PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Apuntes

Nicolas Muñoz

Teoria De Integración
Licenciatura en Matemática
Pontificia Universidad Católica - Chile

7 de septiembre de 2025

Índice

1. Introducción a la Integración de Riemann

1.1. Particiones y Sumas de Riemann

Definición 1.1. Una partición de un intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\pi \subseteq [a,b]$ tal que $a,b \in \pi$. Denotaremos a las particiones como $\pi = \{x_0,\ldots,x_n\}$ donde los puntos están ordenados, es decir $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1},x_i]$ para $i = 1,\ldots,n$ son llamados los intervalos de la partición. A veces identificaremos la partición con $(I_i)_{i=1,\ldots,n}$.

Definición 1.2. La norma de una partición π se define como:

$$||\pi|| := \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \pi} |I_i|$$

Definición 1.3. Una partición marcada de $[a,b]$ es un par $\pi^* = (\pi,\epsilon)$, donde $\pi = \{x_0,\ldots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, y $\epsilon = \{x_1^*,\ldots,x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1,\ldots,n$. La norma de una partición marcada se define como $||\pi^*|| = ||\pi||$.

Definición 1.4 (Suma de Riemann)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\pi^* = (\pi,\epsilon)$ una partición marcada. La suma de Riemann de f asociada a π^* se define como:

$$S_R(f,\pi^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} f(x_i^*)|I_i|$$

Definición 1.5 (Integrabilidad de Riemann)**.** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite:

$$\lim_{||\pi^*|| \to 0} S_R(f,\pi^*)$$

Esto significa que $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $||\pi^*|| < \delta$, entonces $||S_R(f,\pi^*) - L|| < \epsilon$. Cuando este límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a,b]$ y lo denotamos por $\int_a^b f(x)dx$.

1.2. Sumas de Darboux

Definición 1.6. Dadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\pi = (I_i)_{i=1,\ldots,n}$ una partición de $[a,b]$, definimos:

- $m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x)$
- $M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x)$
- La suma inferior de Darboux: $\underline{S}(f;\pi) := \sum_{i=1}^n m_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} m_{I_i}|I_i|$
- La suma superior de Darboux: $\overline{S}(f;\pi) := \sum_{i=1}^n M_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} M_{I_i}|I_i|$

Observación 1.7. Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$ para todo $x \in I_i$, para cualquier partición marcada $\pi^* = (\pi,\epsilon)$, se tiene que:

$$\underline{S}(f;\pi) \leq S_R(f;\pi^*) \leq \overline{S}(f;\pi)$$

Definición 1.8 (Refinamiento)**.** Una partición π' de $[a,b]$ es un refinamiento de otra partición π si $\pi \subset \pi'$. Equivalentemente, si para todo $J_i \in \pi'$ existe $I_i \in \pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Proposición 1.9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces:

- Si $\pi \subseteq \pi'$ son particiones de $[a,b]$, entonces $\underline{S}(f;\pi) \leq \underline{S}(f;\pi')$ y $\overline{S}(f;\pi) \geq \overline{S}(f;\pi')$.
- Si π_1, π_2 son particiones de $[a,b]$ cualesquiera, entonces $\underline{S}(f;\pi_1) \leq \overline{S}(f;\pi_2)$.

1.3. Integrales de Darboux

Definición 1.10. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\pi \text{ part. de } [a,b]} \overline{S}(f;\pi)$$

- La integral inferior (de Darboux) de f como:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\pi \text{ part. de } [a,b]} \underline{S}(f;\pi)$$

Teorema 1.11. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||\pi|| \to 0} \underline{S}(f;\pi), \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||\pi|| \to 0} \overline{S}(f;\pi)$$

Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones de $[a,b]$ tal que $||\pi_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;\pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\pi_n)$$

Teorema 1.12 (Criterios de Integrabilidad)**.** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es integrable Darboux, es decir, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{||\pi||\to 0}(\overline{S}(f;\pi) - \underline{S}(f;\pi)) = 0$.
4. Para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones de $[a,b]$ tal que $||\pi_n|| \to 0$, se tiene que $\lim_{n\to\infty}(\overline{S}(f;\pi_n) - \underline{S}(f;\pi_n)) = 0$.
5. Existe una sucesión $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty}(\overline{S}(f;\pi_n) - \underline{S}(f;\pi_n)) = 0$.

