



Apuntes

Nicolas Muñoz

Teoría De Integración
Licenciatura en Matemática
Pontificia Universidad Católica - Chile

2 de septiembre de 2025

Índice

1. Introducción a la Integración de Riemann	2
1.1. Particiones y Sumas de Riemann	2
1.2. Sumas de Darboux	2
1.3. Integrales de Darboux	3
1.4. Medida de un conjunto	4
1.5. Limitaciones de la Integral de Riemann	4
1.6. Teorema Fundamental del Cálculo	4
2. Extendiendo la Integral de Riemann	4
2.1. La Función Longitud	5

1. Introducción a la Integración de Riemann

1.1. Particiones y Sumas de Riemann

Definición 1.1. Una partición de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\pi \subseteq [a, b]$ tal que $a, b \in \pi$. Denotaremos a las particiones como $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ donde los puntos están ordenados, es decir $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \dots, n$ son llamados los intervalos de la partición. A veces identificaremos la partición con $(I_i)_{i=1, \dots, n}$.

Definición 1.2. La norma de una partición π se define como:

$$\|\pi\| := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \pi} |I_i|$$

Definición 1.3. Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\pi^* = (\pi, \epsilon)$, donde $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, y $\epsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. La norma de una partición marcada se define como $\|\pi^*\| = \|\pi\|$.

Definición 1.4 (Suma de Riemann). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\pi^* = (\pi, \epsilon)$ una partición marcada. La suma de Riemann de f asociada a π^* se define como:

$$S_R(f, \pi^*) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} f(x_i^*)|I_i|$$

Definición 1.5 (Integrabilidad de Riemann). Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite:

$$\lim_{\|\pi^*\| \rightarrow 0} S_R(f, \pi^*)$$

Esto significa que $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\|\pi^*\| < \delta$, entonces $\|S_R(f, \pi^*) - L\| < \epsilon$. Cuando este límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a, b]$ y lo denotamos por $\int_a^b f(x)dx$.

1.2. Sumas de Darboux

Definición 1.6. Dadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\pi = (I_i)_{i=1, \dots, n}$ una partición de $[a, b]$, definimos:

- $m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x)$
- $M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x)$
- La suma inferior de Darboux: $\underline{S}(f; \pi) := \sum_{i=1}^n m_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} m_{I_i}|I_i|$
- La suma superior de Darboux: $\overline{S}(f; \pi) := \sum_{i=1}^n M_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} M_{I_i}|I_i|$

Observación 1.7. Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$ para todo $x \in I_i$, para cualquier partición marcada $\pi^* = (\pi, \epsilon)$, se tiene que:

$$\underline{S}(f; \pi) \leq S_R(f; \pi^*) \leq \overline{S}(f; \pi)$$

Definición 1.8 (Refinamiento). Una partición π' de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición π si $\pi \subset \pi'$. Equivalentemente, si para todo $J_i \in \pi'$ existe $I_i \in \pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Proposición 1.9. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces:

- Si $\pi \subseteq \pi'$ son particiones de $[a, b]$, entonces $\underline{S}(f; \pi) \leq \underline{S}(f; \pi')$ y $\overline{S}(f; \pi) \geq \overline{S}(f; \pi')$.
- Si π_1, π_2 son particiones de $[a, b]$ cualesquiera, entonces $\underline{S}(f; \pi_1) \leq \overline{S}(f; \pi_2)$.

1.3. Integrales de Darboux

Definición 1.10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como:

$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{\pi \text{ part. de } [a, b]} \overline{S}(f; \pi)$$

- La integral inferior (de Darboux) de f como:

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{\pi \text{ part. de } [a, b]} \underline{S}(f; \pi)$$

Teorema 1.11. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \underline{S}(f; \pi), \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \pi)$$

Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $\|\pi_n\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f; \pi_n) \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \pi_n)$$

Teorema 1.12 (Criterios de Integrabilidad). Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es integrable Darboux, es decir, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} (\overline{S}(f; \pi) - \underline{S}(f; \pi)) = 0$.
4. Para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $\|\pi_n\| \rightarrow 0$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f; \pi_n) - \underline{S}(f; \pi_n)) = 0$.
5. Existe una sucesión $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f; \pi_n) - \underline{S}(f; \pi_n)) = 0$.

