Apuntes

Nicolas Muñoz

Teoria De Integración
Licenciatura en Matemática
Pontificia Universidad Católica - Chile

August 28, 2025

Contents

1 Introducción a la Integración de Riemann

1.1 Particiones y Sumas de Riemann

Definición 1. *Una partición de un intervalo* $[a,b] \subseteq R$ *es un subconjunto finito* $\pi \subseteq [a,b]$ *tal que* $a,b \in \pi$*. Denotaremos a las particiones como* $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *donde los puntos están ordenados, es decir* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*. Los intervalos* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ *para* $i = 1, \ldots, n$ *son llamados los intervalos de la partición. A veces identificaremos la partición con* $(I_i)_{i=1,\ldots,n}$*.*

Definición 2. *La norma de una partición* π *se define como:*

$$||\pi|| := \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \pi} |I_i|$$

Definición 3. *Una partición marcada de* $[a,b]$ *es un par* $\pi^* = (\pi, \epsilon)$*, donde* $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *es una partición de* $[a,b]$*, y* $\epsilon = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ *es una colección de puntos tal que* $x_i^* \in I_i$ *para cada* $i = 1, \ldots, n$*. La norma de una partición marcada se define como* $||\pi^*|| = ||\pi||$*.*

Definición 4 (Suma de Riemann)**.** *Sea* $f : [a,b] \to R$ *acotada y* $\pi^* = (\pi, \epsilon)$ *una partición marcada. La suma de Riemann de* f *asociada a* π^* *se define como:*

$$S_R(f, \pi^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} f(x_i^*)|I_i|$$

Definición 5 (Integrabilidad de Riemann)**.** *Dada* $f : [a,b] \to R$ *acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite:*

$$\lim_{||\pi^*|| \to 0} S_R(f, \pi^*)$$

Esto significa que $\exists L \in R$ *tal que para cualquier* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que si* $||\pi^*|| < \delta$*, entonces* $||S_R(f, \pi^*) - L|| < \epsilon$*. Cuando este límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de* f *en* $[a,b]$ *y lo denotamos por* $\int_a^b f(x)dx$*.*

1.2 Sumas de Darboux

Definición 6. *Dadas* $f : [a,b] \to R$ *acotada y* $\pi = (I_i)_{i=1,\ldots,n}$ *una partición de* $[a,b]$*, definimos:*

- $m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x)$
- $M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x)$
- *La suma inferior de Darboux:* $\underline{S}(f;\pi) := \sum_{i=1}^{n} m_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} m_{I_i}|I_i|$
- *La suma superior de Darboux:* $\overline{S}(f;\pi) := \sum_{i=1}^{n} M_{I_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \pi} M_{I_i}|I_i|$

Observación 1. *Como* $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$ *para todo* $x \in I_i$*, para cualquier partición marcada* $\pi^* = (\pi, \epsilon)$*, se tiene que:*

$$\underline{S}(f;\pi) \leq S_R(f;\pi^*) \leq \overline{S}(f;\pi)$$

Definición 7 (Refinamiento)**.** *Una partición π' de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición π si $\pi \subset \pi'$. Equivalentemente, si para todo $J_i \in \pi'$ existe $I_i \in \pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.*

Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Entonces:

- Si $\pi \subseteq \pi'$ son particiones de $[a, b]$, entonces $\underline{S}(f; \pi) \leq \underline{S}(f; \pi')$ y $\overline{S}(f; \pi) \geq \overline{S}(f; \pi')$.
- Si π_1, π_2 son particiones de $[a, b]$ cualesquiera, entonces $\underline{S}(f; \pi_1) \leq \overline{S}(f; \pi_2)$.

1.3 Integrales de Darboux

Definición 8. *Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Definimos:*

- *La integral superior (de Darboux) de f como:*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\pi \text{ part. de } [a,b]} \overline{S}(f; \pi)$$

- *La integral inferior (de Darboux) de f como:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\pi \text{ part. de } [a,b]} \underline{S}(f; \pi)$$

Teorema 1. *Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Entonces:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||\pi|| \to 0} \underline{S}(f; \pi), \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||\pi|| \to 0} \overline{S}(f; \pi)$$

Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n \in N}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $||\pi_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f; \pi_n) \quad y \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \overline{S}(f; \pi_n)$$