Observación 1.13. Las integrales en el sentido de Darboux (1) y el de Riemann (2) coinciden.

Proposición 1.14.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

1.4. Medida de un conjunto

Definición 1.15. Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface que para todo $x, y \in I$, se tiene que $z \in I$ para todo z tal que $\min\{x, y\} \leq z \leq \max\{x, y\}$.

Definición 1.16. La medida de un intervalo $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se define como $|I| := \sup I - \inf I$. Se define $|\emptyset| := 0$ y $|x| := 0$ para un punto.

Si $I \subseteq J$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definición 1.17. Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\epsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^d$ tal que $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| < \epsilon$.

Teorema 1.18. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es Riemann integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

1.5. Limitaciones de la Integral de Riemann

La integral de Riemann tiene algunas limitaciones:

1. Solo está definida para funciones acotadas y en intervalos $[a, b]$ acotados. Las integrales impropias resuelven parcialmente este problema.
2. La convergencia puntual no siempre garantiza la intercambiabilidad del límite y la integral. Es decir, $f_n \to f$ puntualmente no implica que $\lim \int f_n = \int \lim f_n$. Ejemplos como $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n]}$ en $[0, 1]$ muestran esta limitación.

Teorema 1.19. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R([a, b])$ y $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces $f \in R([a, b])$ y $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

1.6. Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 1.20 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** Si $f \in R([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

Nota 1.21. Este çasi"no puede removerse. Hay contraejemplos notables:

- **Teorema de Hankel (1871):** Existe $f \in R([a, b])$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún punto en un subconjunto denso de $[a, b]$.
- **Teorema de Volterra (1881):** Existe una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que es derivable en $[a, b]$ y su derivada f' es acotada en $[a, b]$, pero $f' \notin R([a, b])$.

2. Extendiendo la Integral de Riemann

Una manera de extender el concepto de la integral es a través de funciones escalonadas.

Definición 2.1 (Función Escalonada)**.** Una función $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice escalonada si existe una partición $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ y constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $\phi|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Cualquier función escalonada se puede escribir como una combinación lineal de funciones características de intervalos. La integral de una función escalonada se define como:

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|$$

2.1. La Función Longitud

Sea $\mathcal{I}$ la colección de todos los intervalos en $\mathbb{R}$. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ se define como $\lambda(I) := |I|$.

La función longitud λ tiene las siguientes propiedades:

- $\lambda(\emptyset) = 0$.
- **Monotonía:** Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ y $I_1 \subseteq I_2$, entonces $\lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.
- **Aditividad Finita:** Si $I \in \mathcal{I}$ tal que $I = \cup_{i=1}^{n} J_i$ con $J_i \in \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i)$.
- **Aditividad Contable (σ-aditividad):** Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ con $(I_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **σ-subaditividad:** Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **Invarianza por traslaciones:** $\lambda(I + x) = \lambda(I)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\lambda(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nos gustaría extender λ a una clase más grande que $\mathcal{I}$. Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, donde $\mathcal{M}$ es una coleccción de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M}$, $m(E)$ represente la "longitud"de E. Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. m es σ-aditiva $(E,\ (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M},\ E = {}_{n=1}^{\infty} E_n \implies m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n))$;

$(1) + (2) + (3) \implies m$ es monóton, σ-subaditiva y finitamente aditiva.

4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(E + x) = m(E)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal m que cumpla $(1) - (2) - (3) - (4)$ y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla $(1) - (2) - (3)$. (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla $(1) - (2) - (3)$).

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1) $\implies$ TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3) pidiento solo (hay dos opciones):

  $\to$ aditividad finita $\implies$ "medidas finitamente aditivas";
  $\to$ σ-subaditividad $\implies$ "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender λ es la siguiente:

i. Si $E = {}_{i=1}^{n} I_i$ entonces defninimos $\lambda(E) \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$;

ii. Si $E = {}_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;

iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(6)$ para todo 6 abierto en $\mathbb{R}$;

iv. Para conjuntos mas generales, .^{a}proximar"por abiertos.

