UTN - MATEMÁTICA

Nicolás Fishman

Contents

Semanas 1 y 2
12/10 - 21/10

- Números Reales
- Función Lineal y Función Cuadrática

Números Reales

1.1 Conjuntos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$
$$\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$
$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Divisibilidad:

a es divisible por b si hay un entero k tal que:

$$a = b \cdot k$$

Conjuntos de números enteros

- **Números pares:** $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$
- **Números impares:** $\{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$
- **Números primos:** p es primo si tiene sólo 2 divisores: 1 y p
- **Números compuestos:** Números que no son primos

* 1 no es ni primo ni compuesto

Teoría fundamental de la artitmética

Todo número natural n mayor que 1 tiene una única factorización en números primos.

Ejemplo:

- $n = 120 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
- $n = 15 \Rightarrow 15 = 3 \cdot 5$

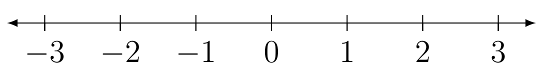
Máximo común divisor - MCD

a, b y d son números entreros. Si $d|a$ y $d|b$ se dice que d es un Divisor común de a y b. El mayor de estos divisores comunes es el **máximo común divisor**
*Si el MCD de dos enteros es 1, a y b son **coprimos**

Ejemplo:

$a = 15, b = 8 \Rightarrow MCD(a, b) = 1 \rightarrow$ a y b son **coprimos**

1.2 Recta Numérica



1.3 Conjunto Racional

Definición - Conjunto Racional

$$\mathbb{Q} \rightarrow \text{Conjunto de todas las fracciones } \frac{a}{b} \text{ donde } a,\ b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0.$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

$$\mathrm{M} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \cdot M}{b \cdot M}$$

Fracciones equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } a \cdot d = b \cdot c$$

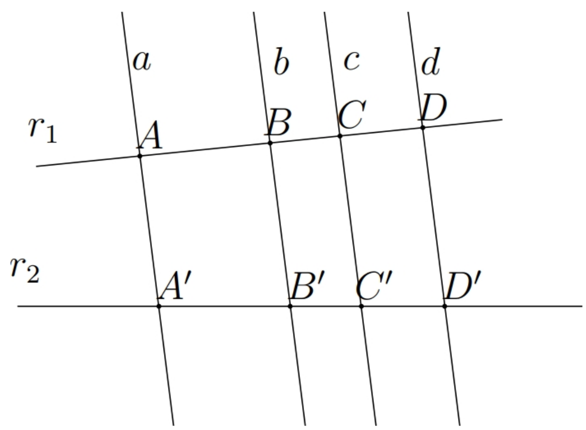
Operaciones con racionales

- **Suma:** $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- **Multiplicación:** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- **División:** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

1.4 Representación de los racionales en la recta

Teorema de Thales

Dos rectas cortadas por rectas paralelas $\rightarrow$ los segmentos cortados son proporcionales.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Definición - Orden en $\mathbb{Q}$

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones con b y d positivos $\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y solo si

$$a \cdot d < b \cdot c$$

Igualmente, dadas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones con b y d positivos $\Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ si

$$a \cdot d \leq b \cdot c$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2} \text{ es decir, } \frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

Propiedad

Entre dos racionales distintos en la recta numérica, extisten infinitos puntos que representan números racionales.

1.5 Reresentación decimal de los racionales

Páginas 8 - 13

1.6 Números Reales

Dados dos conjuntos A y B, se llama *unión* de A y B al conjunto de todos los elementos que están en el conjunto A o en el conjunto B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

x pertenece a A o x pertenece a B

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

x pertenece a A y x pertenece a B

Número Reales

El conjunto de los reales es la unión de los números racionales y los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Por lo tanto, el conjunto de los números reales está formado por todos los números que admiten una representación decimal, finita o infinita y tanto periódica como no periódica.

Propiedades de la suma:

1. (Asociatividad): $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$
2. (Comutatividad): $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b = b + a$
3. (Existencia del elemento neutro) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = a$
4. (Existencia de opuestos) $\forall\, a \in \mathbb{R}\, \exists\, -a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$

Propiedades de la multiplicación:

1. (Asociatividad): $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2. (Comutatividad): $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$
3. (Existencia del identidad) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot 1 = a$
4. (Existencia de inverso multiplicativo) $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\ \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Leyes cancelativas:

1. $a + b = a + c \Rightarrow b = c$
2. $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$

- *Restar* es sumar el opuesto, $a - b = a + (-b)$
- *Dividir* es multiplicar por el inverso, $a/b = a \cdot b^{-1}$ con $b \neq 0$

1.7 Intervalos Reales.

Intervalos acotados.

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *Intervalo abierto*
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *Intervalo cerrado*
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ *Intervalo semicerrado por izquieda*
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ *Intervalo semicerrado por derecha*

Intervalos no acotados.

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

* $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

1.8 Valor Absoluto

Definición - Valor Absoluto

Dado un número real x se llama *valor absoluto* de x al número real $|x|$ tal que:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto o módulo de un número real, puede interpretarse como la distancia de dicho número al origen en la recta numérica.

Propiedades - valor absoluto

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $k > 0$:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a| = |-a|$
4. $|a| \leq k$ equivale a $-k \leq a \leq k$
5. $|a| \geq k$ equivale a $a \leq -k$ o bien $k \leq a$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigulddad triangular)

1.9 Exponentes y raíces

Potenciación

Cualquier número real a y cualquier número natural n se define la potencia a^n como el producto de n copias de a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{\text{n-veces}}$$

Propiedades - Potenciación

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (Producto de potencias de igual base)
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (Cociente d epotencias de igual base ($a \neq 0$))
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (Potencia de potencia)
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación)
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$ (La potenciación es distributiva respecto de la división)

Radicación

Dado un número real $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ denota al único número real no negativo que al elevarlo al cuadrado da como resultado a:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \text{ y } b \geq 0$$

Definición - (raíz n-ésima)

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$n \in \mathbb{Z} > 1$. Si n es par, entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Propiedades - radicación

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (a y b deben ser no negativos en el caso n par)

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (a y b deben ser no negativos en el caso n par, además b debe ser, en cualquier caso, distinto de 0)

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ (a debe ser no negativo si n o m fuesen pares)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m}$$

Racionalización de denominadores

Para hacer representaciones con fracciones que tienen denominadores irracionales suele ser dificil, por lo que hay que convertirlos en fracciones con denominadores racionales. Para ello se utiliza la siguiente técnica:

Ejemplo 1. Racionalizar $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Teniendo en cuenta que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ *y que* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$, *multiplicamos y divimos la fracción por* $\sqrt{3}$*:*

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 2. Racionalizar $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{12}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{6}$$

Ejemplo 3. Racionalizar $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

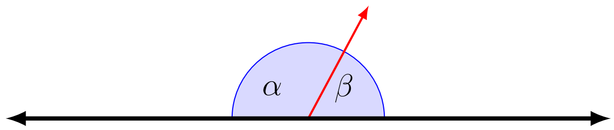
$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2}$$
$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{6})}{-1} = 2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{5})$$

1.10 Elementos de la geometría

Ángulos.

- Complementarios: dos ángulos que suman 90º

- Suplementarios: dos ángulos que suman 180º



α y β son ángulos adyacentes y complementarios

Triángulos
Clasificación por lados:

- Equilátero: tres lados iguales
- Isósceles: dos lados iguales
- Escaleno: tres lados distintos

Clasificación por ángulos:

- Acutángulo: tres ángulos agudos
- Rectángulo: un ángulo recto
- Obtusángulo: un ángulo obtuso

Propiedades

1. (Desigualdad triangular) La suma de los dos lados menores de un triángulo es mayor que el lado mayor.

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

2. En todo tríangulo, a mayor lado se opone mayor ángulo

Mediana: Línea que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
Mediatriz: Línea que pasa por el medio del lado de forma perpendicular.
Altura: Línea perpendicular al lado opuesto al vértice que se toca.

$$\boxed{A = \frac{B \cdot h}{2}}$$

Fórmula del área de un triángulo, siendo B la base y h la altura.

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son *semejantes* si tienen sus tres pares de lados proporcionales.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Cuadriláteros

Trapecio: Cuadrilátero con solo dos lados paralelos. Si los lados paralelos no tienen la misma medida, se llama *trapecio isósceles*.

$$\boxed{A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}}$$

Fórmula del área de un trapecio, siendo B y b las bases y h la altura.

Paralelogramo: Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.

Propiedades de los paralelogramos

1. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes
2. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes
3. las diagoales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

$$\boxed{A = B\cdot h}$$

Fórmula del área de un paralelogramo, siendo B la base y h la altura.

Rectángulo: Paralelogramo que tiene un ángulo recto. A las propiedades anteriores se le agrega:

Propiedad del rectángulo

Las diagonales de un rectángulo son congruentes

Rombo: Paralelogramo que tiene todos sus lados iguales. A las propiedades anteriores se le agrega:

Propiedades del rombo

1. Las diagonales del rombo son perpendiculares entre sí (forman ángulos rectos)
2. Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos que unen

$$\boxed{A = \frac{D\cdot d}{2}}$$

Fórmula del área de un rombo, siendo D y d las diagonales.

Circunferencia y círculo

Circunferencia: Línea cerrada que pasa por un punto y que tiene la misma distancia a todos los puntos de la línea. La distancia entre el punto y la circunferencia se llama *radio*.

$$\boxed{l = 2\pi \cdot r}$$

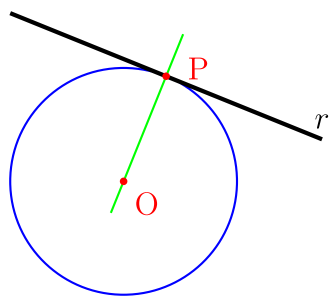
Fórmula de la longitud de una circunferencia, siendo r el radio.

$$\boxed{A = \pi \cdot r^2}$$

Fórmula del área de una circunferencia, siendo r el radio.

Recta Tangente

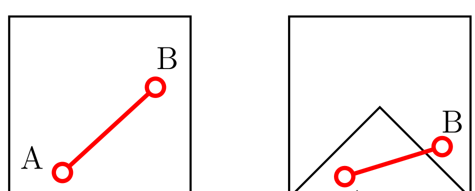
Circunferencia que toca a otra circunferencia en un punto. Es perpendicular al radio que une los centros de las circunferencias.



Polígonos

Dados n puntos no alineados $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se llama *polígono* a la figura formada por las líneas que unen los puntos. $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots \overline{P_nP_1})$

Polígono convexo: Polígono que si dados dos puntos cualesquiera de su interior, el segmento que los une está totalmente incluido en el polígono.



Convexo *No convexo*

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) es igual a:

$$\boxed{S = (n-2) \cdot 180°}$$

Un polígono convexo es un *polígono regular* si sus lados son iguales y sus ángulos interiores son iguales.

Un polígono convexo está *inscripto* en una circunferencia si todos sus vértices están sobre la circunferencia.
Un polígono convexo está *circunscripto* a una circunferencia si todos sus lados son tangentes a la misma

Propiedad

Todo polígono regular está inscripto y circunscripto en una circunferencia

Apotema: Segmento perpendicular al lado de un polígono regular que une el vértice con el centro de la circunferencia inscrita. El area de un polígono regular de n lados es:

$$\boxed{A = \frac{l \cdot a}{2} \cdot n = \frac{\text{perímetro} \cdot a}{2}}$$

Donde l es la longitud de los lados y a es la apotema.

Cuerpos geométricos
Son figuras de 3 dimensiones. Algunos ejemplos son los poliedros, la esfera y el cilindro

Prisma recto: Poliedro que tiene dos caras congruentes sobre planos paralelos, llamados *bases*. Las caras laterales son paralelas entre sí y perpendiculares a las bases. Estas últimas caras se conocen como *caras laterales*.

El volumen de un prisma recto es:

$$\boxed{V = B \cdot h}$$

Donde B es el área de la base y h es la altura del prisma.

El Área Total es la suma de las áreas de las caras laterales y las bases:

$$\boxed{A_{Total} = 2A_B + A_l}$$

Donde A_B es el área de la base y A_l es el área de las caras laterales.

Un *cubo* es un prisma recto cuyas caras laterales son cuadrados y sus bases son cuadrados.

Pirámide: Explicación página 29

Área lateral de una pirámide regular:

$$\boxed{A_{total} = A_{Base} + S \cdot a}$$

Donde A_{Base} es el área de la base, S es el perímetro de la base y a es la apotema.

Volumen de una pirámide regular:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h}$$

Un ***cono*** es el cuerpo o sólido que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus lados.
La base del cono es una circunferencia. La hipotenusa del triángulo rectángulo se llama *generatriz* del cono.

El área del cono es:

$$\boxed{A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g}$$

Donde r es el radio de la base y g es la generatriz.

Su volumen es:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

El ***cilindro*** es el sólido que se obtiene al girar un rectángulo sobre uno de sus lados. Las bases son dos círculos. Su área es:

$$\boxed{A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$$

Su volumen es:

$$\boxed{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

La ***esfera*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un círculo alrededor de su diámetro. La *superficie esférica* es el conjunto sde puntos que equidistan de un punto fijo llamado *centro* de la esfera. El área de esta superficie es:

$$\boxed{A = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

y su volumen:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

Funciones Lineales y cuadráticas

2.1 Concepto de función

Definición de Función

Se llama *función f* de *A en B* a toda relación que asocia a cada elemento de A un único elemento de B.
El conjunto A se llama *dominio* de f y el conjunto B se llama *codominio* de f.

$$f : A \to B$$

2.2 Función Lineal

Definición (Función Lineal)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *lineal* si es de la forma

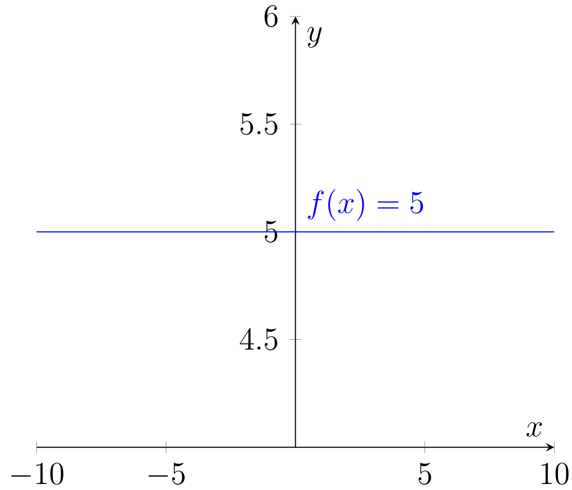
$$f(x) = ax + b$$

con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.

Gráficas de las funciones lineales

1. Si la pendiente, a, es igual a 0, la gráfica es una recta horizontal.

$$f(x) = b$$



2. Si $a \neq 0$, la recta corta al eje vertical (**eje de cortdenadas**) en el punto (0;b), de aquí que el coeficiente b se conoce como *ordenada al origen*.

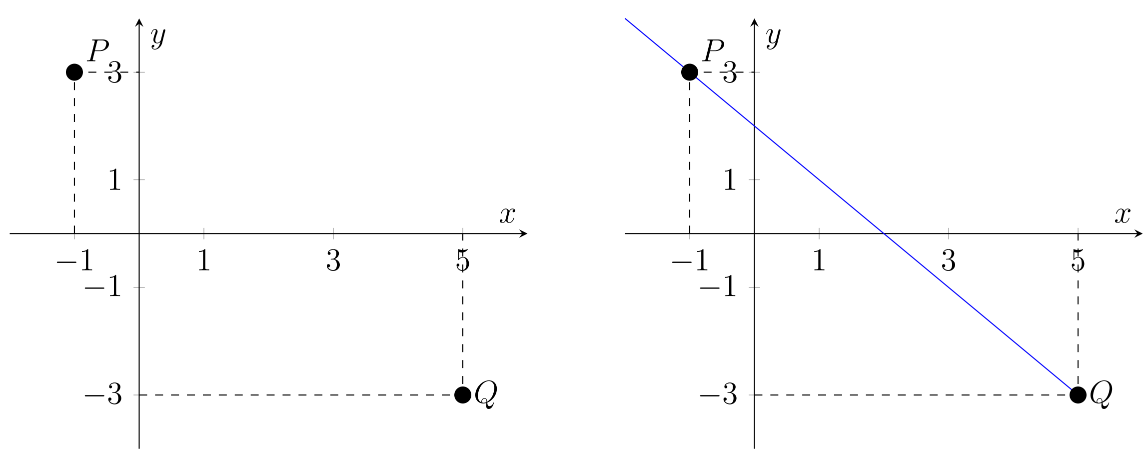
2.2.1 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Se puede determinar una recta solo sabiendo dos puntos que pertenezcan a ella. Para esto se utiliza la *ecuación general de la recta*:

$$y = mx + b$$

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1;3)$ y $Q(5;-3)$.