Observación 1.13. Las integrales en el sentido de Darboux (1) y el de Riemann (2) coinciden.

Proposición 1.14. ▪ Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.

- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

1.4. Medida de un conjunto

Definición 1.15. Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface que para todo $x, y \in I$, se tiene que $z \in I$ para todo z tal que $\min\{x, y\} \leq z \leq \max\{x, y\}$.

Definición 1.16. La medida de un intervalo $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se define como $|I| := \sup I - \inf I$. Se define $|\emptyset| := 0$ y $|x| := 0$ para un punto.

Si $I \subseteq J$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definición 1.17. Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\epsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^d tal que $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \epsilon$.

Teorema 1.18. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es Riemann integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

1.5. Limitaciones de la Integral de Riemann

La integral de Riemann tiene algunas limitaciones:

1. Solo está definida para funciones acotadas y en intervalos $[a, b]$ acotados. Las integrales impropias resuelven parcialmente este problema.
2. La convergencia puntual no siempre garantiza la intercambiabilidad del límite y la integral. Es decir, $f_n \rightarrow f$ puntualmente no implica que $\lim \int f_n = \int \lim f_n$. Ejemplos como $f_n(x) = n\chi_{(0, 1/n]}$ en $[0, 1]$ muestran esta limitación.

Teorema 1.19. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq R([a, b])$ y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces $f \in R([a, b])$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

1.6. Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 1.20 (Teorema Fundamental del Cálculo). Si $f \in R([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

Nota 1.21. Este “casi” no puede removerse. Hay contraejemplos notables:

- **Teorema de Hankel (1871):** Existe $f \in R([a, b])$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún punto en un subconjunto denso de $[a, b]$.
- **Teorema de Volterra (1881):** Existe una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que es derivable en $[a, b]$ y su derivada f' es acotada en $[a, b]$, pero $f' \notin R([a, b])$.

2. Extendiendo la Integral de Riemann

Una manera de extender el concepto de la integral es a través de funciones escalonadas.

Definición 2.1 (Función Escalonada). Una función $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice escalonada si existe una partición $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ y constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $\phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Cualquier función escalonada se puede escribir como una combinación lineal de funciones características de intervalos. La integral de una función escalonada se define como:

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i |I_i|$$

2.1. La Función Longitud

Sea \mathcal{I} la colección de todos los intervalos en \mathbb{R} . La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ se define como $\lambda(I) := |I|$.

La función longitud λ tiene las siguientes propiedades:

- $\lambda(\emptyset) = 0$.
- **Monotonía:** Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ y $I_1 \subseteq I_2$, entonces $\lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.
- **Aditividad Finita:** Si $I \in \mathcal{I}$ tal que $I = \cup_{i=1}^n J_i$ con $J_i \in \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^n \lambda(J_i)$.
- **Aditividad Contable (σ -aditividad):** Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ con $(I_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **σ -subaditividad:** Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **Invarianza por traslaciones:** $\lambda(I + x) = \lambda(I)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\lambda(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nos gustaría extender λ a una clase más grande que \mathcal{I} . Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$, donde \mathcal{M} es una colección de subconjuntos de \mathbb{R} tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M}$, $m(E)$ represente la "longitud" de E . Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. m es σ -aditiva ($E, (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}, E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$);
- (1) + (2) + (3) $\implies m$ es monóton, σ -subaditiva y finitamente aditiva.
- 4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(E + x) = m(E) \forall x \in \mathbb{R}$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal m que cumpla (1) – (2) – (3) – (4) y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla (1) – (2) – (3). (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla (1) – (2) – (3)).

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1) \implies TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3) pidiendo solo (hay dos opciones):
 - \rightarrow aditividad finita \implies "medidas finitamente aditivas";
 - \rightarrow σ -subaditividad \implies "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender λ es la siguiente:

- i. Si $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$ entonces definimos $\lambda(E) = \sum_{i=1}^n \lambda(I_i)$;
- ii. Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
- iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(I)$ para todo I abierto en \mathbb{R} ;
- iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

Definición 2.2 (premedida). Sea X un conjunto no vacío y C una colección de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in C$. Diremos que una aplicación $\mathcal{T} : C \rightarrow [0, \infty]$ es una premedida si $\mathcal{T}(\emptyset) = 0$.