Teorema 2 (Criterios de Integrabilidad)**.** *Dada $f : [a, b] \to R$ acotada, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es integrable Darboux, es decir, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.*
2. *f es Riemann integrable.*
3. $\lim_{||\pi|| \to 0} (\overline{S}(f; \pi) - \underline{S}(f; \pi)) = 0$.
4. *Para cualquier sucesión $(\pi_n)_{n \in N}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $||\pi_n|| \to 0$, se tiene que* $\lim_{n \to \infty} (\overline{S}(f; \pi_n) - \underline{S}(f; \pi_n)) = 0$.
5. *Existe una sucesión $(\pi_n)_{n \in N}$ de particiones de $[a, b]$ tal que* $\lim_{n \to \infty} (\overline{S}(f; \pi_n) - \underline{S}(f; \pi_n)) = 0$.

Observación 2. *Las integrales en el sentido de Darboux (1) y el de Riemann (2) coinciden.*

- Si $f : [a, b] \to R$ es monótona, entonces es Riemann integrable.
- Si $f : [a, b] \to R$ es continua, entonces es Riemann integrable.

1.4 Medida de un conjunto

Definición 9. *Decimos que un conjunto* $I \subseteq \overline{R} := R \cup \{-\infty, \infty\}$ *es un intervalo si satisface que para todo* $x, y \in I$*, se tiene que* $z \in I$ *para todo* z *tal que* $\min\{x, y\} \leq z \leq \max\{x, y\}$*.*

Definición 10. *La medida de un intervalo* $I \subseteq \overline{R}$ *se define como* $|I| := \sup I - \inf I$*. Se define* $|\emptyset| := 0$ *y* $|x| := 0$ *para un punto.*

Si $I \subseteq J$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definición 11. *Un conjunto* $E \subseteq R^d$ *se dice de medida nula si, dado* $\epsilon > 0$*, existe una sucesión de intervalos* $(I_n)_{n \in N}$ *de* R^d *tal que* $E \subseteq \bigcup_{n \in N} I_n$ *y* $\sum_{n \in N} |I_n| < \epsilon$*.*

Teorema 3. *Sea* $f : [a, b] \to R$ *acotada. Entonces,* f *es Riemann integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.*

1.5 Limitaciones de la Integral de Riemann

La integral de Riemann tiene algunas limitaciones:

1. Solo está definida para funciones acotadas y en intervalos $[a, b]$ acotados. Las integrales impropias resuelven parcialmente este problema.

2. La convergencia puntual no siempre garantiza la intercambiabilidad del límite y la integral. Es decir, $f_n \to f$ puntualmente no implica que $\lim \int f_n = \int \lim f_n$. Ejemplos como $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n]}$ en $[0, 1]$ muestran esta limitación.

Teorema 4. *Si* $(f_n)_{n \in N} \subseteq R([a, b])$ *y* $f_n \to f$ *uniformemente en* $[a, b]$*, entonces* $f \in R([a, b])$ *y* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$*.*

1.6 Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 5 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Si* $f \in R([a, b])$ *es continua en* $x_0 \in [a, b]$*, entonces* $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ *es derivable en* x_0 *y* $F'(x_0) = f(x_0)$*. En particular,* F *es derivable en* x *y* $F'(x) = f(x)$ *para todo* x *salvo un conjunto de medida nula.*

Este ”casi” no puede removerse. Hay contraejemplos notables:

- **Teorema de Hankel (1871):** Existe $f \in R([a, b])$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún punto en un subconjunto denso de $[a, b]$.

- **Teorema de Volterra (1881):** Existe una función $f : [a, b] \to R$ que es derivable en $[a, b]$ y su derivada f' es acotada en $[a, b]$, pero $f' \notin R([a, b])$.

2 Extendiendo la Integral de Riemann

Una manera de extender el concepto de la integral es a través de funciones escalonadas.

Definición 12 (Función Escalonada)**.** *Una función* $\phi : [a, b] \to R$ *se dice escalonada si existe una partición* $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *de* $[a, b]$ *y constantes* $c_1, \ldots, c_n \in R$ *tales que* $\phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$*.*

Cualquier función escalonada se puede escribir como una combinación lineal de funciones características de intervalos. La integral de una función escalonada se define como:

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|$$

2.1 La Función Longitud

Sea $\mathcal{I}$ la colección de todos los intervalos en R. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ se define como $\lambda(I) := |I|$.

