$$X \sim \exp(\lambda)$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad for\ x > 0$$

$$\mathbb{P}(X > 1) = \int_1^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} = [-e^{-\lambda x}]_1^{+\infty} = e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{P}(X > 2) = \int_2^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} = [-e^{-\lambda x}]_2^{+\infty} = e^{-2\lambda}$$

$$\mathbb{P}(X > 2|X > 1) = \frac{\mathbb{P}(X > 1 \cap X > 2)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{\mathbb{P}(X > 2)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{e^{-2\lambda}}{e^{-\lambda}} = e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X > 1)$$

Prove that $\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ for any $t, s > 0$:

$$\mathbb{P}(X > s) = [-e^{-\lambda x}]_s^{+\infty} = e^{-\lambda s}$$

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s \cap X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > t)} =$$

$$= \frac{[-e^{-\lambda x}]_{s+t}^{+\infty}}{[-e^{-\lambda x}]_t^{+\infty}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s - \lambda t + \lambda t} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s)$$

Therefore $\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s) \quad \forall\, s > 0,\ t > 0$.