Observación 2.3. El conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección C será llamada una clase (de subconjuntos de X).

Intuitivamente, C representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y \mathcal{T} nos da su medida.

1. **Premedida de Lebesgue:** $\mathcal{T}\{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ intervalo}\}, \mathcal{T}(I) = |I|$.
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

Observemos que, por monotonía, existen límites

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\infty) \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ F(-\infty) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase $\tilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de \mathbb{R} dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}\{I(a, b) : \} & \text{ donde } I(a, b) = (a, b] \cap \mathbb{R} \\ & = \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\}. \end{aligned}$$

Definimos la premedida \mathcal{T}_F de Lebesgue-Stieltjes asociada a F como la aplicación $\mathcal{T}_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$, dada por

$$\mathcal{T}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a).$$

Nota 2.4. Observar que si $F(x) = x$ entonces \mathcal{T}_F es la premedida de Lebesgue (sobre $\tilde{\mathcal{I}}$).

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si F es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que F es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida \mathcal{T}_F se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en \mathbb{R}).

Observación 2.5. $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. Premedida...

Definición 2.6 (semiálgebra). Sea X un espacio y C una clase de subconjuntos de X . Decimos que C es una semiálgebra (de subconjuntos de X) si cumple:

1. $\emptyset \in C$;
2. (C es cerrada por intersecciones finitas) $A, B \in C \implies A \cap B \in C$;
3. Si $A \in C$, existen $C_1, \dots, C_n \in C$ disjuntos tal que $A^c = \bigcup_{i=1}^n C_i$.

1. La clase \mathcal{I}_d de intervalos en \mathbb{R}^d es una semiálgebra.
2. La clase $\tilde{\mathcal{I}}\{(a, b] \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ es una semiálgebra.
3. Si X e Y son espacios y C_X, C_Y son semiálgebras en X e Y respectivamente, entonces

$$C_X \times C_Y \{F \times G : F \in C_X, G \in C_Y\}$$

es una semiálgebra en $X \times Y$, llamada "semiálgebra producto".

Definición 2.7 (álgebra). Sean X un espacio y A una clase de subconjuntos de X . Decimos que A es un álgebra (de subconjuntos de X) si cumple que:

- (i) $\emptyset \in A$;
- (ii) A es cerrado por intersecciones finitas;
- (iii) (A es cerrada por complementos) $A \in A \implies A^c \in A$.

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

- (ii') (A es cerrada por uniones finitas) $A, B \in A \implies A \cup B \in A$. (**Dem:** Ejercicio!)

1. X espacio, $A_1\{\emptyset, X\}$, $A_2\mathcal{P}(X)$ son álgebras (donde A es llamada el álgebra trivial);
2. Sea S una semiálgebra de subconjuntos de un espacio X . Entonces

$$A\{E \subseteq X : \exists S_1, \dots, S_n \in S \text{ disjuntos tal que } E = \bigcup_{i=1}^n S_i\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por S . Notemos que $A(S)$ es el menor álgebra que contiene a S :

- (i) $A(S)$ es un álgebra y $S \subseteq A(S)$;
- (ii) Si A' es un álgebra con $S \subseteq A'$ entonces $A(S \subseteq A')$.

Nota 2.8. Toda álgebra es una semiálgebra.

Definición 2.9 (σ -álgebra). Una clase (no vacía) M de subconjuntos de un espacio X se dice una σ -álgebra si cumple:

- 1. $\emptyset \in M$;
- 2. $E \in M \implies E^c \in M$;
- 3. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in M$.

Llamamos al par (X, M) un espacio medible y a los elementos de M , conjuntos medibles.

Nota 2.10.

- 1. Todo σ -álgebra es un álgebra;
- 2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por

$$(iii') \quad (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in M.$$

- 1. σ -álgebra \implies álgebra \implies semiálgebra (no valen las recíprocas);
- 2. $\{\emptyset, X\}, \mathcal{P}(X)$ son σ -álgebras;
- 3. Si $(M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ son σ -álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma \{E \subseteq X : E \in M_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

es una σ -álgebra.

