Apuntes

Nicolas Muñoz

Teoria De Integración
Licenciatura en Matemática
Pontificia Universidad Católica - Chile

August 28, 2025

Contents

1 Introducción a la Integración de Riemann

1.1 Particiones y Sumas de Riemann

Definición 1. *Una partición de un intervalo* $[a, b] \subseteq R$ *es un subconjunto finito* $\pi \subseteq [a, b]$ *tal que* $a, b \in \pi$. *Denotaremos a las particiones como* $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ *donde los puntos están ordenados, es decir* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Los intervalos* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ *para* $i = 1, \dots, n$ *son llamados los intervalos de la partición. A veces identificaremos la partición con* $(I_i)_{i=1,\dots,n}$.

Definición 2. *La norma de una partición* π *se define como:*

$$||\pi|| := \max_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \pi} |I_i|$$

Definición 3. *Una partición marcada de* $[a, b]$ *es un par* $\pi^* = (\pi, \epsilon)$, *donde* $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ *es una partición de* $[a, b]$, *y* $\epsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ *es una colección de puntos tal que* $x_i^* \in I_i$ *para cada* $i = 1, \dots, n$. *La norma de una partición marcada se define como* $||\pi^*|| = ||\pi||$.

Definición 4 (Suma de Riemann)**.** *Sea* $f : [a, b] \to R$ *acotada y* $\pi^* = (\pi, \epsilon)$ *una partición marcada. La suma de Riemann de* f *asociada a* π^* *se define como:*

$$S_R(f, \pi^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} f(x_i^*)|I_i|$$

Definición 5 (Integrabilidad de Riemann)**.** *Dada* $f : [a, b] \to R$ *acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite:*

$$\lim_{||\pi^*|| \to 0} S_R(f, \pi^*)$$

Esto significa que $\exists L \in R$ *tal que para cualquier* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que si* $||\pi^*|| < \delta$, *entonces* $||S_R(f, \pi^*) - L|| < \epsilon$. *Cuando este límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de* f *en* $[a, b]$ *y lo denotamos por* $\int_a^b f(x)dx$.

1.2 Sumas de Darboux

Definición 6. *Dadas* $f : [a, b] \to R$ *acotada y* $\pi = (I_i)_{i=1,\dots,n}$ *una partición de* $[a, b]$, *definimos:*

- $m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x)$
- $M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x)$
- *La suma inferior de Darboux:* $\underline{S}(f; \pi) := \sum_{i=1}^{n} m_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} m_{I_i}|I_i|$
- *La suma superior de Darboux:* $\overline{S}(f; \pi) := \sum_{i=1}^{n} M_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} M_{I_i}|I_i|$

Observación 1. *Como* $m_{I_i} \le f(x) \le M_{I_i}$ *para todo* $x \in I_i$, *para cualquier partición marcada* $\pi^* = (\pi, \epsilon)$, *se tiene que:*

$$\underline{S}(f; \pi) \le S_R(f; \pi^*) \le \overline{S}(f; \pi)$$

Definición 7 (Refinamiento)**.** *Una partición π' de $[a,b]$ es un refinamiento de otra partición π si $\pi \subset \pi'$. Equivalentemente, si para todo $J_i \in \pi'$ existe $I_i \in \pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.*

Sea $f : [a,b] \to R$ acotada. Entonces:

- Si $\pi \subseteq \pi'$ son particiones de $[a,b]$, entonces $\underline{S}(f;\pi) \leq \underline{S}(f;\pi')$ y $\overline{S}(f;\pi) \geq \overline{S}(f;\pi')$.
- Si π_1, π_2 son particiones de $[a,b]$ cualesquiera, entonces $\underline{S}(f;\pi_1) \leq \overline{S}(f;\pi_2)$.

1.3 Integrales de Darboux

Definición 8. *Sea $f : [a,b] \to R$ acotada. Definimos:*

- *La integral superior (de Darboux) de f como:*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\pi \text{ part. de } [a,b]} \overline{S}(f;\pi)$$

- *La integral inferior (de Darboux) de f como:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\pi \text{ part. de } [a,b]} \underline{S}(f;\pi)$$

Teorema 1. *Sea $f : [a,b] \to R$ acotada. Entonces:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||\pi|| \to 0} \underline{S}(f;\pi), \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||\pi|| \to 0} \overline{S}(f;\pi)$$

Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n\in N}$ de particiones de $[a,b]$ tal que $||\pi_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;\pi_n) \quad y \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\pi_n)$$

Teorema 2 (Criterios de Integrabilidad)**.** *Dada $f : [a,b] \to R$ acotada, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es integrable Darboux, es decir, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.*
2. *f es Riemann integrable.*
3. $\lim_{||\pi||\to 0}(\overline{S}(f;\pi) - \underline{S}(f;\pi)) = 0$.
4. *Para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n\in N}$ de particiones de $[a,b]$ tal que $||\pi_n|| \to 0$, se tiene que* $\lim_{n\to\infty}(\overline{S}(f;\pi_n) - \underline{S}(f;\pi_n)) = 0$.
5. *Existe una sucesión $(\pi_n)_{n\in N}$ de particiones de $[a,b]$ tal que* $\lim_{n\to\infty}(\overline{S}(f;\pi_n) - \underline{S}(f;\pi_n)) = 0$.

Observación 2. *Las integrales en el sentido de Darboux (1) y el de Riemann (2) coinciden.*

- Si $f : [a,b] \to R$ es monótona, entonces es Riemann integrable.
- Si $f : [a,b] \to R$ es continua, entonces es Riemann integrable.

