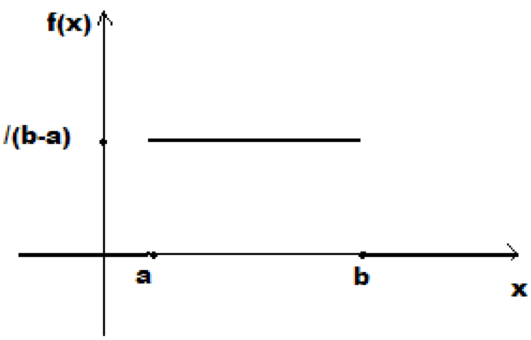
3.7 - Variables aleatorias continuas importantes

Distribución uniforme

La distribución continua más sencilla es análoga a su contraparte discreta.

Una v.a. continua X se dice que tiene ***distribución uniforme en el intervalo*** $[a,b]$, con $a < b$, si tiene función de densidad de probabilidad dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } \ a\le x\le b\\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$



La figura muestra la gráfica de la *f.d.p.*

Notación: $X \sim U[a,b]$

Es fácil verificar que *f(x)* es una *f.d.p.* pues $f(x)\ge 0$ para todo x, y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\,x\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}(b-a)=1$$

La F.d.a. para $a\le x\le b$ sería

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_a^x \frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}$$

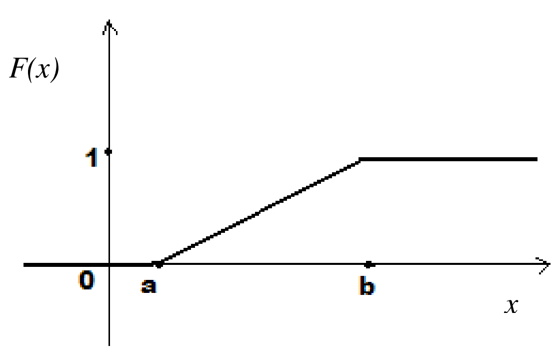
Para $x<a$, tenemos que $P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

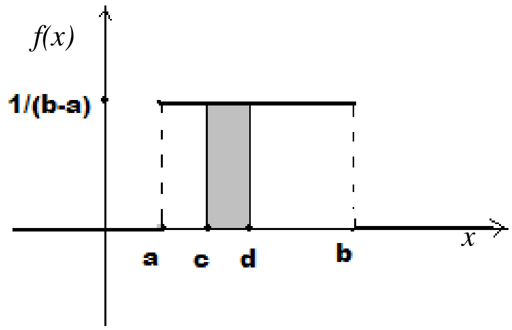
Y para $x>b$ tenemos que $P(X\le x)=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_a^b \frac{1}{b-a}dt+\int_b^x 0dt=1$

Por lo tanto la F.d.a. es

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } \ x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } \ a\le x\le b\\ 1 & \text{si } \ x>b\end{cases}$$

Y su gráfica es





Observación:

Si $X \sim U[a,b]$ y $a \le c < d \le b$, entonces

$$P(c \le X \le d) = F(d) - F(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$

Ejemplo:

Los colectivos de una determinada línea llegan a una parada en particular en intervalos de 15 minutos comenzando desde las 7 A.M. Esto es, ellos llegan a la parada a las 7, 7:15, 7:30, 7:45 y así siguiendo. Si un pasajero llega a la parada en un tiempo que se puede considerar una v.a. distribuida uniformemente entre 7 y 7:30, encontrar la probabilidad de que

a) el pasajero espere menos de 5 minutos al colectivo

b) el pasajero espere más de 10 minutos al colectivo

Solución:

Sea X: "tiempo en minutos desde las 7 hs en que el pasajero llega a la parada"

Entonces podemos considerar que $X \sim U[0,30]$

a) si el pasajero espera menos de 5 minutos al colectivo, entonces llega a la parada entre las 7:10 y 7:15 o entre las 7:25 y 7:30, entonces la probabilidad pedida es

$$P(10 \le X \le 15) + P(25 \le X \le 30) = \int_{10}^{15} \tfrac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \tfrac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

O también se puede plantear directamente

$$P(10 \le X \le 15) + P(25 \le X \le 30) = \frac{15-10}{30} + \frac{30-25}{30} = \frac{2 \times 5}{30} = \frac{1}{3}$$

b) Análogamente si debe esperar más de 10 minutos, deberá llegar entre las 7 y las 7:05 o entre las 7:15 y 7:20, por lo tanto la probabilidad pedida es

$$P(0 \le X \le 5) + P(15 \le X \le 20) = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{2 \times 5}{30} = \frac{1}{3}$$

Esperanza y varianza

Sea una X variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo $[a,b]$, es decir $X \sim U[a,b]$. Entonces, $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ y $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dem.)