- 4. Si M es una clase de subconjuntos de X , entonces

$$\sigma(M) = \bigcap_{\substack{M \text{ } \sigma\text{-álgebra} \\ C \subseteq M}} M$$

es la σ -álgebra generada por C . De hecho, $\sigma(M)$ es la menor σ -álgebra que contiene a C :

- a) $\sigma(C)$ es σ -álgebra y $C \subseteq \sigma(C)$;
 - b) Si F es σ -álgebra y $C \subset F$ entonces $\sigma(C) \subseteq F$.
5. Si (X, T) es un espacio topológico, $\sigma(T)$ se conoce como la σ -álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos $\beta(X)$ ($= \sigma(T)$).

$\beta(\mathbb{R})$ contiene a todos los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo G_δ y F_σ, \dots . De hecho, $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}})$.

Definición 2.11. Sea C una clase (no vacía) de subconjuntos de X y $\mu : C \rightarrow [0, \infty]$ una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

- (i) μ es **monótona** (en M) si $A, B \in C, A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$;
- (ii) μ es **finitamente aditiva** si $(A_i)_{i=1, \dots, n} \subseteq C$ disjuntos $\implies \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$;
- (iii) μ es **σ -aditiva** si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ disjuntos $\implies \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$;
- (iv) μ es **σ -subaditiva** si $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_n)$, para todo $A \in C$ y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Observación 2.12. Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in C, A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i, A_i \in C \forall i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si C es una semiálgebra y μ es monótona (siempre será el caso para nosotros).

Definición 2.13 (premedida finita y σ -finita). Una premedida $\mathcal{T} : C \rightarrow [0, \infty]$ se dice:

- 1. **finita** si $X \in C$ y $\mathcal{T} < \infty$;
- 2. **σ -finita** si existen $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ disjuntos tales que $\bigcup_{n=1}^\infty C_n = X$ y $\mathcal{T}(C_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

- 1. finita $\implies \sigma$ -finita;
- 2. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ es σ -finita pero no finita;
- 3. Si F es una función de L-S, entonces $\mathcal{T}_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$ es siempre σ -finita ($\mathcal{T}_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \forall n \in \mathbb{Z}$) y es finita si y sólo si $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$.

Definición 2.14 (medida). Sea (X, M) es un espacio medible. Diremos que $\mu : M \rightarrow [0, \infty]$ es una medida (en (X, M)) si:

- 1. $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2. μ es σ -subaditiva en M ($\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$).

Llamamos a la terna (X, M, μ) un espacio de medida.

Objetivo. Construir un espacio de medida (\mathbb{R}, M, μ) tal que $\mathcal{I} \subseteq M$ y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E + x) = \mu(E) \quad \forall E \in M. \end{cases}$$

[Espacios de Probabilidad] Si (X, M, μ) es un EdM tal que $\mu(X) = 1$, (X, M, μ) recibe el nombre de espacios de probabilidad.

- X recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota Ω (en lugar de X);
- M se suele notar como F (ó Y). Sus elementos se dicen eventos;
- μ recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota \mathbb{P} .

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en \mathbb{R} (o en \mathbb{R}^d).

1. **Distribuciones discretas:** $\exists S \subseteq \mathbb{R}$ numerable y $(p_x)_{x \in S} \subseteq [0, 1]$ tal que $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A \cap S} p_x$. Binomial, Geométrica, Poisson,...
2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:** $\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ "integrable" tal que $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$. Uniforme, Exponencial, Normal,...

