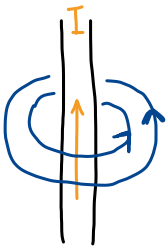
Magnetfeld → Kräfte zwischen bewegten Ladungen

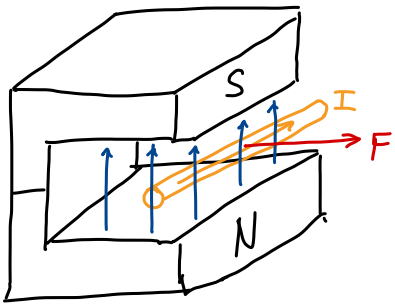



Es gibt keine magnetischen Einzelladungen!

Magnetisierungsvorgang → Elementarmagnete werden geordnet (gibt keinen magn. Leitungsvorgang)



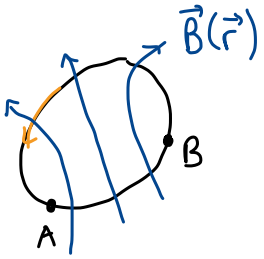




magnetische Flussdichte $\vec{B}$ → beschreibt Wirkung

$$\vec{F} = I\vec{s} \times \vec{B}$$

$$F = B \cdot Is \cdot \sin(\alpha)$$

Winkel zwischen Feldlinien und Stromrichtung




$$\vec{F}_{AB} = I \cdot \int_A^B d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

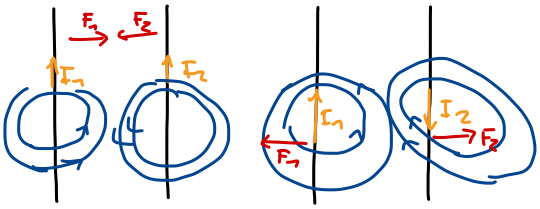
Kraft auf geladene Teilchen: LORENTZ-KRAFT

$$I\vec{s} = \vec{J}As = \vec{J}V = \rho \cdot \vec{v} \cdot V = Q\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

Magnetfeld und E-Feld → $\boxed{\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{\rho}$$

$\mu_0$ = magnetische Feldkonstante, Permeabilität des Vakuums



## Magnetische Feldstärke

$\vec{H} \rightarrow$ Mass für erregende Ströme (Quantitätsgrösse)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad [\vec{H}] = \frac{A}{m}, \quad [\vec{B}] = \frac{Vs}{m^2} = T$$

Im Vakuum haben $\vec{B}$ und $\vec{H}$ gleiche Richtung (wie $\vec{E}$ und $\vec{D}$)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{I}{2\pi\rho}$$

Umfang, unendlich langer Leiter

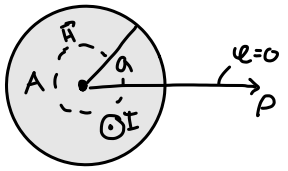
$d\vec{s}$ und $I$ im Sinne einer Rechtsschraube zugeordnet $\rightarrow$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$ Oersted'sches Gesetz

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$ Durchflutungsgesetz

$$\Theta = \sum_k I_k$$

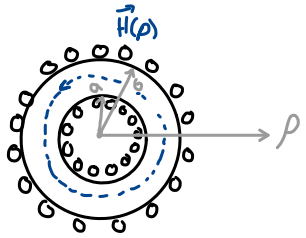
## Magnetische Feldstärke einfacher Leiteranordnungen




$$\vec{J} = \begin{cases} \vec{e}_z \cdot \frac{I}{\pi a^2} & \text{für } \rho \le a \\ \vec{0} & \text{für } \rho > a \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad \vec{H} = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{I}{2\pi a} \cdot \begin{cases} \rho/a & \text{für } \rho \le a \\ a/\rho & \text{für } \rho \ge a \end{cases}$$

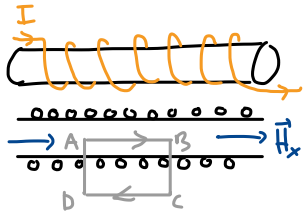
Toroidspule:




$$\vec{H} = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{NI}{2\pi\rho}$$ innerhalb Toroidspule