Solución:

Pasa por $P \to f(-1) = 3$ y $Q \to f(5) = -3$.

$$\begin{cases} 3 &= (-1) \cdot a + b \\ -3 &= 5a + b \end{cases}$$

$$3 \ + \ a = -3 - 5a$$

$$6a = -6 \Leftrightarrow a = -1$$

y $b = 2$:

$$f(x) = -x + 2$$

2.2.2 Ecuación de la recta conociendo un punto y su pendiente

Si una recta pasa por el punto $(1; 3)$ y su pendiente es -2, conocemos la ecuación de la recta:

$$f(x) = -2x + b$$

Calculamos la ordenada al origen, reemplazando $f(x)$ por 3 y x por 1:

$$3 = -2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow 5 = b$$

$$f(x) = -2x + 5$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Dadas dos funciones lineales $y = a_1 x + b_1$ e $y = a_2 x + b_2$ sus gráficas son:

1. Paralelas si $a_1 = a_2$
2. Perpendiculares si $a_1 \cdot a_2 = -1$

2.3 Función Cuadrática

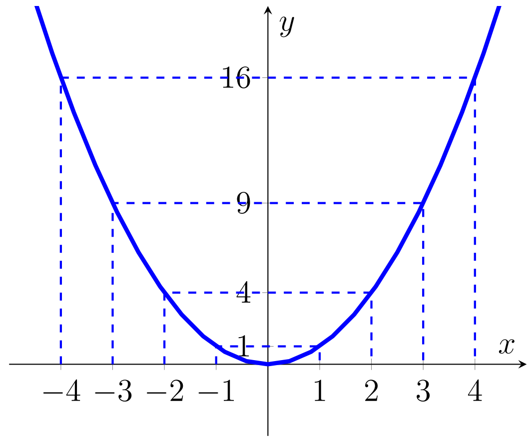
Definición (Función Cuadrática)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *cuadrática* si es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Podemos ver que:

- El gráfico es simétrico respecto al eje y. La recta $x = 0$ es el **Eje se simetría**.
- El menor valor que toma la función es 0 y se produce en $x = 0$. Este punto es el **vértice** de la parábola.
- La función es creciente en el intervalo $(-\infty; 0)$ y decreciente en el intervalo $(0; \infty)$.
- El conjunto imagen de la función es el intervalo $[0; \infty)$ o $\mathbb{R}_0^+$.

2.3.1 Forma canónica

Toda función cuadrática, desde su forma polínomica $f(x) = ax^2 + bx + c$, se puede escribir en la forma canónica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

donde h y k son las coordenadas del vértice de la parábola.

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la función que pasa por el punto (3;-1) y tiene como vértice el punto (-1;4).

Solución:

Reemplazamos en la forma canónica:

$$f(x) = a(x + 1)^2 + 4$$

Para obtener $a \rightarrow$ reemplazamos $f(3) = -1$:

$$-1 = a(3+1)^2 + 4 \Leftrightarrow -1 = 16a + 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{16} = a$$

Por ende, la forma canónica de la función es $f(x) = -\frac{5}{16}(x+1)^2$. Para obtener la forma polinómica tenemos que hacer las cuentas:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{5}{16}(x+1)^2 + 4 = -\frac{5}{16}(x^2 + 2x + 1) + 4 = \frac{5}{16}x^2 - \frac{10}{16}x - \frac{5}{16} + 4 \\ &= -\frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{59}{16} \end{aligned}$$

2.3.2 Raíces de una cuadrática

Además del vértice tenemos las raíces. Nos dicen donde corta la gráfica con el eje horizonal. Para sacarlas hay que resolver

$$f(x) = 0$$

De donde carajo sale la fórmula resolvente?????

La cuadrática $f(x) = ax^n + bx + c$ puede escribirse completando cuadrados:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Igualando a 0 y considerando que a ¿ 0:

$$0 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2$$

en donde

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \left|x + \frac{b}{2a}\right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \left|x + \frac{b}{2a}\right|$$

Y por fin tenemos:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \textbf{ o bien } x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula resolvente

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Semanas 3 y 4
24/10 - 28/10

- Polinomios
- Sistemas

Polinomios

1.1 Definición

Definición de polinomio

Se llama *polinomio de grado n* a toda expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.
a_n es el *coeficiente principal* y a_0 el *coeficiente independiente*.

Polinomio Nulo

Se llama *polinomio nulo* a todo polinomio que es igual a cero, es decir, que su coeficiente independiente es cero.

$$p(x) = 0$$

Este polinomio **no tiene grado**.

Definición de la igualdad de polinomios

Dos polinomios son $p(x)$ y $q(x)$ son iguales si son del mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0 \text{ y } q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} \cdots + b_1 x + b_0$$

son polinomios de grado n, son iguales sí y solo si:

$$a_n = b_n; a_{n-1} = b_{n-1}; \ldots ; a_1 = b_1 = a_0 = b_0$$

o, abreviada:

$$a_i = b_i \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots , n$$

Suma de polinomios

La suma de dos polinomios de grado n y m es un polinomio de grado $max(n, m)$:

$$p(x)+q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$$

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_m)x^n + (a_{n-1} + b_{m-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Opuesto de un polinomio

Un polinomio es el opuesto de otro cuando la suma de ambos es el polinomio nulo:

El opuesto del polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es

$$-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$$

Resta de polinomios

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la resta de $p - q$ es el polinomio que se obtiene al sunarle a p el opuesto de q:

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x))$$

Ejemplo: calcular $p - q$ si $p(x) = 7x^2 + 3x - 1$ y $q(x) = -2x^3 + x^2 - 4x - 1$.
Solución:

$$p(x) - q(x) = 7x^2 + 3x - 1 - (-2x^3 + x^2 - 4x - 1)$$

$$p(x) - q(x) = 7x^2 + 3x - 1 + 2x^3 - x^2 + 4x + 1$$

$$p(x) - q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x$$

Multiplicación de polinomios

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la multiplicación de $p * q$ se obtiene de distribuir los términos y sumar los coeficientes de igual grado.

Ejemplo: calcular $p * q$ si $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ y $q(x) = 3x - 1$.
Solución: Primero se distribuyen los términos:

$$p(x) * q(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)(3x - 1)$$

$$p(x) * q(x) = 3x^4 - 9x^3 + 6x - x^3 + 3x^2 - 2$$

Y luego se suman los coeficientes de igual grado:

$$p(x) * q(x) = 3x^4 - 10x^3 + 3x^2 + 6x - 2$$

Teorema (algoritmo de la división)

Si *p(x)* y *q(x)* son dos polinomios tales que *q(x)* no es nulo y el grado de p *greq* al grado de q, existen polinomoios *c(x)* y *r(x)* tales que:

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

donde el grado de $r <$ al grado de q o *r(x)* es el polinomio nulo. El polinomio *c(x)* se llama *cociente* y el polinomio *r(x)* se llama *resto*.

1.2 Ceros o raíces de un polinomio

Valor numérico de un polinomio

El *valor numérico* del polinobio *p(x)* en el punto $x = k$ es el número *p(k)*.

El *cero* o *raíz* de un polinomio es el valor numérico de x que hace que el polinomio tome el valor *0*.

Teorema del resto

El resto de dividir a *p(x)* por un polinomio de la forma x - k, donde $k \in \mathbb{R}$, es *p(k)*.

Ejemplo: Calcular el resto de dividir $p(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 1$ por $x + 1$.
Solución: El resto es $p(-1) = 4$.

1.3 Factorización de polinomios

Definición - Factorización de polinomios

Un polinomio *p(x)* de grado ≥ 1 es irreducible si cualquier factorización de *p(x)* es de la forma *p(x) = q(x) * r(x)*, donde *q(x)* o *r(x)* son polinomios de grado 0. **Un polinomio es irreducible si y solo si es de grado 1 o es un polinomio de grado 2 sin raíces**

Para factorizar un polinomio *p(x)* hay que escribirlo como el producto de su **Coeficiente principal** y una cantidad de factores irreducibles y mónicos.

Ejemplo: El polinomio *p(x) = 2x^3 + 3x^2 -2x -3* se factoriza como:

$$p(x) = 2(x-1)(x+1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Multiplicidad de una raíz

Decimos que a es raíz de *p(x)* de multiplicidad k si $(x-a)^k$ divide a *p(x)* y $(x-a)^{k+1}$ **no** divide a *p(x)*.
Si $k = 1$ decimos que a es raíz simple de *p(x)*.

Teorema

Sea *p(x)* un polinomio de grado n. Si *p(x)* tiene n raíces, se puede escribir de la forma:

$$p(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot (x-a_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x-a_n)^{m_n}$$

donde a_i son las raíces de *p(x)* y m_i son las multiplicidades de las raíces.

1.4 Expresiones racionales

Las expresiones racionales es como el "conjunto de fracciones de polinomios"

Definición

Se llama *expresión racional* a toda fracción de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde *P(x)* y *Q(x)* son polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y *Q(x)* no es un polinomio nulo.

Operaciones con expresiones racionales

1. **Multiplicación:**
   Dadas dos expresiones racionales $\frac{p_1(x)}{q_1(x)}$ y $\frac{p_2(x)}{q_2(x)}$, su producto es:

   $$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x) \cdot p_2(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x)}$$

   Ejemplo:

   $$\frac{x+1}{x^2-4} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{3x+3}{x^3-x^2-4x+4}$$

2. **División:**
   Al igual que con los números racionales, la división de expresiones racionales se realiza multiplicando las expresiones de manera inversa:

   $$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} : \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{q_2(x)}{p_2(x)} = \frac{p_1(x) \cdot q_2(x)}{q_1(x) \cdot p_2(x)}$$

   Ejemplo:

   $$\frac{x^2+1}{x} : \frac{3x}{x-1} = \frac{x^2+1}{2} \cdot \frac{x-1}{3x} = \frac{x^3-x^2+x-1}{3x^2}$$

Para la suma y la resta necesitamos que los denominadores sean iguales, por lo que se puede usar la **regla de la igualdad de los denominadores (mcm)**:

Definición - mcm

Un mínimo común múltiplo *(mcm)* entre dos polinomios p y q de grado es un polinomio m de grado mínimo que es múltiplo de p y de q.

Se factorizan los denominadores y se multiplican los factores comunes de mayor grado y los no comunes

Ejemplo: Encontrar un *mcm* entre $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$ y $q(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x$
Primero tenemos que factorizar los polinomios

$$p(x) = 2(x-1)(x+1)(x+3) \text{ y } q(x) = (x+3)^2(x-1)x$$

por ende, el *mcm* es:

$$m(x) = (x-1)(x+1)(x+3)^2 x$$

3. **Suma y resta:**
   Para la suma y la resta, hay que igualar los denominadores y luego sumar o restar los numeradores.

1.5 Ecuaciones racionales

Son ecuaciones donde la incógnita está en una expresión fraccionaria. La idea es tranformar la ecuación en una ecuación polinómica y después resolverla igualando a 0 para encotrar sus raíces

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-7}{x-1}$$

Hay valores que no pueden ser raíces, porque no están definidos en el dominio de la función. Por ejemplo, $x = 3$ y $x = 1$ no puede ser raíz porque $x - 3 = 0$ y $x + 1 = 0$ y 0 no está definido en $\mathbb{R}$.

$$x \neq 3 \text{ y } x \neq 1$$

$$\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-7}{x-1} \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = (x-7)(x-3) \Leftrightarrow$$
$$2x^2 + x - 1 = x^2 - 3x - 7x + 21 \Leftrightarrow x^2 + 9x - 22 = 0$$

$$\boxed{x = 2 \text{ y } x = -11}$$

Sistemas

1.1 Definición

Definición (Ecuación lineal)

Las ecuaciones que se pueden expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes $\mathbb{R}$, se conocen como *ecuaciones lineales con n incógnitas.* $x_1, x_2, \ldots x_n$ son las n incógnitas de la ecuación

Ejemplo:

$$\begin{cases} -3x + y & = -2 \\ \quad x + y & = \quad 6 \end{cases}$$

Para resolver este sistema hay que encontrar el par de números (x, y) que satisfagan las dos ecuaciones simultaneamente.
Si las ecuacciones representan un par de rectas diferentes y paralelas, el sistema **no tiene solución**. Si representan un par de rectas no paralelas, el sistema tiene **una solución única** y cuando las ecuaciones representan la misma recta, el sistema tiene **infinitas soluciones**.

Definición (sistemas de ecuaciones lineales)

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales con la misma cantidad de incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas del sistema. a_{ij} son los *coeficientes del sistema* y b_i son los *términos independientes*.

1.2 Sistemas de ecuaciones equivalentes

Para resolver el un sistema lineal 2×2 podemos ver el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y & = -1 \\ x + y & = 5 \end{cases}$$

tiene como solución $x = 1$ e $y = 4$.
Vamos a ”combinar” las ecuaciones del sistema para obtener una nueva ecuación: multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la restamos a la primera:

$$\begin{array}{r} 3x - y = -1 \\ 2x + 2y = 10 \\ \hline x - 3y = -11 \end{array}$$

Esta ecuación es equivalente al sistema original, ya que si resolvemos esta ecuación, obtenemos la misma solución que el sistema original.

Definición (combinación lineal de ecuaciones)

Sean E_1 y E_2 dos ecuaciones lineales con la misma cantidad de incógnitas. Se dice que la ecuación E es *combinación lineal* de las ecuaciones E_1 y E_2 si existen números reales α y β tales que:

$$E = \alpha E_1 + \beta E_2$$

Teorema

Dos sistemas lineales tienen exactamente el mismo conjunto solución.

1.3 Resolución de los sistemas lineales: Eliminación de Gauss

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, podemos usar el método de eliminación de Gauss, que nos permite simplificar las ecuaciones equivalentemente mediante 3 operaciones:

1. Intercambiar dos ecuaciones
2. Multiplicar una ecuación por un número real distinto de 0
3. Sumar una ecuación a otra multiplicada por un número real

Ejemplo: *Resuelvan el sistema:*

$$\begin{cases} -2x + 5y &= 4 \\ \ \ 3x + 2y &= 13 \end{cases}$$

Para resolverlo vamos a usar la primera ecuación para eliminar la incógnita x de la segunda ecuación. En este caos multiplicaremos la primera ecuación por 3 y la segunda por 2

$$\begin{cases} -2x + 5y &= 4 \\ \ \ 3x + 2y &= 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 15y &= 12 \\ \ \ 6x + 4y &= 26 \end{cases}$$

Ahora sumamos la segunda ecuación a la primera:

$$\begin{cases} -2x + 5y &= 4 \\ \ \ 3x + 2y &= 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 15y &= 12 \\ \ \ 6x + 4y &= 26 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 15y &= 12 \\ \qquad 19y &= 38 \end{cases}$$

Los 3 sistemas tienen el mismo conjunto solución, pero el tercero nos da la solución inmediata:

$$19y = 38 \Leftrightarrow y = 2$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$-6x + 30 = 12 \Leftrightarrow -6x = -18 \Leftrightarrow x = 3$$

La solución del sistema es $(x, y) = (3, 2)$
Ejemplo 2: *Resuelvan el sistema:*

$$\begin{cases} \ \ 2x + y + z &= \ \ 2 \quad (E_1) \\ -x - y + 2z &= \ \ 6 \quad (E_2) \\ 3x + 2y + z &= -4 \quad (E_3) \end{cases}$$

Vamos a buscar un sistema equivalente pero que en las ecuaciones (E_2) y (E_3) no tenga x

$$(A)\begin{cases} 2x+y+z &= \ \ 2 \quad (E_1) \\ -x-y+2z &= \ \ 6 \quad (E_2) \\ 3x+2y+z &= -4 \quad (E_3) \end{cases} \rightarrow (A')\begin{cases} 2x+y+z &= \ \ 2 \quad (E_1) \\ -y+5z &= 14 \quad (E_2^{'}=2E_2+E_1) \\ y-z &= -14 \quad (E_3^{'}=2E_3-3E_1) \end{cases}$$

Por último, operando con las ecuaciones $E_2^{'}$ y $E_3^{'}$ vamos a obtener el tercer sistema equivalente, pero solo con una incógnita:

$$(A')\begin{cases} 2x+y+z &= \ \ 2 \quad (E_1) \\ -y+5z &= 14 \quad (E_2^{'}=2E_2+E_1) \\ y-z &= -14 \quad (E_3^{'}=2E_3-3E_1) \end{cases} \rightarrow (A'')\begin{cases} 2x+y+z &= \ \ 2 \quad (E_1) \\ -y+5z &= 14 \quad (E_2^{'}) \\ 4z &= 0 \quad (E_3^{''}=E_2^{'}+E_3^{'}) \end{cases}$$

La última ecuación nos da un resultado inmediato:

$$4z=0 \Leftrightarrow \boxed{z=0}$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$-y+5z=14 \Leftrightarrow -y+5(0)=14 \Leftrightarrow -y=14 \Leftrightarrow \boxed{y=-14}$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$2x+(-14)+0=2 \Leftrightarrow 2x=16 \Leftrightarrow \boxed{x=8}$$

El sistema tiene una única solución: $(x,y,z)=(8,-14,0)$

1.4 Clasificación de los sistemas lineales

Los sistemas pueden tener o no solución. Cuando un sistema tiene solución es **comptabile**. En este caso puede tener una única solución o infinitas. Cuando tiene una sola solución es **compatible determinado** y cuando tiene infinitas soluciones es **compatible indeterminado**. Cuando un sistema no tiene solución es **incompatible**.

