

# UTN - MATEMÁTICA

Nicolás Fishman

# Contents

1.1	Conjuntos . . . . .	3
1.2	Recta Numérica . . . . .	4
1.3	Conjunto Racional . . . . .	4
1.4	Representación de los racionales en la recta . . . . .	5
1.5	Reresentación decimal de los racionales . . . . .	6
1.6	Números Reales . . . . .	6
1.7	Intervalos Reales. . . . .	8
1.8	Valor Absoluto . . . . .	8
1.9	Exponentes y raíces . . . . .	9
1.10	Elementos de la geometría . . . . .	10
2.1	Concepto de función . . . . .	16
2.2	Función Lineal . . . . .	16
2.2.1	Ecuación de la recta que pasa por dos puntos . . . . .	17
2.2.2	Ecuación de la recta conociendo un punto y su pendiente . . .	18
2.3	Función Cuadrática . . . . .	18
2.3.1	Forma canónica . . . . .	19
2.3.2	Raíces de una cuadrática . . . . .	20
1.1	Definición . . . . .	22
1.2	Ceros o raíces de un polinomio . . . . .	24
1.3	Factorización de polinomios . . . . .	25
1.4	Expresiones racionales . . . . .	25
1.5	Ecuaciones racionales . . . . .	27
1.1	Definición . . . . .	28
1.2	Sistemas de ecuaciones equivalentes . . . . .	29
1.3	Resolución de los sistemas lineales: Eliminación de Gauss . . . . .	30
1.4	Clasificación de los sistemas lineales . . . . .	31

# Semanas 1 y 2

## *12/10 - 21/10*

- Números Reales
- Función Lineal y Función Cuadrática

# Números Reales

## 1.1 Conjuntos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

### Divisibilidad:

$a$  es divisible por  $b$  si hay un entero  $k$  tal que:

$$a = b \cdot k$$

### Conjuntos de números enteros

- **Números pares:**  $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$
- **Números impares:**  $\{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$
- **Números primos:**  $p$  es primo si tiene sólo 2 divisores: 1 y  $p$
- **Números compuestos:** Números que no son primos

\* 1 no es ni primo ni compuesto

### Teoría fundamental de la aritmética

Todo número natural  $n$  mayor que 1 tiene una única factorización en números primos.

#### Ejemplo:

- $n = 120 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
- $n = 15 \Rightarrow 15 = 3 \cdot 5$

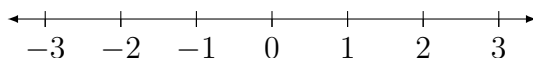
### Máximo común divisor - MCD

$a$ ,  $b$  y  $d$  son números enteros. Si  $d|a$  y  $d|b$  se dice que  $d$  es un Divisor común de  $a$  y  $b$ . El mayor de estos divisores comunes es el **máximo común divisor**  
\*Si el MCD de dos enteros es 1,  $a$  y  $b$  son **coprimos**

#### Ejemplo:

$a = 15, b = 8 \Rightarrow MCD(a, b) = 1 \rightarrow a$  y  $b$  son **coprimos**

## 1.2 Recta Numérica



## 1.3 Conjunto Racional

### Definición - Conjunto Racional

$\mathbb{Q} \rightarrow$  Conjunto de todas las fracciones  $\frac{a}{b}$  donde  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $b \neq 0$ .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

$$M \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \cdot M}{b \cdot M}$$

### Fracciones equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } a \cdot d = b \cdot c$$

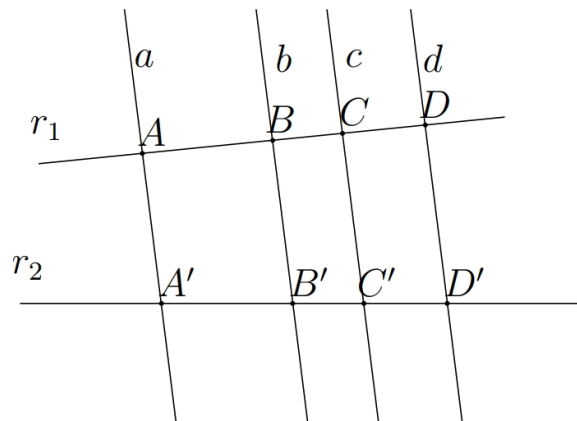
## Operaciones con racionales

- **Suma:**  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- **Multipliación:**  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- **División:**  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

## 1.4 Representación de los racionales en la recta

### Teorema de Thales

Dos rectas cortadas por rectas paralelas  $\rightarrow$  los segmentos cortados son proporcionales.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

### Definición - Orden en $\mathbb{Q}$

Sean  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  dos fracciones con  $b$  y  $d$  positivos  $\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  si y solo si

$$a \cdot d < b \cdot c$$

Igualmente, dadas  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  dos fracciones con  $b$  y  $d$  positivos  $\Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$  si

$$a \cdot d \leq b \cdot c$$

**Ejemplo:**

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2} \text{ es decir, } \frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

### Propiedad

Entre dos racionales distintos en la recta numérica, existen infinitos puntos que representan números racionales.