$\hookrightarrow$ ausserhalb Toroidspule feldfrei, da Durchflutung $= 0$

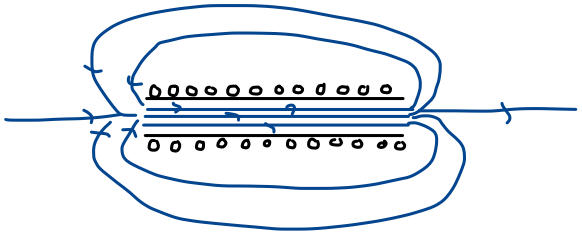
Lang gestreckte Zylinderspule: (Solenoid)




$$\vec{H} = \frac{N \cdot I}{L} \cdot \vec{e}_x$$

Beitrag ausserhalb Spule verschwindet

unendlicher Solenoid



endlich langer Solenoid

Magnetische Spannung: $V_{m12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{s}$ $[V_m] = A$

↳ magnetisches Skalarpotential (nur im Sonderfall, dass jedes beliebige Umlaufintegral verschwindet)

Magnetischer Fluss: $\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ $[\Phi] = Vs$

$\oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ (da es keine magn. Einzelladungen gibt)

Magnetische Polarisation: magnetischer Dipol → kleine vom Strom I durchflossene Schleife

magnetisches Moment → $\vec{m} = I\vec{A}$

magnetisches Dipolmoment → $\vec{j} = \mu_0 \vec{m} = \mu_0 I \vec{A}$

Magnetisierung → $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{N} \vec{m}_n$ → Magnetische Polarisation → $\vec{J} = \mu_0 \cdot \vec{M}$

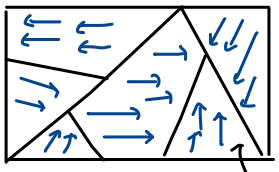
$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}$ → Flussdichte wird bei gleicher Feldstärke umso stärker, je mehr Dipole sich gleichsinnig orientieren

Diamagnetische Stoffe: $\mu_r < 1$ (z.B. Wasser) → bei mag. Polarisation können auch Abstossungskräfte entstehen

Paramagnetische Stoffe: $\mu_r \approx 1$ (z.B. Luft)

Ferromagnetische Stoffe: $\mu_r \gg 1$ (z.B. Baustahl)

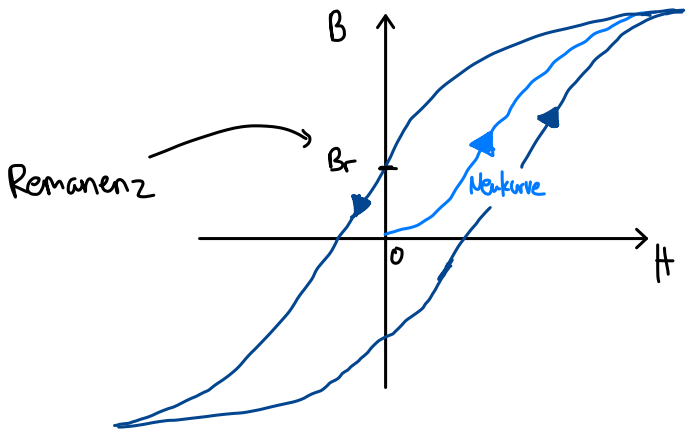
## Ferromagnetismus



Weiss'sche Bezirke

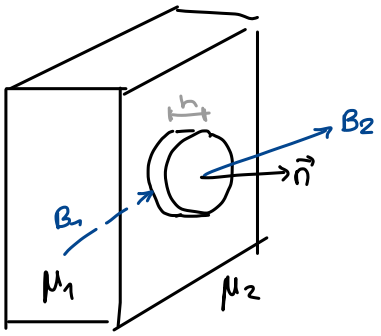
→ externes Magnetfeld → Bezirke in Richtung Magnetfeld dehnen sich aus

→ stärkeres ext. M-feld → Bezirke klappen um, ändern Orientierung → Sättigung (reversibel)