Definición 2.2 (premedida)**.** Sea X un conjunto no vacío y C una colección de subconjuntos de X tal que $\varnothing \in C$. Diremos que una aplicación $\mathcal{T} : C \to [0, \infty]$ es una premedida si $\mathcal{T}(\varnothing) = 0$.

Observación 2.3. El conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección C será llamada una clase (de subconjuntos de X).

Intuitivamente, C representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño"sabemos medir y $\mathcal{T}$ nos da su medida.

1. **Premedida de Lebesgue:** $C\mathcal{I}\{I \subseteq \mathbb{R} \ : \ I \text{ intervalo}\}, \ \mathcal{T}(I)|I|$.
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha ($\lim_{x \to x_0}^{+} F(x) = F(x_0)$). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

Observemos que, por monotonía, existen límites

$$\left\{ \begin{array}{c} F(\infty) \lim_{x \to \infty} F(x) \\ F(-\infty) \lim_{x \to -\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase $\widetilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{I}}\{I(a,b) \ : \} & \text{ donde } I(a,b)(a,b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a,b] \ : \ -\infty \leq a \leq b\} \cup \{(a,\infty) \ : \ -\infty \leq a < \infty\}.. \end{aligned}$$

Definimos la premedida $\mathcal{T}_F$ de Lebesgue-Stieltjes asociada a F como la aplicación $\mathcal{T}_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$, dada por

$$\mathcal{T}_F(I(a,b)) = F(b) - F(a).$$

Nota 2.4. Observar que si $F(x) = x$ entonces $\mathcal{T}_F$ es la premedida de Lebesgue (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$.

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si F es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que F es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida $\mathcal{T}_F$ se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en $\mathbb{R}$).

Observación 2.5. $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F(I(-\infty,\infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. **Premedida...**

Definición 2.6 (semiálgebra)**.** Sea X un espacio y C una clase de subconjuntos de X. Decimos que C es una semiálgebra (de subconjuntos de X) si cumple:

1. $\varnothing \in C$;
2. (C es cerrada por intesecciones finitas) $A, B \in C \implies A \cap B \in C$;
3. Si $A \in C$, existen $C_1, \dots, C_n \in C$ disjuntos tal que $A^c = {}_{i=1}^{n} C_i$.

1. La clase $\mathcal{I}_d$ de intervalos en $\mathbb{R}^d$ es una semiálgebra.
2. La clase $\widetilde{\mathcal{I}}\{(a,b] \cap \mathbb{R} \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ es una semiálgebra.
3. Si X e Y son espacios y C_X, C_Y son semiálgebras en X e Y respectivamente, entonces

$$C_X \times C_Y \{F \times G \ : \ F \in C_X, \ G \in C_Y\}$$

es una semiálgebra en $X \times Y$, llamada "semiálgebra producto".

Definición 2.7 (álgebra)**.** Sean X un espacio y A una clase de subconjuntos de X. Decimos que A es un álgebra (de subconjuntos de X) si cumple que:

(i) $\varnothing \in A$;

(ii) A es cerrado por intersecciones finitas;

(iii) (A es cerrada por complementos) $A \in A \implies A^c \in A$.

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

(ii') (A es cerrada por uniones finitas) $A, B \in A \implies A \cup B \in A$. (**Dem:** Ejercicio!)

1. X espacio, $A_1\{\varnothing, X\}$, $A_2\mathcal{P}(X)$ son álgebras (donde A es llamada el álgebra trivial);
2. Sea S una semiálgebra de subconjuntos de un espacio X. Entonces

$$A\{E \subseteq X \ : \ \exists S_1, \dots, S_n \in S \text{ disjuntos tal que } E = {}_{i=1}^{n} S_i\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por S. Notemos que $A(S$ es el menor álgebra que contiene a S:

(i) $A(S)$ es un álgebra y $S \subseteq A(S)$;

(ii) Si A' es un álgebra con $S \subseteq A'$ entonces $A(S \subseteq A'$.

Nota 2.8. Toda álgebr es una semiálgebra.

Definición 2.9 (σ-álgebra)**.** Una clase (no vacía) M de subconjuntos de un espacio X se dice una σ-álgebra si cumple:

1. $\varnothing \in M$;
2. $E \in M \implies E^c \in M$;
3. $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \implies \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in M$.