Propiedades generales de una medida. Si μ es una medida sobre (X, M) , entonces:

1. μ es monótona (en M);
2. μ es σ -subaditiva;
3. μ es **continua por debajo**: si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$) entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4. μ es **continua por arriba**: si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ es decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n \forall n$) y $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algún n_0 ($\implies \mu(A_n) < \infty \forall n \geq n_0$), entonces

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si $\mu(A_n) = \infty \forall n \in \mathbb{N}$)

Definición 2.15 (premedida extendible y unívocamente extendible). Una premedida $\mathcal{T} : S \rightarrow [0, \infty]$ definida sobre una semiálgebra de subconjunto de X , se dice:

1. **Extendible** si es
 - (E1) finitamente aditiva en S ;
 - (E2) σ -subaditiva en S .
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
 - (E3) σ -finita

Observación 2.16. Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

Teorema 2.17 (Extensión de Carathéodory). Dados un espacio X y una premedida \mathcal{T} sobre una semiálgebra S de subconjuntos de X tal que \mathcal{T} es extendible, existe una extensión de \mathcal{T} a una medida $\mu_{\mathcal{T}}$ definida sobre $\sigma(S)$ la σ -álgebra generada por S . Más aún, si \mathcal{T} es unívocamente extendible, entonces la extensión $\mu_{\mathcal{T}}$ a $\sigma(S)$ es única.

Por último, si \mathcal{T} es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}$ sobre la $\mu_{\mathcal{T}}$ -completación de $\sigma(S)$, i.e. la σ -álgebra $\overline{\sigma(S)}$ dada por

$$\overline{\sigma(S)}\{B \cup N : B \in \sigma(S), \exists \tilde{N} \in \sigma(S) \text{ con } N \subseteq \tilde{N} \text{ y } \mu_{\mathcal{T}}(\tilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}(B \cap N)\mu_{\mathcal{T}}(B)$.

Observación 2.18. Si $\mathcal{T} : S \rightarrow [0, \infty]$ es σ -aditiva en S y S es una semiálgebra, entonces \mathcal{T} es extendible.

Observación 2.19. La extensión puede no ser única si \mathcal{T} no es σ -finita.

$$\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Q} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

Nota 2.20.

- $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$ es una semiálgebra;
- $\sigma(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \stackrel{\text{Ej!}}{=} \sigma(\tilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (9.52)
- $\mathcal{T} : \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, \infty]$, dada por $\mathcal{T}(A) \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset, A \in \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ (Observar que \mathcal{T} no es σ -finita)
- Para cada $r > 0$, $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\mu_r(A)r(\#A)$ es una extensión de \mathcal{T} (y es una medida)

Definición 2.21 (espacio completo y conjuntos μ -nulos). Sea (X, M, μ) un EdM y definamos

$$N_{\mu}\{E \subset X : \exists N \in M \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de N_{μ} se dicen conjuntos μ -nulos. Diremos que (X, M, μ) es completo si $N_{\mu} \subseteq M$

Observación 2.22. $(X, \overline{\sigma(S)}, \overline{\mu_{\mathcal{T}}})$ es completo. En efecto, $N_{\overline{\mu_{\mathcal{T}}}}$ corresponde al subconjunto de $\overline{\sigma(S)}$ que se obtiene tomando $B = \emptyset$.

Observación 2.23. Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

- (i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud λ (sobre $\tilde{\mathcal{I}}$) y las premedidas de probabilidad).
- (ii) Premedidas de Lebesgue en \mathbb{R}^d , con $d \in \mathbb{N}$.

En particular;

Corolario 2.24. Para cada función F de Lebesgue-Stieltjes, existe una σ -álgebra M_F sobre \mathbb{R} y una única medida μ_F en (\mathbb{R}, M_F) tal que

$$\mu_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además, $\beta(\mathbb{R}) \subseteq M_F$. Es decir, μ_F es una medida que extiende a \mathcal{T}_F , a todo M_F (y en particular, a todo $\beta(\mathbb{R})$). Además, (\mathbb{R}, M_F, μ_F) es un EdM completo. $(M_F \sigma(\tilde{\mathcal{I}})^F, \mu_F \overline{\mu_{\mathcal{T}_F}})$. La medida μ_F se conoce como medida de L-S asociada a F . En particular, para cualquier función de distribución F , existe una única medida de probabilidad \mathbb{P}_F en $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que $F \rightarrow \mathbb{P}_F$ es una biyección)

Nota 2.25. Los β son los Borelianos y $I(a, b) = (a, b] \cap \mathbb{R}$. (super $F \rightarrow 10.26$).