## 1.5 Reresentación decimal de los racionales

Páginas 8 - 13

## 1.6 Números Reales

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , se llama *unión* de  $A$  y  $B$  al conjunto de todos los elementos que están en el conjunto  $A$  o en el conjunto  $B$ .

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$x$  pertenece a  $A$  o  $x$  pertenece a  $B$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$x$  pertenece a  $A$  y  $x$  pertenece a  $B$

## Número Reales

El conjunto de los reales es la unión de los números racionales y los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Por lo tanto, el conjunto de los números reales está formado por todos los números que admiten una representación decimal, finita o infinita y tanto periódica como no periódica.

### Propiedades de la suma:

1. (Asociatividad):  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$
2. (Comutatividad):  $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b = b + a$
3. (Existencia del elemento neutro)  $\exists 0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = a$
4. (Existencia de opuestos)  $\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R}$  tal que  $a + (-a) = 0$

### Propiedades de la multiplicación:

1. (Asociatividad):  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2. (Comutatividad):  $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$
3. (Existencia del identidad)  $\exists 1 \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot 1 = a$
4. (Existencia de inverso multiplicativo)  $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$  tal que  $a \cdot a^{-1} = 1$

### Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

### Leyes cancelativas:

1.  $a + b = a + c \Rightarrow b = c$
  2.  $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$
- *Restar* es sumar el opuesto,  $a - b = a + (-b)$
  - *Dividir* es multiplicar por el inverso,  $a/b = a \cdot b^{-1}$  con  $b \neq 0$



## 1.7 Intervalos Reales.

**Intervalos acotados.**

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  *Intervalo abierto*
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  *Intervalo cerrado*
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  *Intervalo semicerrado por izquierda*
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  *Intervalo semicerrado por derecha*

**Intervalos no acotados.**

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- \*  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

## 1.8 Valor Absoluto

### Definición - Valor Absoluto

Dado un número real  $x$  se llama *valor absoluto* de  $x$  al número real  $|x|$  tal que:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto o módulo de un número real, puede interpretarse como la distancia de dicho número al origen en la recta numérica.

### Propiedades - valor absoluto

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $k > 0$ :

1.  $|a| \geq 0$
2.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3.  $|a| = |-a|$
4.  $|a| \leq k$  equivale a  $-k \leq a \leq k$
5.  $|a| \geq k$  equivale a  $a \leq -k$  o bien  $k \leq a$
6.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (desigualdad triangular)

## 1.9 Exponentes y raíces

### Potenciación

Cualquier número real  $a$  y cualquier número natural  $n$  se define la potencia  $a^n$  como el producto de  $n$  copias de  $a$ :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n\text{-veces}}$$

#### Propiedades - Potenciación

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $n, m \in \mathbb{N}$ :

1.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  (Producto de potencias de igual base)
2.  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  (Cociente de potencias de igual base ( $a \neq 0$ ))
3.  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$  (Potencia de potencia)
4.  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$  (La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación)
5.  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$   $b \neq 0$  (La potenciación es distributiva respecto de la división)

### Radicación

Dado un número real  $a \geq 0$ , el símbolo  $\sqrt{a}$  denota al único número real no negativo que al elevarlo al cuadrado da como resultado  $a$ :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \text{ y } b \geq 0$$

#### Definición - (raíz $n$ -ésima)

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$n \in \mathbb{Z} > 1$ . Si  $n$  es par, entonces  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ .

### Propiedades - radicación

1.  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  (a y b deben ser no negativos en el caso n par)
2.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  (a y b deben ser no negativos en el caso n par, además b debe ser, en cualquier caso, distinto de 0)
3.  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$  (a debe ser no negativo si n o m fuesen pares)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

### Racionalización de denominadores

Para hacer representaciones con fracciones que tienen denominadores irracionales suele ser difícil, por lo que hay que convertirlos en fracciones con denominadores racionales. Para ello se utiliza la siguiente técnica:

**Ejemplo 1.** Racionalizar  $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Teniendo en cuenta que  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$  y que  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ , multiplicamos y dividimos la fracción por  $\sqrt{3}$ :

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

**Ejemplo 2.** Racionalizar  $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{12}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{6}$$

