

Attenzione:

Il seguente file comprende:

- 1) tutte le risposte delle crocette
- 2) Tutte le dimostrazioni dell'ottimo file "syllabus.pdf" presente già su Mega (e correzioni/precisazioni dello stesso)
- 3) Ampliamenti alle risposte e completamenti dove mancanti alle dim. irrinunciabili e domande similari
- 4) Domande fuori dal syllabus chieste almeno una volta in esami
- 5) Domande fuori dal syllabus non chieste ma presenti a titolo di cautela

Credo sia uno strumento unico ed utile, forse il file definitivo per calcolo.

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare **TUTTE** le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC

(ci possono essere più risposte corrette)

1) Il polinomio interpolatore di $f(x) = x^2 + bx + c$ su 20 nodi distinti:

- A) ha grado 3
- B) ha grado 20
- C) ha grado 2
- D) ha grado 19

2) La somma algebrica di numeri approssimati:

- A) è sempre instabile
- B) è stabile quando i numeri hanno segno opposto
- C) è instabile quando i numeri hanno lo stesso segno
- D) può essere instabile quando i numeri hanno segno opposto

3) Il metodo di Newton (tangenti) quando converge:

- A) ha sempre convergenza quadratica
- B) ha sempre convergenza lineare
- C) può avere convergenza lineare
- D) può avere convergenza cubica

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) La moltiplicazione tra numeri approssimati:

- A) è sempre instabile
- B) è instabile quando i numeri hanno lo stesso segno
- C) è sempre stabile
- D) è instabile quando i numeri hanno segno opposto

2) L'interpolazione cubica a tratti a passo costante h :

- A) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^5[a, b]$
- B) non converge uniformemente se $f \in C^k[a, b]$ con $k < 5$
- C) converge uniformemente con errore $O(h^5)$ per $f \in C^3[a, b]$
- D) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^2[a, b]$

3) La precisione di macchina in un sistema floating-point $F(b, t, L, U)$ è:

- A) il più piccolo reale-macchina positivo
- B) $b^{L-t}/2$

dove b è base, t è una serie di cifre di mantissa,
e l'esponente è compreso tra L ed U

- C) il massimo errore relativo di arrotondamento a t cifre di mantissa
- D) b^{L-U}

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) La formula di derivazione numerica col rapporto incrementale simmetrico $\delta(h)$ per $f \in C^5$ ha un errore teorico:

- A) $O(h^4)$
- B) $O(h^3)$
- C) $O(h^2)$
- D) $O(h^5)$

2) Il costo computazionale del Metodo di Eliminazione Gaussiana applicato a una matrice invertibile é:

- A) $\sim 5n^3/4$
- B) $O(n^3)$
- C) $O(n^2)$
- D) $\sim 2n^3/3$

3) Il metodo di Newton (tangenti) quando converge:

- A) può avere convergenza lineare
- B) ha sempre convergenza lineare
- C) può avere convergenza quadratica
- D) ha sempre convergenza quadratica

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) Il prodotto di numeri approssimati:

- A) è sempre stabile
- B) è instabile quando i numeri hanno segno opposto
- C) è sempre instabile
- D) è instabile quando i numeri hanno lo stesso segno

2) L'interpolazione lineare a tratti a passo costante

- A) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^5[a, b]$
- B) non converge uniformemente se $f \in C^k[a, b]$ con $k < 4$
- C) converge uniformemente con errore $O(h^2)$ per $f \in C^2[a, b]$
- D) converge uniformemente con errore $O(h^2)$ per $f \in C^3[a, b]$

3) Il polinomio interpolatore di $f(x) = x^3 + bx + c$ su 29 nodi distinti:

- A) ha grado 30
- B) ha grado 3
- C) ha grado ≤ 28
- D) ha grado 4

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) In un sistema floating-point $F(b, t, L, U)$ il più piccolo reale-macchina positivo è:

A) la precisione di macchina

B) b^{-U}

C) b^{L-1}

D) b^{L-U}

2) Il costo computazionale del Metodo di Eliminazione Gaussiana applicato a una matrice invertibile è:

A) $\sim 2n^4/3$

B) $\sim 2n^3/3$

C) $O(n^2)$

D) $\sim n^3$

3) L'interpolazione spline cubica a passo costante h per $f \in C^4[a, b]$ ha un errore:

A) $O(h^5)$ su f

B) $O(h^3)$ su f'

C) $O(h^3)$ su f''

D) $O(h^4)$ su f

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) La divisione tra numeri approssimati:

- A) è sempre stabile
- B) può essere instabile
- C) è instabile se i numeri hanno segno opposto
- D) è stabile se i numeri hanno lo stesso segno

2) L'interpolazione spline cubica a passo costante:

- A) converge uniformemente con errore $O(h^5)$ per $f \in C^5[a, b]$
- B) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^4[a, b]$
- C) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^6[a, b]$
- D) non converge mai uniformemente

3) In un sistema floating-point $F(b, t, L, U)$ il più piccolo reale-macchina positivo è:

- A) b^{L-U}
- B) $b^{1-t}/2$
- C) b^{-U}
- D) b^{L-1}

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) La divisione tra numeri approssimati:

- A) è sempre stabile
- B) è instabile quando i numeri hanno lo stesso segno
- C) può essere instabile quando i numeri hanno segno opposto
- D) è sempre instabile

2) L'interpolazione quadratica a tratti a passo costante

- A) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^5[a, b]$
- B) non converge uniformemente se $f \in C^k[a, b]$ con $k < 6$
- C) converge uniformemente con errore $O(h^3)$ per $f \in C^5[a, b]$
- D) converge uniformemente con errore $O(h^3)$ per $f \in C^3[a, b]$

3) La precisione di macchina in un sistema floating-point $F(b, t, L, U)$ è:

- A) il più piccolo reale-macchina positivo
- B) $b^{1-t}/2$
- C) il minimo reale-macchina positivo che sommato ad 1 dà un risultato > 1
- D) b^{L-1}

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) L'indice di condizionamento di una matrice invertibile $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è:

- A) $\det(A)$
- B) l'autovalore di modulo massimo di A
- C) l'autovalore di modulo minimo di A
- D) $\|A\| \|A^{-1}\|$

2) Il costo computazionale del Metodo di Eliminazione Gaussiana applicato a una matrice invertibile é:

- A) $O(n^3)$
- B) $\sim n^3$
- C) $O(n^2)$
- D) $\sim n^4$

3) Le iterazioni di punto fisso per una contrazione:

- A) hanno sempre convergenza quadratica
- B) possono avere convergenza quadratica
- C) possono non convergere
- D) hanno sempre convergenza almeno lineare

1 Precisione di macchina come max errore relativo di arrotondamento nel sistema floating-point

Definiamo arrotondamento a t cifre di un numero reale scritto in notazione floating-point

$$x = \text{sign}(x)(0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) \cdot b^p$$

il numero

$$fl^t(x) = \text{sign}(x)(0, d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t) \cdot b^p$$

dove la mantissa è stata arrotondata alla t -esima cifra

sign = funzione segno (ossia la funzione che fa corrispondere a tutti i numeri negativi il valore -1 , allo zero il valore 0 e a tutti i numeri positivi il valore 1)

$$\tilde{d}_t = \begin{cases} d_t & \text{se } d_{(t+1)} < \frac{b}{2} \\ d_t + 1 & \text{se } d_{(t+1)} \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$

Definiamo:

$$\text{Errore Relativo} \leftarrow \frac{\overbrace{|x - fl^t(x)|}^{\text{Errore Assoluto}}}{|x|} \quad \text{per } x \neq 0$$

Stimiamo il numeratore

$$\begin{aligned} |x - fl^t(x)| &= b^p \cdot \overbrace{|(0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) - (0, d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t)|}^{\text{Errore di arrotondamento a } t \text{ cifre dopo la virgola} \leq \frac{b^{-t}}{2}} \\ &\leq b^p \cdot \frac{b^{-t}}{2} = \frac{b^{p-t}}{2} \end{aligned}$$

Notiamo subito un aspetto: l'errore dipende da p , cioè dall'ordine di grandezza del numero (in base b).