Recordamos que la *f.d.p.* de una v.a. $X \sim U[a,b]$ es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Notar que $(a+b)/2$ representa el punto medio del intervalo $[a,b]$ (como es de esperar por el significado de la distribución y de la esperanza):
Calculamos ahora la varianza de X

Deseamos calcular $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, es decir

$V(X) = E(X^2) - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. Debemos obtener $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}.\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{b^2+b.a+a^2}{3}.$$ Entonces:

$$V(X) = \frac{b^2+b.a+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución normal o gaussiana

Sea X una v.a. Decimos que tiene distribución normal con parámetros μ y σ si su *f.d.p.* es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty \qquad (13)$$

Donde $\mu \in R$ y $\sigma > 0$

<u>Notación</u>: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Para darse una idea de la forma de la gráfica notar que:

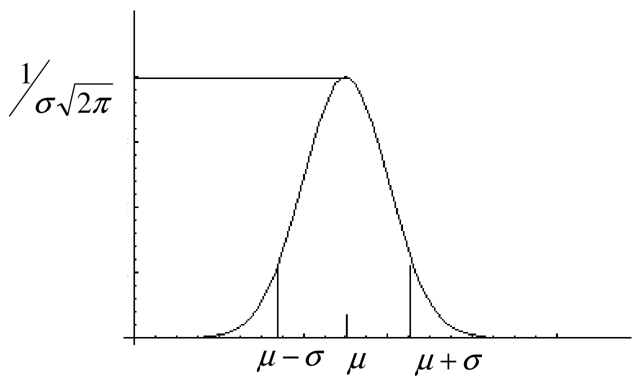
1- $f(x)$ es simétrica alrededor de μ, es decir $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ para todo x

2- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (eje x asíntota horizontal)

3- Si planteamos $\dfrac{d}{dx} f(x) = 0 \Rightarrow x = \mu$. Se pude verificar que en $x = \mu$ la función tiene un máximo absoluto, $f(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

4- Si planteamos $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0 \Rightarrow x = \mu \pm \sigma$. Se puede verificar que en $x = \mu - \sigma$ y en $x = \mu + \sigma$ la función tiene dos puntos de inflexión, y además en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ la función es cóncava hacia abajo y fuera de ese intervalo es cóncava hacia arriba