[Importante!] **Medida de Lebesgue en \mathbb{R} .** Tomando $F = id$ en el Corolario anterior, obtenemos una σ -álgebra $L(\mathbb{R})M_{id}$ con $\beta(\mathbb{R}) \subseteq L(\mathbb{R})$ y una medida μ_{id} en $(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}))$ tal que $\mu_{id}(I(a, b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. En particular, de esto se deduce que $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en \mathbb{R}), y los elementos de $L(\mathbb{R})$ se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación $\mu_{id}(E)\lambda(E)|E|$. La medida μ_{id} es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y $L(\mathbb{R})$ son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos $A \in L(\mathbb{R})$ tal que $\mu_{id}(A) = 0$ (lo veremos más adelante!).

[Medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d] Si \mathcal{I}_d son los intervalos en \mathbb{R}^d y definimos $\mathcal{T} : \mathcal{I}_d \rightarrow [0, \infty]$ como $\mathcal{T}(I)|I|$, entonces \mathcal{I}_d es una semiálgebra y \mathcal{T} es una premedida σ -aditiva en \mathcal{I}_d (lo veremos después). Por lo tanto, \mathcal{T} se puede extender (de manera única, pues \mathcal{T} es σ -finita) a una medida μ_δ sobre la σ -álgebra $L(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}_d)^\mathcal{T}$, llamada medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d y $L(\mathbb{R}^d)$ es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en \mathbb{R}^d . Al igual que antes, dado $E \in L(\mathbb{R}^d)$, notamos $|E|\mu_\mathcal{T}(E)$.

Demostración del teorema de extensión de Carathéodory

Paso 1: Medidas Exteriores

Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo,

$$|E|_e = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervalos, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Proof. \geq) Tomando $I_1 = I, I_{n+1} = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

\leq) Por la σ -subaditividad de λ en \mathcal{I} : si $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ entonces $\lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$. \square

Definición 2.26 (Medida exterior inducida por una premedida). Sea X un espacio, C una clase de subconjuntos de X y $\mathcal{T} : C \rightarrow [0, \infty]$ una premedida. Definimos la medida exterior inducida por \mathcal{T} como la aplicación $\mu_\mathcal{T}^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$\mu_\mathcal{T}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i) : (C_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq C \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right\}$$

con la convención de que $\inf \emptyset = \infty$.

μ_λ^* = medida exterior de Lebesgue y la notamos $|E|_e \mu_\lambda^*(E)$.
Idealmente, nos gustaría que $\mu_{\mathcal{T}}^*$ cumpla

$$\begin{cases} (C1) \mu_{\mathcal{T}^*}(C) = \mathcal{T}(C) \quad \forall C \in \mathcal{C} \\ (C2) \mu_{\mathcal{T}}^* \text{ es } \sigma\text{-subaditiva en } P(X) \end{cases}$$

no tienen por qué cumplirse ninguna de la 2:

$$(C1) \quad X = \{a, b\}, \quad C = \{\emptyset, \{a\}, X\}, \quad \mathcal{T}(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 2 & A = \{a\} \\ 1 & A = X \end{cases} \quad \mathcal{T}(\{a\}) = 2, \quad \mu_{\mathcal{T}}^*(\{a\}) = 1 \neq \mathcal{T}(\{a\}).$$

(C2) Medida exterior de Lebesgue no es σ -aditiva (lo vemos mas adelante!)

Proposición 2.27. Si \mathcal{T} es una premedida sobre una semiálgebra S que satisface

(E2) \mathcal{T} es σ -subaditiva en S ,

entonces $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) = \mathcal{T}(A) \quad \forall A \in S$ (i.e. $\mu_{\mathcal{T}}^*$ cumple (C1)).

Demostración. $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \mathcal{T}(A)$. Tomando $C_1 = A \in S$, $C_{n+1} = \emptyset \in S$. Luego $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es cubrimiento de A por elementos de S y luego

$$\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n) = \mathcal{T}(A)$$

$\mathcal{T}(A) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(A)$. Si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ es un cubrimiento de $A \in S$ entonces por (E2), tenemos que $\mathcal{T}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n)$. Tomando \inf sobre tales cubrimientos, resulta $\mathcal{T}(A) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(A)$. \square

Teorema 2.28. Sean X un espacio, \mathcal{C} una clase de subconjuntos de X y $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una premedida. Entonces,

1. $\mu_{\mathcal{T}}^*(\emptyset)$;
2. $\mu_{\mathcal{T}}^*$ es monótona ($A \subseteq B \implies \mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(B)$);
3. $\mu_{\mathcal{T}}^*$ es σ -subaditiva ($A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \implies \mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{T}}^*(A_n)$).