Semanas 5 y 6
31/10 - 11/11

- Función exponencial, logarítmica y otras. Composición de funciones
- Trigonometría

Exponenciales y Logarítmicas

1.1 Función exponencial

Definición

Se llama *función exponencial* a toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = a^x \text{ donde } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Hay dos clases de funciones exponenciales:

1. Cuando $a > 1$. Se llaman *funciones exponenciales crecientes*.
2. Cuando $0 < a < 1$. Se llaman *funciones exponenciales decrecientes*.

Cositas importantes:

1. Sus gráficas están por encima del eje $x \to Im(f) = \mathbb{R}^+$
2. Cortan al eje y en el punto $(0, 1)$ ya que $a^0 = 1$ sea cualquiera a
3. Cuando $a > 1$ la función es estrictamente **creciente** y cuando $0 < a < 1$ es estrictamente **decreciente**
4. No repiten puntos de la imagen
5. Hay una fórmula para calcular el valor de $f(x)$:

$$f(x) = m \cdot a^x$$

   donde m es el valor de $f(0)$

1.2 Inversa de una función

Definición

Dada una función $f : A \to B$ se dice que su *inversa* es una función $g : B \to A$ tal que:

$$\text{si } f(a) = b \text{ entonces } g(b) = a \text{ (para toda } a \in A)$$

Para denotar que g es la inversa de f se escribe

$$g = f^{-1}$$

Definición (inyectividad)

Decimos que la función $f : A \to B$ es *inyectiva* si

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 \neq x_2$$

y para todo el dominio de f.

Definición (sobreyectividad)

Decimos que la función $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si su codominio es igual a su imagen.

$$B = Im(f)$$

Definición (biyectividad)

Decimos que la función $f : A \to B$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Para que una función sea inversible tiene que ser biyecitva. Esto nos garantiza que al aplicar la inversa no haya más de una imagen por punto del dominio

Teorema

Una función f es inversible si y solo si es biyectiva. **TODAS LAS FUNCIONES EXPONENCIALES SON BIYECTIVAS**

Propiedad

Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es una función inversible, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto al eje $y = x$.

1.3 Funciones logarítmicas

Considerando la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / f(x) = a^x$ con $a > 1$.
Esta función es inyectiva y sobreyectiva, por ende admite una inversa.

Definición (función logarítmica)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ a la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $g = f^{-1}$, se la denomina *función logarítmica en base a*.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / g(x) = log_a(x)$$

$$log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

1.3.1 Propiedades

En todos estos casos se supone que $a > 0$, $a \neq 1$ y $x, y > 0$.

1. $log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$
2. $log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$
3. $log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$
4. $log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$
5. $log_a x^n = n \cdot log_a x$
6. $a^{log_a x} = x$

1.3.2 log y ln

Las notaciones son las siguientes:

log para denotar al log_{10} (logaritmo en base 10)
ln para denotar al log_e (logaritmo natural)

1.3.3 Cambio de base

Se puede cambiar la base de un logatirmo de la siguiente manera:

$$\boxed{log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}}$$

Ejemplo:

$$log_4 32 = \frac{log_2 32}{log_2 4} = \frac{log_2 2^5}{log_2 2^2} = \frac{5 log_2 2}{2 log_2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Usando la calculadora:

$$log_4 32 = \frac{ln32}{ln4} = 2,5$$

1.4 ¿Como encontrar la inversa de una función?

Ejemplo:

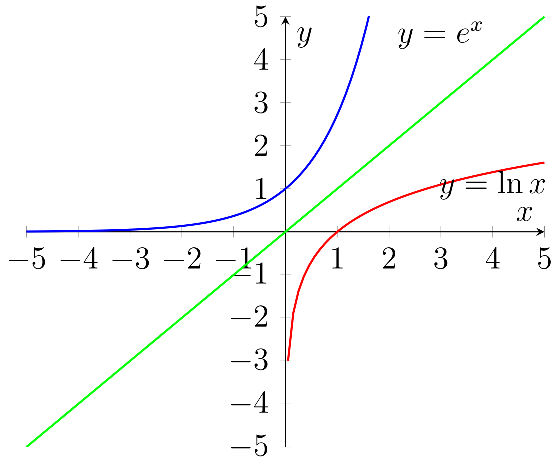
$$P = 100 \cdot 2^t$$

Hay que "despejar" t para poder encontrar la inversa de la función.

$$P = 100 \cdot 2^t \Leftrightarrow \frac{P}{100} = 2^t \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P}{100}\right) = \ln 2^t \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P}{100}\right) = t \ln 2$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{P}{100}\right)}{\ln 2}$$

1.5 Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$



Son simétricos respecto al eje $y = x$.

Propiedades de los **logaritmos naturales con base ¿ 1**:

1. El dominio de g es $\mathbb{R}^+$
2. Su conjunto imagen es $\mathbb{R}$
3. Es estrictamente creciente
4. La recta $x = 0$ es asíntota vertical de g
5. $g(x) = \ln x$ corta al eje de abscisas en $x = 1$

1.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ejemplo:

$$3^{2x-1} = \frac{1}{9}$$

Para resolverla hay distintas estrategias:

1. Usar propiedades de potencias para tener todo en una misma base

   $$3^{2x-1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^{-2}$$

   Como las bases son iguales, se igualan los exponentes:

   $$2x - 1 = -2$$

   por ende $x = -\frac{1}{2}$

2. Usar logaritmos:

   $$3^{2x-1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow log_3 3^{2x-1} = log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow (2x-1) log_3 3 = log_3 1 - log_3 9$$

   $$\Leftrightarrow (2x-1) = 0 - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Otras funciones elementales

1.1 Funciones homográficas

Las funciones homográficas son *funciones racionales* de la forma

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R} / f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde p y q son polinomios

Definición - Función homográfica

Se llama función homográfica a las funciones de la forma:

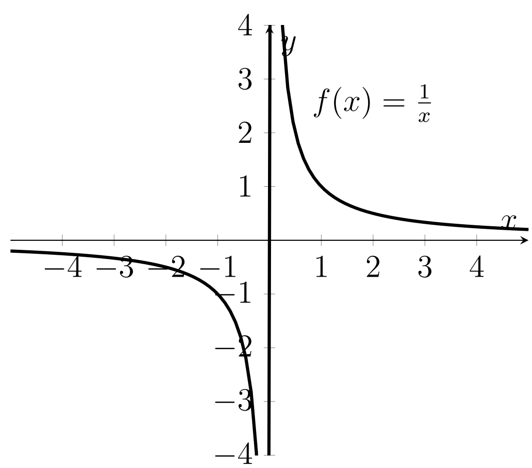
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ donde } c \neq 0 \text{ y } ad - bc \neq 0$$

El caso más elemental es cuando $a = d = 0$ y $b = c = 1$ y se llama *función identidad*.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Como el denominador no puede ser igual a 0, el dominio es:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - 0$$



La gráfica se conoce como *hipérbola* y tiene las siguientes características.

1. A medida que se acerca al 0, y es cada vez más grande
   Decimos que la función *tiende a más infinito* cuando x tiene a 0 desde la derecha:
   $$f(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to 0^+$$
   Decimos que la función *tiende a menos infinito* cuando x tiene a 0 desde la izquierda:
   $$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 0^-$$
   La función tiene *asíntota vertical* en $x = 0$.

2. Por otro lado, cuando x es cada vez más grande, y es cada vez más pequeño
   Decimos que la función *tiende a 0* cuando x tiene a $\pm\infty$:
   $$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \pm\infty$$
   La función tiene *asíntota horizontal* en $y = 0$.

Todas las funciones homográficas tienen las mismas características.

1. Sus gráficas son hipérbolas
2. Tienen asíntota vertical
3. Tienen asíntota horizontal

Si la función es:
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$
La asíntota horizontal es:
$$y = \frac{a}{c}$$
y la vertical es:
$$x = -\frac{d}{c}$$

1.2 Función módulo: $f(x) = |x|$

Desde el punto de vista funcional, podemos pensar en una función que a los números negativos se les asigna como imagen el valor absoluto de ese número, y a los positivos se les asigna el mismo número.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se puede desplazar la gráfica si se cambian los argumentos:
$$f(x) = |x - a| - b$$
a es la cantidad que cambia en el eje X y b es la cantidad que cambia en el eje Y.

1.3 Función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$

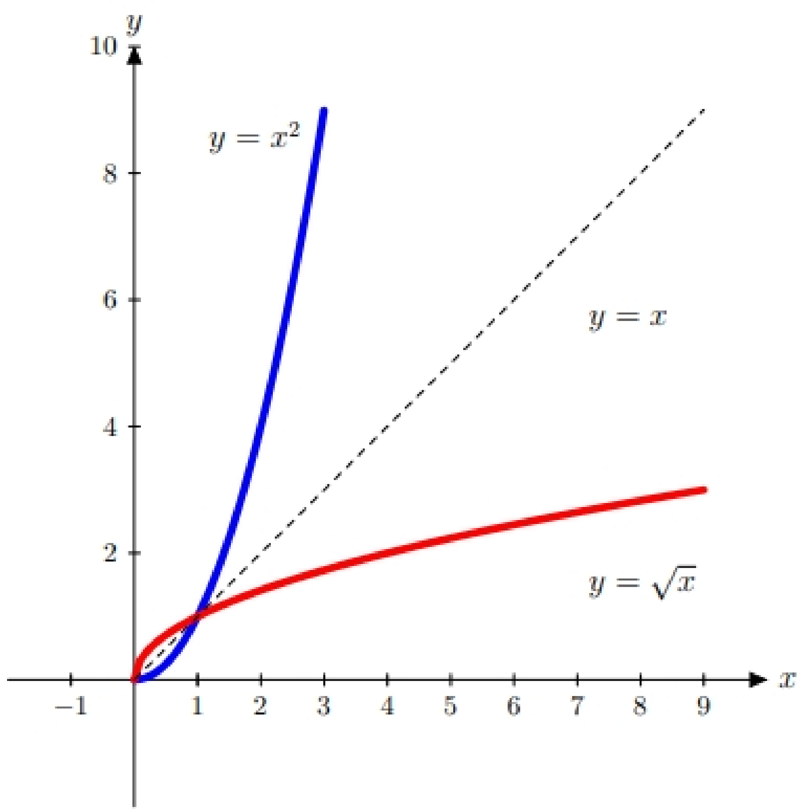
Vimos que x^2 no tiene inversa, ya que no es biyectiva.
Para hacer la función inversa, hay que cambiar el dominio. En vez de considerar todos los números reales, vamos a considerar los números positivos.

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^2$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Características:

1. Solo aplica a **números positivos** (su dominio es $\mathbb{R}_0^+$)
2. Sus imágenes son positivas
3. La gráfica se obtiene haciendo una simetría respecto al eje $y = x$ de la función x^2
4. Es estrictamente creciente en el intervalo $[0; +\infty)$



Composición de funciones

Definición

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, la composición de f y g es la función $g \circ f$ definida por:

$$g \circ f : A \to C/(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

No es necesario que el dominio de g sea igual al codominio de f, pero sí que la imagen de la función f esté contenida por el dominio de g.

$$Im(f) \subseteq Dom(g)$$

Ejemplo: determinar $f \circ g$ y $g \circ f$ de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = -2x + 6$.

1. Aplicamos la definición:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$x \to g(x) \to f(g(x)) = (g(x))^2 + 1$$
$$x \to (-2x + 6) \to (-2x + 6)^2 + 1$$

   por ende:

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 24x + 37$$

2. Haciendo lo mismo para el otro lado:

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/(g \circ f)(x) = -2x^2 + 4$$

1.1 La función identidad

Dado un conjunto cualquiera, la función que le asigne como imagen el mismo valor que el que recibe se llama función identidad y se denota por Id_A.

$$id_A : A \rightarrow A / id_A(x) = x$$

En los números reales la función es:

$$y = x$$

y su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Propiedad

Si $f : A \rightarrow B$ es una función biyectiva entonces se tiene que:

1. $f \circ f^{-1} : B \rightarrow B/(f \circ f^{-1})(x) = x$ es la función id_B
2. $f \circ f^{-1} : A \rightarrow A/(f^{-1} \circ f)(x) = x$ es la función id_A

1.2 Paridad e imparidad de una función

Se dice que un dominio D es **simétrico respecto del origen** si $x \in D$ y su opuesto, $-x$ también pertenece a D.

Definición - Función par

Sea una función definida en un conjunto simétrico respecto del origen. f es par si:

$$f(-x) = f(x) \;\; \forall x \in Dom(f)$$

Las gráficas de las funciones pares son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Ejemplo: La función $f(x) = \ln(x^4 - 16)$ es una función par:
La función está definida si

$$x^4 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^4 > 16 \Leftrightarrow |x| > \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x < -2 \text{ o bien } > 2$$

El dominio es:

$$Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

que es simétrico respecto del origen. Además:

$$f(-x) = \ln((-x)^4 - 16) = \ln(x^4 - 16) = f(x)$$

Definición - Función impar

Sea una función definida en un conjunto simétrico respecto del origen. f es impar si:

$$f(-x) = -f(x) \;\; \forall x \in Dom(f)$$

Las gráficas de las funciones impares son simétricas respecto del centro de coordenadas.

Ejemplo: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3$ es una función impar:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

1.3 Traslaciones verticales y horizontales

Las gráficas de una función se pueden trasladar verticalmente o horizontalmente. Esto se hace sumando o restando un número a la variable independiente o a la variable dependiente.