La gráfica de $f(x)$ tiene forma de campana

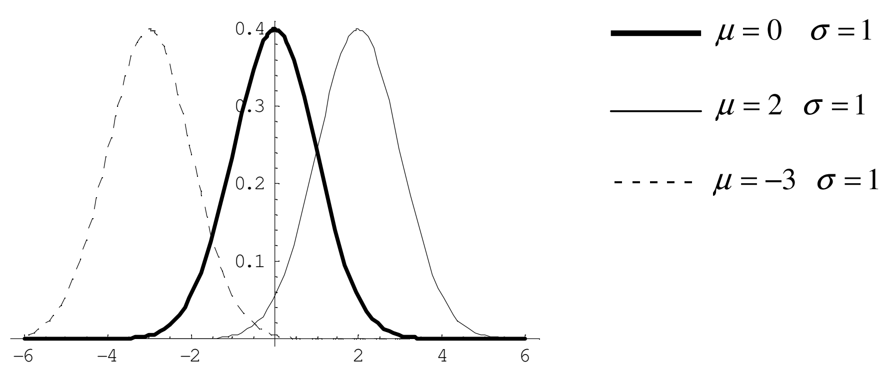


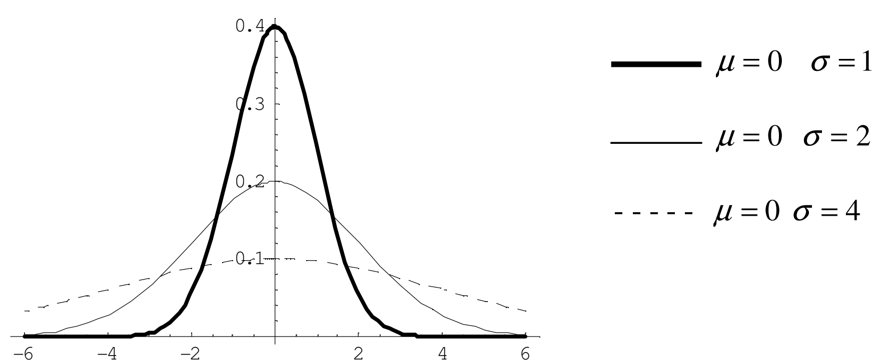
Observación:

Cuando μ varía la gráfica de la función se ***traslada***, μ ***es un parámetro de posición***.

Cuando σ aumenta, la gráfica se "achata", cuando σ disminuye la gráfica se hace mas "puntiaguda", se dice que σ ***es un parámetro de escala***.

En las siguientes figuras vemos cómo varía la gráfica de *f(x)* con la variación de los parámetros





Se puede probar que f(x) es una *f.d.p.* es decir que

a) $f(x) \geq 0$ para todo x

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Que a) es cierta es obvio; para probar b) es necesario recurrir al cálculo en dos variables (no lo demostramos).

Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ entonces se dice que *X* tiene ***distribución normal estándar***. Se anota $X \sim N(0,1)$

En este caso la *f.d.p.* se simboliza con $\varphi(x)$, es decir

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

En este caso la gráfica de la densidad es simétrica con respecto al origen.
La *F.d.a.* de una v.a. normal estándar se anota $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

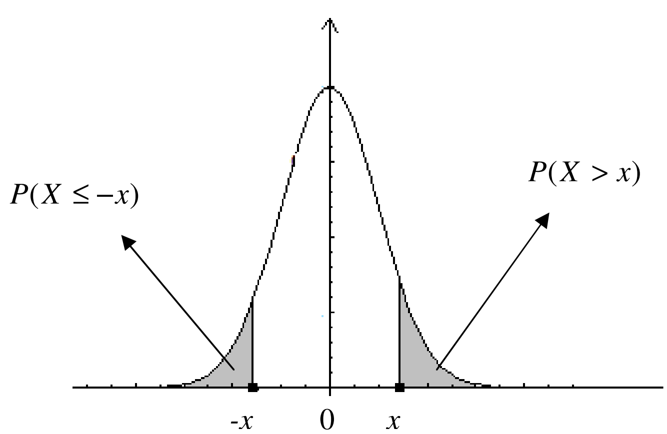
Esta integral no puede expresarse en términos de funciones elementales, por lo tanto se calcula $\Phi(x)$

Para valores específicos de *x* mediante una aproximación numérica.

Esto ya está hecho, existen tablas de la función de distribución acumulada de la normal estándar para valores de *x* que oscilan en general entre -4 y 4, pues para valores de *x* ***menores que -4***, $\Phi(x) \approx 0$, y para valores de *x* ***mayores que 4***, $\Phi(x) \approx 1$

Notar que como la $\varphi(x)$ es simétrica con respecto al origen entonces

$$\Phi(-x) = P(X \leq -x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$



Por ejemplo, si $X \sim N(0,1)$ entonces utilizando la tabla de la *F.d.a.* de X

a) $P(X \leq 1.26) = \Phi(1.26) = 0.89616$

b) $P(X > 1.26) = 1 - P(X \leq 1.26) = 1 - \Phi(1.26) = 1 - 0.89616 = 0.10384$

c) $P(X > -1.37) = P(X \leq 1.37) = \Phi(1.37) = 0.91465$

d) $P(-1.25 < X < 0.37) = P(X < 0.37) - P(X < -1.25) = \Phi(0.37) - \Phi(-1.25) =$

$= \Phi(0.37) - (1 - \Phi(1.25)) = 0.64431 - (1 - 0.89435) = 0.53866$

e) ¿Para qué valor x se cumple que $P(-x < X < x) = 0.95$?