**Ejemplo 3.** Racionalizar  $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$

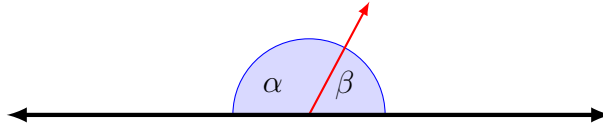
$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} &= \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{6})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2} \\ &= \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{6})}{-1} = 2 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

## 1.10 Elementos de la geometría

### Ángulos.

- Complementarios: dos ángulos que suman  $90^\circ$

- Suplementarios: dos ángulos que suman  $180^\circ$



$\alpha$  y  $\beta$  son ángulos adyacentes y complementarios

## Triángulos

### Clasificación por lados:

- Equilátero: tres lados iguales
- Isósceles: dos lados iguales
- Escaleno: tres lados distintos

### Clasificación por ángulos:

- Acutángulo: tres ángulos agudos
- Rectángulo: un ángulo recto
- Obtusángulo: un ángulo obtuso

### Propiedades

1. (Desigualdad triangular) La suma de los dos lados menores de un triángulo es mayor que el lado mayor.

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

2. En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo

**Mediana:** Línea que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

**Mediatriz:** Línea que pasa por el medio del lado de forma perpendicular.

**Altura:** Línea perpendicular al lado opuesto al vértice que se toca.

$$A = \frac{B \cdot h}{2}$$

Fórmula del área de un triángulo, siendo  $B$  la base y  $h$  la altura.

Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son *semejantes* si tienen sus tres pares de lados proporcionales.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

## Cuadriláteros

*Trapecio:* Cuadrilátero con solo dos lados paralelos. Si los lados paralelos no tienen la misma medida, se llama *trapecio isósceles*.

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Fórmula del área de un trapecio, siendo  $B$  y  $b$  las bases y  $h$  la altura.

*Paralelogramo:* Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.

### Propiedades de los paralelogramos

1. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes
2. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes
3. las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

$$A = B \cdot h$$

Fórmula del área de un paralelogramo, siendo  $B$  la base y  $h$  la altura.

*Rectángulo:* Paralelogramo que tiene un ángulo recto. A las propiedades anteriores se le agrega:

### Propiedad del rectángulo

Las diagonales de un rectángulo son congruentes

*Rombo:* Paralelogramo que tiene todos sus lados iguales. A las propiedades anteriores se le agrega:

### Propiedades del rombo

1. Las diagonales del rombo son perpendiculares entre sí (forman ángulos rectos)
2. Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos que unen

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Fórmula del área de un rombo, siendo  $D$  y  $d$  las diagonales.

## Circunferencia y círculo

*Circunferencia:* Línea cerrada que pasa por un punto y que tiene la misma distancia a todos los puntos de la línea. La distancia entre el punto y la circunferencia se llama *radio*.

$$l = 2\pi \cdot r$$

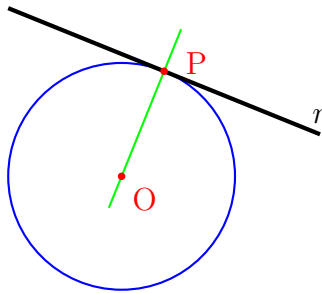
Fórmula de la longitud de una circunferencia, siendo  $r$  el radio.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Fórmula del área de una circunferencia, siendo  $r$  el radio.

### Recta Tangente

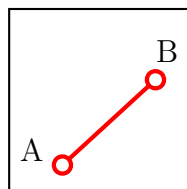
Circunferencia que toca a otra circunferencia en un punto. Es perpendicular al radio que une los centros de las circunferencias.



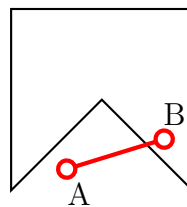
## Polígonos

Dados  $n$  puntos no alineados  $P_1, P_2, \dots, P_n$  se llama *polígono* a la figura formada por las líneas que unen los puntos.  $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_nP_1})$

*Polígono convexo:* Polígono que si dados dos puntos cualesquiera de su interior, el segmento que los une está totalmente incluido en el polígono.



*Convexo*



*No convexo*

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de  $n$  lados ( $n \geq 3$ ) es igual a:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Un polígono convexo es un *polígono regular* si sus lados son iguales y sus ángulos interiores son iguales.

Un polígono convexo está *inscripto* en una circunferencia si todos sus vértices están sobre la circunferencia.

Un polígono convexo está *circunscripto* a una circunferencia si todos sus lados son tangentes a la misma

#### Propiedad

Todo polígono regular está inscripto y circunscripto en una circunferencia

**Apotema:** Segmento perpendicular al lado de un polígono regular que une el vértice con el centro de la circunferencia inscrita. El área de un polígono regular de  $n$  lados es:

$$A = \frac{l \cdot a}{2} \cdot n = \frac{\text{perímetro} \cdot a}{2}$$

Donde  $l$  es la longitud de los lados y  $a$  es la apotema.