Sean f y $g(x) = x + k$, con $k \in \mathbb{R}$ dos funciones para que se pueda definir $f \circ g$ y $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + k$$

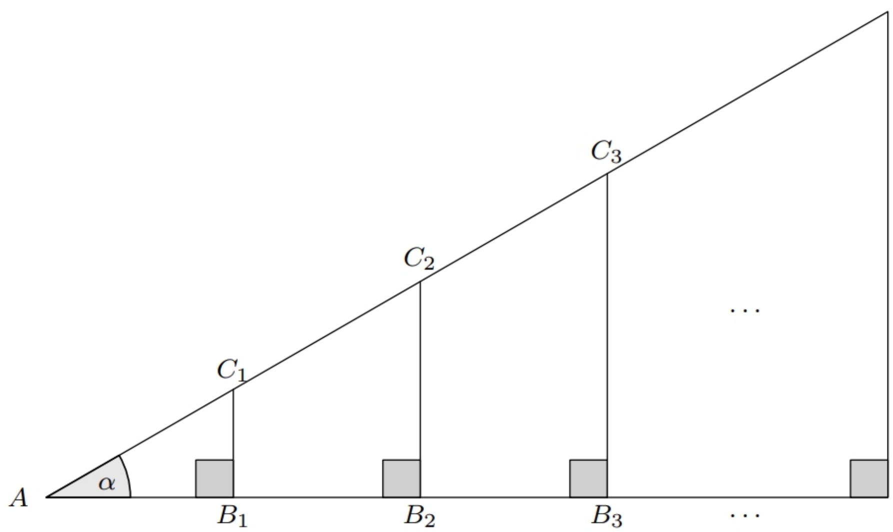
Es una traslación vertical de k unidades (hacia arriba si $k > 0$, o hacia abajo si $k < 0$)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + k)$$

Es una traslación horizontal de k unidades (hacia la derecha si $k < 0$, o hacia la izquierda si $k > 0$)

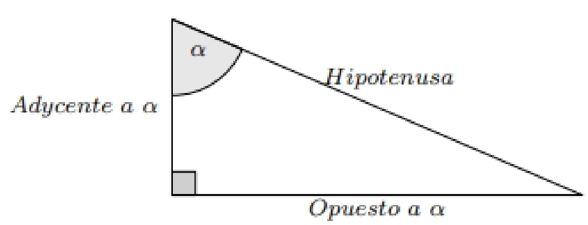
Trigonometría

1.1 Relaciones trigonométricas



Todos los tríangulos tienen el mismo ángulo agudo $\alpha°$.
Como todos los tríangulos respectivamente tienen igual medida, son **triángulos semejantes entre sí**. Es por esto que las razones entre los lados homólogos son iguales y solo dependen de la medida del $\angle A$

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \cdots = k$$



Definición

Dado un triángulo rectángulo donde uno de sus ángulos agudos es α, se definen las siguientes relaciones:

- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{cat. opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{cat. adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{cat. opuesto a } \alpha}{\text{cat. adyacente a } \alpha}$
- $\text{cotg}(\alpha) = \dfrac{\text{cat. adyacente a } \alpha}{\text{cat. opuesto a } \alpha}$
- $\sec(\alpha) = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente a } \alpha}$
- $\text{cosec}(\alpha) = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. opuesto a } \alpha}$

Observación *De la definición se tiene que:*

$$cosec(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. opuesto a } \alpha} = \frac{1}{\frac{\text{cat. opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}} = \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

También está:

$$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \quad y \quad cotg(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

1.2 Valores de las razones trigonométricas de algunos ángulos

1. $\sin(30°) = \frac{1}{2}$
2. $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\tan(30°) = \frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
4. $cosec(30°) = \frac{1}{sen(30°)} = 2$
5. $sec(30°) = \frac{1}{cos(30°)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
6. $cotg(30°) = \frac{1}{tg(30°)} = \sqrt{3}$

Lo mismo para 60°

1. $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos(60°) = \frac{1}{2}$
3. $\tan(60°) = \frac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
4. $cosec(60°) = \frac{1}{sen(60°)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
5. $sec(60°) = \frac{1}{cos(60°)} = 2$
6. $cotg(60°) = \frac{1}{tg(60°)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

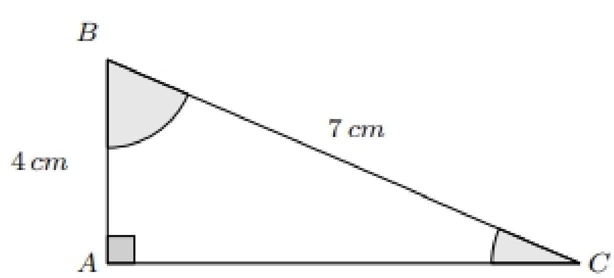
Y para 45°

1. $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\tan(45°) = \frac{\sin(45°)}{\cos(45°)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$
4. $cosec(45°) = \frac{1}{sen(45°)} = \sqrt{2}$
5. $sec(45°) = \frac{1}{cos(45°)} = \sqrt{2}$
6. $cotg(45°) = \frac{1}{tg(45°)} = 1$

1.3 Cálculo de los ángulos conociendo los lados de un triángulo rectángulo

Conociendo los lados de un triángulo rectángulo, se pueden calcular todos sus ángulos.

Por ejemplo:



Para calcular la medida de $\angle B$ se tiene que:

$$\cos(\angle B) = \frac{4}{7}$$

En la calculadora:

$$\boxed{SHIFT} + \boxed{cos} + \boxed{(4/7)}$$

da como resultado:

$$\angle B \approx 55,15^\circ$$

Y como $\angle B + \angle C = 90^\circ$ se tiene que:

$$\angle C = 90^\circ - 55,15^\circ = 34,85^\circ$$

1.4 Relación pitagórica

Esta relación nos permite relacionar el seno con el coseno de un mismo ángulo

Relación Pitagírica

En todo triángulo rectángulo y para cualquiera de sus ángulos se verifica que:

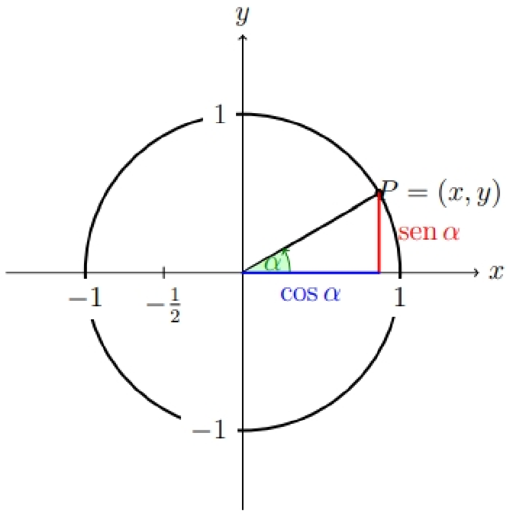
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Aplicando las definiciones de seno y coseno:

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= \frac{(\text{cat. opuesto a } \alpha)^2}{\text{hipotenusa}^2} + \frac{(\text{cat. adyacente a } \alpha)^2}{\text{hipotenusa}^2} \\
&= \frac{(\text{cat. opuesto a } \alpha)^2 + (\text{cat. adyacente a } \alpha)^2}{\text{hipotenusa}^2} \\
&= \frac{(\text{hipotenusa})^2}{\text{hipotenusa}^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

1.5 Circunferencia trigonométrica

Teniendo una circunferencia de radio 1, con centro en el origen de coordenadas, el punto P de coordenadas (x, y) sobre la circunferencia y en el primer cuadrante y el segmento OP que une el origen con P, se tiene que:



Como la circunferencia tiene radio 1,

$$sen(\alpha) = \frac{y}{1} = y,$$

es decir, el seno del ángulo está dado por la ordenada del punto P.
De forma similar,

$$cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x,$$

siendo el $cos(\alpha)$ la medida de la abscisa de P.

1.5.1 Ángulos importantes

Ángulo	0°	90°	180°	270°
$seno(y)$	0	1	0	-1
$coseno(x)$	1	0	-1	0

1.6 Algunas identidades importantes

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

$$sen(90° - \alpha) = cos(\alpha)$$

1.6.1 Paridad e imparidad del seno y coseno

Los ángulos ”positivos” son cuando los medimos en sentido antihorario, y los ”negativos” cuando los medimos en sentido horario.

$$cos(-\alpha) = cos(\alpha)$$

$$sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$$

1.6.2 Fórmulas de suma y resta

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha) \cdot cos(\beta) + cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$$

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$$

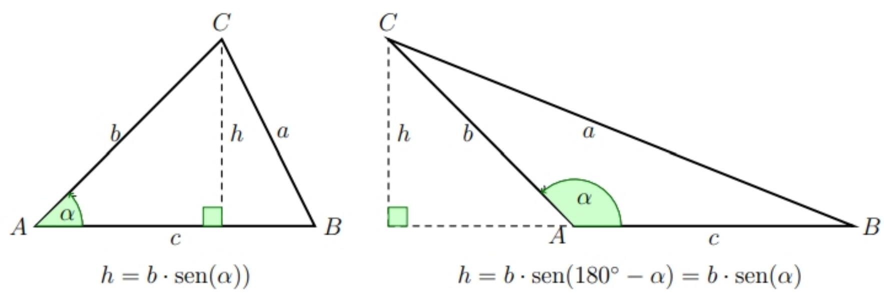
$$sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha) \cdot cos(\beta) - cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$$
$$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) + sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$$

1.6.3 Ángulos suplementarios

$$sen(180° - \alpha) = sen(\alpha)$$
$$cos(180° - \alpha) = -cos(\alpha)$$

1.7 Área de un triángulo

Sabiendo la medida de 2 de sus lados y un ángulo, se puede calcular el Área



Tanto si el triángulo es acutángulo como obtusángulo, tomando como "base" el lado $\overline{AB}$, la altura h es:

$$h = b \cdot sen(\alpha)$$

Como el área de un triángulo es $\frac{Base \cdot h}{2}$, el área del triángulo $\triangle ABC$ es:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} bc sen(\alpha)$$

donde α es el ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$

1.8 Teoremas del seno y del coseno

Estos teoremas nos permiten relacional las medidas de los lados y ángulos de un triángulo cualquiera. Generalizan la trigonometría a triángulos que no son necesariamente rectángulos

Teorema del Seno

En todo tríangulo $\triangle ABC$ se verifica que

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

Si además consideramos la circunferencia que inscribe al $\triangle ABC$, se verifica que

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)} = 2r$$

Teorema del Coseno

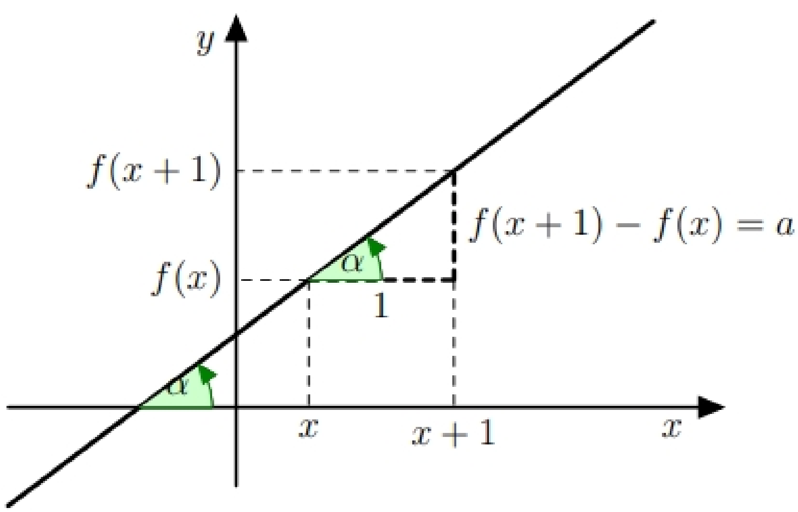
En todo triángulo $\triangle ABC$ se verifica que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\angle A)$$

1.9 Pendiente de una recta

Sea $f(x) = ax + b$ una función lineal. La pendiente nos indica la variación de la función cuando la variable independiente aumenta en 1 unidad. La pendiente de la recta es:

$$f(x+1) - f(x) = a \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



Por la definición de tangente se tiene que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma con el semieje positivo de las abscisas:

$$\boxed{a = tan(\alpha)}$$

Semanas 7 y 8
14/11 - 25/11

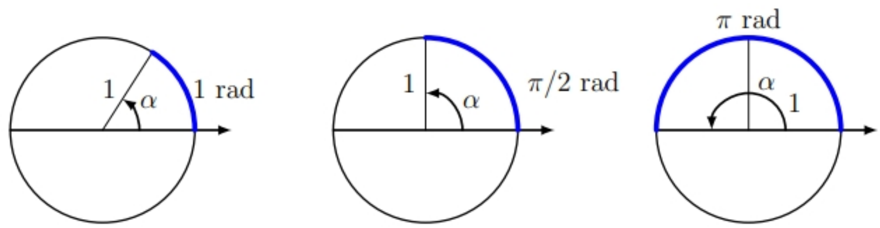
- Funciones trigonométricas
- Vectores, estática, cinemática

Funciones trigonométricas

1.1 Radianes

Definición

Un ángulo cualquiera α y la circunferencia de radio 1 con centro el vértice de α, se llaman *radianes* a la longitud del arco que forma el ángulo α con la circunferencia.



$$360^\circ = 2\pi rad \Rightarrow 1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$$

Grados	**Radianes**
360°	$2\pi rad$
180°	πrad
90°	$\frac{\pi}{2}rad$
60°	$\frac{\pi}{3}rad$
45°	$\frac{\pi}{4}rad$
30°	$\frac{\pi}{6}rad$
$57,3^\circ$	$1rad$
0°	$0rad$

1.2 Funciones periódicas

Definición

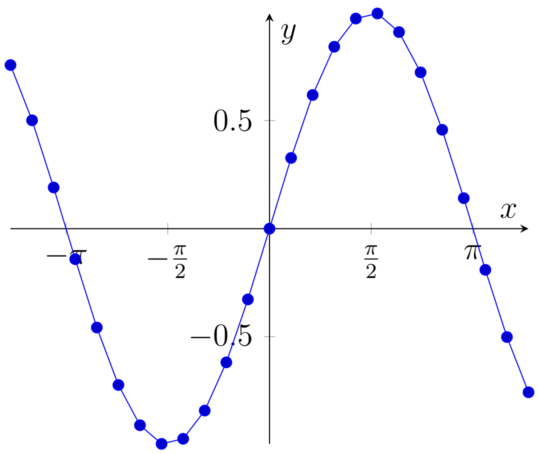
Decimos que una función f es *periódica* con *período* T, si para toda x del dominio de f, se verifica que $x+T$ también pertenece al dominio de f y además

$$f(x) = f(x+T)$$

Ejemplo: Las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ son periódicas con período 2π.

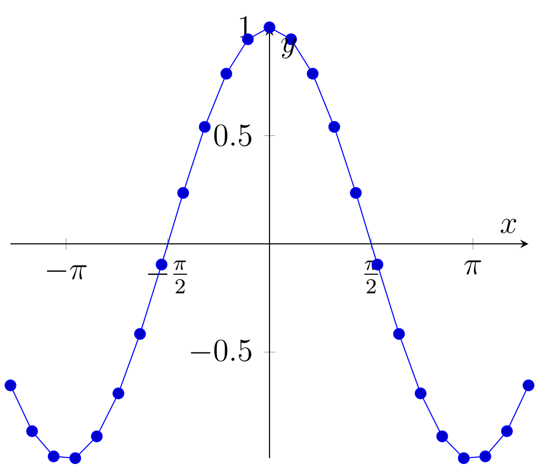
1.3 Gráficas de Seno, Coseno y Tangente

Seno :



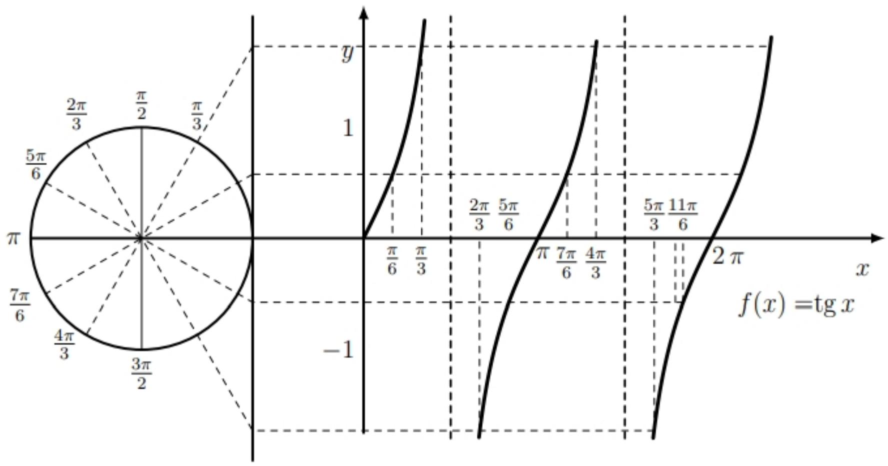
$$C_0 = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Coseno :



$$C_0 = \{(2k+1)\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$Tangente:$$



$$C_0 = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

1.4 Función Sinusoidal

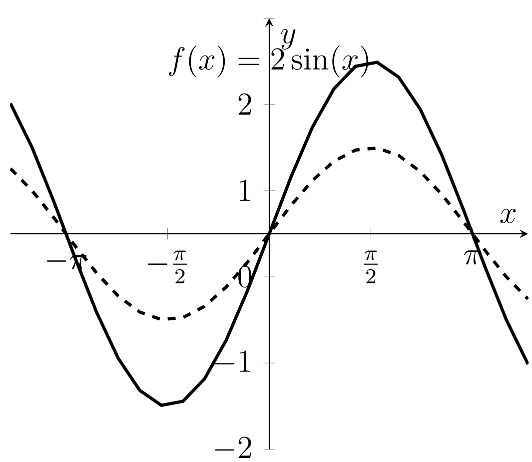
Definición

La función *sinusoidal* es toda función que cumpla:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a \sin(bx + c)$$

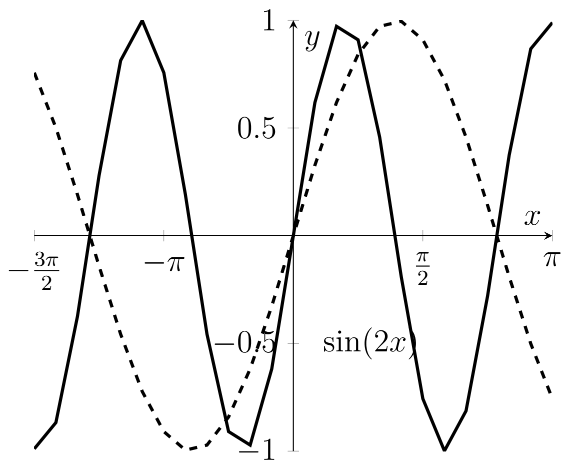
donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y además $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Si cambiamos el valor de a, cambiamos la **amplitud** de la función, que cambia el valor máximo y mínimo de la función.