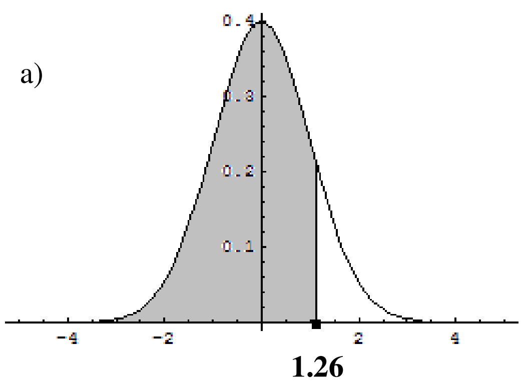
Tenemos que $P(-x < X < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$

Por lo tanto $2\Phi(x) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = \dfrac{0.90 + 1}{2} = 0.975$

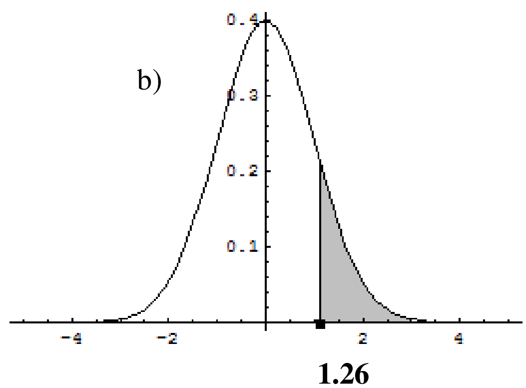
Observamos en la tabla de la F.d.a. que $x = 1.96$, pues $\Phi(1.96) = 0.975$

Para los incisos a) , b) y c) se grafican las regiones correspondientes

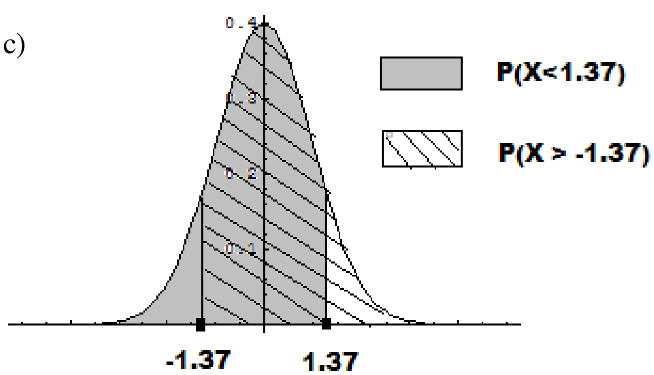
a)



b)



c)



Una propiedad importante de la distribución normal es que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces la v.a. $Y = aX + b$ con a y b números reales, $a \neq 0$, tiene también distribución normal pero con parámetros $a\mu + b$ y $a^2\sigma^2$, es decir

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \qquad (14)$$

Podemos demostrar lo anterior primero hallando la *F.d.a.* de Y

$$G(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)\underset{a>0}{=}P\left(X\le\frac{y-b}{a}\right)=F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$ donde F es la F.d.a. de X

Por lo tanto, la f.d.p. de Y la obtenemos derivando *G(y)*

$$g(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\frac{d}{dy}F\left(\frac{y-b}{a}\right)=f\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2}$$ donde $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Operando en el exponente se llega a

$$g(y)=\frac{1}{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma}\right)^2}$$

Si $a<0$ entonces

$$G(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P\left(X\ge\frac{y-b}{a}\right)=1-F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Y derivando con respecto a y obtenemos

$$g(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\frac{d}{dy}\left(1-F\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)=-f\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{a}=-\frac{1}{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

O sea, para $a\neq 0$ la *f.d.p.* de Y es $g(y)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma}\right)^2}$

Y comparando con (13) se deduce que $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

Una consecuencia importante del resultado (14) es que

$$\boxed{\text{si}\quad X\sim N(\mu,\sigma^2)\quad\text{entonces}\quad Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)}\qquad(15)$$

Notar que Y se pude escribir como $Y=\frac{1}{\sigma}X+\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$ es decir claramente Y es una función lineal de X

Por lo tanto aplicamos el resultado (14) con $a=\frac{1}{\sigma}$ y $b=-\frac{\mu}{\sigma}$ y llegamos a (15).

Si $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces la *F.d.a.* de X es

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$$

F(x) no puede expresarse en términos de funciones elementales y sólo hay tablas de la F.d.a. de la normal estándar.

