Tarea 1

Alonso Muñoz

Álgebra Lineal
Licenciatura en Matemática
Pontificia Universidad Católica - Chile

7 de septiembre de 2025

1. Problema 1

Sea V un espacio vectorial real.

- Llamamos la complejificación de V, que denotamos por $V_{\mathbb{C}}$, al producto $V \times V$. Un elemento de $V_{\mathbb{C}}$ es un par ordenado (u, v), donde $u, v \in V$; denotamos a tal elemento por $u + iv$.
- Definimos la suma en $V_{\mathbb{C}}$ mediante la regla
$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$$
para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$.
- La multiplicación por un escalar se define como
$$(a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$$
para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $u, v \in V$.

Demuestre que con las definiciones anteriores, $V_{\mathbb{C}}$ es un espacio vectorial sobre complejo.

Demostración. □

Problema 2

Suponga que U es un subespacio vectorial de V con $U \neq V$. Suponga además que $S \in \mathcal{L}(U, W)$, para algún espacio vectorial W, y que $S \neq 0$ (es decir, suponga que $Su \neq 0$ para algún $u \in U$). Defina $T : V \to W$ mediante

$$Tv = \begin{cases} Sv, & \text{si } v \in U, \\ 0, & \text{si } v \in V \text{ y } v \notin U. \end{cases}$$

Determine si T es una transformación lineal.

Problema 3

Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual a 3, y la función $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p(x)) = p(0)\, x^3 + p(1)\, (x - 4)^2.$$

(a) Muestre que T es una transformación lineal.

Demostración. Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
T(p(x)+q(x)) &= (q+p)(0)x^3 + (p+q)(1)(x-4)^2 \\
&= p(0)x^3 + q(0)x^3 + p(1)(x-4)^2 + q(1)(x-4)^2 \\
&= p(0)x^3 + q(1)(x-4)^2 + q(0)x^3 + q(1)(x-4)^2 \\
&= T(p(x)) + T(q(x))
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que $T(p(x)+q(x)) = T(p(x))+T(p(x)) \quad \forall p(x), p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Ahora, sea $\alpha \in \mathbb{F}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
T(\alpha \cdot p(x)) &= (\alpha \cdot p(0)x^3) + (\alpha \cdot p(1)(x-4)^2) \\
&= \alpha \cdot (0)x^3 + \alpha \cdot p(1)(x-4)^2 \\
&= \alpha(p(0)x^3 + q(1)(x-4)^2) \\
&= \alpha \cdot T(p(x))
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal. □

(b) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Demostración. En primer lugar, calculamos los respectivos componentes de la base, para $T(1)$, necesitamos que $p(x) = 1$, es decir $p(0) = 1$ y $p(1) = 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
T(1) &= p(0)x^3 + p(1)(x-4)^2 \\
&= x^3 + (x-4)^2 \\
&= 16 - 8x + x^2 + x^3 \\
&= 16 \cdot 1 - 8 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3
\end{aligned}$$

Ahora, notamos que para los siguientes tres vectores de la base, $T(x^1), T(x^2)$ y $T(x^3)$, necesitamos que $p(x^1) = x^1, p(x^2) = x^2$ y $p(x^3) = x^3$, es decir, $p(0) = 0$ y $p(1) = 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
T(x) &= p(0)x^3 + p(1)(x-4)^2 \\
&= 0 \cdot x^3 + 1 \cdot (x-4)^2 \\
&= 16 - 8x + x^2 \\
&= 16 \cdot 1 - 8 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x\ 3
\end{aligned}$$

Finalmente, la matriz asociada a la transformación lineal respecto a $\{1, x, x^2, x^3\}$ viene determinada por los escalares de las respectivas combinaciones lineales, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ -8 & -8 & -8 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Problema 4

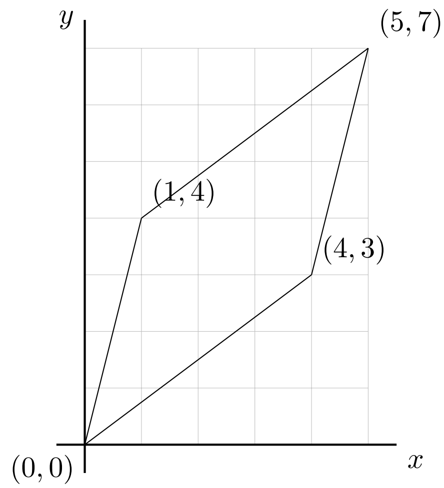
Considere los vectores en $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