↳ nicht linearer Zusammenhang

# Verhalten der Feldgrössen an Grenzflächen

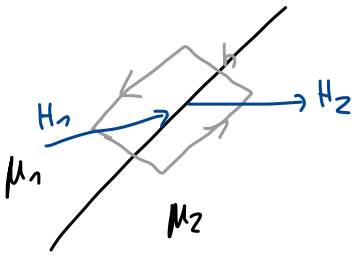



$h \to 0$: Hüllfläche nur aus $A$, $\oiint B d\vec{A} = 0$

$$B_1 \cdot d\vec{A}_1 + B_2 \cdot d\vec{A}_2 = -B_{n1} \cdot dA + B_{n2} \cdot dA = 0$$

$$\to \quad B_{n1} = B_{n2}$$

$$\to \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$




$h \to 0$: nur Seiten liefern Beitrag zu Umlaufintegral

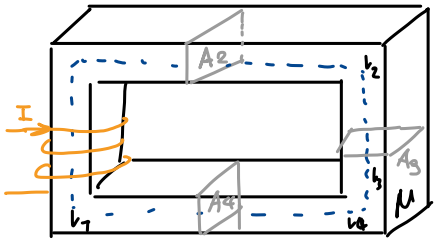
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \boxed{0} \text{ da kein Strom verkettet}$$

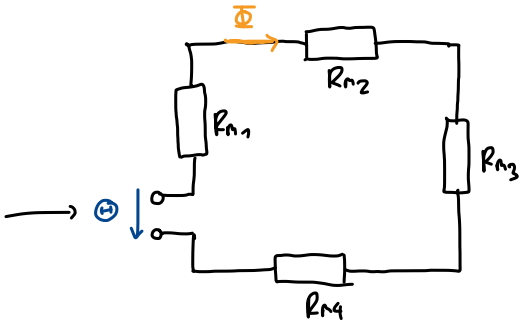
$$-H_{t1} \cdot ds + H_{t2} \cdot ds = 0 \quad \to \quad H_{t1} = H_{t2}$$

$$\frac{1}{\mu_1} B_{t1} = \frac{1}{\mu_2} B_{t2}$$

Magnetische Feldstärke und Flussdichte stehen senkrecht auf der Oberfläche eines hochpermeablen Körper ($\mu_r \to \infty$). Innerhalb dessen gilt $\vec{H} = \vec{0}$.

## Magnetischer Kreis




$$R_m = \frac{l}{\mu A} \quad \text{(Reluktanz)}$$

$$\boxed{V_m = R_m \Phi}$$

$$\Theta = \sum_{\text{Masche}} R_m \Phi = \sum_{\text{Masche}} V_m$$

$$\sum_{\text{Knoten}} \Phi = 0$$

## Induktivität

Fähigkeit, magnetische Energie zu speichern (Bauelement: Spule)

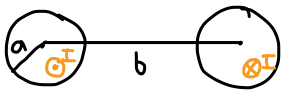
$$\Phi = L \cdot I \rightarrow L = \frac{\Phi}{I} \qquad [L] = \frac{Vs}{A} = H$$

↳ wie viel Fluss löst ein Strom aus?

Toroidspule: $\vec{H} = \frac{NI}{2\pi\rho} \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu N I}{2\pi\rho} \rightarrow \Phi_A = \frac{\mu N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\rightarrow \Phi = N \cdot \Phi_A \rightarrow L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Doppelleitung:




$$H_y = \frac{I}{2\pi a} \cdot \begin{cases} x/a & \text{für } x \leq a \\ a/x & \text{für } x \geq a \end{cases}$$

↳ Aufteilung äussere und innere Induktivität

Fläche $(b-a) \cdot l \rightarrow \Phi_a = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow L_a = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

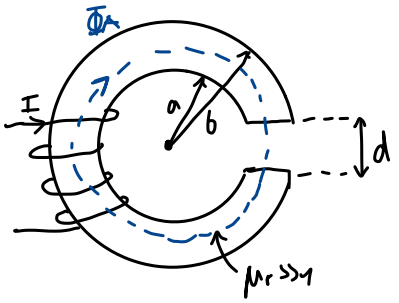
Fläche $a \cdot l \rightarrow L_i = \frac{1}{I} \int_{z=0}^{l} \int_{x=0}^{a} \frac{x^2}{a^2} B_y \, dx \, dz = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$

Kompensation, dass nicht kompletter Strom zur Induktivität beiträgt

$$\frac{L}{l} = \frac{2 \cdot (L_i + L_a)}{l} = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

