Álgebra Lineal

Nicolás Kossacoff

Octubre 2024

1. Vectores

Un vector en el espacio $\mathbb{R}^p$ es una lista ordenada de números:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$$

donde v_i es el i-ésimo elemento del vector.

1.1. Operaciones con vectores

- **Suma.** Dados dos vectores en $\mathbb{R}^p$, v y w, se define la suma de vectores como:

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \dots \\ v_p + w_p \end{pmatrix}$$

- **Producto por escalar.** Sea $a \in \mathbb{R}$ y v un vector en $\mathbb{R}^p$, definimos el producto de un vector por un escalar como:

$$a \cdot v = \begin{pmatrix} a \cdot v_1 \\ a \cdot v_2 \\ \vdots \\ a \cdot v_p \end{pmatrix}$$

  El producto por escalar nos permite estirar, comprimir o cambiar de signo un vector.

- **Producto escalar.** Sean v y w dos vectores en $\mathbb{R}^p$, definimos el producto escalar como la suma del producto de las coordenadas entre vectores:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{p} v_i w_i$$

A partir del producto escalar podemos definir la norma euclídea de un vector, la cual nos da su longitud:

$$||v||_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Algunas propiedades que cumplen los productos escalares son:

1. Si el producto escalar de un vector $v \in \mathbb{R}^p$ es nulo, entonces v es el vector nulo:
$$\langle v, v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$$

2. El producto escalar cumple con la propiedad de linealidad, es decir, distribuye la suma:
$$\langle \lambda v + w, z \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle w, z \rangle$$

3. El producto escalar es simétrico:
$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

- **Desigualdad Cauchy-Schwarz.** Sean v y w dos vectores en $\mathbb{R}^p$, entonces:

$$\langle v, w \rangle^2 \leq ||v||_2 ||w||_2$$

Reordenando la expresión anterior nos queda:

$$0 \leq \frac{\langle v, w \rangle^2}{||v||_2 ||w||_2} \leq 1$$

Aplicamos la raíz cuadrada:

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\sqrt{||v||_2 ||w||_2}} \leq 1$$

De esta última expresión se desprende que hay una relación entre el coseno del ángulo formado por los vectores y su producto escalar. En particular:

$$\langle v, w \rangle = \sqrt{||v||_2 ||w||_2} \cdot \cos(\theta)$$

Entonces, si el producto escalar entre los vectores es cero, es porque se cumple que el $\cos(\theta) = 0$. Esto ocurre cuando el ángulo formado por los dos vectores es igual a 90 grados, es decir, cuando los vectores son ortogonales.

2. Matrices

Las matrices son conjuntos de números representados de manera bidimensional. Entonces, una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ luce de la siguiente manera:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \forall i = \{1, \dots, n\}, j = \{1, \dots, m\}$$

2.1. Operaciones con matrices

- **Suma.** Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, definimos a la suma como:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

  es decir, sumamos los elementos de ambas matrices.

- **Producto por escalar.** Sean $A = (a_{ij})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos al producto por escalar como:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

  es decir, multiplicamos por λ a cada elemento de la matriz A.

- **Producto.** Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, definimos el producto de ambas matrices como:

$$C = A \cdot B = \sum_{l=1}^{m} a_{il} \cdot b_{lj}, \forall i = \{1, \ldots, n\}, j = \{1, \ldots, m\}$$

  es decir, es el producto escalar entre las filas y columnas. Es por esto que el producto de matrices es no conmutativo.

2.2. Propiedades

- Decimos que una matriz A es **semi-definida positiva** si para todo vector no nulo, $v \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $\langle v, Av\rangle \geq 0$.
- Una matriz cuadrada es **ortogonal** si al multiplicarla por su transpuesta, $A \cdot A'$, obtenemos la matriz identidad[1].

3. Espacio Vectorial

Un **espacio vectorial** es una terna $(V, +, \cdot)$, donde V es un conjunto, $+ : V \times V \to V$ es una operación llamada suma y $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ es otra operación llamada producto por escalar.

3.1. Propiedades

Ambas operaciones deben cumplir las siguientes propiedades para poder tener un espacio vectorial:

- La suma debe ser **asociativa**, es decir:

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$$

[1] Lo que ocurre detrás es que las filas/columnas son ortogonales entre sí.

- La suma debe ser **conmutativa**, es decir:

$$u + w = w + u, \forall u, w \in V$$

- Existe un **elemento neutro**, $e \in V$, tal que:

$$e + v = v + e = v, \forall v \in V$$

- Todo elemento $v \in V$ tiene un **elemento opuesto**, $h \in V$, tal que:

$$v + h = h + v = e$$

- Respecto al producto por escalar, se deben cumplir las siguientes propiedades:
  - $\lambda \cdot (\alpha v) = (\lambda\alpha)v, \forall v \in V$ y $\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$
  - $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, \forall u, v \in V$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
  - $1 \cdot v = v, \forall v \in V$

3.2. Sub-espacios

Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto de V. Se dice que S es un sub-espacio de V si cumple con las siguientes propiedades:

- El elemento neutro está contenido en el sub-espacio, $e \in S$.
- Tanto la suma como el producto por escalar de los elementos del sub-espacio S tienen que estar dentro de S:
  - Si $v, w \in S$, entonces $v + w \in S$.
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in S$, entonces $\lambda \cdot v \in S$.

3.2.1. Vectores Generadores

Si S es un sub-espacio, entonces existe un conjunto de vectores, $\{v_1, \ldots, v_q\}$, que lo generan. Ahora, para que esos vectores generen S, necesitamos que para todo elemento w del sub-espacio exista un conjunto de números reales, $\{a_1, \ldots, a_q\}$, tales que:

$$w = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_q \cdot v_q$$

Es decir, todos los elementos del sub-espacio S se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores generadores. Existe una cantidad mínima de vectores generadores.

Definition. *Utilizamos como notación $S = \langle v_1, \ldots, v_q \rangle$ para determinar que el sub-espacio S es generado por los vectores $\{v_1, \ldots, v_q\}$.*

Definition. *Si los vectores generadores son **linealmente independientes** entonces cumplen con la siguiente propiedad:*

$$w = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_q \cdot v_q = 0 \Longrightarrow a_i = 0, \forall i = \{1, \ldots, q\}$$

3.2.2. Base

Decimos que el conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_q\}$ es una base del espacio vectorial V si cumple con las siguientes condiciones:

- Son vectores generadores de V, es decir, $V = \langle v_1, \ldots, v_q \rangle$.
- Son vectores linealmente independientes.