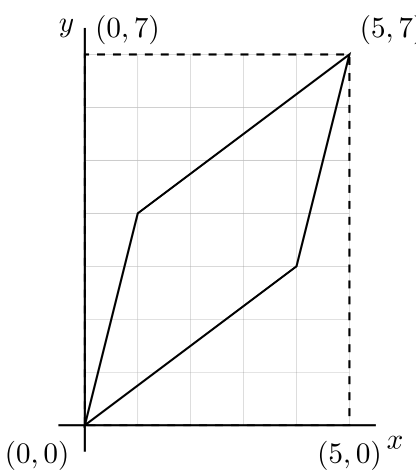
Sea $P(v_1, v_2)$ el paralelogramo generado por ambos vectores, y sea $A = [v_1, v_2]$ la matriz cuyas columnas son v_1 y v_2. Muestre que

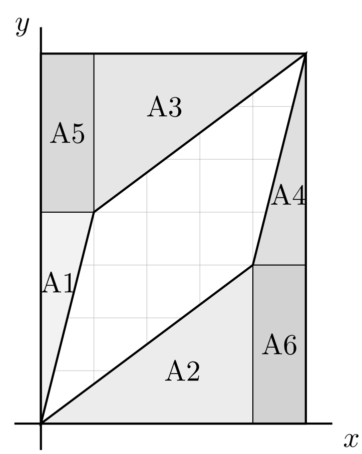
$$\det A = \text{Area}\left(P(v_1, v_2)\right).$$

Demostración. Observamos como se ve el paralelogramo formado por $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.



Ahora, consideramos dos áreas axuliares para calcular área$(P(v_1, v_2))$





Notemos que podemos calcular ambas áreas, ya que la primera corresponde a un rectangulo y la segunda es la suma de rectángulos y triángulos rectángulos. Por lo tanto, la resta de áreas es igual a

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= 35 - 22 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Además, podemos calular $\det(A)$:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Con esto, concluimos que $\det(A) = \acute{A}rea(\mathrm{P}(\mathrm{v}_1, v_2))$. □

Problema 5

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Decimos que A es *nilpotente* de orden k si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Por otro lado, decimos que A es *ortogonal* si $A^T A = I$. Pruebe las siguientes propiedades:

(a) El determinante de toda matriz nilpotente es 0.

Demostración. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz nilpotente, es decir, para algún $k \in \mathbb{Z} > 0$ se tiene que $A^k = 0$. En particular, para dicho caso k se tiene que

$$M_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \det(A^k) = \det(A \cdot A \cdots A)$$

Luego, sabemos que para $A, B \in M_{n\times n}(R)$, entonces

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

tenemos que

$$\det(A \cdot A \cdots) = \det(A) \cdot (A) \cdots \det(A)$$

$$M_0 = \det(A) \cdot \det(A) \cdots \det(A)$$

Por lo tanto,

$$\det(A) = 0$$

□

(b) El determinante de toda matriz ortogonal es ± 1.

Demostración. Sea $A \in_{n\times n} (\mathbb{R})$ una matriz ortogonal. Definimos $L = \det(A)$ y utilizamos

$$\det(A) = \det(A^t) \text{ y } \det(AB) = \det(A)\det(B) \quad \forall A, B \in M_{x\times n}(\mathbb{R})$$

tenemos que $L = \det(A) = \det(A^t)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \det(A) \\ &= \det(A^t A) \\ &= \det(A^t)\det(A) \\ &= L \times L \\ &= L^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$L = \det(A) = \pm 1$$

$\square$

Problema 6

Sea A una matriz cuadrada. Muestre que las matrices triangulares por bloque

$$\begin{pmatrix} I & * \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

tienen todas ellas determinante igual a $\det A$. (En la notación anterior, el símbolo “$*$” significa “lo que sea”).

Problema 7

El objetivo de este problema es demostrar el determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \cdots & c_0^n \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\le j<k\le n} (c_k - c_j).$$

Para ello, procederemos por inducción:

(a) Muestre que la fórmula funciona para $n = 1, 2$.

(b) Defina $x := c_n$ y muestre que el determinante es un polinomio de grado n,

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n,$$

donde los coeficientes dependen de $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.

(c) Muestre que las raíces del polinomio anterior son $x = c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, de manera que el determinante toma la forma

$$A_n(x - c_0)(x - c_1) \cdots (x - c_{n-1}).$$

(d) Asumiendo que la fórmula es válida para $n - 1$, calcule A_n y demuestre la fórmula para n.