## Magnetischer Kreis mit Luftspalt

Luftspalt verhindert Sättigung der magnetischen Flussdichte (würde Induktivität reduzieren)




$$\Theta = (R_{mk} + R_{mL}) \Phi_A = R_m \Phi_A$$

$R_{mk} = \frac{l_m}{\mu_r \mu_0 A}$ ← mittlere Weglänge

$R_{mL} = \frac{d}{\mu_0 A}$ ← Annahme $d \ll A$ (Streufeld vernachlässigbar)

$$\Phi_A = \frac{\Theta}{R_m} = NI \frac{\mu_r \mu_0 A}{l_m + d\mu_r} \rightarrow L = N^2 \frac{\mu_r \mu_0 A}{l_m + d\mu_r}$$

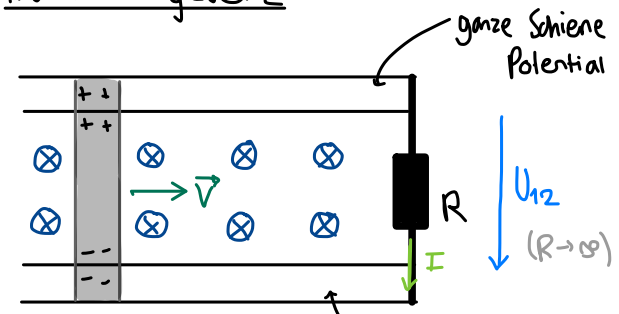
$$L = N^2 A_L = N^2 \Lambda_m = \frac{1}{R_m}$$

$$B = \frac{\Phi_A}{A} = \frac{LI}{NA} = I \cdot \sqrt{\frac{L}{A} \cdot \frac{\mu_r \mu_0}{l_m + d\mu_r}}$$

Sehr kleiner Luftspalt erhöht magnetischen Widerstand bereits signifikant!

# DAS ZEITLICH VERÄNDERLICHE ELEKTROMAGNETISCHE STRÖMUNGSFELD

## Induktionsgesetz




durch Lorentz-Kraft werden neue Ladungsträger getrennt um Gleichgewicht wiederherzustellen ← Elektrisches Feld nimmt durch Stromfluss ab

$$F_M + F_E = 0 \to (-e) \cdot v_x \cdot B \cdot \vec{e_y} + (-e) \cdot \vec{E} = 0$$

$$\to \vec{E} = -v_x B \cdot \vec{e_y}$$

$$U_{12} = \int_l^0 \vec{E}\, d\vec{s} = v_x l B$$

$$A = l \cdot (b - x) \to \frac{dA}{dt} = -l \cdot \frac{dx}{dt} = -l \cdot v_x$$

$$U_{12} = \frac{-dA}{dt} \cdot B = \frac{-d(B \cdot A)}{dt} = -\frac{d}{dt}[\vec{B} \cdot \vec{A}]$$

rechtshändig verknüpft mit Umlaufintegral $U_{12}$

$$\Rightarrow \boxed{U_{12} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Die Zählrichtung des Stromes und die des magnetischen Flusses sind im Sinne einer Rechtsschraube einander zugeordnet.

Der in einer Leiterschleife induzierte Strom wirkt der ihn verursachenden Flussänderung entgegen.

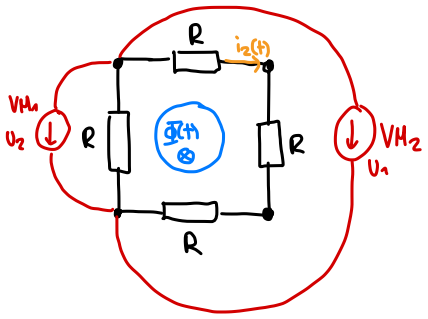
Kraft auf Stab: $\vec{F} = I \cdot \vec{e_y} l \times (-\vec{e_z} B) = -\vec{e_x} I \cdot l \cdot B$

↳ mechanische Arbeit wird geleistet → Umwandlung in elektrische Energie

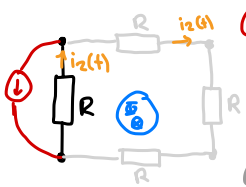
$$\boxed{u(t) = R \cdot i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}}$$