La función longitud λ tiene las siguientes propiedades:

- $\lambda(\emptyset) = 0$.
- **Monotonía:** Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ y $I_1 \subseteq I_2$, entonces $\lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.
- **Aditividad Finita:** Si $I \in \mathcal{I}$ tal que $I = \cup_{i=1}^{n} J_i$ con $J_i \in \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i)$.
- **Aditividad Contable (σ-aditividad):** Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ con $(I_i)_{i \in N} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces $\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **σ-subaditividad:** Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $(I_i)_{i \in N}$ son intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$.
- **Invarianza por traslaciones:** $\lambda(I + x) = \lambda(I)$ para todo $x \in R$.
- $\lambda(\{x\}) = 0$ para todo $x \in R$.

Nos gustaría extender λ a una clase más grande que $\mathcal{I}$. Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, donde $\mathcal{M}$ es una coleccción de subconjuntos de tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M}$, $m(E)$ represente la "longitud" de E. Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}()$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. m es σ-aditiva $(E,\ (E_n)_{n\in} \in \mathcal{M},\ E = {}_{n=1}^{\infty} E_n \implies m(E) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n))$;

$(1) + (2) + (3) \implies m$ es monóton, σ-subaditiva y finitamente aditiva.

4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(E + x) = m(E)\ \forall x \in$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal m que cumpla $(1) - (2) - (3) - (4)$ y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla $(1) - (2) - (3)$. (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla $(1) - (2) - (3)$).

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1) $\Longrightarrow$ TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3) pidiento solo (hay dos opciones):

  $\rightarrow$ aditividad finita $\Longrightarrow$ "medidas finitamente aditivas";
  $\rightarrow$ σ-subaditividad $\Longrightarrow$ "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender λ es la siguiente:

i. Si $E = {}_{i=1}^{n} I_i$ entonces defninimos $\lambda(E) \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$;

ii. Si $E = {}_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;

iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(6)$ para todo 6 abierto en ;

iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

Definición 13 (premedida)**.** *Sea X un conjunto no vacío y C una colección de subconjuntos de X tal que $\in C$. Diremos que una aplicación $\mathcal{T} : C \to [0, \infty]$ es una premedida si $\mathcal{T}() = 0$.*

Observación 3. *El conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección C será llamada una clase (de subconjuntos de X).*

Intuitivamente, C representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y $\mathcal{T}$ nos da su medida.

1. **Premedida de Lebesgue:** $C\mathcal{I}\{I \subseteq :\ I \text{ intervalo}\},\ \mathcal{T}(I)|I|$.
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F :\to$ monótona creciente y continua a derecha ($\lim_{x\to x_0}^{+} F(x) = F(x_0)$). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

Observemos que, por monotonía, existen límites

$$\left\{\begin{matrix} F(\infty) \lim\limits_{x\to\infty} F(x) \\ F(-\infty) \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) \end{matrix}\right\} \in$$

Sea además la clase $\widetilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de dada por

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathcal{I}}\{I(a,b)\ :\ \} \text{ donde } I(a,b)(a,b]\cap \\ &\quad = \{(a,b]\ :\ -\infty \le a \le b\} \cup \{(a,\infty)\ :\ -\infty \le a < \infty\}.. \end{aligned}$$

Definimos la premedida $\mathcal{T}_F$ de Lebesgue-Stieltjes asociada a F como la aplicación $\mathcal{T}_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$, dada por

$$\mathcal{T}_F(I(a,b)) = F(b) - F(a).$$

Observar que si $F(x) = x$ entonces $\mathcal{T}_F$ es la premedida de Lebesgue (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$.

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si F es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que F es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida $\mathcal{T}_F$ se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en).

Observación 4. $\mathcal{T}_F() = \mathcal{T}_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. **Premedida...**

Definición 14 (semiálgebra)**.** *Sea X un espacio y C una clase de subconjuntos de X. Decimos que C es una semiálgebra (de subconjuntos de X) si cumple:*

1. $\in C$;

2. (C es cerrada por intesecciones finitas) $A, B \in C \implies A \cap B \in C$;

3. Si $A \in C$, existen $C_1, \dots, C_n \in C$ disjuntos tal que $A^c = {}_{i=1}^{n} C_i$.

1. La clase $\mathcal{I}_d$ de intervalos en ^{d} es una semiálgebra.
2. La clase $\widetilde{\mathcal{I}}\{(a, b] \cap \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ es una semiálgebra.
3. Si X e Y son espacios y C_X, C_Y son semiálgebras en X e Y respectivamente, entonces

$$C_X \times C_Y \{F \times G \ : \ F \in C_X, \ G \in C_Y\}$$

es una semiálgebra en $X \times Y$, llamada "semiálgebra producto".