Para calcular *F(x)* procedemos de la siguiente forma

$$F(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$Y \sim N(0,1)$$

Ejemplos:

1- Si $X \sim N(3,9)$ entonces

a) $P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5-3}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.3779$

b) $P(X > 0) = P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.8413$

c) $P(|X-3| > 6) = 1 - P(|X-3| \le 6) = 1 - [P(-6 \le X - 3 \le 6)] = 1 - \left[P\left(\frac{-6}{3} \le \frac{X-3}{3} \le \frac{6}{3}\right)\right] =$

$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 2[1 - \Phi(2)] = 0.0456$

2- Hay dos máquinas para cortar corchos destinados para usarse en botellas de vino. La primera produce corchos con diámetros que están normalmente distribuidos con media de 3 cm y desviación estándar de 0.1 cm. La segunda máquina produce corchos con diámetros que tienen una distribución normal con media de 3.04 cm y desviación estándar de 0.02 cm. Los corchos aceptables tienen diámetros entre 2.9 cm y 3.1 cm. ¿Cuál máquina tiene mas probabilidad de producir un corcho aceptable?

Solución:

Sean las variables aleatorias

X: "diámetro de un corcho producido por la máquina 1"

Y: "diámetro de un corcho producido por la máquina 2"

Entonces $X \sim N(3, 0.1^2)$ y $Y \sim N(3.04, 0.02^2)$

Calculamos cuál es la probabilidad que la máquina 1 produzca un corcho aceptable

$P(2.9 \le X \le 3.1) = P\left(\frac{2.9-3}{0.1} \le \frac{X-3}{0.1} \le \frac{3.1-3}{0.1}\right) = \Phi\left(\frac{3.1-3}{0.1}\right) - \Phi\left(\frac{2.9-3}{0.1}\right) =$

$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

Análogamente para la máquina 2

$P(2.9 \le Y \le 3.1) = P\left(\frac{2.9-3.04}{0.02} \le \frac{Y-3.04}{0.02} \le \frac{3.1-3.04}{0.02}\right) = \Phi\left(\frac{3.1-3.04}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{2.9-3.04}{0.02}\right) =$

$= \Phi(3) - \Phi(-7) = 0.9987 - 0 = 0.9987$

Entonces es más probable que la máquina 2 produzca corchos aceptables.

3- El dispositivo automático de apertura de un paracaídas militar de carga se ha diseñado para abrir el paracaídas cuando éste se encuentre a 200 m de altura sobre el suelo. Supongamos que la altitud de apertura en realidad tiene una distribución normal con valor medio de 200 m y desviación estándar de 30 m. Habrá un daño al equipo si el paracaídas se abre a una altitud de menos de 100 m. ¿Cuál es la probabilidad de que haya daño a la carga en al menos uno de cinco paracaídas lanzados independientemente?

Solución:

Sea la v.a. *X*: "altitud de apertura en metros de un paracaídas"

Entonces $X \sim N(200, 30^2)$

Calculamos $P(X < 100) = \Phi\left(\dfrac{100-200}{30}\right) = \Phi(-3.33) = 0.0004$

Consideramos ahora la v.a. Y: "número de paracaídas entre 5 que se abren a menos de 100 metros"
Podemos considerar que $Y \sim B(5,\ 0.0004)$
Por lo tanto hay que calcular $P(Y \geq 1)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.0004^0 (1-0.0004)^{5-0} = 1-(1-0.0004)^5 = 0.0019984$$

4- Supóngase que la resistencia a romperse (en Kgr) de fibras de yute está descrita por una v.a. continua X normalmente distribuida con $\mu = E(X) = 165$ Kgr y $\sigma^2 = V(X) = 9$ (Kgr)^2. suponiendo además que una muestra de esta fibra se considera defectuosa si $X < 162$. Cuál es la probabilidad de que una fibra elegida al azar sea defectuosa?