Stimiamo da sopra $\frac{1}{|x|}$, ovvero da sotto $|x|$:

$$|x| = (0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) \cdot b^p$$

Poiché $d_1 \neq 0$, p fissato, il minimo valore della mantissa è $0,100\dots = b^{-1}$. Quindi:

$$|x| \geq b^{-1} \cdot b^p = b^{p-1} \iff \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{b^{p-1}}$$

Otteniamo

$$\frac{|x - fl^t(x)|}{|x|} \leq \frac{\frac{b^{p-t}}{2}}{b^{p-1}} = \frac{b^{p-t+1-p}}{2} = \frac{b^{1-t}}{2} = \varepsilon_M$$

Appunto di conclusione: nel sistema FP a 64-bit, la prec. di macchina è pari a $2^{-(53)}$

2 Analisi di stabilità di moltiplicazione, divisione, addizione e sottrazione con numeri approssimati

2.1 Moltiplicazione Risponde alla domanda: Stabilità della moltiplicazione

$$\varepsilon_{xy} = \frac{|xy - \tilde{x}\tilde{y}|}{|xy|}, \quad x, y \neq 0$$

Usiamo la stessa tecnica che si usa per dimostrare che il limite del prodotto di due successioni o funzioni è il prodotto dei limiti, aggiungendo e togliendo a numeratore ad esempio $\tilde{x}y$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{|xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y}|}{|y|} \\ &= \frac{\overbrace{|y(x - \tilde{x})|}^{=a} + \overbrace{|\tilde{x}(y - \tilde{y})|}^{=b}}{|xy|} \\ &\leq \frac{|y(x - \tilde{x})| + |\tilde{x}(y - \tilde{y})|}{|xy|} \quad (*) \end{aligned}$$

(*) Disuguaglianza triangolare: $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

Quindi otteniamo

$$\varepsilon_{xy} \leq \frac{|y||x - \tilde{x}|}{|xy|} + \frac{|\tilde{x}||y - \tilde{y}|}{|xy|} = \varepsilon_x + \frac{|\tilde{x}|}{|x|} \varepsilon_y$$

Questo perché $\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} = \varepsilon_x$ e $\frac{|y - \tilde{y}|}{|y|} = \varepsilon_y$.

Poiché $\tilde{x} \approx x \Rightarrow \frac{|\tilde{x}|}{|x|} \approx 1$ e possiamo quindi dire che la moltiplicazione è STABILE.

$$\varepsilon_{xy} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Però possiamo dare una stima più precisa di $\frac{|\tilde{x}|}{|x|}$

$$\frac{|\tilde{x}|}{|x|} = \frac{\overbrace{|x|}^{=a} + \overbrace{|\tilde{x} - x|}^{=b}}{|x|} \leq \frac{|x| + |\tilde{x} - x|}{|x|} = 1 + \varepsilon_x$$

Disuguaglianza Triangolare

e quindi

$$\varepsilon_{xy} \leq \varepsilon_x + (1 + \varepsilon_x) \varepsilon_y$$

Solitamente $\varepsilon_x \leq \varepsilon_M \approx 10^{-16} \Rightarrow 1 + \varepsilon_x$ è vicinissimo ad 1. Ma anche se $\varepsilon_x = 1$ (errore del 100%, molto grande) $\Rightarrow (1 + \varepsilon_x) = 2$ e la stabilità della moltiplicazione non cambia.

2.2 Divisione Risponde alla domanda: Stabilità della divisione

La divisione è la moltiplicazione per il reciproco $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.
Analizzando quindi l'operazione di reciproco

$$\varepsilon_{\frac{1}{y}} = \frac{\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{\tilde{y}} \right|}{\left| \frac{1}{y} \right|} = \frac{\frac{|\tilde{y} - y|}{|\tilde{y}y|}}{\frac{1}{|y|}} = \frac{|\tilde{y} - y|}{|y|} \cdot \frac{|y|}{|\tilde{y}|} \approx \varepsilon_y \quad \left(\text{questo perchè } \frac{|\tilde{y} - y|}{|y|} = \varepsilon_y \right)$$

Poiché $\frac{|y|}{|\tilde{y}|} \approx 1$ possiamo dedurre che il reciproco, e possiamo quindi la divisione, è STABILE.
 Però possiamo dare una stima più precisa di $\frac{|y|}{|\tilde{y}|}$

$$|\tilde{y}| = |y + \tilde{y} - y| = |y| \left| 1 + \frac{(\tilde{y} - y)}{y} \right|$$

usando la stima da sotto nella disuguaglianza triangolare

$$|a + b| \geq ||a| - |b||$$

$$a = 1 \text{ e } b = \frac{(\tilde{y} - y)}{y}$$

$$\left| 1 + \frac{(\tilde{y} - y)}{y} \right| \geq \left| 1 - \frac{|\tilde{y} - y|}{|y|} \right| = |1 - \varepsilon_y| = 1 - \varepsilon_y \quad \left(\text{perché } \varepsilon_y < 1 \right)$$

da cui si ottiene

$$|\tilde{y}| \geq |y|(1 - \varepsilon_y)$$

e quindi

$$\frac{|y|}{|\tilde{y}|} \leq \frac{|y|}{|y|(1 - \varepsilon_y)} = \frac{1 + \varepsilon_y}{(1 + \varepsilon_y)(1 - \varepsilon_y)} = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 - \varepsilon_y^2} \approx 1 + \varepsilon_y$$

Poiché $\varepsilon_y^2 \ll \varepsilon_y < 1$

Quindi

$$\varepsilon_{\frac{1}{y}} = \varepsilon_y \frac{|y|}{|\tilde{y}|} \lesssim \varepsilon_y(1 + \varepsilon_y) \approx \varepsilon_y \Rightarrow \varepsilon_{\frac{1}{y}} \lesssim \varepsilon_y$$

Infine abbiamo che per la divisione vale (usando la stima della moltiplicazione)

$$\varepsilon_{\frac{x}{y}} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

2.3 Somma Algebrica

Risponde alle domande:

Stabilità dell'addizione

Instabilità della sottrazione (ed esempio).