Definición 15 (álgebra)**.** *Sean X un espacio y A una clase de subconjuntos de X. Decimos que A es un álgebra (de subconjuntos de X) si cumple que:*

(i) $\in A$;

(ii) A es cerrado por intersecciones finitas;

(iii) (A es cerrada por complementos) $A \in A \implies A^c \in A$.

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

(ii') (A es cerrada por uniones finitas) $A, B \in A \implies A \cup B \in A$. ***(Dem:** Ejercicio!)*

1. X espacio, $A_1\{, X\}$, $A_2\mathcal{P}(X)$ son álgebras (donde A es llamada el álgebra trivial);
2. Sea S una semiálgebra de subconjuntos de un espacio X. Entonces

$$A\{E \subseteq X \ : \ \exists S_1, \dots, S_n \in S \text{ disjuntos tal que } E = {}_{i=1}^{n} S_i\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por S. Notemos que $A(S$ es el menor álgebra que contiene a S:

   (i) $A(S)$ es un álgebra y $S \subseteq A(S)$;

(ii) Si A' es un álgebra con $S \subseteq A'$ entonces $A(S \subseteq A'$.

Toda álgebr es una semiálgebra.

Definición 16 (σ-álgebra)**.** *Una clase (no vacía) M de subconjuntos de un espacio X se dice una σ-álgebra si cumple:*

1. $\in M$;
2. $E \in M \implies E^c \in M$;
3. $(E_n)_{n\in} \subseteq M \implies \bigcup_{n\in} E_n \in M$.

Llamamos al par (X, M) un espacio medible y a los elementos de M, conjuntos medibles.

1. Todo σ-álgebra es un álgebra;
2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por

   (iii') $(E_n)_{n\in} \subseteq M \implies \bigcap_{n\in} E_n \in M$.

1. σ-álgebra $\implies$ álgebra $\implies$ semiálgebra (no valen las recíprocas);
2. $\{, X\}, \mathcal{P}(X)$ son σ-álgebras;
3. Si $(M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ son σ-álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma \{E \subseteq X \ : \ E \in M_\gamma, \ \forall\gamma \in \Gamma\}$$

   es una σ-álgebra.

4. Si M es una clase de subconjuntos de X, entonces

$$\sigma(M) \qquad \bigcap_{\substack{M \ \sigma\text{-álgebra} \\ C \subseteq M}} \qquad M$$

   es la σ-álgebra generada por C. De hecho, $\sigma(M)$ es la menor σ-álgebra que contiene a C:

   (a) $\sigma(C)$ es σ-álgebra y $C \subseteq \sigma(C)$;
   (b) Si F es σ-álgebra y $C \subset F$ entonces $\sigma(C) \subseteq F$.

5. Si (X, T) es un espacio topológico, $\sigma(T)$ se conoce como la σ-álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos $\beta(X)$ $(= \sigma(T))$.

$\beta()$ contiene a tods los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo G_δ y $F_\sigma, \ldots$ De hecho, $\beta() = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}})$.

Definición 17. *Sea C una clase (no vacía) de subconjuntos de X y $\mu : C \to [0, \infty]$ una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:*

(i) μ ***es monótona*** *(en M) si $A, B \in C,\ A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$;*

(ii) μ ***es finitamente aditiva*** *si $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subseteq C$ disjuntos $\implies \mu(_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$;*

(iii) μ ***es σ-aditiva*** *si $(A_n)_{n\in} \subseteq C$ disjuntos $\implies \mu(_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$;*

(iv) μ ***es σ-subaditiva*** *si $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$, para todo $A \in C$ y $(A_n)_{n\in} \subseteq C$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in} A_n$*

Observación 5. *Rana da una definición más débil de (4):*

$$A \in C,\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in C\ \forall i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si C es una semiálgebra y μ es monótona (siempre será el caso para nosotros).