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$ → Umlaufintegral verschwindet nicht mehr

↳ elektrische Feld in bewegtem Zustand
$E' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$




$$4R i_2(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

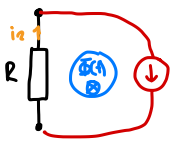



① $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R \cdot i_2 + U_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$

↳ $U_2(t) = -R \cdot i_2(t)$

② $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 3R \cdot i_2(t) - U_2(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = 4R \cdot i_2$

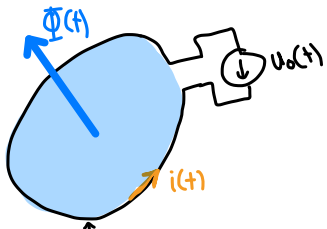
↳ $U_2(t) = -R \cdot i_2(t)$




$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R \cdot i_2 + U_1 = \frac{-d\Phi}{dt} = 4R \cdot i_2$$

↳ $U_1(t) = 3R \cdot i_2(t)$

# Selbstinduktion




R = ohmscher Widerstand der Leiterschleife

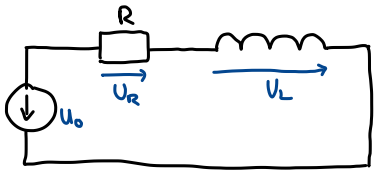
$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = R\,i(t) - U_0(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\hookrightarrow\ U_0(t) = R\cdot i(t) + \frac{d\Phi}{dt} \qquad L = \frac{\Phi}{i(t)}$$

$$\hookrightarrow\ U_0 = R\cdot i + \frac{d}{dt}[L\cdot i]$$

→ vorausgesetzt Geometrie/Permeabilität der Anordnung (und somit L) verändert sich nicht

$$U_0 = R\cdot i + L\cdot\frac{di}{dt} = U_R + U_L \quad \longrightarrow$$



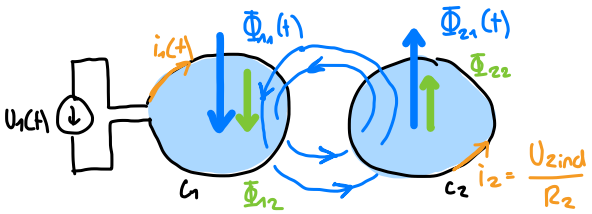

→ $U_L$ ist Spannungsabfall, da es dem Verursacher ($U_0$) entgegenwirkt

Induktivitätsnetzwerke: Reihenschaltung: $L_{ges} = \sum_k L_k$

Parallelschaltung: $\frac{1}{L_{ges}} = \sum_k \frac{1}{L_k}$

$$\boxed{U_L = L\cdot\frac{di}{dt}}$$

# Gegeninduktion




Selbstinduktivität

$$U_1 = R_1 i_1 + \frac{d\Phi_{11}}{dt} = R_1 i_1 + L_{11}\cdot\frac{di_1}{dt}$$

$$U_{2ind} = \frac{-d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{di_1}{dt}$$

Gegeninduktivität

Wechselseitige Beeinflussung → $\oint_{C_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -U_1 + R_1\cdot i_1 = -\frac{d\Phi_{1ges}}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{11} + \Phi_{12})$

$$\hookrightarrow\ U_1 = R_1 i_1 + L_{11}\cdot i_1 + L_{12}\cdot i_2$$

$$U_2 = R_2 i_2 + L_{21}\cdot i_1 + L_{22}\cdot i_2$$

# Gegeninduktivität

aus Anordnung berechnen → Fluss durch Fläche des anderen Leiters berechnen
↳ durch angenommenen Strom teilen

In System mehrere Leiter gilt für die zwischen den i-ten und k-ten Leiter auftretende Gegeninduktivität $L_{ik} = L_{ki}$

↳ Gegeninduktivität M

→ Anteil des von einer Schleife insgesamt erzeugten magnetischen Flusses, welcher die andere Schleife durchsetzt

## Koppelfaktoren

Koppelfaktoren beschreiben Verhältnis von dem durch beide Schleifen hindurchtretende Fluss zum gesamthaft erzeugten Fluss einer Schleife.

