Università degli Studi di Brescia
Corso di Teoria dei Segnali
Laboratorio di Matlab, A.A. 2016/2017

Lezione N.3, 015/03/2017

Questa sessione di laboratorio si occupa di distanze, norme, prodotti scalari e le relazioni che le legano e di proiezioni di segnali su basi.

- Si consiglia di utilizzare un asse temporale **t=-10:dt:10** con **dt=0.01**;
- Il comando **conj** opera la coniugazione.

[Esercizio 1] INTEGRALE NUMERICO

In questo esercizio si costruisce una semplice funzione per il calcolo numerico dell'integrale utilizzando il metodo dei rettangoli in avanti.

(i) Si implementi la funzione **integrale(x,dt)** che accetti in ingresso il vettore **x** con i valori del segnale da integrare e la distanza temporale **dt** tra i suoi elementi (cioè il passo dell'asse temporale **t**);

(ii) Se ne verifichi la funzionalità calcolando l'area e l'energia dei segnali $\mathrm{rect}(t)$, $\mathrm{tri}(t)$ e la potenza del segnale $\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$.

[Esercizio 2] DISTANZE, NORME, PRODOTTI SCALARI

Date le definizioni e le relazioni seguenti (valide per segnali di energia, estendibili nel solito modo ai segnali di potenza):

$$
\begin{aligned}
\|\underline{x}\| &= \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = d_2(\underline{x}, \underline{0}) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{W_x} \\
d_2(\underline{x}, \underline{y}) &= \|\underline{x} - \underline{y}\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{W_{x-y}} \\
\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle &= \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos\left(\angle(\underline{x}, \underline{y})\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \\
d_2^2(\underline{x}, \underline{y}) &= \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - 2\Re\left\{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle\right\} \\
|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| &\leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \quad \text{(dis. Schwarz)}
\end{aligned}
$$

verificarle usando i segnali (meglio costruirsi le funzioni **myNorm**, **myScalarProduct** e **myDistance**):

(i) $x_1(t) = 3 \cdot \mathrm{rect}\,(t)\,; \quad y_1(t) = \mathrm{tri}\,(t);$

(ii) $x_2(t) = \mathrm{tri}\,(t)\,; \quad y_2(t) = \mathrm{tri}\,(t-1);$

(iii) $x_3(t) = 2 \cdot e^{-|t|}; \quad y_3(t) = j \cdot \mathrm{tri}\,(t).$

[Esercizio 3] PROIEZIONE SU BASE ORTONORMALE

In questo esercizio si calcola l'approssimazione costante a tratti di un dato segnale che sia ottima in norma quadratica (ovvero che minimizzi l'energia dell'errore di approssimazione). L'approssimazione viene calcolata proiettando il segnale originale in uno spazio vettoriale generato dai segnali costituenti una base ortonormale. Definiamo $x(t) = 10\sin(t) \cdot (1 + \sqrt{|t|})$.

(i) Si consideri la base di funzioni $\Phi = \{\varphi_k(t)\},\ k = 1, \ldots, 20$, dove $\varphi_k(t) = \mathrm{rect}(t - k + 21/2)$. Si generi una matrice **B** di 20 righe che contenga nella k-esima riga il segnale $\varphi_k(t)$;

(ii) Si verifichi che Φ è ortonormale, calcolando una matrice **G** con i prodotti scalari incrociati tra i vettori della base, $\underline{\underline{G}} = \{\langle \underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_h \rangle\}$, e verificando che $\langle \underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_h \rangle = \delta_{hk}$, cioè $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{I}}$;

(iii) Si calcoli la proiezione di $\underline{x}$ su Φ, calcolando $\alpha_k = \langle \underline{x}, \underline{\varphi}_k \rangle$ e si costruisca infine il segnale **Appr_x** che rappresenta l'approssimazione $\hat{x}(t)$ di $x(t)$, ottenuta come $\underline{\hat{x}} = \sum_k \alpha_k \cdot \underline{\varphi}_k$, lo si disegni e si calcoli l'energia dell'errore di approssimazione.

[Esercizio 4] ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

(i) Si consideri la base non ortogonale $\Phi_2 = \{\phi_k(t)\},\ k = 1, \ldots, 21$, dove $\phi_k(t) = \mathrm{tri}(t-k+11)$. Si costruisca la matrice **B2** in modo analogo all'esercizio 3.(i) e la matrice **G2** in modo analogo all'esercizio 3.(ii), verificando che **G2** in questo caso non è diagonale (nello specifico essa è tridiagonale);

(ii) Si ortogonalizzi la base Φ_2, ottenendo $\Phi_3 = \{\psi_k(t)\}$, utilizzando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_1 &= \frac{\underline{\phi}_1}{\|\underline{\phi}_1\|} \\ \underline{v}_k|_{k\neq 1} &= \underline{\phi}_k - \sum_{r=1}^{k-1} \langle \underline{\phi}_k, \underline{\psi}_r \rangle \underline{\psi}_r\ , \qquad \underline{\psi}_k\Big|_{k\neq 1} = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|} \end{aligned}$$

Si calcoli quindi la proiezione di $\underline{x}$ su Φ_3 e si ripetano i passi dei punti (i)-(iii);

(iii) Provare ad eseguire il programma che implementa l'esercizio 3 e 4 con $x_2(t) = 10\sin(2\pi t) \cdot (1 + \sqrt{|t|})$ e provare a giustificare l'accaduto.