BSM

Blockchain School
for Management

Tema 3 - Algebra Matricial

Módulo II - Programación en R

Nicolás Forteza

2022-11-07

¿Por qué álgebra lineal?

- Es una técnica fundamental usada en análisis de datos, y de forma más avanzada, en la modelización de datasets.
- Es muy beneficioso entender la álgebra *from scratch* para entender otras librerías de R.
- Es un sistema de notación que permite pensar a un nivel más superficial, y no tan profundo, punto por punto/dato por dato.

- Las matrices, como vimos en el tema anterior, pueden verse como una “hoja de cálculo”, pero con su propia álgebra.
- Las librerías por lo general “protejen” al usuario de realizar las operaciones matriciales, que pueden llegar a ser muy complejas.

Una matriz tiene m filas y n columnas.

Una matriz 2 x 2 tiene 2 filas y 2 columnas. Notación: a_{ij}; i=fila; j: columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Row & Column vectors

Existen tambien matrices cuya *m* o *n* puede ser igual a 1. En ese caso, lo llamamos *row vector* o *column vector*:

- *Column vector*: matriz con dimensión *m x 1*.
- *Row vector*: matriz con dimensión *1 x n*.

Ejemplo de *row vector*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Si tenemos dos matrices con exactamente el mismo número de dimensiones, podemos hacer la suma de una forma intuitiva:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Si realizamos una multiplicación:

$$AxB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Ejercicio

- Crea una matriz de 2x2 y guárdalo en X
- Crea una matriz de 2x2 y guárdalo en Y
- Suma las matrices
- Multiplica las matrices, primero XY, luego YX ¿Cambia el resultado?

Si queremos sumar o multiplicar 2 matrices:

```
A <- matrix(c(1, 2, 3, 2), nrow=2, ncol=2)
B <- matrix(c(4, 2, 3, 1), nrow=2, ncol=2)
A + B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    5    6
[2,]    4    3
```

```
A * B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    4    9
[2,]    4    2
```

Si tenemos diferences dimensiones en las matrices y las queremos multiplicar, el número de las columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la primera.

En R, hay que usar otro tipo de operador para esta operación!

```
A <- matrix(c(1, 2, 3), nrow=2, ncol=3)
B <- matrix(c(4, 2, 3), nrow=3, ncol=2)
A %*% B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]   16   16
[2,]   19   19
```

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

- Tenemos una matriz X con dimensión igual a $1x3$, y una matriz Y con dimensión $3x1$. Si las multiplicamos, ¿cuál será la dimensión de la matriz resultante?
- Tenemos una matriz X con dimensión igual a $2x3$, y una matriz Y con dimensión $2x3$. Si las multiplicamos, ¿cuál será la dimensión de la matriz resultante?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```r
A <- matrix(c(1, 2, 3), nrow=1)
# voilá!
t(A)
```

```
     [,1]
[1,]    1
[2,]    2
[3,]    3
```

Algunas propiedades

Con la transposición de matrices, se cumplen las siguientes propiedades:

$$(A^T)^T = A; (A + B)^T = A^T + B^T; (AB)^T = B^T A^T$$

Las denominadas matrices simétricas se dan cuando se cumple que:

$$A^T = A$$

Ejercicio

- Crea una matriz de $350x200$ y otra de $800x200$. Transpón las matrices para poder multiplicarlas y multiplícalas.
- Inspecciona el elemento.
- ¿Cuánto ocupa en memoria?

Solución

```r
X = matrix(data=rnorm(500), nrow = 350, ncol = 200)
Y = matrix(data=rnorm(500), nrow = 200, ncol = 800)
C = X %*% Y
```

Y una matriz diagonal es la que está compuesta por ceros excepto en la diagonal.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$$

```
diag(c(1, 2, 3))
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    3
```

La matriz *identidad* es aquella matriz compuesta por 1s en su diagonal:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
diag(1, 3)
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
```

Ejercicio

- Crea una matriz cuadrada de 3 x 3 y calcula su diagonal con el comando `diag`.

Invertibilidad

Decimos que una matriz es invertible si encontramos una matriz B tal que:

$$AB = BA = I$$

En este caso, $B = A^{-1}$, A^{-1} es la inversa de A.

```r
X <- matrix(rnorm(9), nrow = 3, ncol = 3)
solve(X)
```

```
          [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 1.7904682  1.6598354 -0.8824046
[2,] 0.1096412 -0.1701106 -0.6151119
[3,] 0.4965760  1.1585700 -0.6151225
```

Un matriz A es ortogonal si se cumple la siguiente condición:

$$A^{-1} = A^{T}$$

Otra forma de definir la ortogonalidad es:

$$AA^{T} = I$$