

We are given a bowl that contains 6 balls, numbered from 1 to 6. We extract two balls and denote X and Y the numbers on the ball obtained at the first (second) extraction, and $W = \max(X, Y)$ the maximum value obtained.

1. In the first scenario, assume that the extractions are made with replacement.
2. In the second scenario, assume that the extractions are performed without replacement.
3. In the third scenario, assume that after the first extraction, we replace the ball in the urn, together with another one with the same number.

$$R_X = R_Y = R_W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

X = first extraction, Y = second extraction

$$W = \max(X, Y)$$

1.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$p_W(1) = \frac{1}{36} \quad p_W(2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad p_W(3) = \frac{5}{36}$$

$$p_W(4) = \frac{7}{36} \quad p_W(5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad p_W(6) = \frac{11}{36}$$

2.

x	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	x	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	x	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	x	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	x	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	x

$$p_W(1) = 0 \quad p_W(2) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \quad p_W(3) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$p_W(4) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \quad p_W(5) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \quad p_W(6) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

3.

1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,6

$$p_W(1) = \frac{2}{42} = \frac{1}{21} \quad p_W(2) = \frac{4}{42} = \frac{2}{21} \quad p_W(3) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

$$p_W(4) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21} \quad p_W(5) = \frac{10}{42} = \frac{5}{21} \quad p_W(6) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$