Solución:
Deseamos conocer $P(X < 162)$

$$P(X < 162) = P\left(\frac{X-165}{3} < \frac{162-165}{3}\right) = P\left(\frac{X-165}{3} < -1\right) = \Phi(-1),$$

puesto que $Z = \dfrac{X-165}{3} \sim N(0,1)$. Entonces

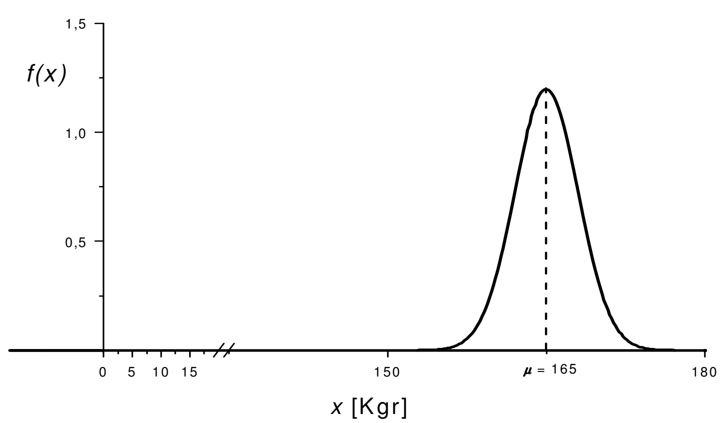
$P(X < 162) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$.

De la tabla tenemos $\Phi(1) = 0.8413 \rightarrow \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$.

Es decir $P(X < 162) = 0.1587$.

Observación:
Uno puede objetar el usar una distribución normal para describir a la v.a. X que representa la resistencia a romperse de la fibra ya que ésta es, obviamente, una cantidad no negativa, mientras que una v.a. normalmente distribuida puede tomar valores que varían entre $-\infty$ y $+\infty$. Sin embargo al modelar el problema con una normal (que aparentemente debería ser invalidada como modelo por lo señalado) vemos que les estamos asignando al suceso $\{X < 0\}$ una probabilidad prácticamente nula (ver también la figura siguiente):

$$P(X < 0) = P\left(\frac{X-165}{3} < \frac{0-165}{3}\right) = \Phi(-55) = 1 - \Phi(55) \approx 1 - 1 = 0.$$



En casos como estos se justifica usar la distribución normal para modelar situaciones en que la variable aleatoria considerada puede tomar, por su significado, sólo valores positivos, aún cuando la normal permita tomar valores tanto positivos como negativos por cuanto la probabilidad de que la v.a. tome valores negativos es prácticamente nula.

Esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución normal

Sea $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$

Dem.) Usaremos el resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$$

Calculamos la esperanza de X

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$ hacemos la sustitución

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma} \quad\rightarrow\quad x=(\sigma.t+\mu),\quad dt=\frac{dx}{\sigma} \quad y \quad -\infty<t<+\infty.$$

Luego:

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma.t+\mu).e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Considerado como función de *t*, el integrando de la primera integral $f(t)=te^{-\frac{t^2}{2}}$ es una función impar de *t*, es decir, verifica $f(-t)=-f(t)$. En consecuencia la integral a lo largo de un intervalo simétrico con respecto al origen, como lo es $(-\infty,\infty)$ se anula.

El segundo sumando, por su parte, es justamente μ veces la integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$. Entonces $E(X)=\mu$.

Veamos el cálculo de la varianza de X

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)-\mu^2$. Nos queda evaluar $E(X^2)$,

$$E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$. Hacemos nuevamente la sustitución

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma} \quad\rightarrow\quad x=(\sigma.t+\mu),\quad dt=\frac{dx}{\sigma} \quad y \quad -\infty<t<+\infty.$$ Reemplazando:

$$E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma.t+\mu)^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{2\sigma.\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t.e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Ahora el integrando de la segunda integral es impar y por lo tanto se anula. Entonces

$E(X^2) = \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2$.

Debemos calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Integrando por partes

$$\text{con} \begin{cases} u = t & du = dt \\ dv = te^{-\frac{t^2}{2}} dt & v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \; .$$

El corchete de Barrow se anula en ambos extremos y la integral es justamente $\sqrt{2\pi} I = \sqrt{2\pi}$. Entonces : $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Por lo tanto $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ y, en consecuencia,