### Cuerpos geométricos

Son figuras de 3 dimensiones. Algunos ejemplos son los poliedros, la esfera y el cilindro

**Prisma recto:** Poliedro que tiene dos caras congruentes sobre planos paralelos, llamados *bases*. Las caras laterales son paralelas entre sí y perpendiculares a las bases. Estas últimas caras se conocen como *caras laterales*.

El volumen de un prisma recto es:

$$V = B \cdot h$$

Donde  $B$  es el área de la base y  $h$  es la altura del prisma.

El Área Total es la suma de las áreas de las caras laterales y las bases:

$$A_{Total} = 2A_B + A_l$$

Donde  $A_B$  es el área de la base y  $A_l$  es el área de las caras laterales.

Un *cubo* es un prisma recto cuyas caras laterales son cuadrados y sus bases son cuadrados.

Pirámide: Explicación página 29

Área lateral de una pirámide regular:

$$A_{total} = A_{Base} + S \cdot a$$

Donde  $A_{Base}$  es el área de la base,  $S$  es el perímetro de la base y  $a$  es la apotema.

Volumen de una pirámide regular:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h$$

Un **cono** es el cuerpo o sólido que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus lados.

La base del cono es una circunferencia. La hipotenusa del triángulo rectángulo se llama *generatriz* del cono.

El área del cono es:

$$A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$$

Donde  $r$  es el radio de la base y  $g$  es la generatriz.

Su volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

El **cilindro** es el sólido que se obtiene al girar un rectángulo sobre uno de sus lados. Las bases son dos círculos. Su área es:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Su volumen es:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

La **esfera** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un círculo alrededor de su diámetro. La *superficie esférica* es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado *centro* de la esfera. El área de esta superficie es:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

y su volumen:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$



# Funciones Lineales y cuadráticas

## 2.1 Concepto de función

### Definición de Función

Se llama *función*  $f$  de  $A$  en  $B$  a toda relación que asocia a cada elemento de  $A$  un único elemento de  $B$ .

El conjunto  $A$  se llama *dominio* de  $f$  y el conjunto  $B$  se llama *codominio* de  $f$ .

$$f : A \rightarrow B$$

## 2.2 Función Lineal

### Definición (Función Lineal)

Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *lineal* si es de la forma

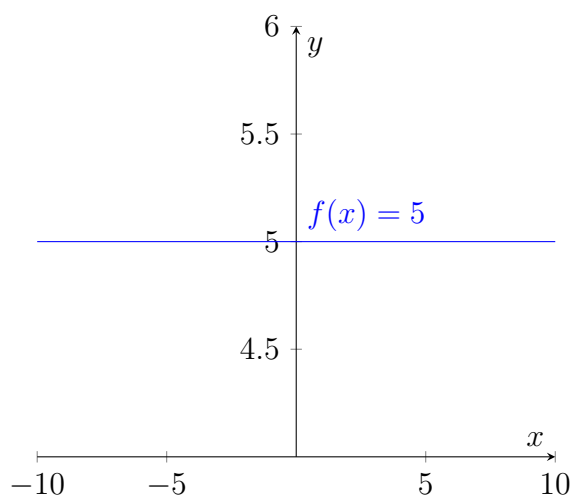
$$f(x) = ax + b$$

con  $a \in \mathbb{R}$  y  $b \in \mathbb{R}$ .

### Gráficas de las funciones lineales

1. Si la pendiente,  $a$ , es igual a 0, la gráfica es una recta horizontal.

$$f(x) = b$$



2. Si  $a \neq 0$ , la recta corta al eje vertical (**eje de coordenadas**) en el punto  $(0;b)$ , de aquí que el coeficiente  $b$  se conoce como *ordenada al origen*.

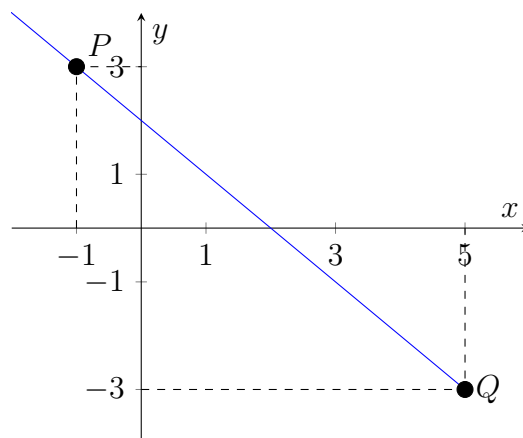
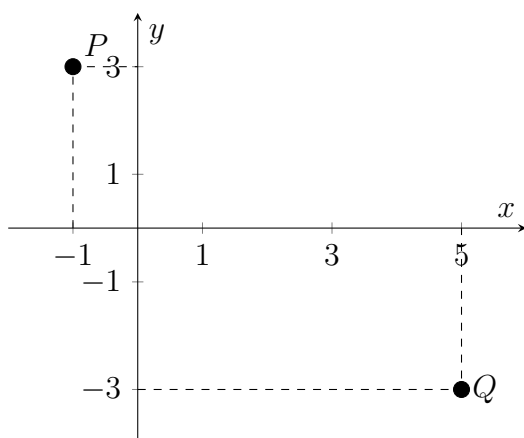
### 2.2.1 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Se puede determinar una recta solo sabiendo dos puntos que pertenezcan a ella. Para esto se utiliza la *ecuación general de la recta*:

$$y = mx + b$$

#### Ejemplo:

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $P(-1;3)$  y  $Q(5;-3)$ .



**Solución:**

Pasa por  $P \rightarrow f(-1) = 3$  y  $Q \rightarrow f(5) = -3$ .

$$\begin{cases} 3 &= (-1) \cdot a + b \\ -3 &= 5a + b \end{cases}$$

$$3 + a = -3 - 5a$$

$$6a = -6 \Leftrightarrow a = -1$$

y  $b = 2$ :

$$f(x) = -x + 2$$

### 2.2.2 Ecuación de la recta conociendo un punto y su pendiente

Si una recta pasa por el punto  $(1; 3)$  y su pendiente es  $-2$ , conocemos la ecuación de la recta:

$$f(x) = -2x + b$$

Calculamos la ordenada al origen, reemplazando  $f(x)$  por  $3$  y  $x$  por  $1$ :

$$3 = -2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow 5 = b$$

$$f(x) = -2x + 5$$

#### Rectas paralelas y perpendiculares

Dadas dos funciones lineales  $y = a_1x + b_1$  e  $y = a_2x + b_2$  sus gráficas son:

1. Paralelas si  $a_1 = a_2$
2. Perpendiculares si  $a_1 \cdot a_2 = -1$

## 2.3 Función Cuadrática

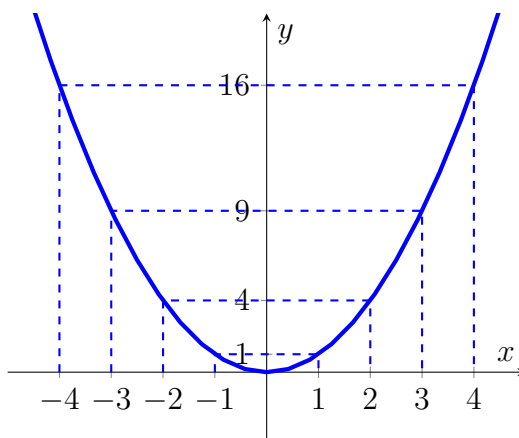
#### Definición (Función Cuadrática)

Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *cuadrática* si es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$ .

$x$	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Podemos ver que:

- El gráfico es simétrico respecto al eje  $y$ . La recta  $x = 0$  es el **Eje de simetría**.
- El menor valor que toma la función es 0 y se produce en  $x = 0$ . Este punto es el **vértice** de la parábola.
- La función es creciente en el intervalo  $(-\infty; 0)$  y decreciente en el intervalo  $(0; \infty)$ .
- El conjunto imagen de la función es el intervalo  $[0; \infty)$  o  $\mathbb{R}_0^+$ .

### 2.3.1 Forma canónica

Toda función cuadrática, desde su forma polinómica  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , se puede escribir en la forma canónica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

donde  $h$  y  $k$  son las coordenadas del vértice de la parábola.

#### Ejemplo:

Determinar la ecuación de la función que pasa por el punto  $(3; -1)$  y tiene como vértice el punto  $(-1; 4)$ .

#### Solución:

Reemplazamos en la forma canónica:

$$f(x) = a(x + 1)^2 + 4$$

Para obtener  $a \rightarrow$  reemplazamos  $f(3) = -1$ :

$$-1 = a(3+1)^2 + 4 \Leftrightarrow -1 = 16a + 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{16} = a$$

Por ende, la forma canónica de la función es  $f(x) = -\frac{5}{16}(x+1)^2$ . Para obtener la forma polinómica tenemos que hacer las cuentas:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{5}{16}(x+1)^2 + 4 = -\frac{5}{16}(x^2 + 2x + 1) + 4 = \frac{5}{16}x^2 - \frac{10}{16}x - \frac{5}{16} + 4 \\ &= -\frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{59}{16} \end{aligned}$$

### 2.3.2 Raíces de una cuadrática

Además del vértice tenemos las raíces. Nos dicen donde corta la gráfica con el eje horizontal. Para sacarlas hay que resolver

$$f(x) = 0$$

**De donde carajo sale la fórmula resolvente?????**

La cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  puede escribirse completando cuadrados:

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Igualando a 0 y considerando que  $a \neq 0$ :

$$0 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

en donde

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \left| x + \frac{b}{2a} \right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

Y por fin tenemos:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ o bien } x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Fórmula resolvente**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Semanas 3 y 4

### *24/10 - 28/10*

- Polinomios
- Sistemas

# Polinomios

## 1.1 Definición

### Definición de polinomio

Se llama *polinomio de grado  $n$*  a toda expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde  $n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  y  $a_n \neq 0$ .