Llamamos al par (X, M) un espacio medible y a los elementos de M, conjuntos medibles.

Nota 2.10.

1. Todo σ-álgebra es un álgebra;
2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por

   (iii') $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \implies \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in M$.

1. σ-álgebra $\implies$ álgebra $\implies$ semiálgebra (no valen las recíprocas);
2. $\{\varnothing, X\}, \mathcal{P}(X)$ son σ-álgebras;
3. Si $(M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ son σ-álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma \{E \subseteq X \ : \ E \in M_\gamma, \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

   es una σ-álgebra.

4. Si M es una clase de subconjuntos de X, entonces

$$\sigma(M) \qquad \bigcap_{\substack{M\ \sigma\text{-álgebra}\\ C \subseteq M}} \qquad M$$

   es la σ-álgebra generada por C. De hecho, $\sigma(M)$ es la menor σ-álgebra que contiene a C:

   a) $\sigma(C)$ es σ-álgebra y $C \subseteq \sigma(C)$;

   b) Si F es σ-álgebra y $C \subset F$ entonces $\sigma(C) \subseteq F$.

5. Si (X, T) es un espacio topológico, $\sigma(T)$ se conoce como la σ-álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos $\beta(X)$ $(= \sigma(T))$.

$\beta(\mathbb{R})$ contiene a tods los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo G_δ y $F_\sigma, \ldots$ De hecho, $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}})$.

Definición 2.11. Sea C una clase (no vacía) de subconjuntos de X y $\mu : C \to [0, \infty]$ una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

(i) μ **es monótona** (en M) si $A, B \in C,\ A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$;

(ii) μ **es finitamente aditiva** si $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subseteq C$ disjuntos $\implies \mu(_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$;

(iii) μ **es σ-aditiva** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ disjuntos $\implies \mu(_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$;

(iv) μ **es σ-subaditiva** si $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$, para todo $A \in C$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Observación 2.12. Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in C,\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in C\ \forall i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si C es una semiálgebra y μ es monótona (siempre será el caso para nosotros).

Definición 2.13 (premedida finita y σ-finita)**.** Una premedida $\mathcal{T} : C \to [0, \infty]$ se dice:

1. **finita** si $X \in C$ y $\mathcal{T} < \infty$;
2. **σ-finita** si existen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ disjuntos tales que $_{n=1}^{\infty} C_n = X$ y $\mathcal{T}(C_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. finita $\implies$ σ-finita;
2. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ es σ-finita pero no finita;
3. Si F es una función de L-S, entonces $\mathcal{T}_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$ es siempre σ-finita ($\mathcal{T}_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{Z}$) y es finita si y sólo si $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$.

Definición 2.14 (medida)**.** Sea (X, M) es un espacio medible. Diremos que $\mu : M \to [0, \infty]$ es una medida (en (X, M)) si:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. μ es σ-subaditiva en M $\left(\mu\left(_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right)$.

Llamamos a la terna (X, M, μ) un epacio de medida.

Objetivo. Construir un espacio de medida $(\mathbb{R}, M, \mu)$ tal que $\mathcal{I} \subseteq M$ y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I|\ \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E + x) = \mu(E)\ \forall E \in M. \end{cases}$$

[Espacios de Probabilidad] Si (X, M, μ) es un EdM tal que $\mu(X) = 1,\ (X, M, \mu)$ recibe el nombre de espacios de probabilidad.

- X recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota Ω (en lugar de X);
- M se suele notar como F (ó Y). Sus elementos se dicen eventos;
- μ recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota $\mathbb{P}$.

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{R}^d$).

1. **Distribuciones discretas:** $\exists S \subseteq \mathbb{R}$ numerable y $(p_x)_{x\in S} \subseteq [0,1]$ tal que $\mathbb{P}(A) = \sum_{x\in A\cap S} p_x$. Binomial, Geométrica, Poisson,...
2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:** $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ïntegrable”tal que $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$. Uniforme, Exponencial, Normal,...