Negli appunti ce ne stanno 4 di esempi di instabilità della sottrazione: qui si ha il più easy.

$$x + y = \begin{cases} \text{ADDIZIONE} & \text{se } \text{sign}(x) = \text{sign}(y) \\ \text{SOTTRAZIONE} & \text{se } \text{sign}(x) \neq \text{sign}(y) \end{cases}$$

Per la somma algebrica vale:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x+y} &= \frac{|(x+y) - (\tilde{x} + \tilde{y})|}{|x+y|}, \quad x+y \neq 0 \\ &= \frac{|x - \tilde{x} + y - \tilde{y}|}{|x+y|}, \quad a = x - \tilde{x} \text{ e } b = y - \tilde{y} \\ &\leq \frac{|x - \tilde{x}|}{|x+y|} + \frac{|y - \tilde{y}|}{|x+y|}, \quad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE} \\ &= \frac{|x|}{|x+y|} \cdot \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} + \frac{|y|}{|x+y|} \cdot \frac{|y - \tilde{y}|}{|y|} \\ &= w_1 \varepsilon_x + w_2 \varepsilon_y \quad \text{con } w_1 = \frac{|x|}{|x+y|}, w_2 = \frac{|y|}{|x+y|} \end{aligned}$$

Addizione $\text{sign}(x) = \text{sign}(y)$

In questo caso $|x+y| \geq |x|, |y| \Rightarrow w_1, w_2 \leq 1$. Quindi l'addizione è stabile $\varepsilon_{x+y} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$

1.5.1 Esempio 1

Consideriamo $\mathbb{F}(10, 4, L, U)$ (con L, U sufficienti per rappresentare i numeri che ci interessano) e

$$x = 0,10016$$

$$y = -0,10012$$

allora

$$\tilde{x} = fl^4(x) = 0,1002$$

$$\tilde{y} = fl^4(y) = -0,1001$$

eseguendo l'operazione-macchina di somma algebrica (che è una sottrazione visto che x e y hanno segno opposto) si ottiene

$$\begin{aligned}x \oplus y &= fl^4(fl^4(x) + fl^4(y)) \\&= fl^4(0,1002 - 0,1001) \\&= 10^{-4}\end{aligned}$$

scriveremo spesso i numeri in notazione standard per comodità)

Invece

$$x + y = 4 \cdot 10^{-5}$$

quindi l'errore relativo nel risultato è

$$\frac{|(x + y) - (x + y)|}{|x + y|} = \frac{|4 \cdot 10^{-5} - 10^{-4}|}{4 \cdot 10^{-5}} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-5}} = \frac{3}{2} = 150\%$$

Da inserire la considerazione sui pesi (tralasciando quando sotto scrive “ci apre la strada per l’analisi del prossimo esempio”:

Abbiamo un errore del 150% e una perdita di precisione di ben tre ordini di grandezza rispetto alla precisione di macchina.

Qui il problema sta nella sottrazione tra numeri vicini, visto che $x + y = 4 \cdot 10^{-5}$ ma $|x|, |y| \approx 10^{-1}$

Infatti se calcoliamo i pesi $w_1 = \frac{|x|}{|x + y|} \simeq \frac{10^{-1}}{4 \cdot 10^{-5}} = \frac{10^4}{4} = 2500$

e analogamente $w_2 \approx 2500$

Questi fattori di amplificazione degli errori sui dati sono dell’ordine di 10^3 e spiegano come si arrivi ad un errore finale $> 100\%$, che rende inaccettabile in pratica il risultato in questo caso i fattori di amplificazione non sono enormi, ma sono comunque

$> 1/\varepsilon_M$ osserviamo che bastava una 1 cifra di mantissa in più per avere il risultato esatto, perchè con $t=5$ non ci sarebbe stato bisogno di arrotondare x e y e quindi $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ questo ci apre la strada all’analisi del prossimo esempio, un po’ più sofisticato.

Sottrazione $\text{sign}(x) \neq \text{sign}(y)$

In questo caso $|x + y| \leq |x|$ e/o $|x + y| \leq |y| \Rightarrow \max\{w_1, w_2\} > 1$. Quindi la sottrazione è potenzialmente instabile (se w_1, w_2 troppo grandi).

Nel caso in cui $|x|, |y|$ siano molto vicini in termini relativi, si ha

$$|x + y| \ll |x|, |y| \Rightarrow w_1, w_2 \gg 1$$

3 Convergenza del metodo di bisezione [Risponde alla domanda omonima](#)

Il metodo di bisezione si basa sull'applicazione iterativa del Teorema degli zeri di funzioni continue:
Se $f(x) \in C[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$ (cioè f cambia segno) allora

$$\exists \xi : f(\xi) = 0, \xi \in (a, b)$$

Il procedimento consiste nel passare da $[a_n, b_n] \rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}]$ in cui uno degli estremi è diventato il punto medio

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

A meno che per qualche n non risulti $f(x_n) = 0$, si tratta di un processo infinito che ci permette di costruire tre successioni $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ tali che:

- $|\xi - a_n|, |\xi - b_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $|\xi - x_n| < \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

È semplice dimostrare che tutte e tre le successioni convergono ad uno zero $\xi \in (a, b)$

- $0 \leq |\xi - a_n|, |\xi - b_n| < \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xRightarrow{\text{Teor. Carabinieri}} |\xi - a_n|, |\xi - b_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$
- $0 \leq |\xi - x_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}} \implies |\xi - x_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Sappiamo che "csi" zero di f sta nell'intorno aperto di centro x_n e raggio $(b_n - a_n)/2$.

Nel metodo di bisezione si sceglie x_n come successione di approssimazioni, visto che la stima dell'errore è migliore di un fattore $1/2$ rispetto a quella di a_n e b_n .

4 Stima dell'errore con residuo pesato (metodo bisezione)

Vogliamo stimare l'errore di bisezione, applicato nelle seguenti ipotesi:

$$\left. \begin{array}{l} f \in C^1[a, b] \\ \{x_n\} \in [c, d] \subseteq [a, b] \\ f'(x) \neq 0, \forall x \in [c, d] \end{array} \right\} \Rightarrow e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}, \quad n \geq n_0, \quad z_n \in \begin{cases} (x_n, \xi) \\ (\xi, x_n) \end{cases}$$

C^1 indica derivabile 1 volta con derivata continua.

Dimostriamolo utilizzando il teorema del valor medio

$$\text{Sia } f \in C[a, b] \text{ derivabile in } [a, b] \Rightarrow \exists z \in [a, b] : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z)$$

Consideriamo il caso $\xi < x_n$ (se $x_n < \xi$ la dimostrazione è analoga)

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(z_n)(x_n - \xi), \quad z_n \in (\xi, x_n)$$

con $f(\xi) = 0$, cioè

$$|f(x_n)| = |f'(z_n)| |x_n - \xi|$$

che si può riscrivere come

$$e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}$$

Osserviamo che:

- e_n è un "residuo pesato"
- $f'(x) \neq 0 \Rightarrow$ zero è semplice
- e_n è una stima a posteriori (serve aver calcolato x_n)

Siccome non conosciamo z_n , diamo delle stime pratiche dell'errore:

- Se è noto che $|f'(x)| \geq k > 0 \Rightarrow e_n = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{k}$
- Se f' è nota, per n abbastanza grande si ha (grazie al teor. dei carabinieri e per continuità di f')

$$\underbrace{f'(x_n) \approx f'(z_n)}_{\approx f'(\xi)} \Rightarrow e_n \approx \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}$$

Avremo quindi una "stima empirica", tale che stiamo "stabilizzando" l'ordine di grandezza di $|f'(x_n)|$, cercando di stabilizzare il rapporto ad 1 per quanto riguarda il peso

- Se f' non è nota, si può approssimare con un rapporto incrementale delle quantità calcolate, di nuovo ottenendo una sorta di stima empirica

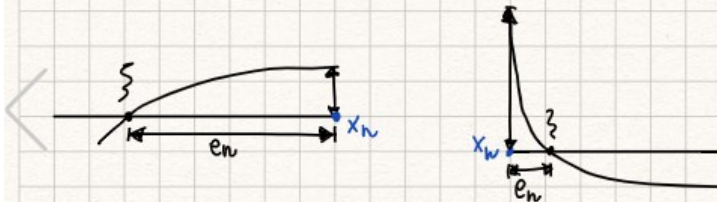
$$f'(z_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \quad \text{per } n \text{ abbastanza grande}$$

Detto k_n il peso calcolato con uno degli approcci (1) e (3), siamo allora in grado di scrivere un test di arresto che combina stima a priori e a posteriori:
 $\min \{b-a/(2^{n+1}), |f(x_n)|/k_n\} \leq \epsilon$

Perché il residuo non pesato può non essere una buona stima errore?