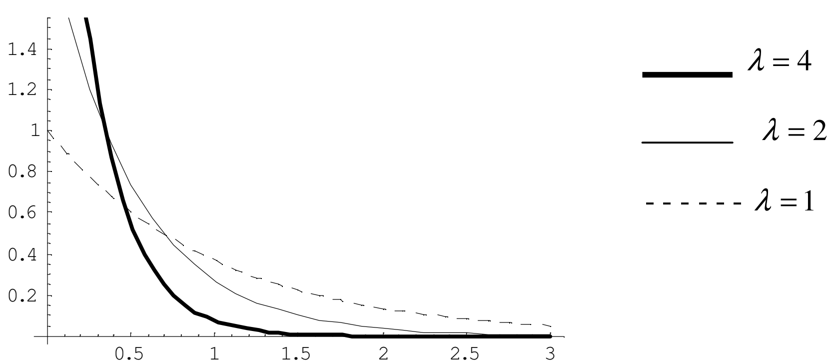
$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

Distribución exponencial

Sea X una v.a. continua. Se dice que tiene distribución exponencial con parámetro λ si su f.d.p. es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad \text{donde} \quad \lambda > 0$$

La distribución exponencial se utiliza algunas veces para modelar el tiempo que transcurre antes de que ocurra un evento. A menudo se lo llama ***tiempo de espera***.
La siguiente figura muestra la gráfica de la densidad para diferentes valores del parámetro



Es fácil verificar que *f(x)* es una densidad bien definida
a) Claramente $f(x) \geq 0$ para todo x

b) $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left(\dfrac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right) \Big|_0^{\infty} = 1$

La F.d.a. de una v.a. exponencial es sencilla:

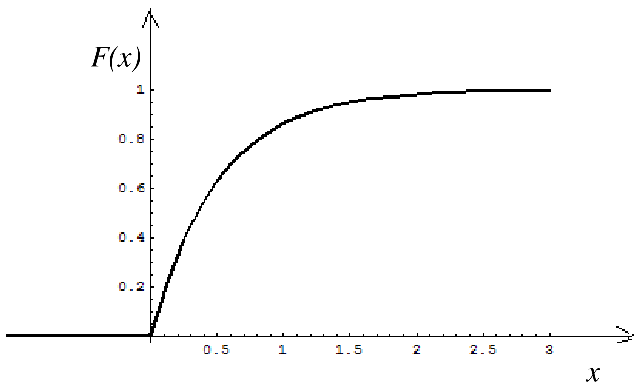
Si $x < 0$ entonces $F(x) = P(X \leq x) = 0$

Si $x \geq 0$ entonces $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left(\dfrac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right) \Bigg|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

Por lo tanto

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Su gráfica es



<u>Notación</u>: $X \sim Exp(\lambda)$

<u>Ejemplo</u>:
Supongamos que el tiempo, en segundos, de respuesta en cierta terminal de computadora en línea (es decir el tiempo transcurrido entre el fin de la consulta del usuario y el principio de la respuesta del sistema a esa consulta) se puede considerar como una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.2$. Calcular
a) la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea a lo sumo 10 segundos.
b) la probabilidad de que el tiempo de respuesta esté entre 5 y 10 segundos.

<u>Solución</u>:
Sea X la v.a., entonces $X \sim Exp(0.2)$
a) Se pide calcular $P(X \leq 10)$
Por lo tanto
$P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{-0.2 \times 10} = 1 - 0.135 = 0.865$
b) $P(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(5) = \left(1 - e^{-0.2 \times 10}\right) - \left(1 - e^{-0.2 \times 5}\right) = 0.233$

<u>Esperanza y varianza de la distribución exponencial</u>

$$\boxed{\text{Sea } X \sim Exp(\lambda) \text{ entonces } E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Dem.)
Es útil calcular en general $E(X^k)$ el ***momento de orden k con respecto al origen*** siendo k un número natural

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k f(x)dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx \qquad (k = 0,1,2,...).$$

Integrando por partes:

$$\begin{cases} u = x^k \\ dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \end{cases} \qquad \begin{cases} du = kx^{k-1}dx \\ v = -e^{-\lambda x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mu_k = -x^k e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-\lambda x}dx$$

. El corchete de Barrow se anula y queda $E(X^k) = k\lambda \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-\lambda x}dx$. Aplicando reiteradamente se llega finalmente a

$$E(X^k) = k(k-1)...2.1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = k!\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k$$

Por lo tanto tenemos para la esperanza y la varianza:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Propiedades de la distribución exponencial

1- **Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson**.