$$k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{M}{L_{11}} \qquad k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{M}{L_{22}}$$

$$k = \pm\sqrt{k_{12}k_{22}} = \frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

## Energieinhalt des Feldes

$$dW_m = u_L \cdot i_L \, dt = L i_L \frac{di_L}{dt} dt = L i_L \, di_L$$

$$W_m = L \cdot \int_0^I i_L \, di_L = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \Phi I$$

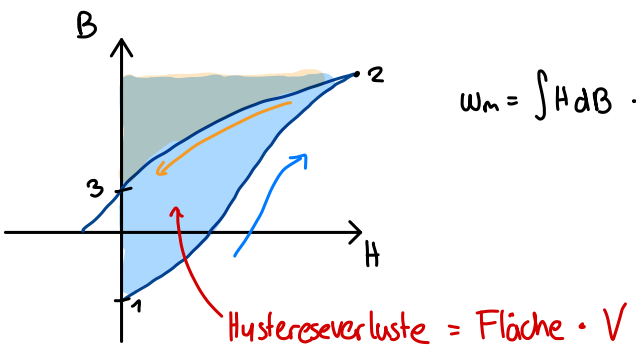
$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \rightarrow W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ik} I_i I_k$$

$$W_m = V \cdot \int_0^B H \, dB \rightarrow w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

## Hystereseverluste

linearer Zusammenhang zwischen mag. Feldstärke / Flussdichte → komp. Energie kann wiedergewonnen

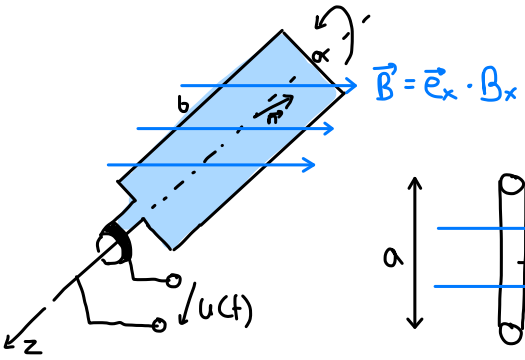
im Falle der Hysteresekurve verursachen Umklappvorgänge der Domänen mechanische Verluste




$w_m = \int H \, dB \rightarrow$ Fläche

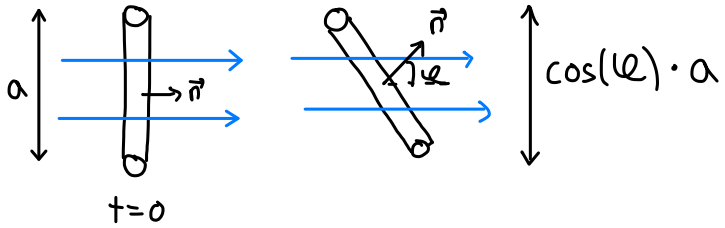
# Anwendungen der Bewegungsinduktion

Generator: mechanische Energie → elektrische Energie




$$\Phi(t=0) = \hat{\Phi} = B_x A = B_x ab$$

Amplitude




$$\varphi(t) = \omega t \quad \rightarrow \quad \Phi(t) = B_x \cdot A = B_x \cdot b \cdot a \cdot \cos(\varphi) = \hat{\Phi} \cdot \cos(\varphi)$$

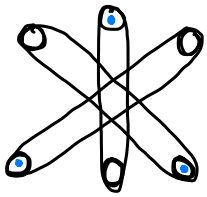
$$= \hat{\Phi} \cdot \cos(\omega t)$$

$$u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\left(-\hat{\Phi}\omega \sin(\omega t)\right) = \hat{\Phi} \cdot \omega \sin(\omega t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

Flussänderung und induzierte Spannung sind um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben.