In generale, non è vero che $|f(x_n)| \leq \epsilon \Rightarrow e_n \leq \epsilon$. Per avere una buona stima dell'errore a posteriori bisogna pesare il residuo alla derivata.

Per capire il motivo, si considerino i seguenti grafici con $|f(x)| = \text{RESIDUO}$



Il primo è un caso di sottostima (residuo piccolo, errore grande)

Il secondo è un caso di sovrastima (residuo grande, errore piccolo)

In particolare, il caso più pericoloso dei due è la sottostima, dato che potrebbe portare allo stop delle iterazioni prima di trovare un valore che rispetti i limiti di tolleranza, mentre la sovrastima comporta solamente di effettuare più iterazioni del necessario, affinando il risultato al valore effettivamente cercato.

5 Convergenza globale del metodo di Newton ("delle tangenti") in ipotesi di convessità/concavità stretta

Metodo di Newton: Linearizzare iterativamente la funzione con la tangente nel punto

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \end{cases} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

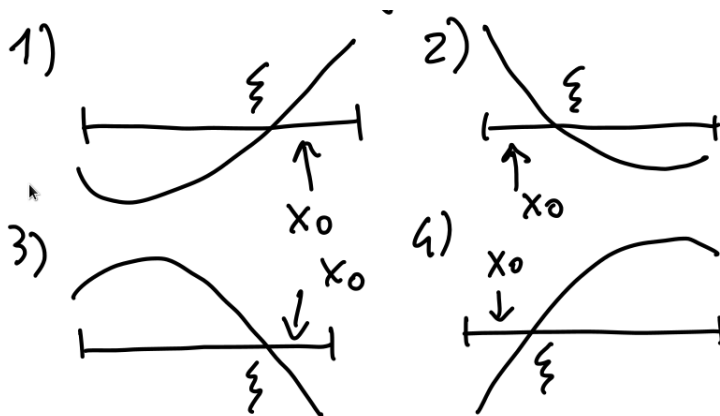
Convergenza metodo di Newton:

$$\begin{cases} f \in C^2[a, b] \\ f(a)f(b) < 0 \\ f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \\ x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Il metodo di Newton è ben definito (cioè } f'(x_n) \neq 0) \\ \text{e converge all'unico zero } \xi \text{ di } f \text{ in } [a, b]$$

Dimostrazione

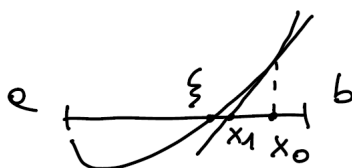
ci sono 4 casi possibili in base al segno di f'' ovvero

Avendo che:
in (1) e (2) f è strettamente convessa,
in (3) e (4) concava,
in (1) e (3) x_0 va scelto in $(\text{csi}, b]$,
in (2) e (4) x_0 va scelto in $[a, \text{csi})$.



In questa dimostrazione di concentriamo sul caso 1)

(in cui l'ipotesi chiave è che non cambi segno f'' ; comprende anche quando f' non cambia segno)



- $f(a) < 0, f(b) > 0$
- $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- $x_0 \in [a, b]$

Dimostriamo come prima cosa: $x_n \in (\xi, b] \Rightarrow x_{n+1} \in (\xi, b]$

f è esattamente convessa \Rightarrow La tangente sta "sotto al grafico" $\forall x \in [a, b]$
 \Rightarrow La tangente in un punto $\in (\xi, b]$ interseca l'asse x "a destra" di ξ

Dimostriamo quindi: $x_{n+1} < x_n$ (cioè $\{x_n\}$ è decrescente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Big\} > 0$$

Poiché per $x_n \in (\xi, b]$ si ha $f(x_n) > 0$. Inoltre $f'(x_n) > 0$ in $(\xi, b]$ altrimenti per avere uno zero f'' in $(\xi, b]$ dovrebbe cambiare segno.

Abbiamo quindi che $\{x_n\}$ è una successione decrescente, con $x_n > \xi \quad \forall n$.

Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\} = \eta \quad \text{con} \quad \eta \geq \xi \quad (\text{monotonia della successione da Analisi})$$

Infine (passando al limite della formula e usando proprietà dei limiti e continuità di f ed f')

$$\begin{aligned} \eta &= \lim x_{n+1} = \lim \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\ &= \lim x_n - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \lim x_n - \frac{\lim f(x_n)}{\lim f'(x_n)} \\ &= \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)} \leftarrow \lim x_n = \eta \\ &= \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \end{aligned}$$

Quindi

$$\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \quad \text{con} \quad f'(\eta) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} = 0 \Rightarrow f(\eta) = 0 \Rightarrow \eta = \xi$$

Ciò conclude che il Metodo di Newton è ben definito ed $\{x_n\}$ converge a ξ .

La velocità di convergenza del metodo di Newton è usata solo per questa risposta; qui è espansa nel modo corretto.

Perché il metodo di Newton per zeri semplici ha ordine di convergenza almeno 2? Quando ha ordine esattamente 2? (si dimostri la relazione fondamentale che lega e_{n+1} e e_n).

Sia

$$\begin{cases} f \in C^2[a, b] \\ \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0 \\ \{x_n\} \subset [c, d] \subseteq [a, b] \\ f'(x) \neq 0 \forall x \in [c, d] \end{cases} \Rightarrow e_{n+1} \leq c e_n^2, \quad n \geq 0, \quad c = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}$$

$$\text{con } M_2 = \max_{x \in [c, d]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x \in [c, d]} |f'(x)| > 0$$

Applichiamo la formula di Taylor centrata in x_n e calcolata in ξ , con resto del II ordine in forma di Lagrange

$$\underbrace{f(\xi)}_{=0} = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2 \quad z_n \in \text{int}(x_n, \xi) \subset [c, d]$$

\Downarrow

int = intervallo

$$\underbrace{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{=x_{n+1}-x_n} = \xi - x_n + \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

\Downarrow

$$x_{n+1} = \xi + \frac{f''(z_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

aggiungendo i moduli

\Downarrow

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - \xi| = c_n e_n^2 \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2} \frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|}$$

Rispondendo alle domande:

- Il metodo di Newton ha convergenza esattamente 2 quando: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = L' \neq 0$
 $e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|}$ e quindi: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi)|}{|f'(\xi)|}$ con $f''(\xi) \neq 0$ ed $f'(\xi) = 0$
- Il metodo di Newton ha convergenza almeno 2 quando: $e_{n+1} \leq c e_n^2$ cioè $f'(\xi) = 0$ ed $\exists f''(\xi)$

7 Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

Sia ξ punto fisso di $\phi \in C(I)$ e I è un intervallo chiuso (non necessariamente limitato) di \mathbb{R} . Supponiamo di essere nelle ipotesi in cui:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad \text{converge a } \xi \quad (\xi = \phi(\xi)) \quad \text{con } x_0 \in I$$

Allora:

- $\{x_n\}$ ha ordine esattamente $p = 1 \iff 0 < |\phi'(\xi)| < 1$
- $\{x_n\}$ ha ordine esattamente $p > 1 \iff \phi^{(j)}(\xi) = 0$ e $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$ con $1 \leq j \leq p-1$

Dimostrazione

1) si dimostra subito visto che

$$e_{n+1} = |\phi'(z_n)|e_n \quad \text{con } z_n \in (\xi, x_n)$$

\Downarrow

per il t. del val. medio avremo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \left| \phi' \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right) \right| = |\phi'(\xi)|$

per 2) utilizziamo la formula di Taylor di grado $p-1$ centrata in ξ e calcolata in x_n , con il resto p -esimo in forma di Lagrange.