Propiedades generales de una medida. Si μ es una medida sobre (X, M), entonces:

1. μ es monótona (en M);
2. μ es σ-subaditiva;
3. μ es **continua por debajo**: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n$) entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
4. μ es **continua por arriba**: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ es decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n$) y $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algún n_0 ($\implies \mu(A_n) < \infty\ \forall n \geq n_0$), entonces
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
(**Cuidado!** (4) puede no valer si $\mu(A_n) = \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$)

Definición 2.15 (premedida extendible y unívocamente extendible)**.** Una premedida $\mathcal{T} : S \to [0, \infty]$ definida sobre una semiálgebra de subconjunto de X, se dice:

1. **Extendible** si es
   (E1) finitamente aditiva en S;
   (E2) σ-subaditiva en S.
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
   (E3) σ-finita

Observación 2.16. Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

Teorema 2.17 (Extensión de Carathéodory)**.** Dados un espacio X y una premedida $\mathcal{T}$ sobre una semiálgebra S de subconjuntos de X tal que $\mathcal{T}$ es extendible, existe una extensión de $\mathcal{T}$ a una medida $\mu_{\mathcal{T}}$ definida sobre $\sigma(S)$ la σ-álgebra generada por S. Más aún, si $\mathcal{T}$ es unívocamente extendible, entonces la extensión $\mu_{\mathcal{T}}$ a $\sigma(S)$ es única.
Por último, si $\mathcal{T}$ es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}$ sobre la $\mu_{\mathcal{T}}$-completación de $\sigma(S)$, i.e. la σ-álgebra $\overline{\sigma(S)}$ dada por

$$\overline{\sigma(S)}\{B \cup N : B \in \sigma(S), \exists \widetilde{N} \in \sigma(S) \text{ con } N \subseteq \widetilde{N} \text{ y } \mu_{\mathcal{T}}(\widetilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}(B \cap N)\mu_{\mathcal{T}}(B)$.

Observación 2.18. Si $\mathcal{T} : S \to [0, \infty]$ es σ-aditiva en S y S es una semiálgebra, entonces $\mathcal{T}$ es extendible.

Observación 2.19. La extensión puede no ser única si $\mathcal{T}$ no es σ-finita.

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}\widetilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

Nota 2.20.

- $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$ es una semiálgebra;
- $\sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \overset{\text{Ej!}}{=} \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (9.52)
- $\mathcal{T} : \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \to [0, \infty]$, dada por $\mathcal{T}(A) \begin{cases} 0 & A = \varnothing \\ \infty & A \neq \varnothing, \ A \in \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ (Observar que $\mathcal{T}$ no es σ-finita)
- Para cada $r > 0$, $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to [0, \infty]$ dada por $\mu_r(A)r(\#A)$ es una extensión de $\mathcal{T}$ (y es una medida)

Definición 2.21 (espacio completo y conjuntos μ-nulos)**.** Sea (X, M, μ) un EdM y definamos

$$N_\mu\{E \subset X \ : \ \exists N \in M \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de N_μ se dicen conjuntos μ-nulos. Diremos que (X, M, μ) es completo si $N_\mu \subseteq M$

Observación 2.22. $(X, \overline{\sigma(S)}, \overline{\mu_\delta})$ es completo. En efecto, $N_{\overline{\mu_\delta}}$ corresponde al subconjunto de $\overline{\sigma(S)}$ que se obtiene tomando $B = \varnothing$.

Observación 2.23. Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

(i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud λ (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$) y las premedidas de probabilidad).

(ii) Premedidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N}$.

En particular;

Corolario 2.24. Para cada función F de Lebesgue-Stieltjes, existe una σ-álgebra M_F sobre $\mathbb{R}$ y una única medida μ_F en $(\mathbb{R}, M_F)$ tal que

$$\mu_F = (I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además, $\beta(\mathbb{R}) \subseteq M_F$. Es decir, μ_F es una medida que extiende a $\mathcal{T}_F$, a todo M_F (y en particular, a todo $\beta(\mathbb{R})$). Además, $(\mathbb{R}, M_F, \mu_F)$ es un EdM completo. $(M_F \overline{\sigma(\widetilde{\mathcal{I}})}^F,\ \mu_F \overline{\mu_{\mathcal{T}_F}})$. La medida μ_F se conoce como medida de L-S asociada a F. En particular, para cualquier función de distribución F, existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_F$ en $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que $F \to \mathbb{P}_F$ es una biyección)

Nota 2.25. Los β son los Borelianos y $I(a,b) = (a,b] \cap \mathbb{R}$. (super $F \to 10.26$).