Definición 18 (premedida finita y σ-finita)**.** *Una premedida $\mathcal{T} : C \to [0, \infty]$ se dice:*

1. ***finita*** *si $X \in C$ y $\mathcal{T} < \infty$;*
2. ***σ-finita*** *si existen $(C_n)_{n\in} \subseteq C$ disjuntos tales que $_{n=1}^{\infty} C_n = X$ y $\mathcal{T}(C_n) < \infty\ \forall n \in$.*

1. finita $\implies$ σ-finita;
2. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ es σ-finita pero no finita;
3. Si F es una función de L-S, entonces $\mathcal{T}_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$ es siempre σ-finita ($\mathcal{T}_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty\ \forall n \in$) y es finita si y sólo si $\mathcal{T}_F() = \mathcal{T}_F((-\infty, \infty] \cap) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$.

Definición 19 (medida)**.** *Sea (X, M) es un espacio medible. Diremos que $\mu : M \to [0, \infty]$ es una medida (en (X, M)) si:*

1. *$\mu() = 0$;*
2. *μ es σ-subaditiva en M $\left(\mu\left(_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right)$.*

Llamamos a la terna (X, M, μ) un espacio de medida.

Objetivo. Construir un espacio de medida $(, M, \mu)$ tal que $\mathcal{I} \subseteq M$ y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I|\ \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E + x) = \mu(E)\ \forall E \in M. \end{cases}$$

[Espacios de Probabilidad] Si (X, M, μ) es un EdM tal que $\mu(X) = 1,\ (X, M, \mu)$ recibe el nombre de espacios de probabilidad.

- X recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota Ω (en lugar de X);
- M se suele notar como F (ó Y). Sus elementos se dicen eventos;
- μ recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota P.

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en (o en ^{d}).

1. **Distribuciones discretas:** $\exists S \subseteq$ numerable y $(p_x)_{x\in S} \subseteq [0,1]$ tal que $P(A) = \sum_{x\in A\cap S} p_x$. Binomial, Geométrica, Poisson,...
2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:** $\exists f : \to_{\geq 0}$ "integrable" tal que $P(A) = \int_A f(x)dx$. Uniforme, Exponencial, Normal,...

Propiedades generales de una medida. Si μ es una medida sobre (X, M), entonces:

1. μ es monótona (en M);
2. μ es σ-subaditiva;
3. μ es **continua por debajo**: si $(A_n)_{n\in} \subseteq M$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n$) entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n\in} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
4. μ es **continua por arriba**: si $(A_n)_{n\in} \subseteq M$ es decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n$) y $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algún n_0 ($\implies \mu(A_n) < \infty$ $\forall n \geq n_0$), entonces
$$\mu\left(\bigcap_{n\in} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si $\mu(A_n) = \infty$ $\forall n \in$)

Definición 20 (premedida extendible y unívocamente extendible)**.** *Una premedida $\mathcal{T} : S \to [0,\infty]$ definida sobre una semiálgebra de subconjunto de X, se dice:*

1. ***Extendible*** *si es*

(E1) finitamente aditiva en S;

(E2) σ-subaditiva en S.

2. ***Unívocamente extendible*** *si es extendible y se cumple*

(E3) σ-finita

Observación 6. *Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).*

Teorema 6 (Extensión de Carathéodory)**.** *Dados un espacio X y una premedida $\mathcal{T}$ sobre una semiálgebra S de subconjuntos de X tal que $\mathcal{T}$ es extendible, existe una extensión de $\mathcal{T}$ a una medida $\mu_{\mathcal{T}}$ definida sobre $\sigma(S)$ la σ-álgebra generada por S. Más aún, si $\mathcal{T}$ es unívocamente extendible, entonces la extensión $\mu_{\mathcal{T}}$ a $\sigma(S)$ es única.*
Por último, si $\mathcal{T}$ es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}$ sobre la $\mu_{\mathcal{T}}$-completación de $\sigma(S)$, i.e. la σ-álgebra $\overline{\sigma(S)}$ dada por

$$\overline{\sigma(S)}\{B \cup N : B \in \sigma(S), \exists \widetilde{N} \in \sigma(S) \text{ con } N \subseteq \widetilde{N} \text{ y } \mu_{\mathcal{T}}(\widetilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}(B \cap N)\mu_{\mathcal{T}}(B)$.