Demostración. 1. $\mu_{\mathcal{T}}^*(\emptyset) \geq 0$ es por definición. Para ver que $\mu_{\mathcal{T}}^*(\emptyset) \leq 0$, tomamos el cubrimiento $C_n = \emptyset$ y repetimos el argumento de la Proposición anterior.

2. Si $\mu_{\mathcal{T}}^*(B) = \infty$, la desigualdad es inmediata. Si $\mu_{\mathcal{T}}^*(B) < \infty$, entonces existen cubrimientos de B por elementos de S . Sea $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ un cubrimiento de B . Entonces, $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es también cubrimiento de A y, luego, $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n)$. Como esto es cierto para todo cubrimiento $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B , tomando ínfimo en la desigualdad anterior sobre tales cubrimientos resulta $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(B)$.

3. Dado $\varepsilon > 0$, sea $(C_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ un cubrimiento de A_n tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i^{(n)}) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Luego, notando que $(C_i^{(n)} : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$ es un cubrimiento de A , obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{T}}^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_{\mathcal{T}}^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{T}}^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_1 \end{aligned}$$

Luego, $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{T}}^*(A_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtenemos la σ -subaditividad de $\mu_{\mathcal{T}}^*$. □

Definición 2.29 (medida exterior). Sea X un espacio. Decimos que $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$ es una medida exterior si:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \implies \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

1. Medidas exteriores generadas por una premedida;
2. Si $(\mu_{\gamma}^*)_{\gamma \in \Gamma}$ son medidas exteriores sobre X , entonces

$$\mu^*(A) \sup_{\gamma \in \Gamma} \mu_{\gamma}^*(A)$$

es una medida exterior (Ej. Guía 3).

3. Medida exterior s -dimensional de Hausdorff en \mathbb{R}^d .

- Si I es un intervalo en \mathbb{R}^d , entonces $|rI| = r^d |I|$;
- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es medible Lebesgue, entonces $|rE| = r^d |E|$;
- En particular, si $E = B(x, r)$, entonces

$$|E| = |B(0, r)| = |rB(0, 1)| = r^d |B(0, 1)| = C_d (\text{diam} E)^d, \quad C_d = \frac{|B(0, 1)|}{2^d}$$

- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es "s-dimensional" H_s es la medida que queremos, entonces

$$H_s(E) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} H_s(E \cap B(x_i, r_i)) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E \cap B(x_i, r_i)))^s$$

Teniendo eso en cuenta, dados $d \in \mathbb{N}, s \in [0, d], \delta > 0$, definimos

- $C_{\delta} A \subseteq \mathbb{R}^d : \text{diam } A < \delta$.

- $H_s^{(\delta)}(E) \inf \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{diam } A_n)^s : (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_\delta, E \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$

Observar que si $\delta < \delta$ entonces $H_s^{(\delta)}(E) \geq H_s^{(\delta)}(E)$. Luego, podemos definir:

$$H_s(E) = \sup_{\delta > 0} H_s^{(\delta)}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_s^{(\delta)}(E)$$

Definición 2.30. Sea X un espacio y $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$ medida exterior. Decimos que $E \subseteq X$ es un conjunto μ^* -medible si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X$$

observación. Que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ vale siempre (por σ -subaditividad de μ^*). Luego, para ver que E es μ^* -medible, baste ver que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$

Teorema 2.31. Sea μ^* una medida exterior sobre un espacio X . Entonces:

- (1) $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es μ^* -medible.
- (2) La clase \mathcal{M}_{μ^*} de conjuntos μ^* -medibles es un σ -álgebra.
- (3) La restricción μ de μ^* a \mathcal{M}_{μ^*} es una medida.

En particular, $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$ es un espacio de medida completo.