[Importante!] **Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.** Tomando $F = id$ en el Corolario anterior, obtenemos una σ-álgebra $L(\mathbb{R}) M_{id}$ con $\beta(\mathbb{R}) \subseteq L(\mathbb{R})$ y una medida μ_{id} en $(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}))$ tal que $\mu_{id}(I(a,b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. En particular, de esto se deduce que $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en $\mathbb{R}$), y los elementos de $L(\mathbb{R})$ se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación $\mu_{id}(E) \lambda(E) |E|$. La medida μ_{id} es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y $L(\mathbb{R})$ son los conjuntos cuya "longitud"podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos $A \in L(\mathbb{R})$ tal que $\mu_{id}(A) = 0$ (lo veremos más adelante!).

[Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$] Si $\mathcal{I}_d$ son los intervalos en $\mathbb{R}^d$ y definimos $\mathcal{T} : \mathcal{I}_d \to [0, \infty]$ como $\mathcal{T}(I)|I|$, entonces $\mathcal{I}_d$ es una semiálgebra y $\mathcal{T}$ es una premedida σ-aditiva en $\mathcal{I}_d$ (lo veremos después). Por lo tanto, $\mathcal{T}$ se puede extender (de manera única, pues $\mathcal{T}$ es σ-finita) a una medida μ_δ sobre la σ-álgebra $L(\mathbb{R}^d) = \overline{\sigma(\mathcal{I}_d)}^{\mathcal{T}}$, llamada medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ y $L(\mathbb{R}^d)$ es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Al igual que antes, dado $E \in L(\mathbb{R}^d)$, notamos $|E| \mu_{\mathcal{T}}(E)$.

Demostración del teorema de extensión de Carathéodory

Paso 1: Medidas Exteriores
Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo,

$$|E|_e = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervalos, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

Proof . $\geq$) Tomando $I_1 = I,\ I_{n+1} = \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\leq$) Por la σ-subaditividad de λ en $\mathcal{I}$: si $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}$ entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$. □

Definición 2.26 (Medida exterior inducida por una premedida)**.** Sea X un espacio, C una clase de subconjuntos de X y $\mathcal{T} : C \to [0, \infty]$ una premedida. Definimos la medida exterior inducida por $\mathcal{T}$ como la aplicación $\mu^*_{\mathcal{T}} : P(X) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu^*_{\mathcal{T}}(A) \,\text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i) \ : \ (C_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq C \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\}$$

con la convención de que ínf $\varnothing\infty$.

$\mu_\lambda^* =$ *medida exterior de Lebesgue* y la notamos $|E|_e\mu_\lambda^*(E)$.
Idealmente, nos gustaría que $\mu_{\mathcal{T}}^*$ cumpla

$$\begin{cases} (C1)\ \mu_{\mathcal{T}^*}(C) = \mathcal{T}(C) \quad \forall C \in C \\ (C2)\ \mu_{\mathcal{T}}^* \text{ es } \sigma\text{-subaditiva en } P(X) \end{cases}$$

no tienen por qué cumplirse ninguna de la 2:

(C1) $X = \{a, b\},\ C = \{\varnothing, \{a\}, X\},\ \mathcal{T}(A) = \begin{cases} 0 & A = \varnothing \\ 2 & A = \{a\} \\ 1 & A = X \end{cases}$ $\mathcal{T}(\{a\}) = 2,\ \mu_{\mathcal{T}}^*(\{a\}) = 1 \neq \mathcal{T}(\{a\})$.

(C2) Medida exterior de Lebesgue no es σ-aditiva (lo vemos mas adelante!)

Proposición 2.27. Si $\mathcal{T}$ es una premedida sobre una semiálgebra S que satisface

(E2) $\mathcal{T}$ es σ-subaditiva en S,

entonces $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) = \mathcal{T}(A) \quad \forall A \in S$ (i.e. $\mu_{\mathcal{T}}^*$ cumple (C1)).

