Tarea 1

Alonso Muñoz

Álgebra Lineal
Licenciatura en Matemática
Pontificia Universidad Católica - Chile

29 de agosto de 2025

1. Problema 1

Sea V un espacio vectorial real.

- Llamamos la *complejificación* de V, que denotamos por V_C, al producto $V \times V$. Un elemento de V_C es un par ordenado (u, v), donde $u, v \in V$; denotamos a tal elemento por $u + iv$.
- Definimos la suma en V_C mediante la regla

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$$

  para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$.
- La multiplicación por un escalar se define como

$$(a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$$

  para todo $a, b \in R$ y todo $u, v \in V$.

Demuestre que con las definiciones anteriores, V_C es un espacio vectorial sobre complejo.

Problema 2

Suponga que U es un subespacio vectorial de V con $U \neq V$. Suponga además que $S \in \mathcal{L}(U, W)$, para algún espacio vectorial W, y que $S \neq 0$ (es decir, suponga que $Su \neq 0$ para algún $u \in U$). Defina $T : V \to W$ mediante

$$Tv = \begin{cases} Sv, & \text{si } v \in U, \\ 0, & \text{si } v \in V \text{ y } v \notin U. \end{cases}$$

Determine si T es una transformación lineal.

Problema 3

Considere el espacio vectorial $P_3(R)$ de los polinomios de grado menor o igual a 3, y la función $T : P_3(R) \to P_3(R)$ definida por

$$T(p(x)) = p(0)\, x^3 + p(1)\, (x - 4)^2.$$

(a) Muestre que T es una transformación lineal.

(b) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Problema 4

Considere los vectores en R^2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sea $P(v_1, v_2)$ el paralelogramo generado por ambos vectores, y sea $A = [v_1, v_2]$ la matriz cuyas columnas son v_1 y v_2. Muestre que

$$\det A = \text{Area}\big(P(v_1, v_2)\big).$$

Problema 5

Sea $A \in M_{n\times n}(R)$. Decimos que A es *nilpotente* de orden k si $A^k = 0$ para algún $k \in Z_{>0}$. Por otro lado, decimos que A es *ortogonal* si $A^T A = I$. Pruebe las siguientes propiedades:

(a) El determinante de toda matriz nilpotente es 0.

(b) El determinante de toda matriz ortogonal es ± 1.

Problema 6

Sea A una matriz cuadrada. Muestre que las matrices triangulares por bloque

$$\begin{pmatrix} I & * \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

tienen todas ellas determinante igual a $\det A$. (En la notación anterior, el símbolo "$*$" significa "lo que sea").

Problema 7

El objetivo de este problema es demostrar el determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \cdots & c_0^n \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < k \le n} (c_k - c_j).$$

Para ello, procederemos por inducción:

(a) Muestre que la fórmula funciona para $n = 1, 2$.

(b) Defina $x := c_n$ y muestre que el determinante es un polinomio de grado n,

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n,$$

donde los coeficientes dependen de $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.

(c) Muestre que las raíces del polinomio anterior son $x = c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, de manera que el determinante toma la forma

$$A_n (x - c_0)(x - c_1) \cdots (x - c_{n-1}).$$

(d) Asumiendo que la fórmula es válida para $n - 1$, calcule A_n y demuestre la fórmula para n.