## Drehstromsystem

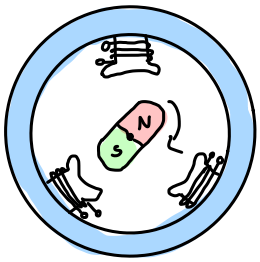
Drei-Phasensystem



$$U_1(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$$

$$U_2(t) = \hat{u} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$U_3(t) = \hat{u} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$



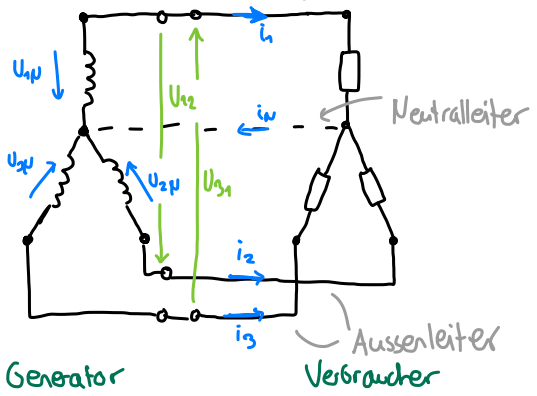

Drehstromsystem (Motor)

↳ Spannungserzeugende Spulen: Phase, Strang

↳ Phasenspannung, Phasenstrom

Leiterspannungen $= \sqrt{3} \cdot$ Phasenspannungen

Sternschaltung




Dreieckschaltung

Leiterströme $= \sqrt{3} \cdot$ Phasenströme

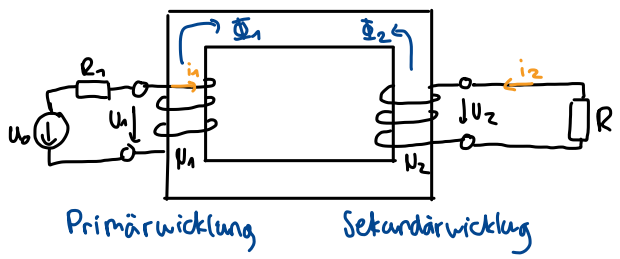
# Anwendung der Ruheinduktion

Transformator / Übertrager → Spannungen transformieren, Leistung zwischen galvanisch getrennten Netzwerken zu übertragen

gemeinsamer Kern, min. zwei Wicklungen

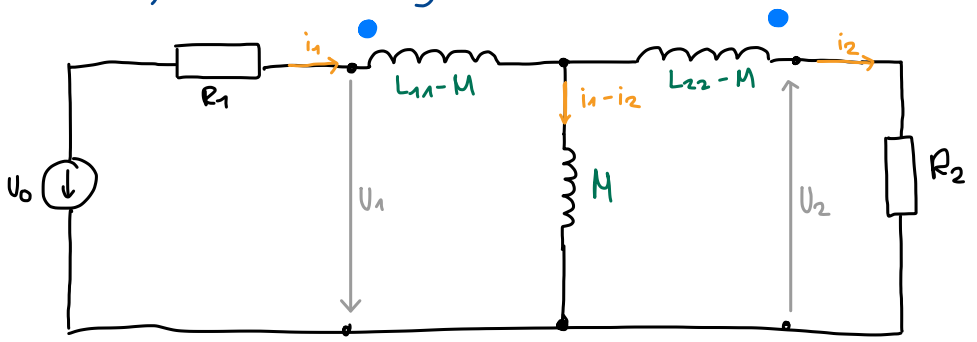
streufreier Überträger: von einer Wicklung erzeugte Fluss durchsetzt andere Wicklung vollständig

## Der verlustlose Übertrager




$$U_0 = R_1 i_1 + L_{11}\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

$$0 = R_2 i_2 - M\cdot\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$




Spannung über M:

$$U_M = M\cdot\frac{d(i_1-i_2)}{dt}$$

↳ als Spule

$$U_0 = R_1 i_1 + (L_{11}-M)\frac{di_1}{dt} - M\frac{d(i_2-i_1)}{dt} \leftarrow = +M\cdot\frac{d(i_1-i_2)}{dt}$$

$$0 = R_2 i_2 - M\frac{d(i_1-i_2)}{dt} + (L_{22}-M)\frac{di_2}{dt}$$

## Der verlustlose streufreie Übertrager

$$U_1 = \frac{d}{dt}\Phi_{ges} = N_1\frac{d}{dt}(\Phi_1-\Phi_2)$$

$$U_2 = \frac{d}{dt}\Phi_{ges} = N_2\frac{d}{dt}(\Phi_2-\Phi_1) = -U_1\cdot\frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \mp\ddot{u} \quad \text{mit} \quad \ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}$$ Übersetzungsverhältnis