Demostración. $\underline{\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \mathcal{T}(A).}$ Tomando $C_1 = A \in S,\ C_{n+1} = \varnothing \in S$. Luego $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cubrimiento de A por elementos de S y luego

$$\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n) = \mathcal{T}(A)$$

$\underline{\mathcal{T}(A) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(A).}$ Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ es un cubrimiento de $A \in S$ entonces por (E2), tenemos que $\mathcal{T}(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n)$. Tomando ínf sobre tales cubrimientos, resulta $\mathcal{T}(A) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(A)$. $\square$

Teorema 2.28. Sean X un espacio, C una clase de subconjuntos de X y $\mathcal{T} : C \to [0, \infty]$ una premedida. Entonces,

1. $\mu_{\mathcal{T}}^*(\varnothing)$;
2. $\mu_{\mathcal{T}}^*$ es monótona ($A \subseteq B \implies \mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(B)$);
3. $\mu_{\mathcal{T}}^*$ es σ-subaditiva ($A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \implies \mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_{\mathcal{T}}^*(A_n)$.

Demostración.

1. $\mu_{\mathcal{T}}^*(\varnothing) \geq 0$ es por definición. Para ver que $\mu_{\mathcal{T}}^*(\varnothing) \leq 0$, tomamos el cubrimiento $C_n = \varnothing$ y repetimos el argumento de la Proposición anterior.
2. Si $\mu_{\mathcal{T}}^*(B) = \infty$, la desigualdad es inmediata. Si $\mu_{\mathcal{T}}^*(B) < \infty$, entonces existen cubrimientos de B por elementos de S. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ un cubrimiento de B. Entonces, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también cubrimiento de A y, luego, $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n)$. Como esto es cierto para todo cubrimiento $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B, tomando ínfimo en la desigualdad anterior sobre tales cubrimientos resulta $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(B)$.

3. Dado $\varepsilon > 0$, sea $(C_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de A_n tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i^{(n)}) \leq \mu_{\mathcal{T}}^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$. Luego, notando que $(C_i^{(n)} \ : \ i \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N})$ es un cubrimiento de A, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{T}}^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_{\mathcal{T}}^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{T}}^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}}_{1} \end{aligned}$$

Luego, $\mu_{\mathcal{T}}^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{T}}^*(A_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos la σ-subaditividad de $\mu_{\mathcal{T}}^*$.

□

Definición 2.29 (medida exterior)**.** Sea X un espacio. Decimos que $\mu^* : P(X) \to [0,\infty]$ es una medida exterior si:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$;
2. $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \implies \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

1. Medidas exteriores generadas por una premedida;
2. Si $(\mu_\gamma^*)_{\gamma\in\Gamma}$ son medidas exteriores sobre X, entonces

$$\mu^*(A) \sup_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma^*(A)$$

es una medida exterior (Ej. Guía 3).

3. **Medida exterior s-dimensional de Hausdorff en $\mathbb{R}^d$.**
   - Si I es un intervalo en $\mathbb{R}^d$, entonces $|rI| = r^d|I|$;
   - Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es medible Lebesgue, entonces $|rE| = r^d|E|$;
   - En particular, si $E = B(x,r)$, entonces

$$|E| = |B(0,r)| = |rB(0,1)| = r^d|B(0,1)| = C_d(diamE)^d, \quad C_d\frac{|B(0,1)|}{2^d}$$

   - Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es "s-dimensionalz H_s es la medida que queremos, entonces

$$H_s(E) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} H_s(E \cap B(x_i,r_i)) \approx \sum_{i\ \in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(E \cap B(x_i,r_i)))^s$$

Teniendo eso en cuenta, dados $d \in \mathbb{N}, s \in [0,d], \delta > 0$, definimos

- $C_\delta A \subseteq \mathbb{R}^d : \ \mathrm{diam}\ A < \delta$.

- $H_s^{(\delta)}(E)$ ínf $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\text{diam } A_n)^s : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_\delta, E \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Observar que si $\delta < \delta$ entonces $H_s^{(\delta)}(E) \geq H_s^{(\delta)}(E)$. Luego, podemos definir:

$$H_s(E) = \sup_{\delta>0} H_s^{(\delta)}(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H_s^{(\delta)}(E)$$

Definición 2.30. Sea X un espacio y $\mu^* : P(X) \to [0,\infty]$ medida exterior. Decimos que $E \subseteq X$ es un conjunto μ^*-medible si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E) + \ \mu^*(A\cap E^c) \quad \forall A \subseteq X$$

Observación 2.31. Que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$ vale siempre (por σ-subaditividad de μ^*). Luego, para ver que E es μ^*-medible, baste ver que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$

Teorema 2.32. Sea μ^* una medida exterior sobre un espacio X. Entonces:

(1) $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es μ^*-medible.