$a_n$  es el *coeficiente principal* y  $a_0$  el *coeficiente independiente*.

### Polinomio Nulo

Se llama *polinomio nulo* a todo polinomio que es igual a cero, es decir, que su coeficiente independiente es cero.

$$p(x) = 0$$

Este polinomio **no tiene grado**.

### Definición de la igualdad de polinomios

Dos polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$  son iguales si son del mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0 \text{ y } q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \cdots + b_1 x + b_0$$

son polinomios de grado  $n$ , son iguales sí y solo si:

$$a_n = b_n; a_{n-1} = b_{n-1}; \dots; a_1 = b_1 = a_0 = b_0$$

o, abreviada:

$$a_i = b_i \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

### Suma de polinomios

La suma de dos polinomios de grado  $n$  y  $m$  es un polinomio de grado  $\max(n, m)$ :

$$p(x) + q(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$$

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_m)x^n + (a_{n-1} + b_{m-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

### Opuesto de un polinomio

Un polinomio es el opuesto de otro cuando la suma de ambos es el polinomio nulo:

El opuesto del polinomio  $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$  es

$$-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$$

### Resta de polinomios

Dados dos polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$ , la resta de  $p - q$  es el polinomio que se obtiene al sumarle a  $p$  el opuesto de  $q$ :

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x))$$

**Ejemplo:** calcular  $p - q$  si  $p(x) = 7x^2 + 3x - 1$  y  $q(x) = -2x^3 + x^2 - 4x - 1$ .

**Solución:**

$$p(x) - q(x) = 7x^2 + 3x - 1 - (-2x^3 + x^2 - 4x - 1)$$

$$p(x) - q(x) = 7x^2 + 3x - 1 + 2x^3 - x^2 + 4x + 1$$

$$p(x) - q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x$$



### Multiplicación de polinomios

Dados dos polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$ , la multiplicación de  $p * q$  se obtiene de distribuir los términos y sumar los coeficientes de igual grado.

**Ejemplo:** calcular  $p * q$  si  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  y  $q(x) = 3x - 1$ .

**Solución:** Primero se distribuyen los términos:

$$p(x) * q(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)(3x - 1)$$

$$p(x) * q(x) = 3x^4 - 9x^3 + 6x - x^3 + 3x^2 - 2$$

Y luego se suman los coeficientes de igual grado:

$$p(x) * q(x) = 3x^4 - 10x^3 + 3x^2 + 6x - 2$$

### Teorema (algoritmo de la división)

Si  $p(x)$  y  $q(x)$  son dos polinomios tales que  $q(x)$  no es nulo y el grado de  $p$  es mayor o igual al grado de  $q$ , existen polinomios  $c(x)$  y  $r(x)$  tales que:

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

donde el grado de  $r <$  al grado de  $q$  o  $r(x)$  es el polinomio nulo. El polinomio  $c(x)$  se llama *cociente* y el polinomio  $r(x)$  se llama *resto*.

## 1.2 Ceros o raíces de un polinomio

### Valor numérico de un polinomio

El *valor numérico* del polinomio  $p(x)$  en el punto  $x = k$  es el número  $p(k)$ .

El *cero* o *raíz* de un polinomio es el valor numérico de  $x$  que hace que el polinomio tome el valor 0.

### Teorema del resto

El resto de dividir a  $p(x)$  por un polinomio de la forma  $x - k$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ , es  $p(k)$ .

*Ejemplo:* Calcular el resto de dividir  $p(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 1$  por  $x + 1$ .  
*Solución:* El resto es  $p(-1) = 4$ .

## 1.3 Factorización de polinomios

### Definición - Factorización de polinomios

Un polinomio  $p(x)$  de grado  $\geq 1$  es irreducible si cualquier factorización de  $p(x)$  es de la forma  $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ , donde  $q(x)$  o  $r(x)$  son polinomios de grado 0.

**Un polinomio es irreducible si y solo si es de grado 1 o es un polinomio de grado 2 sin raíces**

Para factorizar un polinomio  $p(x)$  hay que escribirlo como el producto de su **Coefficiente principal** y una cantidad de factores irreducibles y mónicos.