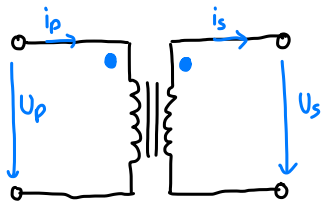
Idealer Übertrager: $\Theta = N_1 i_1 - N_2 i_2 = R_m(\Phi_1-\Phi_2) = \frac{l}{\mu A}(\Phi_1-\Phi_2)$

für $\mu\to\infty$, $R_m\to 0$ → $0 = N_1 i_1 - N_2 i_2$

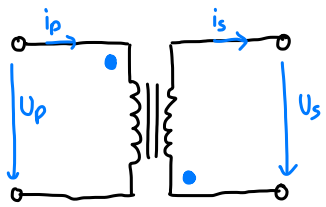
$$\frac{i_1}{i_2} = \pm\frac{N_2}{N_1} = \pm\frac{1}{\ddot{u}} \rightarrow \boxed{u_p i_p = U_s i_s}$$

↗ Leistung

## Idealer Übertrager




$\ddot{u} = U_p / U_s$




$\ddot{u} = -U_p / U_s$

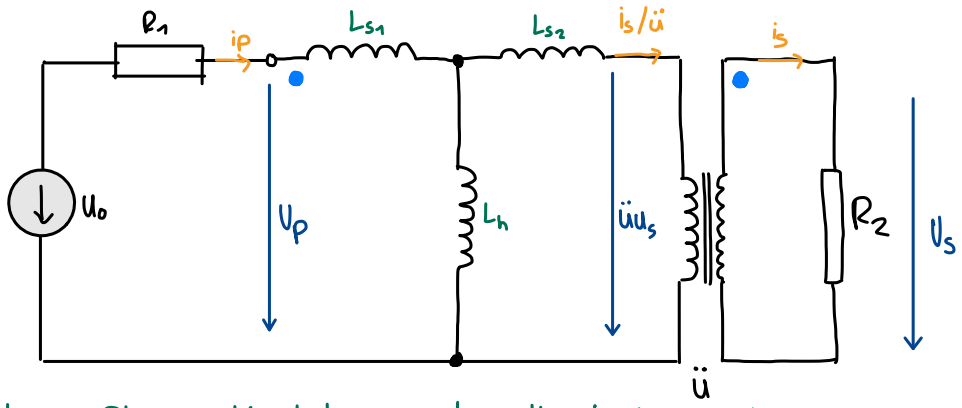
## Widerstandstransformation

Leistungsanpassung bei Wechselspannungen → Übertrager

Eingangswiderstand $R_E = \frac{U_p}{i_p}$, Ausgangswiderstand $R_2 = \frac{U_s}{i_s}$

$$R_E = \frac{U_p}{i_p} = \ddot{u} U_s \cdot \frac{\ddot{u}}{i_s} = \ddot{u}^2 R_2$$

## Ersatzschaltbild mit galvanischer Trennung




$L_{si}$ = Streuinduktivitäten $\quad$ $L_h$ = Hauptinduktivität

Maschenumläufe:

$$U_0 = R_1 \cdot i_p + L_{s1}\frac{di_p}{dt} + L_h \frac{d(i_p - i_s/\ddot{u})}{dt} = R_1 \cdot i_p + \underbrace{(L_{s1} + L_h)}_{L_{11}}\frac{di_p}{dt} - \underbrace{L_h \frac{1}{\ddot{u}}}_{M}\frac{di_s}{dt}$$

$$0 = \ddot{u}U_s - L_h \frac{d(i_p - i_s/\ddot{u})}{dt} + L_{s2}\frac{d(i_s/\ddot{u})}{dt} = \ddot{u}U_s - \underbrace{L_h}_{M}\frac{di_p}{dt} + \underbrace{(L_{s2} + L_h)}_{L_{22}}\frac{d(i_s/\ddot{u})}{dt}$$

↳ $L_h = \ddot{u}M$, $L_{s1} = L_{11} - \ddot{u}M$, $L_{s2} = \ddot{u}^2 L_{22} - \ddot{u}M$

↳ $\ddot{u}$ frei wählbar

Streugrad (Streuung): $\sigma = 1 - k^2$