Sea *T* el tiempo de espera hasta el siguiente evento en un proceso de Poisson con parámetro λ.
Veamos cuál es la *F.d.a.* de *T*.
Si $t < 0$ entonces claramente $F(t) = P(T \le t) = 0$
Si $t \ge 0$ entonces para hallar $F(t) = P(T \le t)$ consideramos el evento complementario de $\{T \le t\}$.
Notar que $\{T > t\}$ si y solo si no ocurre ningún evento durante las siguientes t unidades de tiempo.
Si *X*: "número de eventos que ocurren en las siguientes *t* unidades de tiempo", entonces $\{T > t\}$ ocurre si y solo si $\{X = 0\}$ ocurre, por lo tanto $P(T > t) = P(X = 0)$
Como $X \sim P(\lambda t)$ entonces

$$P(T > t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

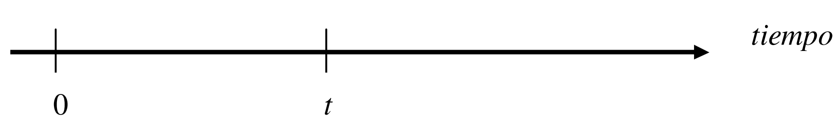
Por lo tanto

$$F(t) = P(T \le t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Como *F(t)* es la F.d.a. de una v.a. exponencial, entonces $T \sim Exp(\lambda)$
Por lo tanto

Si los eventos siguen un proceso de Poisson con parámetro λ, y si *T* representa el tiempo de espera desde cualquier punto inicial hasta el próximo evento, entonces $T \sim Exp(\lambda)$

Consideremos un aplicación hidrológica de estas ideas



i) $X =$ Nº de inundaciones en un período $[0,t]$ $\rightarrow$ $X \sim P(\lambda t)$

ii) λ = Nº medio de inundaciones por unidad de tiempo $\rightarrow$ $\lambda = \dfrac{E(X)}{t}$

iii) T = Tiempo transcurrido entre inundaciones $\rightarrow$ $T \sim Exp(\lambda)$

iv) $E(T)$ = Tiempo medio de retorno de las inundaciones $\rightarrow$ $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

2- **Propiedad falta de memoria**

La distribución exponencial tiene una propiedad conocida como falta de memoria, que se muestra en el siguiente ejemplo:
El tiempo de vida, en años, de un circuito integrado particular tiene una distribución exponencial con parámetro 0.5. Encuentre la probabilidad de que el circuito dure más de tres años
Sea la v.a. X : "tiempo de vida, en años, de un circuito integrado particular", entonces $X \sim Exp(0.5)$

Y $P(X > 3) = 1 - F(3) = e^{-1.5} = 0.223$

Supongamos ahora que actualmente un circuito tiene cuatro años y aún funciona. Se quiere hallar la probabilidad de que funcione tres años más.
Por lo tanto planteamos una probabilidad condicional

$$P / X > 7 / X > 4) = \frac{P(X > 7 \text{ y } X > 4)}{P(X > 4)} = \frac{P(X > 7)}{P(X > 4)} = \frac{e^{-0.5\times 7}}{e^{-0.5\times 4}} = e^{-0.5\times(7-4)} = e^{-1.5} = 0.223$$

Observamos que $P / X > 7 / X > 4) = P(X > 7 - 4) = P(X > 3)$

En general, la probabilidad que se tenga que esperar *t* unidades adicionales, dado que ya se han esperado *s* unidades, es la misma que la probabilidad de que se tenga que esperar *t* unidades desde el inicio. La distribución exponencial no "recuerda" cuánto tiempo se ha esperado.
En particular, si el tiempo de vida de un componente sigue una distribución exponencial, entonces la probabilidad de que un componente que tiene *s* unidades de tiempo dure *t* unidades de tiempo adicionales es la misma que la probabilidad de que un componente nuevo dure t unidades de tiempo. En otras palabras, un componente cuyo tiempo de vida siga una distribución exponencial no muestra ningún síntoma de los años o del uso.
Los cálculos hechos en el ejemplo anterior se pueden repetir para valores cualesquiera *s* y *t* y entonces se pude probar que

si $X \sim Exp(\lambda)$ y t y s son números positivos, entonces $P(X > t + s / X > s) = P(X > t)$