Si cambiamos el valor de b, cambiamos la **período** de la función, que cambia la cantidad de veces que se repite la función en un intervalo.

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$



Por último, el número c se conoce como *fase inicial* de la función
Considerando la función:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a \sin(bx + c)$$

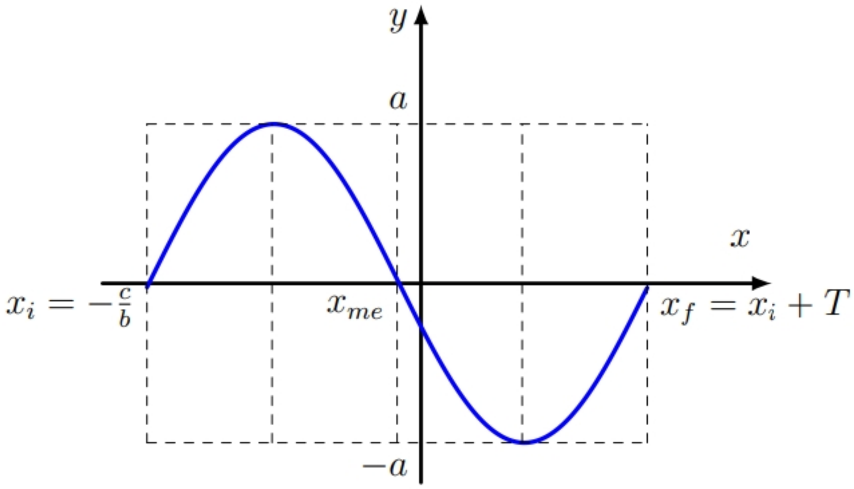
supongamos que $a > 0$. Para graficarla podemos seguir los siguientes pasos

1. Su amplitud, a, nos indica el valor máximo y mínimo de la función. Por lo tanto, el eje y se extiende desde $-a$ hasta a.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b}$. Este valor, x_i, es el "inicio" de la onda.

3. Calculamos el período $T = \frac{2\pi}{|b|}$ y determinamos el "final" de la onda: $x_f = x_i + T$ (una onda "termina" donde "empiza la siguiente").
   Estos cuatro números $a, -a, x_i$ y x_f determinan un rectángulo donde se inscribe la onda.

4. En el punto medio entre x_i y x_f, $x_{me} = \frac{x_i + x_f}{2}$, la función vale 0. Y en los puntos medios entre x_i y x_{me}, y entre x_{me} y x_f la función alcanza sus valores máximos y mínimos, respectivamente.



1.5 Inversas de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas no son inyectivas. Ninguna función periódica es inyectiva, porque siempre hay dos valores de x que dan el mismo valor de y.
Pero podemos restringir el dominio para que sean inyectivas.

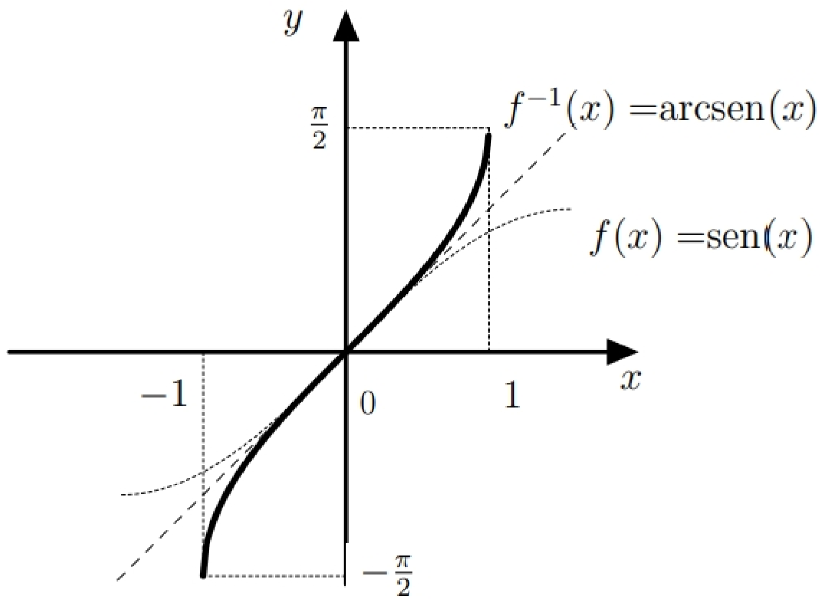
1.5.1 Función Arco Seno

Definimos la función seno como:

$$\text{sen}: \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right] \to [-1, 1]$$

Es biyectiva, por lo que admite una inversa. *arco seno*

$$\text{arcsen}: [-1, 1] \to \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$



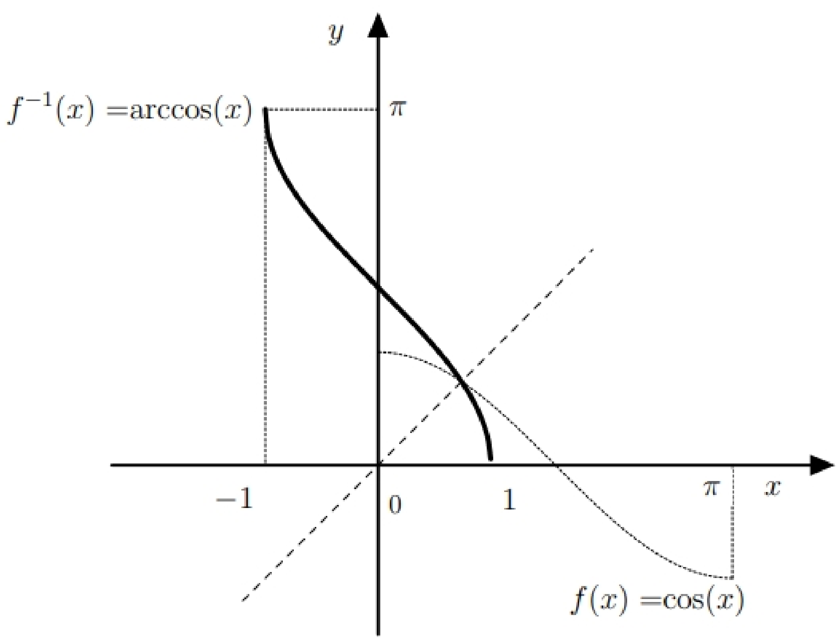
1.5.2 Función Arco Coseno

De la misma manera, definimos la función coseno como:

$$\cos: \ [0, \pi] \to [-1, 1]$$

Es biyectiva, por lo que admite una inversa. *arco coseno*

$$\text{arccos}: \ [-1, 1] \to [0, \pi]$$



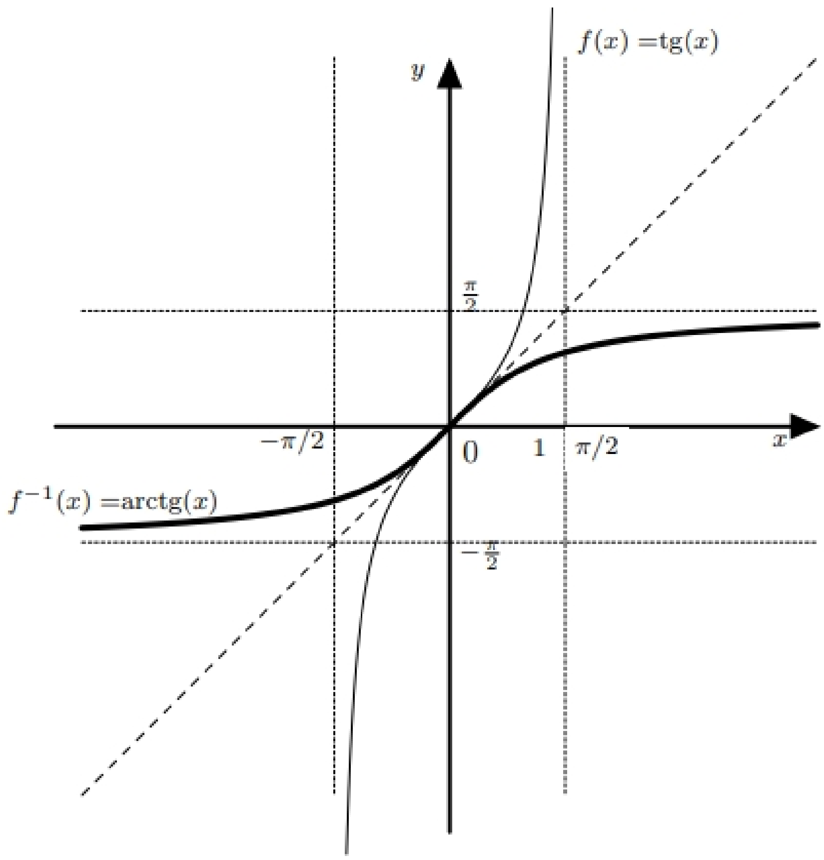
1.5.3 Función Arco Tangente

De la misma manera, definimos la función tangente como:

$$\tan : \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}$$

Es biyectiva, por lo que admite una inversa. *arco tangente*

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$



Las rectas $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ son asíntotas horizontales de la gráfica

1.6 Ecuaciones trigonométricas

Tienen infinitas soluciones porque son periódicas.

Ejemplo: Resolver la ecuación

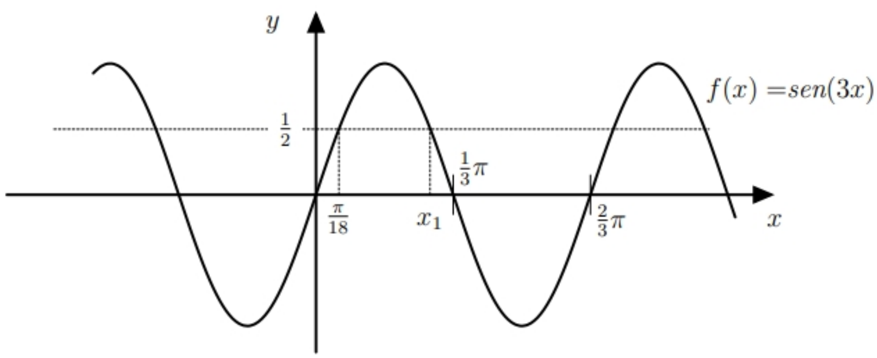
$$sen(3x) = \frac{1}{2}$$

Solución:
Para $3x$ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ tenemos:

$$sen(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = arcsen\frac{1}{2}$$
$$3x = \frac{1}{6}\pi$$
$$x = \frac{1}{18}\pi$$

Esta es una de las soluciones. Por otro lado, $f(x) = sen(3x)$ es una onda que tiene una amplitud de 1 y período $T = \frac{2}{3}\pi$. La recta $y = \frac{1}{2}$ cruza a la onda en $x = \frac{1}{18}\pi$ y en $x = \frac{1}{18}\pi + T$.

Mirando la gráfica, podemos ver que dentro de un período hay 2 soluciones: $x_0 = \frac{\pi}{18}$ y x_1:



Para sacar x_1 vamos a usar las simetrías de la gráfica. La distancia de x_1 a $\frac{1}{3}\pi$ es igual que la distancia de $\frac{\pi}{18}$ al origen.

$$\frac{1}{3}\pi - x_1 = \frac{1}{18}\pi \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{5}{18}\pi}$$

Con estas dos soluciones, y teniendo en cuenta el período de la función:

$$\boxed{x = \frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \quad x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \quad con \;\; k \in \mathbb{Z}}$$

Física

1.1 Vectores

Para las magnitudes vectoriales (ejemplo: velocidad), no basta con saber su magnitud, sino que también es necesario saber su **dirección y sentido**. Para esto se utilizan los vectores.
Para medirlos se necesita un número real, llamado **cantidad** y un símbolo que define la unidad.

UNIDADES BÁSICAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL		
Magnitud Física	**Unidad**	**Símbolo**
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de materia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd
Ángulo plano	radian	rad
Ángulo sólido	estereorradian	sr

UNIDADES DERIVADAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL				
Magnitud	**Nombre**	**Símbolo**	**Derivadas**	**Básicas**
Frecuencia	Hertz	Hz		s^{-1}
Fuerza	Newton	N		mkgs^{-2}
Presión	Pascal	Pa	N/mˆ2	mkgs^{-2}
Energía	Joule	J	Nm	m^2kgs^{-2}
Potencia	Watt	W	J/s	m^2kgs^{-3}
Carga eléctrica	Coulomb	C		sA
Tensión eléctrica	Volt	V	W/A	$m^2kgs^{-3}A^{-1}$
Resistencia eléctrica	Ohm	Ω	V/A	$m^2kgs^{-3}A^{-2}$
Conductancia eléctrica	Siemens	S	A/V	$m^{-2}kgs^3A^2$
Capacitancia	Farad	F	C/V	$m^{-2}kgs^4A^2$
Flujo magnético	Weber	Wb	Vs	$m^2kgs^{-2}A^{-1}$
Inductancia	Henry	H	Wb/A	$m^2kgs^{-2}A^{-2}$
Inducción magnética	Tesla	T	Wb/mˆ2	$kgs^{-2}A^{-1}$
Flujo luminoso	Lumen	lm		$cdsr$
Intensidad luminosa	Lux	lx	lm/mˆ2	$cdsr^{-2}$
Temperatura Celcius	Grados Celsius	$^\circ$ C		K

Los prefijos para la formación de múltiplos y submúltiplos de las unidades básicas son los siguientes:

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{-6}	micro	μ
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m

Unidades de longitud, fuerza, capacidad, área y volumen:

Unidades de longitud						
kM	hM	daM	m	dM	cM	mM

Unidades de fuerza				
kN	daN	N	dN	mN

Unidades de capacidad						
kL	hL	daL	L	dL	cL	mL

Unidades de área						
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Unidades de volumen						
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

1.1 Vectores geométricos

Definición

Se le dice **vector** a todo segmento orientado. El primer punto es el *origen* y el otro es el **extremo**.

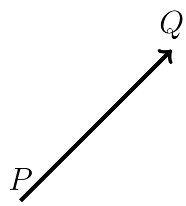


Figura: Vector $\overrightarrow{PQ}$

Dos vectores son **paralelos** cuando tienen la misma dirección. La dirección está dada por la recta que contiene al vector. El sentido está dado por el origen y el extremo.

Módulo de un vector

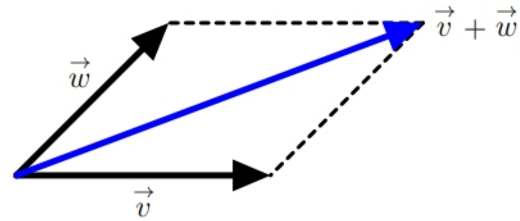
Se llama **módulo** de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. al módulo de un vector $\vec{v}$ se lo denota como:

$$||\vec{v}\,||$$

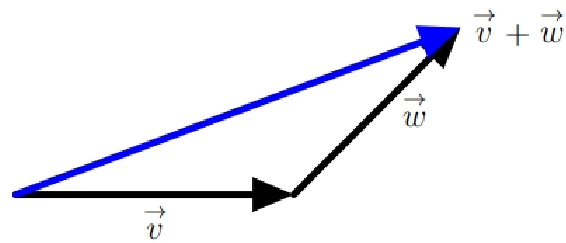
Vectores equivalentes

Dos vectores son **equivalentes** cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Para la suma de vectores se puede aplicar la **"regla del paralelogramo"**: dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con origen en el mismo punto, se hace un paralelogramo trazando por el extremo de $\vec{w}$ una paralela a $\vec{v}$ y también del otro lado. La suma ("resultante") es el vector que tiene su origen en el mismo punto que los otros dos y su extremo en el punto de intersección de las dos paralelas.