Observación 7. *Si $\mathcal{T} : S \to [0, \infty]$ es σ-aditiva en S y S es una semiálgebra, entonces $\mathcal{T}$ es extendible.*

Observación 8. *La extensión puede no ser única si $\mathcal{T}$ no es σ-finita.*

$\widetilde{\mathcal{I}}\widetilde{\mathcal{I}}\cap = \{(a, b]\cap \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$

- $\widetilde{\mathcal{I}}$ es una semiálgebra;
- $\sigma(\widetilde{\mathcal{I}}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}\cap) \overset{\text{Ej!}}{=} \sigma(\widetilde{\mathcal{I}})\cap = \beta()\cap = \mathcal{P}()$ (9.52)
- $\mathcal{T} : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$, dada por $\mathcal{T}(A) \begin{cases} 0 & A = \\ \infty & A \neq, \ A \in \widetilde{\mathcal{I}} \end{cases}$ (Observar que $\mathcal{T}$ no es σ-finita)
- Para cada $r > 0$, $\mu_r : \mathcal{P}() \to [0, \infty]$ dada por $\mu_r(A)r(\#A)$ es una extensión de $\mathcal{T}$ (y es una medida)

Definición 21 (espacio completo y conjuntos μ-nulos)**.** *Sea (X, M, μ) un EdM y definamos*

$$N_\mu\{E \subset X \ : \ \exists N \in M \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de N_μ se dicen conjuntos μ-nulos. Diremos que (X, M, μ) es completo si $N_\mu \subseteq M$

Observación 9. $(X, \overline{\sigma(S)}, \overline{\mu_\delta})$ *es completo. En efecto, $N_{\overline{\mu_\delta}}$ corresponde al subconjunto de $\overline{\sigma(S)}$ que se obtiene tomando $B =$.*

Observación 10. *Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:*

(i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud λ (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$) y las premedidas de probabilidad).

(ii) Premedidas de Lebesgue en ^{d}, con $d \in$.

En particular;

Corolario 1. *Para cada función F de Lebesgue-Stieltjes, existe una σ-álgebra M_F sobre y una única medida μ_F en $(, M_F)$ tal que*

$$\mu_F = (I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además, $\beta() \subseteq M_F$. Es decir, μ_F es una medida que extiende a $\mathcal{T}_F$, a todo M_F (y en particular, a todo $\beta()$). Además, $(, M_F, \mu_F)$ es un EdM completo. ($M_F\overline{\sigma(\widetilde{\mathcal{I}})^F}$, $\mu_F\overline{\mu_{\mathcal{T}_F}}$). La medida μ_F se conoce como medida de L-S asociada a F. En particular, para cualquier función de distribución F, existe una única medida de probabilidad P_F en $(, \beta())$ tal que

$$P_F(I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que $F \to P_F$ es una biyección)

Los β son los Borelianos y $I(a,b) = (a,b]\cap$. (super $F \to 10.26$).

[Importante!] **Medida de Lebesgue en .** Tomando $F = id$ en el Corolario anterior, obtenemos una σ-álgebra $L()M_{id}$ con $\beta() \subseteq L()$ y una medida μ_{id} en $(, L())$ tal que $\mu_{id}(I(a,b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. En particular, de esto se deduce que $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en), y los elementos de $L()$ se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación $\mu_{id}(E)\lambda(E)|E|$. La medida μ_{id} es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y $L()$ son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos $A \in L()$ tal que $\mu_{id}(A) = 0$ (lo veremos más adelante!).

[Medida de Lebesgue en ^{d}] Si $\mathcal{I}_d$ son los intervalos en ^{d} y definimos $\mathcal{T} : \mathcal{I}_d \to [0,\infty]$ como $\mathcal{T}(I)|I|$, entonces $\mathcal{I}_d$ es una semiálgebra y $\mathcal{T}$ es una premedida σ-aditiva en $\mathcal{I}_d$ (lo veremos después). Por lo tanto, $\mathcal{T}$ se puede extender (de manera única, pues $\mathcal{T}$ es σ-finita) a una medida μ_δ sobre la σ-álgebra $L(^d) = \overline{\sigma(\mathcal{I}_d)^{\mathcal{T}}}$, llamada medida de Lebesgue en ^{d} y $L(^d)$ es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en ^{d}. Al igual que antes, dado $E \in L(^d)$, notamos $|E|\mu_{\mathcal{T}}(E)$.