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi(\xi) + \phi'(\xi)(x_n - \xi) + \dots + \frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}(x_n - \xi)^{(p-1)} + \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$

con $u_n \in (\xi, x_n)$

- **Dimostriamo “ \Leftarrow ” (condizione sufficiente)** (se valgono tutte le ipotesi di "ordine $p > 1$ ") allora:

Da Taylor resta solo

$$x_{n+1} - \xi = \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$

e passando ai moduli

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|\phi^{(p)}(u_n)|}{p!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|\phi^{(p)}(\xi)|}{p!} \neq 0$$

e_n^p ovvero per p , $\{x_n\}$ ha ordine esattamente p .

- **Dimostriamo “ \Rightarrow ” (condizione necessaria)**

Per ipotesi $\{x_n\}$ ha esattamente ordine $p > 1$.

Abbiamo per assurdo che $\exists j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0$, prendiamo $k = \min\{j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0\}$ e dal polinomio di Taylor iniziale si avrebbe:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|\phi^{(k)}(\xi)|}{k!} = L' \neq 0$$

ma allora

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{e_{n+1}}{e_n^k} \cdot e_n^{k-p}$$

$$\left(\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \rightarrow L' \text{ ed } e_n^{k-p} \rightarrow \infty \text{ perchè } k - p < 0 \text{ ed } e_n \rightarrow 0 \right)$$

cioè

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

contraddicendo l'ipotesi che $\{x_n\}$ abbia ordine esattamente p .

La condizione data è necessaria e sufficiente affinché le iterazioni di punto fisso abbiano ordine $p \geq 1$

8 Esistenza e unicità dell'interpolazione polinomiale

Unicità

Supponiamo che \exists due polinomi $p, q \in \mathbb{P}_n$ (polinomi di grado $\leq n$), $p \neq q$, che interpolano $p(x_i) = y_i = q(x_i)$, con $0 \leq i \leq n \rightarrow n+1$ modi di interpolare.

Poiché \mathbb{P}_n è uno spazio vettoriale $\Rightarrow p - q \in \mathbb{R}_n$.

Allora:

$$(p - q)(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0, \quad \forall 0 \leq i \leq n$$

$$\Downarrow \\ p-q \text{ ha } n+1 \text{ zeri distinti}$$

Ma per il teorema fondamentale dell'algebra, $p - q$ può avere al massimo n zeri distinti, a meno che non sia il polinomio nullo

$$(p - q)(x) = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad p(x) = q(x) \quad \forall x$$

Esistenza

Definiamo il "polinomio di Lagrange":

$$l_i(x) = \frac{N_i(x)}{N_i(x_i)}$$

dove

$$N_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

$l_i(x) \in \mathbb{P}_n$ poiché $N_i(x) \in \mathbb{P}_n$ e $N_i(x_i)$ è un numero $\neq 0$. (inoltre, $l_i(x)$ ha grado effettivo n)

Osserviamo che:

$$(\text{cosiddetto delta di Kronecker}) \quad l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\text{N}_i(x_k) \text{ contiene un fattore nullo che annulla il prodotto}) \\ (\text{vale 1 perché } N_i(x_i) / N_i(x_i) = 1) \end{array}$$

Definiamo il "polinomio interpolatore di Lagrange":

$$f_n(x) = \prod_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \in \mathbb{P}_n$$

Verifichiamo che interpola

$$\begin{aligned} \prod_n(x_k) &= \sum_{i=0}^n y_i l_i(x_k) \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \delta_{ik} \\ &= y_k \delta_{kk} \quad \leftarrow \quad \text{perchè } \delta_{ik} = 0, i \neq k \\ &= y_k, \quad 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Quanto scritto è il polinomio interpolatore su $n+1$ nodi distinti in forma di Lagrange.

9 Convergenza uniforme dell'interpolazione lineare a tratti

ti

Risponde alla domanda omonima.

(a tratti significa che:

"Dato un intervallo $[a, b]$ e sia $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Una funzione f si dice polinomiale a tratti se la sua restrizione ad ogni intervallo

$[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$ è un polinomio".

Lineare significa "trovare gli zeri di una funzione" (nodi rispetto alla funzione che interpola)

Teorema

Convergenza uniforme dell'interpolazione polinomiale a tratti.

Siano $f \in C^{s+1}[a, b]$, $s \geq 0$ e $\{x_i\} \subset [a, b]$ $n+1$ nodi distinti con n multiplo di s .

Allora

$$\exists k_s > 0 : \text{dist}(f, \prod_s^c) \leq k_s \cdot h^{s+1}, \quad h = \max \Delta x_i$$

Dimostrazione per $s = 1$.

dist = distanza

Si ha che:

$$\begin{aligned} \text{dist}(f, \prod_1^c) &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \prod_1^c(x)| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \prod_1^c(x)| \quad (\text{massimo dei max su tutti gli intervallini}) \end{aligned}$$

Ricordiamo la stima dell'errore di interpolazione polinomiale a grado s :

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - \prod_s(x)| \leq \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(s+1)}(x)| \cdot \frac{h^{s+1}}{4(s+1)} \quad \text{con } h = \frac{\beta - \alpha}{s}$$

Applichiamo al nostro caso: $s = 1$, $[\alpha, \beta] = [x_{i-1}, x_i]$

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - \prod_{1,i}(x)| \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)| \cdot \frac{h^2}{8} = M_{2,i} \frac{h^2}{8}$$

con $M_2 = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$ e $h = \Delta x_i$.

Da cui:

$$\text{dist}(f, \prod_1^c) \leq \frac{M_2}{8} h^2$$

con $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

10 Stima delle equazioni normali per l'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati

Risponde alla domanda omonima.

Dati N punti $\{(x_i, y_i)\} : y_i = f(x_i), 1 \leq i \leq N$ e $m < N$, il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$

minimizza $\phi(a) = \sum_{i=1}^N (y_i - \sum_{j=0}^m a_j \cdot x_i^j)^2 \iff$ risolve il sistema $V^t V a = V^t y$

Dimostrazione

Osserviamo le dimensioni degli elementi considerati

$$V \in \mathbb{R}^{N \times (m+1)}, \quad V^t \in \mathbb{R}^{(m+1) \times N}, \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad a \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Quindi per $m = 1$ non importa quanti dati N ci siano, il sistema sarà sempre 2×2 poiché ci saranno 2 coefficienti.