(2) La clase M_{μ^*} de conjuntos μ^*-medibles es un σ-álgebra.

(3) La restricción μ de μ^* a M_{μ^*} es una medida.

En particular, (X, M_{μ^*}, μ) es un espacio de medida completo.

Demostración.

1. Si $A \subseteq X$, $\mu^*(A\cap E) \leq \mu^*(E) = 0$. Además, por monotonía, $\mu^*(A\cap E^c) \leq \mu^*(A)$. Luego, $\mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c) = 0 + \mu^*(A\cap E^c) \leq \mu^*(A)$.

2. $\underline{\varnothing \in M_{\mu^*}}$: Se sigue de (1), pues $\mu^*(\varnothing) = 0$, por definición.

   $\underline{E \in M_{\mu^*}}$: Directo de la definición de M_{μ^*}, puesto que es simétrica en E y E^c.

   $\underline{(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_{\mu^*} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in M_{\mu^*}}$: Esto lo demostramos en tres pasos. En primer lugar, demostramos que si $E_1, E_2 \in M_{\mu^*}$, entonces $E_1\cap E_2, E_1\cup E_2 \in M_{\mu^*}$.

   Demostración. Si $A \subseteq X$, entonces

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap E_1^c)\\ &= \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap \overbrace{E_1^c\cap E_2}^{E_2\setminus E_1}) + \mu^*(A\cap \underbrace{E_1^c\cap E_2^c}_{(E_1\cup E_2)^c})\\ &\geq \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c).\end{aligned}$$

   Notar que la primera igualdad se tiene por $E_1 \in M_{\mu^*}$ y la segunda por $E_2 \in M_{\mu^*}$. Esto implica que $E_1\cap E_2 \in M_{\mu^*}$. Pero entonces $E_1\cap E_2 = ((E_1\cap E_2)^c)^c = (\underbrace{\underbrace{E_1^c}_{\in M_{\mu^*}} \cup \underbrace{E_2^c}_{\in M_{\mu^*}}}_{\in M_{\mu^*}})^c \in$

   M_{μ^*} □

Para el segundo paso, demostramos que si $E_1, \ldots, E_n \in M_{\mu^*}$ disjuntos, entonces $\mu^*\left(A \cap \left(_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$.

Demostración. La idea es probarlo por inducción. Basta ver el caso $n = 2$ (los otros casos salen iterando éste)

$$\begin{aligned} &\mu^*(A \cap (E_1 E_2)) \\ &= \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 E_2) \cap E_1}_{A \cap E_1}) + \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 E_2) \cap E_1^c}_{A \cap E_2}). \end{aligned}$$

pues $E_2 \subseteq E_1^c$ por ser disjuntos. □

Por último, vemos que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_{\mu^*}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in M_{\mu^*}$.

Demostración. Podemos suponer que los E_n son disjuntos. Si no, los cambiamos por

$$\begin{aligned} &E_1' E_1 \in M_{\mu^*} \\ &E_2' E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c \in M_{\mu^*} \\ &\vdots \\ &E_{n+1}' E_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in M_{\mu^*}, \end{aligned}$$

y $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = {}_{n=1}^{\infty} E_n'$. Sea $F_n{}_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Notar que si $F_n \subseteq E$, entonces $E^c \subseteq F_n^c$. Luego, dado $A \subseteq X$, como $F_n \in M_{\mu^*}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mu^*(A) = {} & \underbrace{\mu^*(A \cap F_n)}_{=\sum_{i=1}^{n} \mu^*(A\cap E_i)} + \mu^*(\underbrace{A \cap F_n^c}_{\subseteq A \cap E^c}) \\ & \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) && (\mu^* \ \sigma\text{-subad.}) \\ A \cap E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap E_i. \end{aligned}$$

□

□