*Ejemplo:* El polinomio  $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$  se factoriza como:

$$p(x) = 2(x - 1)(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

### Multiplicidad de una raíz

Decimos que  $a$  es raíz de  $p(x)$  de multiplicidad  $k$  si  $(x - a)^k$  divide a  $p(x)$  y  $(x - a)^{k+1}$  **no** divide a  $p(x)$ .

Si  $k = 1$  decimos que  $a$  es raíz simple de  $p(x)$ .

### Teorema

Sea  $p(x)$  un polinomio de grado  $n$ . Si  $p(x)$  tiene  $n$  raíces, se puede escribir de la forma:

$$p(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdot (x - a_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x - a_n)^{m_n}$$

donde  $a_i$  son las raíces de  $p(x)$  y  $m_i$  son las multiplicidades de las raíces.

## 1.4 Expresiones racionales

Las expresiones racionales es como el "conjunto de fracciones de polinomios"

### Definición

Se llama *expresión racional* a toda fracción de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios con coeficientes en  $\mathbb{R}$  y  $Q(x)$  no es un polinomio nulo.

# Operaciones con expresiones racionales

## 1. Multiplicación:

Dadas dos expresiones racionales  $\frac{p_1(x)}{q_1(x)}$  y  $\frac{p_2(x)}{q_2(x)}$ , su producto es:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x) \cdot p_2(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x)}$$

**Ejemplo:**

$$\frac{x+1}{x^2-4} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{3x+3}{x^3-x^2-4x+4}$$

## 2. División:

Al igual que con los números racionales, la división de expresiones racionales se realiza multiplicando las expresiones de manera inversa:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} : \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{q_2(x)}{p_2(x)} = \frac{p_1(x) \cdot q_2(x)}{q_1(x) \cdot p_2(x)}$$

**Ejemplo:**

$$\frac{x^2+1}{x} : \frac{3x}{x-1} = \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x-1}{3x} = \frac{x^3-x^2+x-1}{3x^2}$$

Para la suma y la resta necesitamos que los denominadores sean iguales, por lo que se puede usar la **regla de la igualdad de los denominadores (mcm)**:

### Definición - mcm

Un mínimo común múltiplo (*mcm*) entre dos polinomios p y q de grado es un polinomio m de grado mínimo que es múltiplo de p y de q.

Se factorizan los denominadores y se multiplican los factores comunes de mayor grado y los no comunes

**Ejemplo:** Encontrar un *mcm* entre  $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$  y  $q(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x$

Primero tenemos que factorizar los polinomios

$$p(x) = 2(x-1)(x+1)(x+3) \text{ y } q(x) = (x+3)^2(x-1)x$$

por ende, el *mcm* es:

$$m(x) = (x-1)(x+1)(x+3)^2x$$

### 3. Suma y resta:

Para la suma y la resta, hay que igualar los denominadores y luego sumar o restar los numeradores.

## 1.5 Ecuaciones racionales

Son ecuaciones donde la incógnita está en una expresión fraccionaria. La idea es transformar la ecuación en una ecuación polinómica y después resolverla igualando a 0 para encontrar sus raíces

**Ejemplo:** Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-7}{x-1}$$

Hay valores que no pueden ser raíces, porque no están definidos en el dominio de la función. Por ejemplo,  $x = 3$  y  $x = 1$  no puede ser raíz porque  $x - 3 = 0$  y  $x + 1 = 0$  y 0 no está definido en  $\mathbb{R}$ .

$$x \neq 3 \text{ y } x \neq 1$$

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-3} &= \frac{x-7}{x-1} \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = (x-7)(x-3) \Leftrightarrow \\ 2x^2 + x - 1 &= x^2 - 3x - 7x + 21 \Leftrightarrow x^2 + 9x - 22 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 2 \text{ y } x = -11}$$

# Sistemas

## 1.1 Definición

### Definición (Ecuación lineal)

Las ecuaciones que se pueden expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b$  son constantes  $\mathbb{R}$ , se conocen como *ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas*.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las  $n$  incógnitas de la ecuación

**Ejemplo:**

$$\begin{cases} -3x + y &= -2 \\ x + y &= 6 \end{cases}$$

Para resolver este sistema hay que encontrar el par de números  $(x, y)$  que satisfagan las dos ecuaciones simultáneamente.

Si las ecuaciones representan un par de rectas diferentes y paralelas, el sistema **no tiene solución**. Si representan un par de rectas no paralelas, el sistema tiene **una solución única** y cuando las ecuaciones representan la misma recta, el sistema tiene **infinitas soluciones**.

### Definición (sistemas de ecuaciones lineales)

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales con la misma cantidad de incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

donde  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$  y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las incógnitas del sistema.  $a_{ij}$  son los *coeficientes del sistema* y  $b_i$  son los *términos independientes*.