Simplificando:



Para sumar más vectores, hay que poner al siguiente de manera que el origen sea el extremo del anterior.
Según la regla anterior puede ocurrir que al sumar vectores el origen del primero de ellos coincida con el extremo del último:

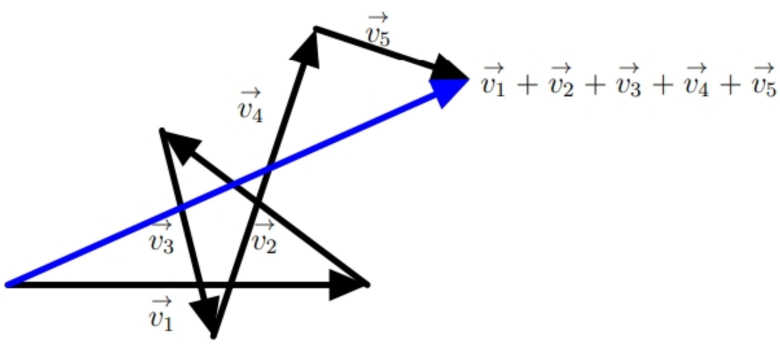
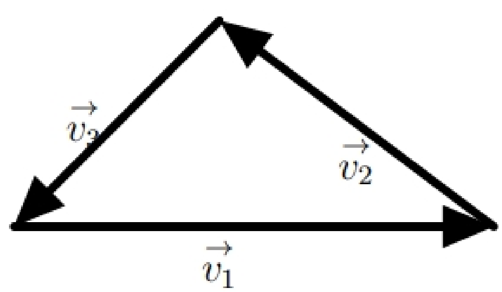


Figura 1.4: Regla de la poligonal.



Vector nulo y opuesto de un vector

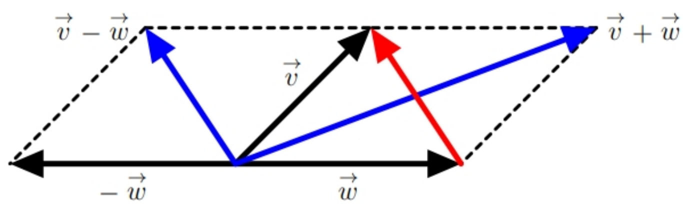
Un **vector nulo** es todo aquel que tiene módulo 0. Geométricamente es un punto y por eso no tiene ni sentido ni dirección.
El **vector opuesto** de un vector $\vec{v}$ es el vector $-\vec{v}$ que tiene el mismo módulo y dirección que $\vec{v}$ pero sentido contrario.

Propiedades de la suma de vectores:

1. Es asociativa:
$$\left(\vec{v_1}+\vec{v_2}\right)+\vec{v_3}=\vec{v_1}+\left(\vec{v_2}+\vec{v_3}\right)$$
2. Es conmutativa: $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
3. El vector nulo respecto a la suma: $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$
4. $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

Resta de vectores

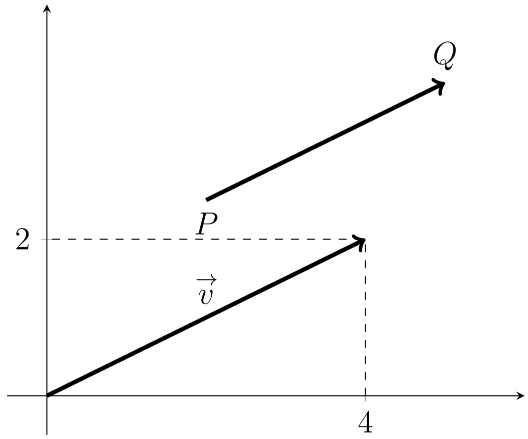
Se llama **diferencia** $\vec{v}-\vec{w}$ de dos vectores, a la suma de un vector $\vec{v}$ y el opuesto de $\vec{w}$. Es decir,
$$\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$$



Producto de un vector por un escalar

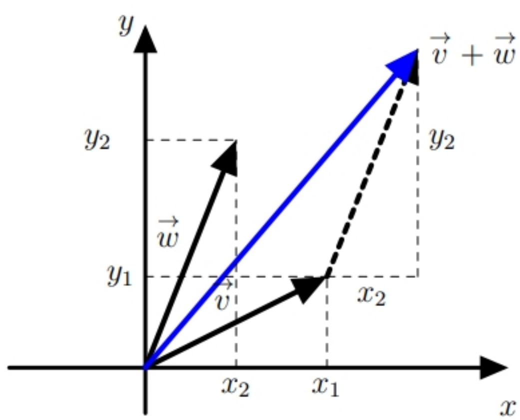
El **producto** de un vector $\vec{v}$ por un escalar k es el vector $k\,\vec{v}$ que tiene el mismo sentido y dirección que $\vec{v}$ pero módulo $|k|$ veces mayor. Si $k>0$, el sentido es el mismo de $\vec{v}$, pero si $k<0$, el sentido es el contrario al de $\vec{v}$
Además, si $k=0$ o $\vec{v}=\vec{0}$, entonces $k\,\vec{v}=\vec{0}$

1.2 Vectores en el plano



Las coordenadas de $\vec{PQ}$ son las coordenadas del extremo de $\vec{v}$, es decir (4,2). Se escribe: $\vec{PQ}= (4, 2)$
Viendo los vectores en el sistema de coordenadas, es mucho más fácil.
Considerando los vectores $\vec{v}= (x_1, y_1)$ y $\vec{w}= (x_2, y_2)$, la suma está dada por:

$$\vec{v} + \vec{w}= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



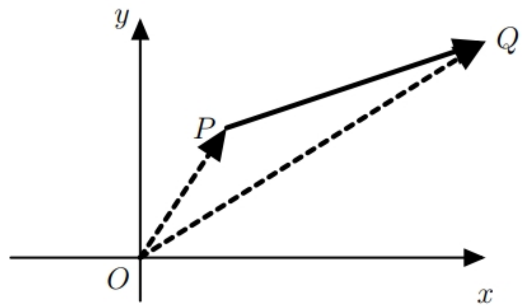
Si $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$k\ \vec{v}= (k \cdot x_1, k \cdot y_1)$$

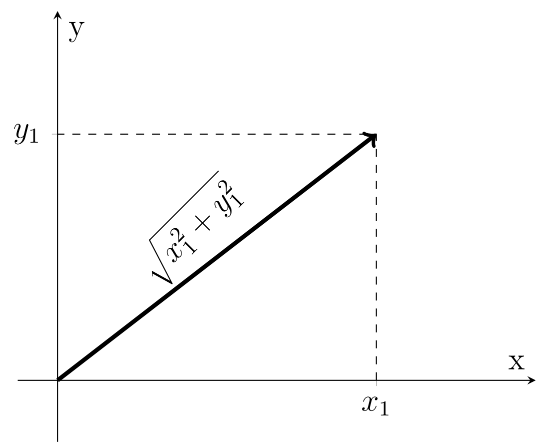
Si P y Q son dos puntos en el plano, para obtener los componentes del vector $\vec{PQ}$, solo hay que hacer:

$$\vec{OP} + \vec{PQ}=\vec{OQ}$$

$$\vec{PQ}=\vec{OQ} - \vec{OP}$$



1.3 Módulo de un vector



Si $\vec{v}=(x_1,y_1)$, entonces, según el Teorema de Pitágoras, $||\vec{v}\,||=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

Propiedad de la longitud de un vector:

1. $||k\ \vec{v}\ || = |k|{\cdot}||\vec{v}\ ||$
2. (Desigualdad triangular) $||\vec{v}+\vec{w}\ ||\leq ||\vec{v}\ ||+||\vec{w}\ ||$

Vector unitario

Un vector es **unitario** o un **versor** si tiene módulo 1.
Normalizar un vector no nulo es encontrar otro vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que el vector dado.

Para normalizar un vector $\vec{v}$ debemos encontrar otro vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w}=k\ \vec{v}$ con $k\in\mathbb{R}$ y $||\vec{w}\ ||=1$. Teniendo en cuenta que:

$$1=||\vec{w}\ ||=||k\cdot\ \vec{v}\ ||=|k|{\cdot}||\vec{v}\ ||$$

resulta que el k necesario tiene que ser:

$$|k| = \frac{1}{||\vec{v}\,||}$$

Para que conserve el sentido, vamos a ir con:

$$k = \frac{1}{||\vec{v}\,||}$$

Ejemplo: queremos normalizr el vector $\vec{v} = (1, 3)$. Primero calculamos el módulo:

$$||\vec{v}\,|| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Ahora, calculamos el $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Vectores $\vec{i}\,, \vec{j}$

$$\vec{i} = (1, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1)$$

Ejemplo: Si $\vec{v} = 3\,\vec{i}\, + 4\,\vec{j}$, entonces $\vec{v} = 3(1, 0) + 4(0, 1) = (3, 4)$

1.4 Producto escalar

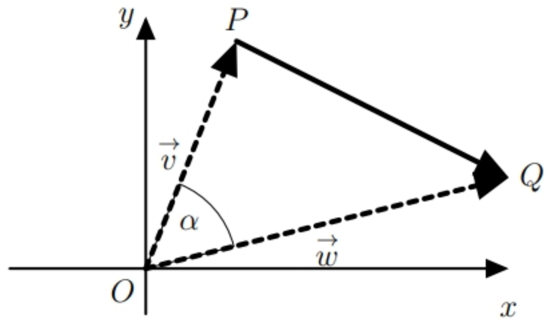
Nueva operación: $\mathbb{R}^2$, el producto escalar. Nos va a dar como resultado un escalar, el ángulo.

Definición - Producto escalar

Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el *producto escalar* entre estos vectores es:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{v} = 0 \text{ o } \vec{w} = 0 \\ ||\vec{v}\,|| \cdot ||\vec{w}\,|| \cdot \cos\alpha & \text{si } \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ no son nulos} \end{cases}$$

Donde α es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.



Considerando el triángulo anterior (P, Q y O), tenemos que, mediante el teorema del coseno:

$$||\vec{PQ}\,||^2 = ||\vec{v}\,||^2 + ||\vec{w}\,||^2 - 2 \cdot ||\vec{v}\,|| \cdot ||\vec{w}\,|| \cdot \cos\alpha$$

Como $\vec{PQ} + \vec{v} = \vec{w}$, $\vec{PQ} = \vec{w} - \vec{v}$ y teniendo en cuenta que $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot ||\vec{v}\,|| \cdot ||\vec{w}\,|| \cdot \cos\alpha &= ||\vec{v}\,||^2 + ||\vec{w}\,||^2 - ||\vec{PQ}\,||^2 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - ((w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2) \\ &= 2v_1w_1 + 2v_2w_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2}$$

Ejemplo: Determinar el ángulo entre los vectores $\vec{v} = (-1, 4)$ y $\vec{w} = (3, 2)$

$$(-1, 4)(3, 2) = ||(-1, 4)|| \cdot ||(3, 2)|| \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow -3 + 8 = \sqrt{17}\sqrt{13}\cos\alpha$$

$$\frac{5}{\sqrt{221}} = \cos\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 70,35^\circ}$$

Teorema

Dos vectores no nulos son **perpendiculares** si y solo si su producto escalar es igual a 0

Vectores ortogonales

Dos vectores son **ortogonales** si su producto escalar es cero.
El vector nulo es ortogonal a todos los demás vectores.

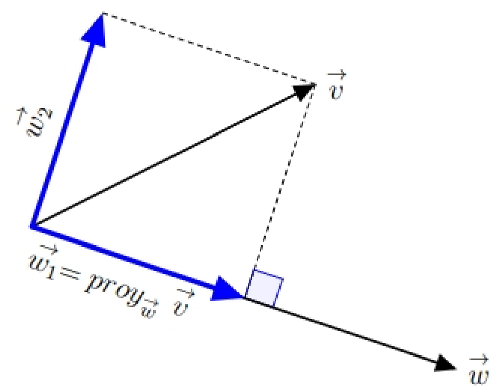
Propiedades del producto escalar:

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $k(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (k\,\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\,\vec{w})$
4. $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$

1.5 Proyección ortogonal

Teniendo dos vectores, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, hay que determinar $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$, tal que:

1. $\vec{v}=\vec{w_1}+\vec{w_2}$
2. $\vec{w_1}\,||\vec{w}$
3. $\vec{w_1}\perp\vec{w_2}$



El vector $\vec{w_2}$ es la *componente vectorial de* $\vec{v}$ *ortogonal a* $\vec{w}$.

Como los vectores $\vec{w_1}$ y $\vec{w}$ son paralelos, existe un escalar $k\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{w_1}= k\cdot\vec{w}$. Por lo tanto, para determinar la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$, tenemos que calcular k. Empezaremos por la definición $\vec{v}$:

$$\vec{v}=\vec{w_1}+\vec{w_2}$$

$$\vec{v}= k\cdot\vec{w}+\vec{w_2}$$

Multiplicando ambos miembros por $\vec{w}$ y teniendo en cuenta que $\vec{w}\perp\vec{w_2}$ (multiplicarlos es igual a 0):

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (k\cdot\vec{w}+\vec{w_2})\cdot\vec{w}\\
\vec{v}\cdot\vec{w} &= (k\cdot\vec{w})\cdot\vec{w}+(\vec{w_2}\cdot\vec{w})\\
\vec{v}\cdot\vec{w} &= k\cdot(\vec{w}\cdot\vec{w})+0\\
\vec{v}\cdot\vec{w} &= k\cdot||\vec{w}||^2
\end{aligned}$$

Por ende:

$$k=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}^{\,2}}{||\vec{w}||}$$

y, finalmente

$$\boxed{\vec{w}_1 = \text{proy}_{\vec{w}}\ \vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{w}\,||^2}\cdot\vec{w}}$$

Vamos a sacar el módulo del vector proyección:

$$||\text{proy}_{\vec{w}}\ \vec{v}\ || = \left\|\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{w}\,||^2}\cdot\vec{w}\right\| = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}\,|}{||\vec{w}||^2}\cdot||\vec{w}\,|| = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}\,|}{||\vec{w}\,||}$$

$$||\text{proy}_{\vec{w}}\ \vec{v}\ || = ||\vec{v}\ ||\cdot|\cos\alpha|$$

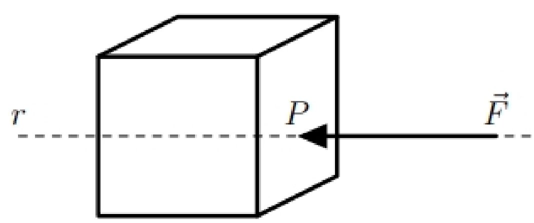
1.6 Aplicaciones matemáticas a la estática

Nociones elementales de estática

Concepto de fuerza

La **fuerza** es la acción ejercida sobre un cuerpo que cambia su forma y/o estado cinemático. Su efecto depende de la instensidad, dirección, sentido y punto de aplicación.
La unidad que se usa para medir la intensidad (módulo) de una fuerza es *Newton* (N).

Al conjunto de dos o más fuerzas sobre un cuerpo se le llama **sistema de fuerzas**.