Dire che $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ è di minimo (assoluto) per $\phi(a)$ significa:

$$\phi(a+b) \geq \phi(a) \quad \forall b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= (y - V(a+b), y - V(a+b)) = (y - Va - Vb, y - Va - Vb) = \\ &= (y - Va, y - Va) + (y - Va, -Vb) + (-Vb, y - Va) + (-Vb, -Vb) = \\ &= \phi(a) + 2(Va - y, Vb) + (Vb, Vb) = \phi(a) + 2(V^t(Va - y), b) + (Vb, Vb) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le seguenti proprietà del prodotto scalare in \mathbb{R}^m (per chiarezza indicato con $(u, v)_n$; ricordiamo che $(u, v)_n = u^t v$ interpretando i vettori come vettori-colonna):

$$1. (u, v)_n = (v, u)_n \quad u, v, w \in \mathbb{R}^n$$

Le proprietà sono:
commutativa, omogeneità, distributiva, trasposta.

$$2. (\alpha u, v)_n = \alpha(u, v)_n \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

In generale, non vale la proprietà associativa.

$$3. (u + v, w)_n = (u, w)_n + (v, w)_n$$

$$4. (u, Az)_n = (A^t u, z)_k \quad u \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^k, A \in \mathbb{R}^{n \times k} \quad (\text{la 4 serve per scrivere } V^t(Va - y), b)$$

Dimostriamo “ \Leftarrow ”:

Se $V^t V a = V^t y$ allora:

$$V^t V a - V^t y = 0 \iff V^t (Va - y) = 0$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= \phi(a) + (Vb, Vb) \geq \phi(a) \quad b \in \mathbb{R}^{m+1} \\ &\quad \parallel \\ &\quad \sum_{i=1}^N (Vb)_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dimostriamo “ \Rightarrow ”:

Assumiamo che

$$\phi(a+b) \geq \phi(a) \quad \forall b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Allora:

$$\phi(a+b) = \phi(a) + 2(V^t(Va - y), b) + (Vb, Vb) \geq \phi(a) \quad \forall b$$

Cioè:

$$2(V^t(Va - y), b) + (Vb, Vb) \geq 0 \quad \forall b$$

Prendiamo $b = \varepsilon v$, con v versore (cioè vettore di lunghezza 1, $(v, v) = 1$). Si ha:

$$\begin{aligned} & 2(V^t(Va - y), \varepsilon v) + (V(\varepsilon v), V(\varepsilon v)) \\ &= 2\varepsilon(V^t(Va - y), v) + \varepsilon^2(Vv, Vv) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \text{ e } \forall v \end{aligned}$$

Versore = Vettore di modulo 1
(quindi, epsilon v * 1)

Dividendo per $\varepsilon > 0$:

$$2(V^t(Va - y), v) + \varepsilon(Vv, Vv) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \text{ e } \forall v$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha:

$$(V^t(Va - y), v) \geq 0 \quad \forall v$$

Ma se vale \forall versore, possiamo prendere $-v$:

$$(V^t(Va - y), -v) = -(V^t(Va - y), v) \geq 0 \quad \forall v$$

\Downarrow

$$(V^t(Va - y), v) \leq 0 \quad \forall v$$

Ma abbiamo che

$$0 \leq (V^t(Va - y), v) \leq 0 \iff (V^t(Va - y), v) = 0 \quad \forall v$$

L'unico vettore ortogonale a tutti i vettori è il vettore nullo. Quindi

$$V^t(Va - y) = 0 \iff V^tVa = V^ty$$

(quindi "a" è soluzione del sistema delle equazioni normali).

Risponde alle domande:

"Stima dell'errore relativo del sistema lineare in caso di perturbazione del vettore termine noto"

Altrimenti, normalmente, chiede tutta la dimostrazione, chiesta anche col nome:

"Condizionamento di matrici e sistemi lineari", che comunque intende tutta la dim.

11 Stime di condizionamento per un sistema lineare

In matematica, un sistema di equazioni lineari, anche detto sistema lineare, è un sistema composto da più equazioni lineari che devono essere verificate tutte contemporaneamente. Una soluzione del sistema è un vettore i cui elementi sono le soluzioni delle equazioni che compongono il sistema, ovvero tali che se sostituiti alle incognite rendono le equazioni delle identità.

(i) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ (1° disuguaglianza fondamentale)

(ii) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (2° disuguaglianza fondamentale)

Caso 1 perturbazione termine noto

Sia

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare (matrice quadrata ed invertibile, quindi non singolare, quindi che ammette una sola soluzione)
- $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $Ax = b$ con $b \neq 0$
- $\tilde{x} = x + \delta x$ soluzione del sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$ con $\tilde{b} = b + \delta b$

Fissata una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in \mathbb{R}^n , vale la seguente stima dell'errore relativo su x

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{K(A)}_{k(A) \text{ e non } K(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad \text{con} \quad k(A) \underset{\text{indice di condiz.}}{=} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Dimostrazione

Osserviamo che $x = A^{-1}b \neq 0$ quindi ha senso studiare l'errore relativo (dividere per $\|x\|$).

Si ha

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \delta x \\ \tilde{x} = A^{-1}\tilde{b} = A^{-1}(b + \delta b) = \underbrace{A^{-1}b}_{=x} + A^{-1}\delta b \end{cases} \Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \underset{1^\circ \text{ dis.fond.}}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

Per stimare $\frac{1}{\|x\|}$ da sopra, cioè da sotto $\|x\|$.

$$\|b\| = \|Ax\| \underset{1^\circ \text{ dis.fond.}}{\leq} \|A\| \cdot \|x\|$$

da cui

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

e

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

perciò

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Caso 2 perturbazione matrice

Nota --> $\sim x$ nel rapporto qui del caso (2) non è un errore, anzi, è corretto. Si guardino gli Appunti di Calcolo in LaTeX su Mega per averne conferma.

Siano fatte le stesse ipotesi del caso 1, ma con $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\tilde{A} = A + \delta A$.

Vale la stima dell' "errore relativo" su x

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = (A + \delta A)(x + \delta x) \\ \quad = Ax + A\delta x + \delta A\tilde{x} \\ \quad = b + A\delta x + \delta A\tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} = b \end{cases} \Rightarrow A\delta x + \delta A\tilde{x} = 0 \iff \delta x = -A^{-1}(\delta A\tilde{x})$$

Quindi

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|$$

e perciò

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Caso 3 perturbazione termine noto e matrice (Negli appunti, questo caso (3) appare con il nome "Caso generale perturbazioni") -> Basta mettere questo pezzo che si vede qua sotto, la dim. del perché si ottiene questo è facoltativa.

Stesse ipotesi degli altri casi ma con $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

Si ha che se $k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < 1$ allora:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Dimostrazioni chieste poco e fuori dal syllabus:
da vedere lo stesso.
Consigliate: Rapp. incrementale simmetrico e trapezi

Ogni matrice simmetrica semidefinita positiva ha tutti gli autovalori non negativi.
Per trovare gli autovalori, si deve costruire la matrice identità, trovare il determinante, costruire il polinomio caratteristico e i suoi valori di λ (scalari) * i vettori (non nulli) a cui sono moltiplicati, danno gli autovalori (vale per le matrici quadrate di ordine n).

Sistema delle equazioni normali per approssimazione lineare

Questa è anche nota come retta dei minimi quadrati

Sapendo che dati N punti $\{(x_i, y_i)\}$, $y_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq N$ e $m < N$, se il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimizza $\phi(a) = \sum_{i=1}^N (y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j)^2$ allora risolve il sistema $V^T V a = V^T y$, si possono usare le proprietà di $V^T V$ per trovare il sistema relativo alla retta dei minimi quadrati. $V^T V$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Inoltre $(Vv, Vv) = 0 \iff Vv = 0$ e $(Vv, Vv) = (V^T V v, v)$ quindi $v = 0$ se V ha rango max cioè se ha almeno $m+1$ punti distinti tra i nodi di campionamento. Si ricava quindi una matrice V t.c.