## 1.2 Sistemas de ecuaciones equivalentes

Para resolver el un sistema lineal  $2 \times 2$  podemos ver el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y &= -1 \\ x + y &= 5 \end{cases}$$

tiene como solución  $x = 1$  e  $y = 4$ .

Vamos a "combinar" las ecuaciones del sistema para obtener una nueva ecuación: multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la restamos a la primera:

$$\begin{array}{r} 3x - y = -1 \\ 2x + 2y = 10 \\ \hline x - 3y = -11 \end{array}$$

Esta ecuación es equivalente al sistema original, ya que si resolvemos esta ecuación, obtenemos la misma solución que el sistema original.

### Definición (combinación lineal de ecuaciones)

Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos ecuaciones lineales con la misma cantidad de incógnitas. Se dice que la ecuación  $E$  es *combinación lineal* de las ecuaciones  $E_1$  y  $E_2$  si existen números reales  $\alpha$  y  $\beta$  tales que:

$$E = \alpha E_1 + \beta E_2$$

### Teorema

Dos sistemas lineales tienen exactamente el mismo conjunto solución.

## 1.3 Resolución de los sistemas lineales: Eliminación de Gauss

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, podemos usar el método de eliminación de Gauss, que nos permite simplificar las ecuaciones equivalentemente mediante 3 operaciones:

1. Intercambiar dos ecuaciones
2. Multiplicar una ecuación por un número real distinto de 0
3. Sumar una ecuación a otra multiplicada por un número real

**Ejemplo:** *Resuelvan el sistema:*

$$\begin{cases} -2x + 5y = 4 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$$

Para resolverlo vamos a usar la primera ecuación para eliminar la incógnita  $x$  de la segunda ecuación. En este caso multiplicaremos la primera ecuación por 3 y la segunda por 2

$$\begin{cases} -2x + 5y = 4 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 15y = 12 \\ 6x + 4y = 26 \end{cases}$$

Ahora sumamos la segunda ecuación a la primera:

$$\begin{cases} -2x + 5y = 4 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 15y = 12 \\ 6x + 4y = 26 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 15y = 12 \\ 19y = 38 \end{cases}$$

Los 3 sistemas tienen el mismo conjunto solución, pero el tercero nos da la solución inmediata:

$$19y = 38 \Leftrightarrow y = 2$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$-6x + 30 = 12 \Leftrightarrow -6x = -18 \Leftrightarrow x = 3$$

La solución del sistema es  $(x, y) = (3, 2)$

**Ejemplo 2:** *Resuelvan el sistema:*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 & (E_1) \\ -x - y + 2z = 6 & (E_2) \\ 3x + 2y + z = -4 & (E_3) \end{cases}$$

Vamos a buscar un sistema equivalente pero que en las ecuaciones  $(E_2)$  y  $(E_3)$  no tenga  $x$

$$(A) \begin{cases} 2x + y + z = 2 & (E_1) \\ -x - y + 2z = 6 & (E_2) \\ 3x + 2y + z = -4 & (E_3) \end{cases} \rightarrow (A') \begin{cases} 2x + y + z = 2 & (E_1) \\ -y + 5z = 14 & (E'_2 = 2E_2 + E_1) \\ y - z = -14 & (E'_3 = 2E_3 - 3E_1) \end{cases}$$

Por último, operando con las ecuaciones  $E'_2$  y  $E'_3$  vamos a obtener el tercer sistema equivalente, pero solo con una incógnita:

$$(A') \begin{cases} 2x + y + z = 2 & (E_1) \\ -y + 5z = 14 & (E'_2 = 2E_2 + E_1) \\ y - z = -14 & (E'_3 = 2E_3 - 3E_1) \end{cases} \rightarrow (A'') \begin{cases} 2x + y + z = 2 & (E_1) \\ -y + 5z = 14 & (E'_2) \\ 4z = 0 & (E''_3 = E'_2 + E'_3) \end{cases}$$

La última ecuación nos da un resultado inmediato:

$$4z = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = 0}$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$-y + 5z = 14 \Leftrightarrow -y + 5(0) = 14 \Leftrightarrow -y = 14 \Leftrightarrow \boxed{y = -14}$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$2x + (-14) + 0 = 2 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow \boxed{x = 8}$$

El sistema tiene una única solución:  $(x, y, z) = (8, -14, 0)$

## 1.4 Clasificación de los sistemas lineales

Los sistemas pueden tener o no solución. Cuando un sistema tiene solución es **compatible**. En este caso puede tener una única solución o infinitas. Cuando tiene una sola solución es **compatible determinado** y cuando tiene infinitas soluciones es **compatible indeterminado**. Cuando un sistema no tiene solución es **incompatible**.