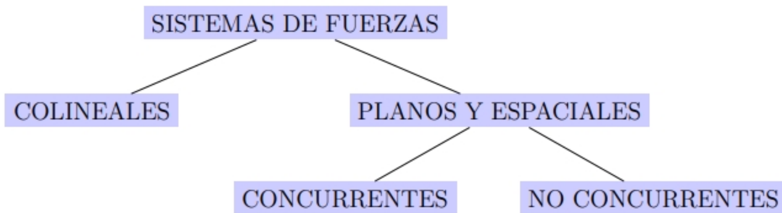


- $|\vec{F}\,|$: Intensidad
- r: Recta de acción (dirección)
- Flecha: Sentido
- P: Punto de aplicación

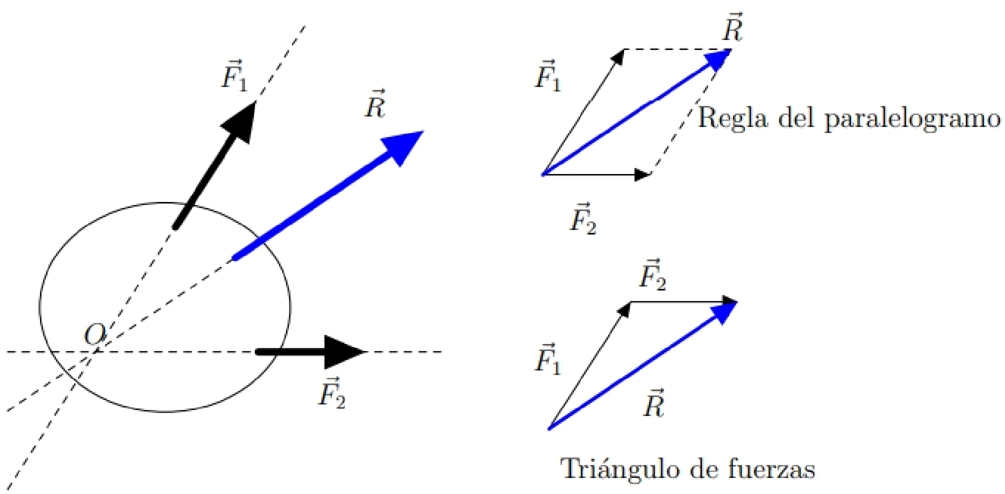
Definición

Un *punto material o partícula* es el cuerpo que se está tratando como si fuese un punto geométrico, sin dimensión.

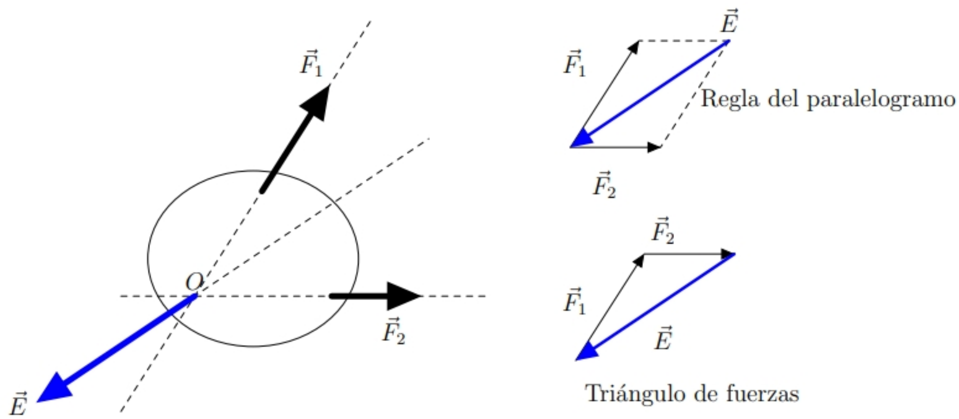
Un sistema de fuerzas plano o espacial se llama *concurrente* si las rectas de acción de todas las fuerzas pasan por el mismo punto. De lo contrario, es *no concurrente*.



Sistemas planos de fuerzas concurrentes Si el sistema está constituido por dos fuerzas y sus rectas de acción pasan por el mismo punto, puede ser reducido a un sistema de una fuerza, cuya recta pasa por el mismo punto que compartían las otras dos fuerzas y se determina por la regla del paralelogramo.



Para **equilibrar** este sistema, hay que agregarle una fuerza de igual intensidad (igual módulo), igual recta de acción y sentido opuesto a la fuerza $\overrightarrow{R}$. La vamos a llamar *equilibrante* $\overrightarrow{E}$



Descomposición de una fuerza según dos direcciones concurrentes con ella.
Se puede descomponer una fuerza con la regla del paralelogramo, siempre y cuando las 3 direcciones concurran a un mismo punto.
Si las direcciones son perpendiculares, se puede asociar un sistema de referencias ortogonal en donde la fuerza $\vec{F}$ se descomponga en las proyecciones de la misma sobre cada uno de los ejes coordenados.

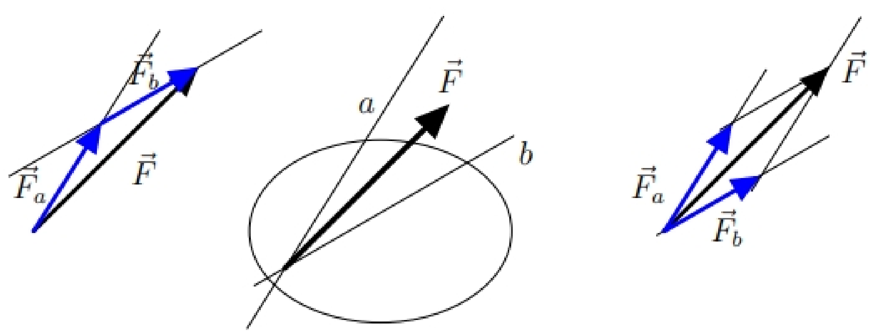


Figura 1.18: Descomposición de $\vec{F}$ en las direcciones de a y b.

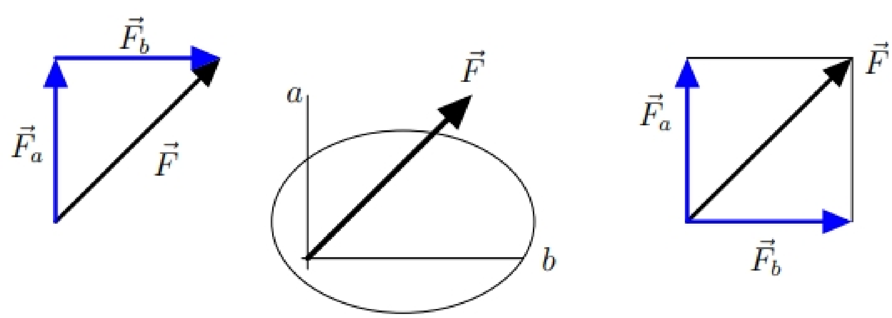


Figura 1.19: Descomposición de $\vec{F}$ en direcciones perpendiculares.

Resolución analítica de sistemas planos de fuerzas

Con un sistema caresiano de ejes XY, el vector de una fuerza puede ser indicado por su intensidad y el ángulo α que forma con el eje X. Su notación será $\vec{F}= (F, \alpha)$.

La expresión cartesiana de la fuerza $\vec{F}$ resulta de analizar la proyección de la misma sobre cada uno de los ejes. La expresión analítica de una fuerza $\vec{F}= (F, \alpha)$ en un sistema cartesiano será:

$$\vec{F}\,(x, y) = (F, \alpha) = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} = (F\cos\alpha)\,\vec{i} + (F\sin\alpha)\,\vec{j} = (F_x, F_y)$$

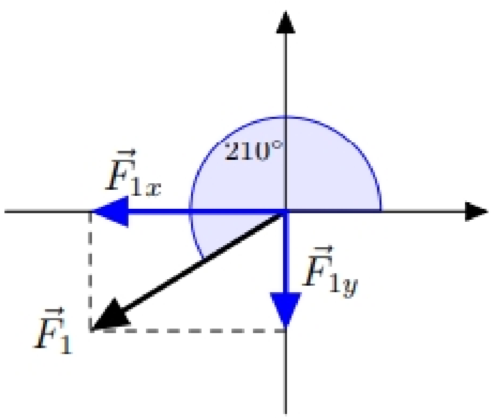
$\mathbf{F} = ||\vec{\mathbf{F}}\,||$

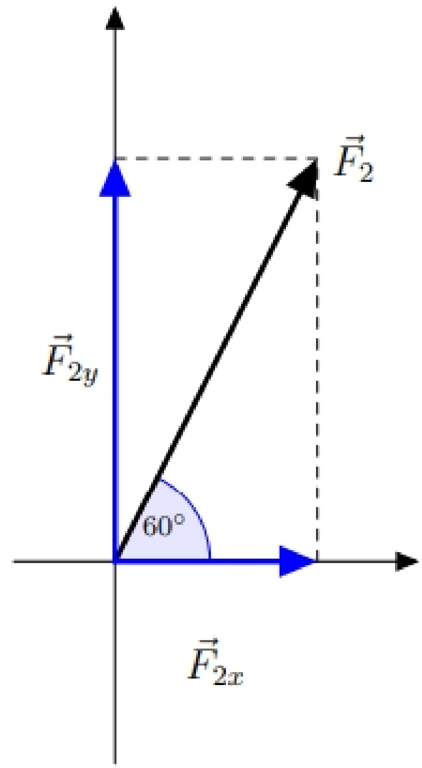
Ejemplo: Dado el sitema de ejes cartesianos xy y las fuerzas: $\vec{F_1}\ (0, 0) = (10N, 210°)$ y $\vec{F_2}\ (0, 0) = (20N, 60°)$ determinen su expresión cartesiana.
Resolución:
Consideramos el módulo y ángulo de $\vec{F_1}$ para determinar sus proyecciones sobre los ejes:

$$\vec{F_1} = F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} = (10\cos 210°)\,\vec{i} + (10\cos 210°)\,\vec{j} = -5\sqrt{3}N\,\vec{i} - 5N\,\vec{j} = (-5\sqrt{3}, -5)N$$

Por otro lado, hacemos lo mismo con las proyecciones de $\vec{F_2}$:

$$\vec{F_2} = F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} = (20\cos 60°)\,\vec{i} + (20\sin 60°)\,\vec{j} = 10N\,\vec{i} + 10\sqrt{3}N\,\vec{j} = (10, 10\sqrt{3})N$$





Ecuaciones generales de equilibrio

Para que un sistema plano de fuerzas concurrentes esté en equilibrio es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = 0 \quad \text{(ecuación de proyección sobre } x\text{)}$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i = 0 \quad \text{(ecuación de proyección sobre } y\text{)}$$

Ejemplo: Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes, comprobar analíticamente el equilibrio.

$$\overrightarrow{F_1}= (5N, 270^\circ) \quad \overrightarrow{F_2}= (\sqrt{52}N, 146,3^\circ) \quad \overrightarrow{F_3}= (7N, 0^\circ) \quad \overrightarrow{F_4}= (\sqrt{2}N, 135^\circ)$$

Resolución:
Se plantean las dos ecuaciones de proyección, sobre los ejes x e y:

$$\sum_{i=1}^{4} F_{ix} = \sum_{i=1}^{4} F_i \cos\alpha_i = 5N\cos 270^\circ + \sqrt{52}N\cos 146,3^\circ + 7N\cos 0^\circ + \sqrt{2}N\cos 135^\circ$$

$= 0N - 6N + 7N - 1N = 0N$

$$\sum_{i=1}^{4} F_{iy} = \sum_{i=1}^{4} F_i \sin \alpha_i = 5N \sin 270^\circ + \sqrt{52}N \sin 146,3^\circ + 7N \sin 0^\circ + \sqrt{2}N \sin 135^\circ$$

$= 5N + 4N + 0N + 1N = 0N$

Ambas ecuaciones son iguales a cero, por lo que el sistema está en equilibrio.

1.7 Cinemática del punto material

Los problemas que resuelve la cinemática son, fundamentalmente, determinar la posición, desplazamiento, velocidad y aceleración de un objeto en función del tiempo.

1.7.1 Movimiento

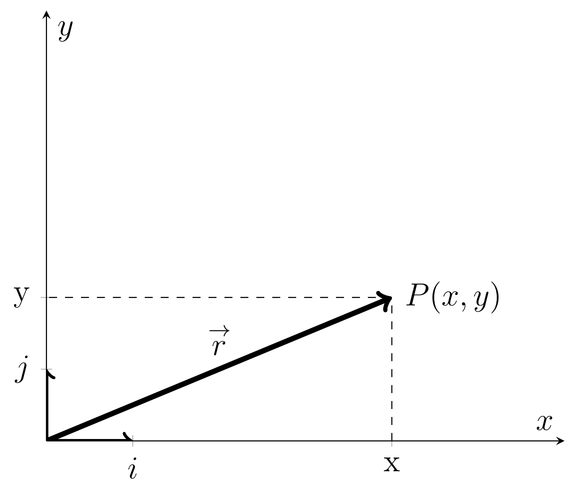
La **posición** es la localización de un cuerpo en el espacio con respecto al sistema de referencia.
El **movimiento** es un cambio constante de posición en base a un sistema de referencia fijo.
Si el sistema no está fijo, se mide el movimiento relativo de un cuerpo con respecto a otro.
En todo movimiento hay que distinguir tres elementos fundamentales: el cuerpo que se mueve o móvil, el sistema de referencia que se emplea y la trayectoria.

1.7.2 El móvil: una partícula o punto material

La posición de un punto respecto de un sistema de referencia viene determinada por un **vector**. El estudio del movimiento del punto se reduce al estudio geométrico de dicho punto.
Un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables frente al vector de posición es una **partícula**

1.7.3 Sistema de referencia. Vector posición

Para conocer la posición de un punto en cualquier momento es necesario fijar otro punto como referencia.
Normalmente el punto de referencia será el 0, de los ejes cartesianos. (siempre teniendo en cuenta que el movimiento es en 2 dimensiones)
La posición del punto P en cualquier instante vendrá determinada por el vector que une el punto de referencia con el punto móvil. El vector se llama **vector posición** y se denota por $\vec{r}$.



Este vector posición tiene dos componentes que son las coordenadas de su extremo:

$$\vec{r} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$$

Cuando el punto P se mueve, el vector posición $\vec{r}$ también se mueve en base al tiempo:

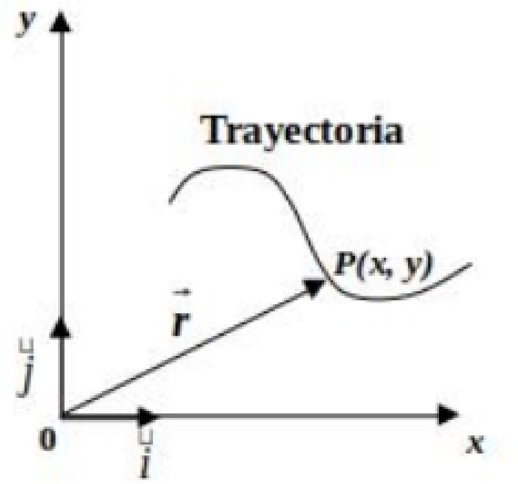
$$\vec{r} = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j}$$

Esta es la *expresión instantánea* del vector posición.
Para encontrar la distancia que existe entre la partícula móvil y el sistema de referecnia se encuentra el módulo del vector posición:

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Trayectoria

El punto $P(x,y)$ está en reposo cuando sus coordenadas permanecen consntantes con el tiempo.
Cuando el punto $P(x,y)$ se mueve, sus coordenadas van tomando distintos valores. Este conjunto de valores se llama **trayectoria** y se denota por $\vec{r}\ (t)$.



La ecuación de la trayectoria puede venir expresada:

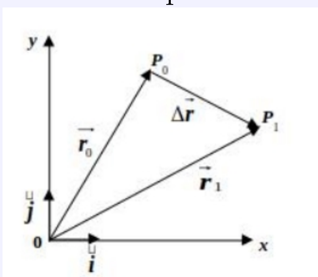
1. En forma vectorial: $\vec{r}\ (t) = x(t)\ \vec{i}\ + y(t)\ \vec{j}$
2. En forma paramétrica: $x = f(t), y = f(t)$
3. En forma continua: En el caso que la trayectoria sea plana, la ecuación cartesiana sería de la forma $y = f(x)$

Ejemplo: El movimiento de una partícula está dado por $x = t$ y $y = 2t - 1$. x e y en metros y t en segundos

1. Calcular la posición en cualquier instante:
$$\vec{r} = x\ \vec{i}\ + y\ \vec{j} = (t)\ \vec{i}\ + (2t - 1)\ \vec{j}$$
2. Calcular la posición inicial:
$$\vec{r} = (0)\ \vec{i}\ - 1\ \vec{j}$$
Cuando el tiempo empieza a correr, el punto se encuentra en $(0, -1)$
3. Calcular la posición a los 5 segundos:
$$\vec{r}\ (5) = 5\ \vec{i}\ + 9\ \vec{j}$$
Es decir, en ese instante el punto está en $(5, 9)$
4. Calcular la distancia al origen: (se encuentra calculando el módulo del vector posición en un momento):
$$||\vec{r}\ (5)|| = \sqrt{25 + 81} \approx 10,29 metros$$

Vector desplazamiento

Si una partícula se mueve desde un punto P_0 a un punto P_1, el vector que une ambos puntos se llama **vector desplazamiento** y se denota por $\overrightarrow{P_0P_1}$.