La sottomatrice $V \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$ è matrice di Vandermonde per l'interpolazione di grado $\leq m$ su $m+1$ nodi distinti, quindi è non singolare.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m+1} & x_{m+1}^2 & \dots & x_{m+1}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^m \end{pmatrix}$$

Questa evidenzia che, quindi, il rango della sottomatrice è $m+1$ e che le intere colonne $m+1$ di V sono linearmente indipendenti come vettori di \mathbb{R}^N . Quindi si possono calcolare gli elementi della matrice $V^T V$ e del vettore noto $V^T y$, con $m=1$

$$V^T V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

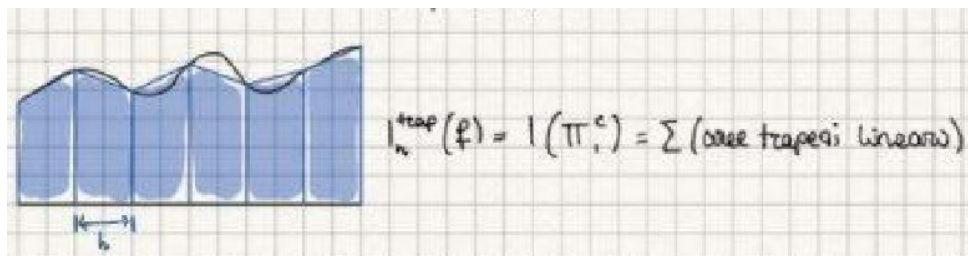
$$V^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

quindi il sistema è: $\begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$

Errore formula trapezi

La formula dei trapezi utilizza l'interpolazione lineare a tratti, imponendo $s = 1$ l'integrale viene approssimato alla somma delle aree dei trapezi lineari. L' i -esimo trapezio ha altezza $h = \frac{b-a}{n}$ e basi $f(x_{n-1})$ e $f(x_n)$ con $1 \leq i \leq n$, avendo quindi l'area $A = \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))$ quindi:

$$h/2(f(x_0) + f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(x_i) \text{ con } w_i = \frac{h}{2} \text{ se } i = 0, i = n, w_i = h \text{ se } 1 \leq i \leq n-1$$



Per ricavare una stima dell'errore possiamo usare la stima $|I(f) - I_n(f)| = |I(f) - I(\pi_n^c)| \leq |I(f - \pi_n^c)| \leq (b-a) \text{dist}(f, \pi_n^c)$. Se $\text{dist} \rightarrow 0$ allora ci sarà convergenza, altrimenti potrebbero presentarsi problemi di divergenza. Per quanto riguarda le formule di quadratura composte ottenute come $I_n(f) = I(\pi_n^c)$, con n multiplo di s : $|I(f) - I_n(f)| \leq (b-a) \text{dist}(f, \pi_n^c) \leq (b-a) K_s \cdot h^{s+1}$ se $f \in C^{s+1}[a, b]$ con $h = \max \Delta x_i$. Quindi per qualsiasi distribuzione dei nodi per cui $h \rightarrow 0$ se $f \in C^{s+1}[a, b]$ le formule sono sempre convergenti con un errore proporzionale a h^{s+1} , ma $s=1$ per i trapezi quindi per $f \in C^2$ sarà convergente con un errore $O(h^2)$.

Domande presenti nel Moodle 21-22 a cui ho risposto precisamente:
 Questa e le prossime 2 non sono mai state chieste.
 Presenti per sicurezza.

Costo computazionale del metodo di eliminazione di Gauss

Il costo computazionale del meg è dato dall'analisi tra ciclo interno, composto da n moltiplicazioni ed n somme, scritto come segue:

$$\begin{aligned} c_n^{meg} &\sim \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n 2n \\ &= 2n \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\ &\stackrel{j=n-i}{=} 2n \sum_{j=1}^{n-1} j \\ &= 2n \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^3 - n^2 \sim n^3, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Vedendo però che le operazioni vettoriali non ha senso farle sui vettori riga, le facciamo solo sul segmento di vettori con indici da $i+1$ ad n , verificando che otteniamo:

$$\begin{aligned} c_n^{meg} &\sim \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n 2(n-i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 \\ &\stackrel{j=n-i}{=} 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim \frac{2}{3} n^3 \end{aligned}$$

Ottenendo infine:

$$\frac{(n-1)^3}{3} < \sum_{j=1}^{n-1} j^2 < \frac{n^3}{3} - 1$$

Fattorizzazione QR per la soluzione di sistemi lineari sovradeterminati

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ tale che $\text{rango}(A) = n$
 Allora $\exists Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ortogonale (cioè $Q^t Q = I$) e $\exists R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangolare superiore con $\det(R) \neq 0$ tali che

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = QR = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ q_{m1} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Q^t è ortogonale, cioè $Q^t Q = I$, in particolare Q^t ha per righe le colonne di Q , quindi:

Il prodotto riga- i x colonna- j = prodotto scalare = delta di Kronecker

Ciò implica che le colonne di Q , quindi sono vettori *ortonormali* di \mathbb{R}^m .

Siccome R è invertibile $\rightarrow QRR^{-1} = Q = AR^{-1}$ e l'inversa di una matrice triangolare è triangolare dello stesso tipo.

Il prodotto di A per le colonne di R^{-1} permette di ottenere come combinazione lineare delle prime j colonne di A e, grazie a Q ortogonale, le colonne si ortonormalizzano \rightarrow Algoritmo di Gram-Schmidt.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rank}(A) = n$. Fattorizzando $A = QR$, si ha che

$$A^t A = (QR)^t QR = R^t Q^t QR = R^t I R = R^t R$$

e

$$A^t b = R^t Q^t b$$

quindi il sistema $A^t A x = A^t b$ diventa

$$R^t R x = R^t Q^t b$$

ma essendo R (e quindi R^t) invertibile

$$(R^t)^{-1} R^t R x = R x = (R^t)^{-1} R^t Q^t b = Q^t b$$

cioè il sistema $A^t A x = A^t b$ equivale al sistema triang. sup.

$$R x = d = Q^t b$$

che si può facilmente risolvere con la sostituzione all'indietro.

Computazionalmente parlando, è leggermente migliore LU; tuttavia, dal punto di vista della stabilità, QR è decisamente migliore.

La domanda del prof è molto vaga: io ho messo l'ordine di stabilità e l'errore, oltre alla definizione.

Se si riesce a mettere anche la convergenza, meglio (la cui formula si usa sopra nei trapezi ed è una riga).

Formule di quadratura composte

Per $f_n(x) = \prod_s^c(x)$ cioè, la funzione polinomiale composta a tratti di grado locale s (con n multiplo di s ,

si ottengono le *formule composte*. Nel caso delle formule, i nodi $n = k \cdot s$ sono a pacchetti di $s+1$ con nodo di raccordo. Ciascun valore di interpolazione locale y_i compare una volta tranne per i nodi di raccordo (dove compare due volte e i 2 pesi vanno sommati), quindi ottenendo:

$$I_n(f) = I(\prod_s^c) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot y_i \quad \text{sommando a coppie i nodi:} \quad w_i = w_{i,j} + w_{i,(j+1)}$$

Per le formule di quadratura composte ci riconduciamo a due casi, facendo riferimento nel caso di calcolo di nodi equispaziati:

- Per $s = 1$ alla formula dei trapezi, in cui l'integrale viene approssimato alla somma delle aree dei trapezi lineari corrispondenti all'interpolazione lineare a tratti.

$$\begin{aligned} I_n^{\text{trap}}(f) &= I(\prod_1^c) \\ &= \int_a^b \prod_1^c(x) dx \\ &= \sum (\text{aree trapezi}) \\ &= \underbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_1))}_{\text{area trapezio 1}} + \underbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_2))}_{\text{area trapezio 2}} + \dots + \\ &\quad + \underbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}))}_{\text{area trapezio (n-1)-esimo}} + \underbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(x_{n-1}) + f(x_n))}_{\text{area trapezio n-esimo}} \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} h \cdot f(x_i) \end{aligned} \quad I_n(f) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = 0, n \\ h, & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