1.4 Medida de un conjunto

Definición 9. *Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{R} := R \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface que para todo $x, y \in I$, se tiene que $z \in I$ para todo z tal que $\min\{x, y\} \leq z \leq \max\{x, y\}$.*

Definición 10. *La medida de un intervalo $I \subseteq \overline{R}$ se define como $|I| := \sup I - \inf I$. Se define $|\emptyset| := 0$ y $|x| := 0$ para un punto.*

Si $I \subseteq J$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definición 11. *Un conjunto $E \subseteq R^d$ se dice de medida nula si, dado $\epsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos $(I_n)_{n\in N}$ de R^d tal que $E \subseteq \bigcup_{n\in N} I_n$ y $\sum_{n\in N} |I_n| < \epsilon$.*

Teorema 3. *Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Entonces, f es Riemann integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.*

1.5 Limitaciones de la Integral de Riemann

La integral de Riemann tiene algunas limitaciones:

1. Solo está definida para funciones acotadas y en intervalos $[a, b]$ acotados. Las integrales impropias resuelven parcialmente este problema.

2. La convergencia puntual no siempre garantiza la intercambiabilidad del límite y la integral. Es decir, $f_n \to f$ puntualmente no implica que $\lim \int f_n = \int \lim f_n$. Ejemplos como $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n]}$ en $[0, 1]$ muestran esta limitación.

Teorema 4. *Si $(f_n)_{n\in N} \subseteq R([a, b])$ y $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces $f \in R([a, b])$ y $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.*

1.6 Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 5 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Si $f \in R([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.*

Este "casi" no puede removerse. Hay contraejemplos notables:

- **Teorema de Hankel (1871):** Existe $f \in R([a, b])$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún punto en un subconjunto denso de $[a, b]$.

- **Teorema de Volterra (1881):** Existe una función $f : [a, b] \to R$ que es derivable en $[a, b]$ y su derivada f' es acotada en $[a, b]$, pero $f' \notin R([a, b])$.

2 Extendiendo la Integral de Riemann

Una manera de extender el concepto de la integral es a través de funciones escalonadas.

Definición 12 (Función Escalonada)**.** *Una función $\phi : [a, b] \to R$ se dice escalonada si existe una partición $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ y constantes $c_1, \ldots, c_n \in R$ tales que $\phi|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Cualquier función escalonada se puede escribir como una combinación lineal de funciones características de intervalos. La integral de una función escalonada se define como:

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|$$

2.1 La Función Longitud

Sea $\mathcal{I}$ la colección de todos los intervalos en R. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ se define como $\lambda(I) := |I|$.

La función longitud λ tiene las siguientes propiedades:

- $\lambda(\emptyset) = 0$.
- **Monotonía:** Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ y $I_1 \subseteq I_2$, entonces $\lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.
- **Aditividad Finita:** Si $I \in \mathcal{I}$ tal que $I = \cup_{i=1}^{n} J_i$ con $J_i \in \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i)$.
- **Aditividad Contable (σ-aditividad):** Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ con $(I_i)_{i \in N} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **σ-subaditividad:** Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $(I_i)_{i \in N}$ son intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **Invarianza por traslaciones:** $\lambda(I + x) = \lambda(I)$ para todo $x \in R$.
- $\lambda(\{x\}) = 0$ para todo $x \in R$.

nos gustaría extender λ a una clase más grande que $\mathcal{I}$. Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, donde $\mathcal{M}$ es una colección de subconjuntos de R tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que , dado $E \in M$, $m(e)$ represente la "longitud de E". Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = P(X)$
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$
3. m es σ-aditiva $(E, (E_n)_{n \in N}) \in \mathcal{M}, E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_m)$
4. Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(e + x) = m(E) \forall x \in R$
5. El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección uno puede mostrar que no existe un tal m que cumpla $(1) - (2) - (3) - (4)$ y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla $(1) - (2) - (3)$. (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla $(1) - (2) - (3)$)

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedaes.

- Si debilitamos (1) $\Rightarrow$Teoría de la medida

- Si debilitamos (3) pidiendo solo $\rightarrow$ aditividad finita $\Rightarrow$ "medida finitamente aditivas" y si pedimos σ-subaditividad *Rightarrow* "medidas exteriores"

Una manera de extender λ es la siguiente:

1. Si $E = \cup_{i=1}^{n} I_i$ entonces, definimos $\lambda(E) \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$
2. Si $E = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces, definimos $\lambda(E) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$
3. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(G)$ para todo G abierto en R.
4. Para conjuntos más generales, "aproximar" por abiertos.

Definición 13. *Sea X un conjunto no vacío y ξ una colección de subconjuntos de X tal que $\phi \in \xi$. Diremos que una aplicación $: \xi \rightarrow [0, \infty]$ es una premedia si $(\emptyset) = 0$ el conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección ξ será llamada una clase(de subconjunto de X).*

Intuitivamente, ξ representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y nos da su medida. Ejemplos:

1. **Premedida de Lebesgue** $\xi \mathcal{I} I \subseteq R : I$ interalo
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieljes** $\lim_{x \rightarrow x_o^+} F(x) = F(x_o)$ Sea $F : RR$ monótona creciente y continua a derecha. Una función tal que se dice una función de Lebesgue-Stieljes.

Observamos que, por monotonía, existen los límites. $\begin{cases} \text{F}(\infty) \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ \text{F}(-\infty) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \end{cases} \in R$

Sea además la clase $\mathcal{I}$ de intevalos de R dada por:

Ejemplo (Premedidas)