Apunte

Nicolas Muñoz

Teoria De Integración
Licenciatura en Matemática
Pontificia Universidad Católica - Chile

19 de agosto de 2025

Índice

1. Introducción a la Integración de Riemann

1.1. Particiones y Sumas de Riemann

Una partición de un intervalo $[a, b] \subseteq R$ es un subconjunto finito $\pi \subseteq [a, b]$ tal que $a, b \in \pi$. Denotaremos a las particiones como $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ donde los puntos están ordenados, es decir $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ son llamados los intervalos de la partición. A veces identificaremos la partición con $(I_i)_{i=1,\ldots,n}$.

La norma de una partición π se define como:

$$||\pi|| := \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \pi} |I_i|$$

Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\pi^* = (\pi, \epsilon)$, donde $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, y $\epsilon = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. La norma de una partición marcada se define como $||\pi^*|| = ||\pi||$.

[Suma de Riemann] Sea $f : [a, b] \to R$ acotada y $\pi^* = (\pi, \epsilon)$ una partición marcada. La suma de Riemann de f asociada a π^* se define como:

$$S_R(f, \pi^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} f(x_i^*)|I_i|$$

[Integrabilidad de Riemann] Dada $f : [a, b] \to R$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite:

$$\lim_{||\pi^*|| \to 0} S_R(f, \pi^*)$$

Esto significa que $\exists L \in R$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $||\pi^*|| < \delta$, entonces $||S_R(f, \pi^*) - L|| < \epsilon$. Cuando este límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a, b]$ y lo denotamos por $\int_a^b f(x)dx$.

1.2. Sumas de Darboux

Dadas $f : [a, b] \to R$ acotada y $\pi = (I_i)_{i=1,\ldots,n}$ una partición de $[a, b]$, definimos:

- $m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x)$
- $M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x)$
- La suma inferior de Darboux: $\underline{S}(f; \pi) := \sum_{i=1}^{n} m_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} m_{I_i}|I_i|$
- La suma superior de Darboux: $\overline{S}(f; \pi) := \sum_{i=1}^{n} M_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} M_{I_i}|I_i|$

Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$ para todo $x \in I_i$, para cualquier partición marcada $\pi^* = (\pi, \epsilon)$, se tiene que:

$$\underline{S}(f; \pi) \leq S_R(f; \pi^*) \leq \overline{S}(f; \pi)$$

[Refinamiento] Una partición π' de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición π si $\pi \subset \pi'$. Equivalentemente, si para todo $J_i \in \pi'$ existe $I_i \in \pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Entonces:

- Si $\pi \subseteq \pi'$ son particiones de $[a, b]$, entonces $\underline{S}(f; \pi) \leq \underline{S}(f; \pi')$ y $\overline{S}(f; \pi) \geq \overline{S}(f; \pi')$.
- Si π_1, π_2 son particiones de $[a, b]$ cualesquiera, entonces $\underline{S}(f; \pi_1) \leq \overline{S}(f; \pi_2)$.

1.3. Integrales de Darboux

Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\pi \text{ part. de } [a,b]} \overline{S}(f; \pi)$$

- La integral inferior (de Darboux) de f como:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\pi \text{ part. de } [a,b]} \underline{S}(f; \pi)$$

Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Entonces:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||\pi|| \to 0} \underline{S}(f; \pi), \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||\pi|| \to 0} \overline{S}(f; \pi)$$

Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n \in N}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $||\pi_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f; \pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \overline{S}(f; \pi_n)$$

[Criterios de Integrabilidad] Dada $f : [a, b] \to R$ acotada, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es integrable Darboux, es decir, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{||\pi|| \to 0} (\overline{S}(f; \pi) - \underline{S}(f; \pi)) = 0$.
4. Para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n \in N}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $||\pi_n|| \to 0$, se tiene que $\lim_{n \to \infty} (\overline{S}(f; \pi_n) - \underline{S}(f; \pi_n)) = 0$.
5. Existe una sucesión $(\pi_n)_{n \in N}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $\lim_{n \to \infty} (\overline{S}(f; \pi_n) - \underline{S}(f; \pi_n)) = 0$.

Las integrales en el sentido de Darboux (1) y el de Riemann (2) coinciden.

- Si $f : [a, b] \to R$ es monótona, entonces es Riemann integrable.
- Si $f : [a, b] \to R$ es continua, entonces es Riemann integrable.

1.4. Medida de un conjunto

Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{R} := R \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface que para todo $x, y \in I$, se tiene que $z \in I$ para todo z tal que $\min\{x, y\} \leq z \leq \max\{x, y\}$.

La medida de un intervalo $I \subseteq \overline{R}$ se define como $|I| := \sup I - \inf I$. Se define $|\emptyset| := 0$ y $|x| := 0$ para un punto.

Si $I \subseteq J$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Un conjunto $E \subseteq R^d$ se dice de medida nula si, dado $\epsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos $(I_n)_{n \in N}$ de R^d tal que $E \subseteq \bigcup_{n \in N} I_n$ y $\sum_{n \in N} |I_n| < \epsilon$.

Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Entonces, f es Riemann integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

1.5. Limitaciones de la Integral de Riemann

La integral de Riemann tiene algunas limitaciones:

1. Solo está definida para funciones acotadas y en intervalos $[a, b]$ acotados. Las integrales impropias resuelven parcialmente este problema.

2. La convergencia puntual no siempre garantiza la intercambiabilidad del límite y la integral. Es decir, $f_n \to f$ puntualmente no implica que $\lim \int f_n = \int \lim f_n$. Ejemplos como $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n]}$ en $[0, 1]$ muestran esta limitación.

Si $(f_n)_{n \in N} \subseteq R([a, b])$ y $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces $f \in R([a, b])$ y $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

1.6. Teorema Fundamental del Cálculo

[Teorema Fundamental del Cálculo] Si $f \in R([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

Este çasi"no puede removerse. Hay contraejemplos notables:

- **Teorema de Hankel (1871):** Existe $f \in R([a, b])$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún punto en un subconjunto denso de $[a, b]$.

- **Teorema de Volterra (1881):** Existe una función $f : [a, b] \to R$ que es derivable en $[a, b]$ y su derivada f' es acotada en $[a, b]$, pero $f' \notin R([a, b])$.

2. Extendiendo la Integral de Riemann

Una manera de extender el concepto de la integral es a través de funciones escalonadas.

[Función Escalonada] Una función $\phi : [a, b] \to R$ se dice escalonada si existe una partición $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ y constantes $c_1, \ldots, c_n \in R$ tales que $\phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Cualquier función escalonada se puede escribir como una combinación lineal de funciones características de intervalos. La integral de una función escalonada se define como:

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i |I_i|$$

2.1. La Función Longitud

Sea $\mathcal{I}$ la colección de todos los intervalos en R. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ se define como $\lambda(I) := |I|$.

La función longitud λ tiene las siguientes propiedades:

- $\lambda(\emptyset) = 0$.
- **Monotonía:** Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ y $I_1 \subseteq I_2$, entonces $\lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.
- **Aditividad Finita:** Si $I \in \mathcal{I}$ tal que $I = \cup_{i=1}^{n} J_i$ con $J_i \in \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i)$.
- **Aditividad Contable (σ-aditividad):** Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ con $(I_i)_{i \in N} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **σ-subaditividad:** Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $(I_i)_{i \in N}$ son intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **Invarianza por traslaciones:** $\lambda(I + x) = \lambda(I)$ para todo $x \in R$.
- $\lambda(\{x\}) = 0$ para todo $x \in R$.