- Per $s = 2$, integrando la funzione quadratica a tratti, si ottiene la formula delle parabole:

$$I_n^{parab}(f) = I(\Pi_2^c) = \sum (aree \text{ trapezi parabolici}) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i =$$

$$\begin{cases} h/3, & i = 0, n \text{ pari} \\ 4h/3, & i \text{ dispari} \\ 2h/3, & i \text{ pari } 2 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Pi_2(x) dx = \frac{h}{3} \cdot f(\alpha) + \frac{4}{3} \cdot h \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \frac{h}{3} \cdot f(\beta)$$

Da aggiungere che, per le formule composte, ottenute come $I_n(f) = I(\Pi_s^c)$ con n multiplo di s , abbiamo:

$$|I(f) - I_n(f)| \leq (b-a) \cdot \text{dist}(f, \Pi_s^c) \leq (b-a) k_s \cdot h^{s+1} \quad \text{se } f \in C^{s+1}[a, b] \quad \text{con } h = \max \Delta x_i.$$

Essendo le formule sempre convergenti per qualsiasi distribuzione di nodi per cui $h \rightarrow 0$, avremo che:

- la formula dei trapezi, per $s=1$, presenta un errore $O(h^2)$
- la formula delle parabole, per $s=2$, presenta un errore $O(h^3)$ (può anche valere, nel caso di nodi equispaziati per simmetria, $O(h^4)$)

Questa è la più chiesta tra quelle fuori dal syllabus; completa e risponde a tutti i punti.

Rapporto incrementale simmetrico

Assumiamo ora che $f \in C^3(I_r)$ e scriviamo la formula di Taylor “da destra” e “da sinistra” (centrandola sempre in x , con passo $0 < h \leq r$).

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(\eta) \end{aligned}$$

dove $\xi \in (x, x+h)$ e $\eta \in (x-h, x)$ da cui si ottiene, sottraendo membro a membro

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= 2hf'(x) + O(h^3) \\ \text{e anche} \\ \delta(h) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2) \end{aligned}$$

(sottraendo si elidono i termini di grado pari in h), con

$$\begin{aligned} |f'(x) - \delta(h)| &= \frac{1}{12} \cdot |f'''(\xi) + f'''(\eta)| \cdot h^2 \\ &\leq \frac{1}{12} (|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|) \cdot h^2 \\ &\leq d \cdot h^2 \end{aligned}$$

dove $d = \frac{1}{6} \max_{t \in I_r} |f'''(t)|$.

Questo mostra che l'errore è $O(h^2)$ per $f \in C^3(I_r)$.

Dobbiamo, però, occuparci della risposta dell'algoritmo agli errori su f , assumendo $|\tilde{f}(t) - f(t)| \leq \varepsilon$

Dobbiamo quindi stimare $|\delta(h) - \tilde{\delta}(h)|$, con

$$\tilde{\delta}(h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)}{2h}$$

(rapporto incrementale simmetrico “perturbato”), vista la stima

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}(h)| &= |f'(x) - \delta(h) + \delta(h) - \tilde{\delta}(h)| \\ &\leq \underbrace{|f'(x) - \delta(h)|}_{\text{convergenza}} + \underbrace{|\delta(h) - \tilde{\delta}(h)|}_{\text{stabilità}} \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} |\delta(h) - \tilde{\delta}(h)| &= \frac{1}{2h} |f(x+h) - f(x-h) - \tilde{f}(x+h) + \tilde{f}(x-h)| \\ &= \frac{1}{2h} |(f(x+h) - \tilde{f}(x+h)) + (\tilde{f}(x-h) - f(x-h))| \\ &\leq \frac{1}{2h} (|f(x+h) - \tilde{f}(x+h)| + |\tilde{f}(x-h) - f(x-h)|) \\ &\leq \frac{1}{2h} (\varepsilon + \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h} \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$|f'(x) - \tilde{\delta}(h)| \leq dh^2 + \frac{\varepsilon}{h} = E(h)$$

La stima è simile a quella del rapporto incrementale standard, ma l'esponente di h è 2, pertanto per rendere piccolo dh^2 basta avere un passo più grande rispetto a quello che serve per ch .

Come prima, cerchiamo di minimizzare:

$$E(h) = dh^2 + \frac{\varepsilon}{h} \quad E'(h) = 2dh - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0 \Rightarrow h^3 = \frac{\varepsilon}{2d}$$

$$\Rightarrow h^* = h^*(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2d}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Con $E(h)$ convessa ed h^* di minimo. D'altra parte:

cioè:

$$E(h^*) = d(h^*)^2 + \frac{\varepsilon}{h^*} = d^{1/3} \cdot (2^{-2/3} + 2^{1/3}) \cdot \varepsilon^{2/3} \quad h^* = O(\varepsilon^{1/3}) \quad \text{e} \quad E(h^*) = O(\varepsilon^{2/3})$$

Rispetto al rapporto incrementale standard, per ε piccolo, l'errore minimale $E_+(h^*)$ è $\varepsilon^{2/3} \ll \varepsilon^{1/2}$.

Chiesta una volta: molto simile al simmetrico, si ricordino definizioni e logica della derivazione.

Derivazione numerica rapporto incrementale "classico" / Rapporto incrementale standard

Consideriamo il calcolo di f' in un intorno di valori campionati $I_r = I_r(x) = [x - r, x + r]$ assumendo $f \in C^2(I_r)$ e usando il rapporto incrementale destro:

$$\delta_+(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad 0 < h \leq r \quad \text{Dalla definizione di derivabilità in } x, \text{ è convergente:}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta_+(h) = f'(x)$$

La stima dell'errore, dunque, è data usando la formula di Taylor centrata in x e con incremento h :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(z) \quad \text{dove } z \in (x, x+h). \text{ Allora}$$

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(z)$$

cioè

$$\delta_+(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h)$$

nel senso che $\exists c > 0$ tale che

$$|\delta_+(h) - f'(x)| \leq ch, \quad c = \frac{1}{2} \max_{t \in I_r} |f''(t)| \geq \frac{|f''(z)|}{2}$$

La convergenza del rapporto incrementale $\delta_+(h)$ è lenta ma, per presenza di errori, vogliamo solo saper stimare i valori approssimati $\tilde{f}(t)$ come segue:

$$|f(t) - \tilde{f}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in I_r$$

Chiamiamo allora $\tilde{\delta}_+(h)$ il rapporto incrementale "perturbato"

$$\tilde{\delta}_+(h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(h)| &= |f'(x) - \delta_+(h) + \delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)| \\ &\leq \underbrace{|f'(x) - \delta_+(h)|}_{\text{convergenza}} + \underbrace{|\delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)|}_{\text{stabilità}} \quad \leftarrow \text{diseg. triangolare} \end{aligned}$$

Per l'analisi della stabilità:

$$\begin{aligned} |\delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\ &= \left| \frac{f(x+h) - \tilde{f}(x+h)}{h} + \frac{\tilde{f}(x) - f(x)}{h} \right| \\ &\leq \frac{1}{h} |f(x+h) - \tilde{f}(x+h)| + \frac{1}{h} |\tilde{f}(x) - f(x)| \quad \leftarrow \text{diseg. triangolare} \\ &\leq \frac{1}{h} \varepsilon + \frac{1}{h} \varepsilon = \frac{2\varepsilon}{h} \end{aligned}$$

Da cui:-

$$|f'(x) - \tilde{\delta}_+(h)| \leq ch + \frac{2\varepsilon}{h} = E_+(h)$$

avendo quindi che l'errore è $O(\varepsilon^{1/2})$.

Si conclude che si hanno due esigenze contrastanti:

- Serve h piccolo per la convergenza teorica
- Per ε fissato, prendere $h \rightarrow 0$ *amplifica l'errore su f*

Questa, dunque, l'instabilità che si eredita dalla derivazione.