El vector desplazamiento entre dos posiciones es siempre el mismo, sin importar la trayectoria.

Matemáticamente el vector desplazamiento se obtiene restando el vector de posición inicial al vector de posición final: $\Delta \vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$.
Si $\vec{r_1} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ y $\vec{r_0} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$ entonces el vector desplazamiento será:

$$\Delta \vec{r} = (x_1 - x_0) \vec{i} + (y_1 - y_0) \vec{j} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$$

Finalmente:

$$\boxed{\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}}$$

Distancia recorrida

Es la magnitud escalad, Δs, que mide la longitud de la trayectoria. Coincide con el desplazamiento en caso de que el movimiento sea rectilíneo y no cambie de sentido.

Velocidad

Para conocer el movimiento de una partícula hay que saber como varía su posición con el tiempo.
Para relacionar la variación del vector posición con el tiempo, se usa la *velocidad*

La velocidad se mide en $\frac{m}{s}$

1.7.4 Velocidad media

La *velocidad media* es el desplazamiento que experimenta el móvil en la unidad de tiempo.
En el movimiento rectilíneo se cumple:

$$\left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La **velocidad media** es el vector que resulta de dividir el desplazamiento entre el tiempo empleado:

$$\boxed{\vec{v_m} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$

El vector velocidad media tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento:

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ y $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ son las *componentes* del vector velocidad media.

$$v_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

La velocidad media es una mierda, no nos dice si siempre estuvo a la misma velocidad, si fue acelerando o cuanto cambió. Además puede ser nula si el objeto volvió a su origen.
Para tener más datos, hay que sacar la velocidad media en intervalos más chiquitos. Si el intervalo es muy chiquito, la velocidad media será la misma que la **velocidad instantánea**.

1.7.5 Velocidad instantánea

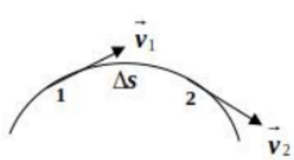
La *velocidad instantánea* es la velocidad que tiene el móvil en un instante determinado. Matemáticamente se define como el *límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a 0*

$$\boxed{\vec{v_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$

El valor numérico de la velocidad instantánea se encuentra calculando su módulo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

El vector velocidad instantánea en un punto $P(x, y)$ es un *vector tangente a la trayectoria en ese punto.*



Aceleración

La *aceleración* es la variación de la velocidad con el tiempo.
Como la velocidad es una magnitud vectorial, hay aceleración siempre que la velocidad varíe en módulo, dirección o sentido.

1.7.6 Aceleración media

Representa como varía la velocidad durante un intervalo de tiempo.
Matemáticamente es el vector que resulta de dividir la variación de la velocidad entre el tiempo empleado:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \vec{j}$$

1.7.7 Aceleración instantánea

Es la acleración que tiene una partícula en cualquier instante, o la aceleración que tiene en cualquier punto de la trayectoria.
Matemáticamente se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a 0:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$

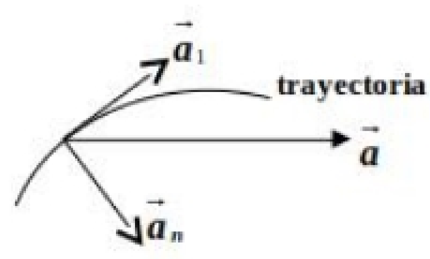
En sus componentes cartesianos:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

El módulo de la aceleración instantánea es:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

La aceleración instantánea es la suma de la **aceleración tangencial** y la **aceleración normal**. Estas dos aceleraciones son *componentes intrínsecas* de la aceleración.
La aceleración tangencial es un vector cuya dirección es tangente a la trayectoria y sentido hacia el centro de la curva. Es debida a la variación de velocidad en valor numérico.
La aceleración normal es un vector cuya dirección es perpendicular a la trayectoria y sentido hacia el centro de la curva.



La aceleración se mide en $\frac{m}{s^2}$
Los movimientos se pueden clasificar teniendo en cuenta la trayectoria y la aceleración:

1. Según la trayectoria:
    - **Movimiento rectilíneo**: la trayectoria es una recta.
    - **Movimiento curvilíneo**: la trayectoria es una curva.
2. Según la aceleración:
    - **Movimiento uniforme**: la aceleración es nula.
    - **Movimiento acelerado**: Tiene aceleración. Si es constante se llama uniformemente acelerado.

1.8 Cinemática de algunos movimientos

Movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento rectilíneo uniforme (MRU) es aquel en el que la velocidad es constante.

- La velocidad es constante en dirección y sentido, por lo tanto la trayectoria es una recta.
- La velocidad es constante en módulo, recorre espacios iguales en tiempos iguales.

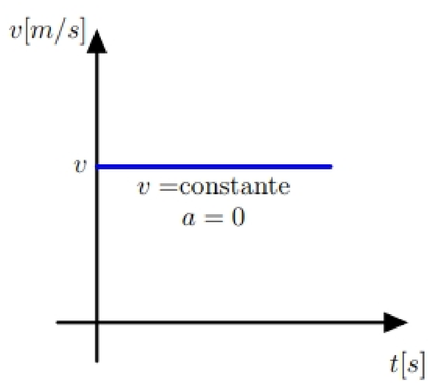
La ecuación del movimiento es:

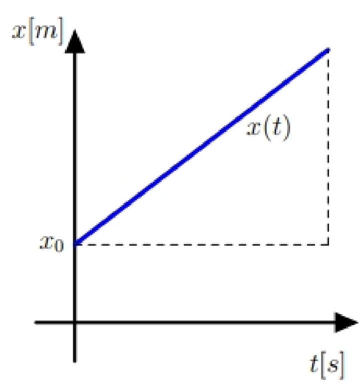
$$\vec{r}\ (t) = \vec{r_0} + v \cdot t,\ \vec{t} \geq 0$$

Teniendo un sistema unidimensional, la ecuación del movimiento es:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

Esta es la **ECUACIÓN HORARIA**
Diagramas:



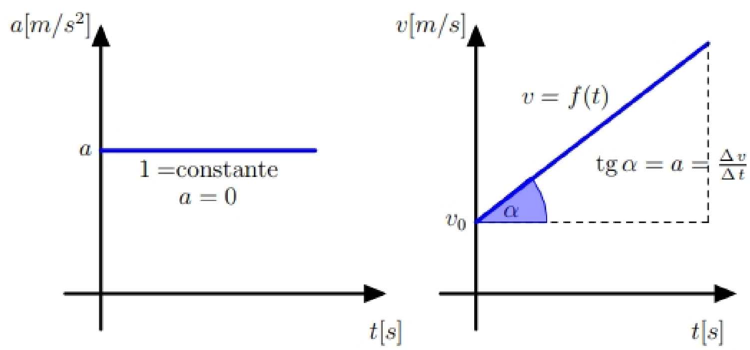


1. Diagrama izquierdo: Representación gráfica de la función $v = f(t)$. Es una recta paralela al eje de los tiempos.

2. Diagrama derecho: Representación gráfica de la función $x = g(t)$ donde $x(t) = x_0 + vt$. Es una recta que tiene como ordenada al origen x_0, la posición inicial y la pendiente es la velocidad.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) es aquel en el que la aceleración tangencial es constante.
Tomando como sistema de referencia la dirección del movimiento, todas las magnitudes se convierten en escalares.



La **ecuación de la velocidad** en cualquier instante:

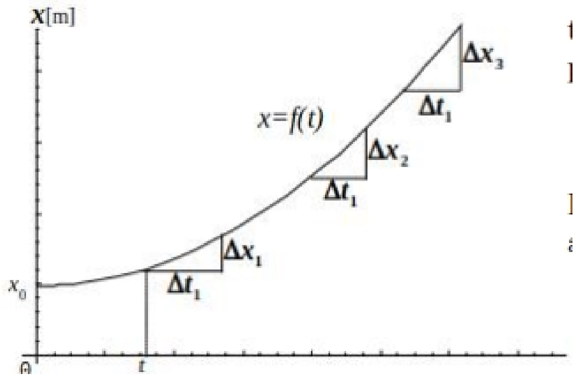
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0} \Leftarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

La **ecuación de la velocidad** en cualquier instante:

$$\boxed{v(t) = v_0 + at}$$

La **ecuación de la posición** en cualquier instante:

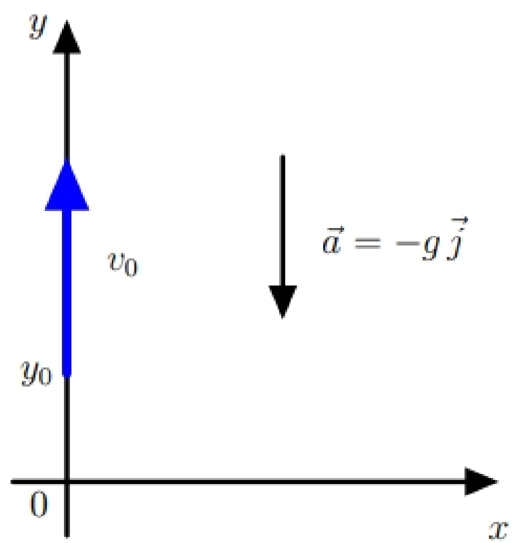
$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$



Caida de los cuerpos. Tiro vertical

Todos los cuerpos, sin importar su forma, tamaño y peso, caen con la misma aceleración sobre la Tierra. Se llama **aceleración de la gravedad**, un vector de dirección vertical con sentido al centro de la Tierra y módulo $g = 9,81\frac{m}{s^2}$. A este movimiento lo llamaremos **caída libre**.

Todo cuerpo que se mueve bajo la acción de la gravedad, se llama **proyectil**.



La aceleración del movimiento, según el sistema de referencia es:

$$a = -g$$

La posición en cualquier instante (altura) es:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

La velocidad en cualquier instante (velocidad vertical) es:

$$v(t) = v_0 - gt$$

Ejemplo: Desde la terraza de un edificio de 80 metros se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 20 m/s. Calcular:

1. **La altura que alcanza 1 segundo después de ser lanzada.**

$$y(1) = 0m + 20\frac{m}{s} \cdot 1s - \frac{1}{2} \cdot 9,81\frac{m}{s} \cdot 1s^2 = 15,1m$$

2. **La altura mázima que alcanza.** La velocidad tiene que equivaler a 0: $v(t) = 0 : v(t) = v_0 - gt \Rightarrow t = \frac{v(t)-v_0}{-g}$

$$t = \frac{0 - 20\frac{m}{s}}{-9,8\frac{m}{s^2}} \approx 2s$$

En este instante la velocidad es 0, por lo tanto la altura máxima es:

$$y_m = y(2) = 80m + 20\frac{m}{s} \cdot 2s - \frac{1}{2} \cdot 9,8\frac{m}{s^2} \cdot 4s^2 = 100,4m$$

3. **La posición respecto de la calle a los 4 segundos.**

$$y(4) = 80m + 20\frac{m}{s} \cdot 4s - \frac{1}{2} \cdot 9,8\frac{m}{s^2} \cdot 16s^2 = 81,6m$$

4. **El tiempo que tarda en llegar a la calle.**

$$y(t) = 0 \Rightarrow 80 + 20t - \frac{1}{2}9,8t^2 = 0$$

Cuadrática: $a = -4,9, \quad b = 20 \quad c = 80$
Soluciones: $-2,48s \quad 6,56s$
Como no se pueden tener tiempos negativos, la solución es $\mathbf{6,56s}$

5. **La velocidad que tiene a los 3 segundos.**

$$v(3) = 20\frac{m}{s} - 9,8\frac{m}{s^2} \cdot 3s = -9,4\frac{m}{s}$$

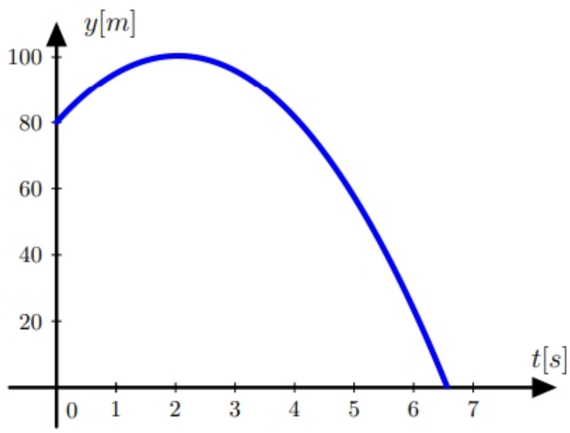
6. **La velocidad con que llega al suelo.**

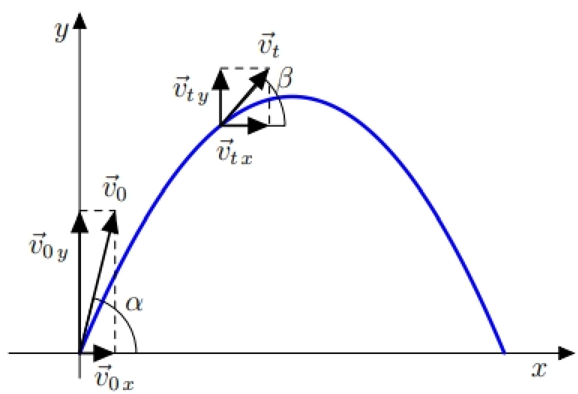
$$v(6,56) = 20\frac{m}{s} - 9,8 \cdot 6,56 = -44,28\frac{m}{s}$$

Movimiento en un plano. Tiro oblicuo

Cuando el vector velocidad y el vector aceleración no tienen la misma dirección, la trayectoria es una curva. Un ejemplo es el tiro oblicuo, donde la aceleración es constante pero no es colineal con la velocidad. **Movimiento de los proyectiles**

El tiro oblicuo tiene lugar cuando la velocidad inicial forma un ángulo α con el horizonte. Este plano es:





La velocidad para $t = 0$ (*velocidad inicial*) y el ángulo α es el *ángulo de tiro*.
La velocidad inicial se puede descomponer en dos velocidades segúns los ejes de referencia:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

El movmiento del proyectil se puede considerar como el movimiento resultante de otros dos:

- **Movimiento horizontal**: movimiento uniforme con aceleración $a_x = 0$.

- **Movimiento vertical**: movimiento uniformemente acelerado con aceleración $a_y = -g$.

Las ecuaciones del movimiento horizontal son:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ x(t) = v_x t = v_0 \cos\alpha t \end{cases}$$

Las ecuaciones del movimiento vertical son:

$$\begin{cases} v_y = v_0 \sin\alpha - gt \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La velocidad instantánea del proyectil:

$$\vec{v_t} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \ \text{ o } \ \vec{v}\,(v_x, v_y)$$

El módulo de la velocidad instantánea: $v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Pendiente de $\vec{v}$: $\tan\beta = \frac{v_y}{v_x}$

Posición instantánea: $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$ o $\vec{r}\,(x, y)$

Ejemplo: Un cañón dispara un proyectil con una velocidad de $400\frac{m}{s}$ y un ángulo de 30°. Calcular:

1. **La posición y la velocidad del proyectil a los 5 segundos.** Posición a los 5 segundos:

$$x(5) = 400\frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5s = 1000\sqrt{3}m$$
$$y(5) = 0m + 400\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5s - \frac{1}{2} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 25s^2 = 875m$$
$$\vec{r_5}\,(1000\sqrt{3}, 875)$$

Velocidad a los 5 segundos:

$$v_x = 400\frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3}\frac{m}{s}$$
$$v_y = 400\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{2} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 5s = 150\frac{m}{s}$$
$$\vec{v_5}\,(200\sqrt{3}, 150)\frac{m}{s}$$

El módulo de la velocidad es: $v_5 = \sqrt{(200\sqrt{3})^2 + 150^2} \approx 377,49\frac{m}{s}$

$$\tan\beta = \frac{150}{200\sqrt{3}} = 0,43 \Rightarrow \beta = 23,4°$$

2. **¿En qué instante el proyectil se encuentra a 1000 metros de altura? ¿Qué velocidad tiene en ese momento?**

3. **La altura máxima alcanzada por el proyectil.**

4. **La velocidad en ese instante.**

5. **El alacance máximo.**

6. **¿Con qué velocidad llega a la horizontal del punto de lanzamiento?**

7. **Ecuación de la trayectoria. Considerando** $g = 10\frac{m}{s^2}$